Задача о наименьшем мультиразрезе (MULTIWAY k-CUT Problem)

Постановка задачи

Пусть задан взвешенный неориентированный граф $(G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}_+)$, в котором отмечены вершины $s_1, \ldots, s_k$ (далее будем обозначать их терминалами или терминальными). Требуется найти наименьший мультиразрез (minimum multicut), т. е. множество рёбер E' наименьшего суммарного веса, такое что отмеченные вершины находятся в разных компонентах $(V, E \setminus E')$

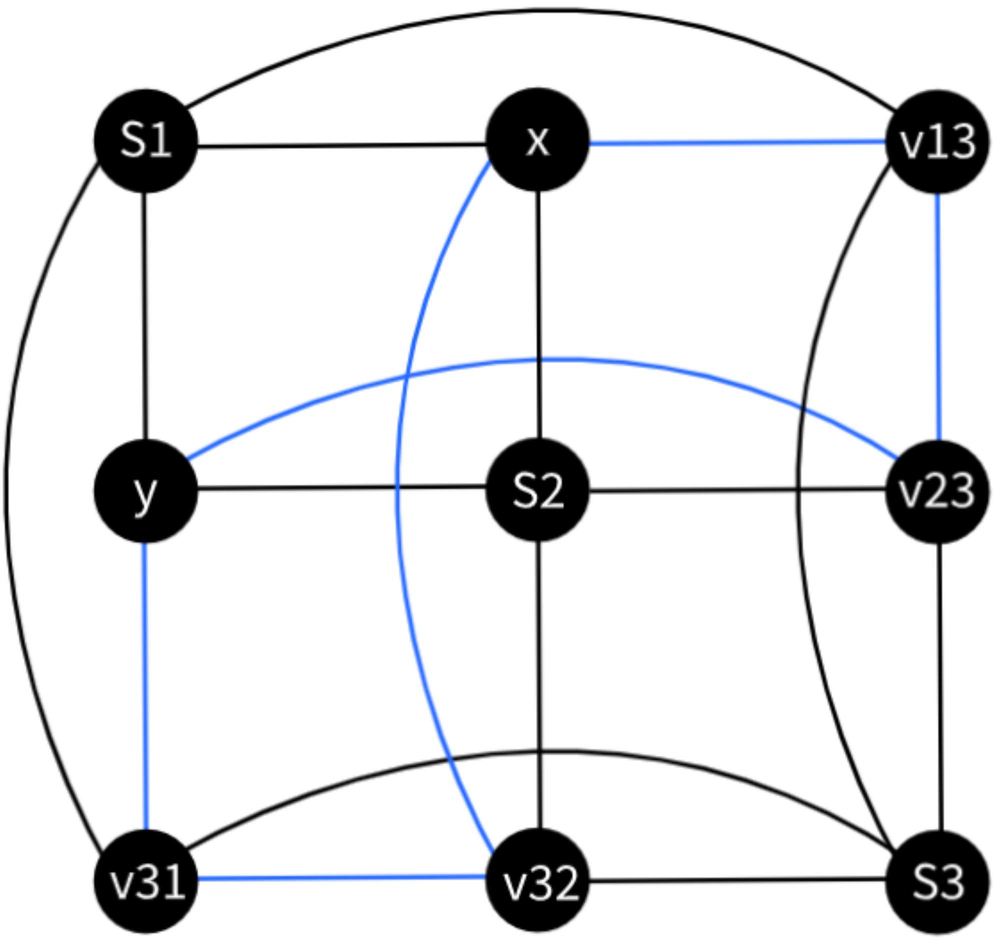
Заметим, что при $k = 2$, задача решается за полиномиальное время алгоритмами поиска максимального потока.

NP-трудность

Считаем, что нам известна NP-полнота задачи **MAX CUT**. Дан граф $G = (V, E)$, требуется найти $V_1, V_2 |\ V_1 \sqcup V_2 = V$, такие, что количество ребер между V_1, V_2 максимально.

Полиномиально сведем задачу **MAX CUT** к задаче **MULTIWAY 3-CUT**.

Рассмотрим вспомогательный гаджет C.



Вершины s_1, s_2, s_3 являются терминальными. Ребра черного цвета имеют вес 4, ребра синего цвета имеют вес 1.

Обозначим за c^* - вес оптимального разреза, $c(i, j)$ - вес отимального разреза, в котором x соединен с s_i, а y с s_j.

Лемма 1.

1) $c^* = c(1, 2) = c(2, 1) = 27$

2) $\forall \{i, j\} \neq \{1, 2\} \;\; c(i, j) \geq c^* + 1$

3) $c(1, 1) = c(2, 2) = 28$

Доказательство

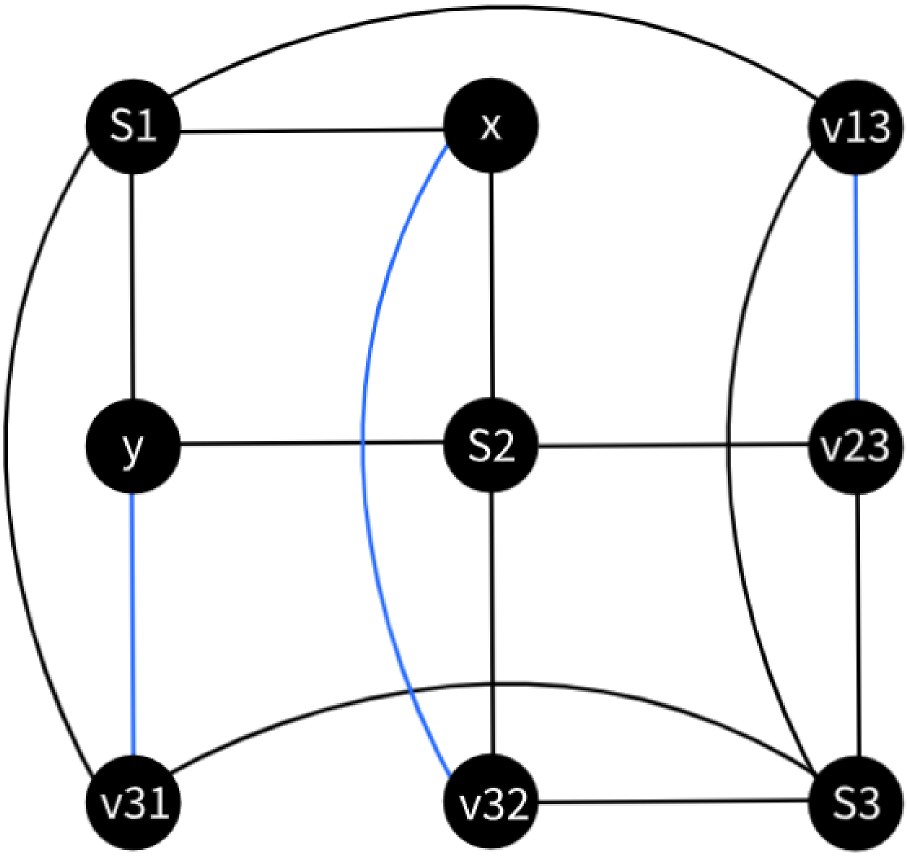
1) Докажем что $c^* = 27$.

Предположим, что существует разрез веса 26 или меньше. Рассмотрим вершины кроме терминальных, каждая из них соединена с двумя различными терминальными ребрами веса 4, значит любой разрез содержит 6 ребер веса 4, каждое из этих ребер соединено со своей нетерминальной вершиной. Так как вес разреза 26 или меньше остальные ребра в нем имеют вес 1 Теперь рассмотрм ребра веса 1, они образуют цикл на нетерминальных вершинах. Цикл устроен таким образом, что не существует терминала, который соединен с какими то 3мя подряд идущими вершинами. Если мы уберем из этого цикла не более 2х ребер, то он распадется на не более чем две компонеты, в одной из которых хотя бы 3 вершины. Рассмотрим компоненту цикла, содержащую три подряд идущие вершины. Каждая из этих трех вершин соединена с каким то терминалом, причем это не может быть один и тот же терминал. Значит это какие то два различных терминала, а значит при таком разрезе какие то два терминала все же соединены. Пришли к противоречию.

С другой стороны, если убрать все ребра между колонками или рядами, то вес такого разреза будет 27. Причем разрез, убирающий ребра между рядами (горизонтальный), оставляет x соединенным с s_1, y с s_2, а разрез, убирающий ребра между колонками (вертикальный), оставляет x соединенным с s_2, y с s_1.

2) Предположим что существует разрез, отличающийся от горизотального или вертикального, веса 27. Из доказательства пункта 1 мы знаем, что он состоит из 6 ребер веса 4, и 3х ребер веса 1. Рассмотрим пересечение этого разреза с циклом из единичных ребер. Заметим, что есть всего два способа выбрать из шести ребер три, так чтобы в цикле не осталось три подряд идущие вершины: удалить ребра $(y, v_{31}), (x, v_{32}), (v_{13}, v_{23})$ или $(y, v_{23}), (x, v_{13}), (v_{31}, v_{32})$. Как мы выяснили в предыдущем пункте, если удалим только 6 ребер веса 4 и оставим в цикле 3 подряд идущие в цикле вершины, то какие то два терминала окажутся соединены. Докажем, что если мы удалили 6 единичных ребер и 3 ребра из цикла одним из двух рассотренных выше способов, то такой разрез обязательно будет вертикальным или горизонтальным.

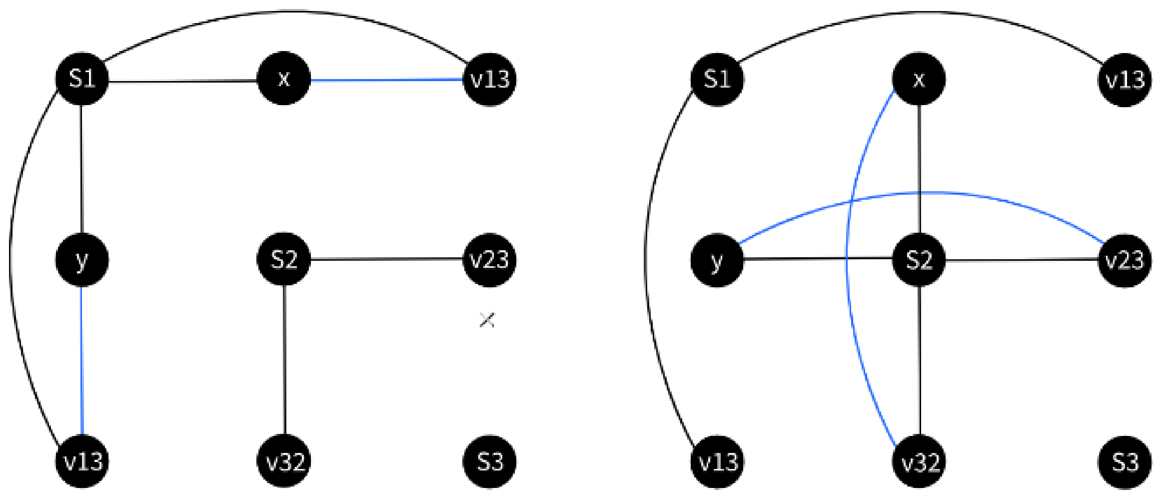
Рассмотрим случай, если мы удалили $(y, v_{23}), (x, v_{13}), (v_{31}, v_{32})$, другой случай рассматривается аналогично.



Рассмотрим вершину v_{23}, мы обязаны удалить ребро (s_2, v_{23}), так как, если мы удалим ребро $(s_3, v23)$, s_2 и s_3 остануться связаны. Далее рассмотрим вершину v_{13}, мы обязаны удалить ребро (s_1, v_{13}), s_1 и s_3 остануться связаны. Далее рассмотрим вершину v_{32}, мы обязаны удалить ребро (s_3, v_{32}), иначе, какое ребро мы бы не удалили у x s_3 останентся связаной с s_1 или s_2. Далее рассмотрим вершину x, мы обязаны удалить ребро (s_1, x), иначе s_1 останентся связаной с s_2. Далее рассмотрим вершину v_{31}, мы обязаны удалить ребро (s_3, v_{31}), s_1 и s_3 остануться связаны. Осталось удалить ребро $(y, s2)$ и мы получили вертикальный разрез.

Итого мы доказали, что существует всего два разреза стоимости 27 это горизонтальный и вертикальный. Отсюда следует пункт 2.

3) Примеры разрезов веса 28.



□

Теперь опишем сведение. Построим граф $G(V, E)$ по графу $H(V^*, E^*)$, взяв все вершины графа H. Добавим в G вершины t_1, t_2, t_3. Вместо каждого ребра (u, v) графа H, добавим гаджет C где, на месте вершин x, y будут u, v, на месте терминалов s_1, s_2, s_3, терминалы t_1, t_2, t_3. Итого получили граф $G(V, E)$, где $|V| = |V^*| + 4|E^*| + 3$, $|E| = 18|E^*|$.

Введем обозначения:

- ***разрез*** - множетсво ребер графа H, концы которых лежат в разных подмножетсвах $V_1, V_2|\ V_1 \sqcup V_2 = V^*$

Вес разреза - количество ребер в нем.

- ***3-разрез*** - множетсво ребер $E' \subset E$ такое, что не существует пути между t_1, t_2, t_3 в графе $G(V, E \setminus E')$

Вес 3-разреза - сумма весов ребер в нем.

Задача MAX CUT состоит в максимизации веса разреза, задача MULTIWAY 3-CUT в минимизации веса 3-разреза.

Лемма 2.

В графе H есть разрез веса K или больше $\Leftrightarrow$ В графе G есть 3-разрез веса $28|E^*| - K$ или меньше.

Доказательство

$\Rightarrow$ Предположим существует разрез веса $K' \geq K$, которому соответствует разбиение $V_1, V_2|\ V_1 \sqcup V_2 = V^*$, тогда проведем разрез в каждом гаджете с условиями, что вершины, пробразы которых лежат в V_1, останутся соединены с s_1, , а вершины, пробразы которых лежат в V_2, останутся соединены с s_2, . По лемме 1, если в каком то гаджете мы наложили условия что x, y должны остаться соединенными с одним и тем же терминалом, то вес разреза в таком гаджете будет 28, если же x, y должны остаться соединенными с разными терминалом, то вес будет 27. Итого получим 3-разрез веса $28(|E^*| - K') + 27K' = 28|E^*| - K' \leq 28|E^*| - K$, то что и хотели.

$\Leftarrow$ Предположим сущетствует 3-разрез веса $L' \leq 28|E^*| - K$, обозначим за U_1, U_2, U_3, множетсва вершин, которые остались соединены с t_1, t_2, t_3, после удаления ребер 3-разреза. Построим разбиение графа H, к V_1 отнесем вершины образы которых лежат в U_1, к V_2 отнесем вершины образы которых лежат в U_2 или U_3. Посмотрим на то, как 3-разрез разрезал наши гаджеты. Так как его вес менее $28|E^*| - K$, то существует хотя бы K гаджетов, таких, что $v \in U_1, u \in U_2$, или наоборот. Иначе вес 3-разреза был бы больше по Лемме 1. А значит в разрез в графе H попадет хотя бы K ребер.

□

Из данной леммы следует, что если мы найдем 3-разрез минимального веса в графе G, то сможем по нему восстаносить разрез максимального веса в графе H. То есть сведение доказано.

Приближенный алгоритм

Вспомним, что мы умеем за полиномиальное время искать минимальный разрез между i-ым терминал вершиной и $k-1$ оставшимся, эта задача сводится к задаче поиска обычного минимального разреза между двумя вершинами, с помощью добавления .

Алгоритм:

1. Найдем k разрезов $E_1', \ldots, E_k', E_i'$ - разрез минимального веса, отделющий i-ый терминал от остальных.

2. Переупорядочим их в порядке возрастания веса.

3. Вернем $E' = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i'$

Теперь докажем, что $w(E') \leq 2(1 - \frac{1}{k})w(A)$, где A - оптимальный разрез.

$E_1', \ldots, E_k'$ - разрезы упорядоченные по возрастанию веса.

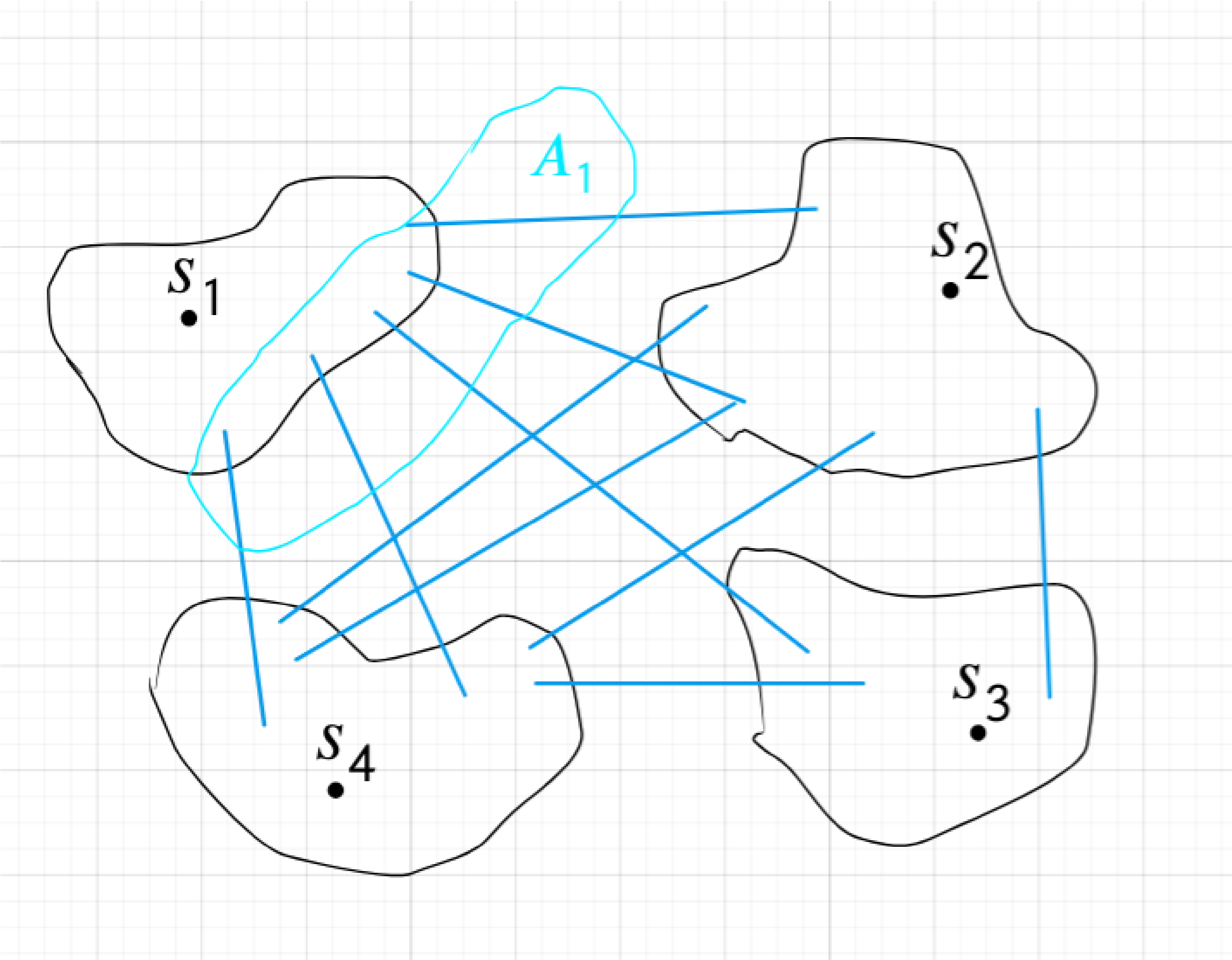
$\implies E_k' \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w(E_i')$

$\implies \sum_{i=1}^{k-1} w(E_i') \leq (1 - \frac{1}{k})\sum_{i=1}^{k} w(E_i')$

Введем обозначения:

- $A_i \subset A$ - множетсво ребер, какой-то конец которых достижим из i-ого терминала, после удаления ребер из A. Каждое ребро из A попадает ровно в 2 множетсва из семейства $\{A_i\}$.

На рисунке ниже синим отмечены ребра А.



Заметим, что $\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2w(A)$

Тогда $\forall i \;\; w(E_i') \leq w(A_i)$, так как и A_i и E_i' являются разрезами отделющий i-ый терминал от остальных, но E_i' - это разрез наименьшего веса.

$w(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i')$

$\leq \sum_{i=1}^{k-1} w(E_i')$

$\leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} w(E_i')$

$\leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2(1 - \frac{1}{k})w(A)$

$\square$