เมทริกซ์ (Matrix)

คุณสมบัติพื้นฐานของเมทริกซ์

- เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix)
  - นิยาม เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส $(Square Matrix)$

- นิยาม เมทริกซ์ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เรียกว่า เมทริกจัตุรัส (Square Matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2x2

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3x3

เมทริกซ์เฉียง $(Diagonal\ Matrix)$

- นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส มิติ n ซึ่ง $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$ แล้ว เราเรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์เฉียง (Diagonal Matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์เฉียงมิติ 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์เฉียงมิติ 3

เมทริกซ์เอกลักษณ์$(Identity\ Matrix)$

- นิยาม เมทริกซ์สเกลาร์ที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทะแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 เรียกว่า เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) นั้นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์แล้ว $a_{ij} = 1$ และ $a_{ij} = 0; i \neq j$ ใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การเท่ากันของเมทริกซ์

- นิยาม กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เมทริกซ์ A และ B จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$ นั้นคือ A และ B จะต้องมีมิติหรือขนาดเท่ากันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $A = B$ แต่ $A \neq C$

การบวกของเมทริกซ์

- นิยาม กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เรานิยามให้ $A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

จะได้ $A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & (-1)+2 & 7+(-8) \\ 3+0 & 1+1 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

- นิยาม กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ λ เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วผลคูณระหว่างสเกลาร์ λ และเมทริกซ์ A นิยามด้วย $\lambda A = [ca_{ij}]_{m\times n}$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \lambda = -2$$

จะได้ $\lambda A = \begin{bmatrix} (-2)(2) & (-2)(-1) & (-2)(7) \\ (-2)(3) & (-2)(1) & (-2)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -14 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์

- นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ แล้วผลคูณของเมทริกซ์ A และ B จะเป็นเมทริกซ์ $AB = [c_{ij}]$ ซึ่งมีขนาด $m \times p$ โดยที่

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b1j + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

โดยที่ $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,p$

- การคูณเมทริกซ์ (ตัวอย่าง)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ผลคูณของ A และ D เขียนแทนด้วย AD

$$\begin{aligned} AD &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(1)+(1)(2)+(-1)(3) & (2)(-1)+(1)(-1)+(-1)(0) & (2)(1)+(1)(2)+(-1)(3) \\ (3)(1)+(1)(-1)+(2)(3) & (3)(-1)+(1)(-1)+(2)(0) & (3)(1)+(1)(2)+(2)(3) \\ (0)(1)+(-2)(2)+(-3)(3) & (0)(-1)+(-2)(-1)+(-3)(0) & (0)(1)+((-2)(2)+(-3)(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$Transpose$ ของเมทริกซ์

- นิยาม ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ตัวสลับเปลี่ยน (Transpose) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^t โดยที่ $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$ ซึ่ง $b_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- นิยาม ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n อาจกล่าวว่าตัวผกผัน (Invertible) หรือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular Matrix) ถ้าสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส B ได้ ซึ่งทำให้ $AB = I_n = BA$ และเรียกเมทริกซ์ B ว่าเป็นตัวผกผันของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1}
- นั้นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐานมิติ n แล้ว จะได้ว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ และถ้า A ไม่มีตัวผกผันแล้ว จะเรียก A ว่าเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\text{จะได้ } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$\text{และ } BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ดังนั้น A มีตัวผกผัน ซึ่ง $A^{-1} = B$ และอาจกล่าวได้ว่า B มีตัวผกผัน ซึ่ง $B^{-1} = A$ เช่นกัน

ดีเทอร์มิแนนท์เมทริกซ์($The\ determinant\ of\ matrix$)

ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ คือ ค่าหรือตัวเลขที่ได้จากการปฏิบัติการภายในสมาชิกของ เมทริกซ์ซึ่งจะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น คือ จำนวนแถวและหลักเท่ากัน ดีเทอร์มิแนนท์ของ A จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $detA$ หรือ $|A|$

นิยาม ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นตัวเรียงสับเปลี่ยนจาก $\{1,2,\ldots,n\}$ แล้วดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$det(\mathrm{A}) = \sum_{allp} (-1)^{N(p)} a_{1p_1}, a_{2p_2}, \ldots, a_{np_n}$$

เราสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ ได้ดังนี้

1. $A = [a]_{1\times 1}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ซึ่งไม่มีการผกผัน $N(p) = 0$ จะได้ว่า $det(\mathrm{A}) = (-1)^0 a = a$

ตัวอย่างเช่น $A = [2] \Rightarrow det(\mathrm{A}) = (-1)^0(2); N(p) = 0$

2. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ มีตัวเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัว คือ $(1,2)$ และ $(2,1)$ และจำนวนการผกผัน $N(12) = 0$ และ $N(21) = 1$ ดังนั้น

$$det(\mathrm{A}) = (-1)^{N(12)}(a_{11})(a_{22}) + (-1)^{N(21)}(a_{12})(a_{21})$$

$$det(\mathrm{A}) = (-1)^0(a_{11})(a_{22}) + (-1)^1(a_{12})(a_{21})$$

$$det(\mathrm{A}) = (a_{11})(a_{22}) - (a_{12})(a_{21})$$

ตัวอย่าง

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $det(\mathrm{A}) = |A| = (1)(4) - (-3)(2) = 10$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $det(B) = |B| = (-1)(-1) - (2)(2) = -3$

3. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ มีตัวเรียงสับเปลี่ยน 6 ตัว คือ $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ และ $(3,2,1)$ และจำนวนการผกผัน $N(1,2,3) = 0$, $N(1,3,2) = 1$, $N(2,1,3) = 1$, $N(2,3,1) = 2$, $N(3,1,2) = 2$ และ $N(3,2,1) = 3$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} det(A) = |A| = {} & (-1)^{N(1,2,3)}(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (-1)^{N(1,3,2)}(a_{11})(a_{23})(a_{32}) + \\ & (-1)^{N(2,1,3)}(a_{12})(a_{21})(a_{33}) + (-1)^{N(2,3,1)}(a_{12})(a_{23})(a_{31}) + \\ & (-1)^{N(3,1,2)}(a_{13})(a_{21})(a_{32}) + (-1)^{N(3,2,1)}(a_{13})(a_{22})(a_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A) = |A| = {} & (-1)^{0}(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (-1)^{1}(a_{11})(a_{23})(a_{32}) + \\ & (-1)^{1}(a_{12})(a_{21})(a_{33}) + (-1)^{2}(a_{12})(a_{23})(a_{31}) + \\ & (-1)^{2}(a_{13})(a_{21})(a_{32}) + (-1)^{3}(a_{13})(a_{22})(a_{31}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ทำการหาดีเทอร์มิแนนท์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} det(A) = |A| = {} & (-1)^{0}(1)(1)(-1) + (-1)^{1}(1)(3)(-2) + \\ & (-1)^{1}(2)(2)(-1) + (-1)^{2}(2)(3)(-1) + \\ & (-1)^{2}(-1)(2)(-2) + (-1)^{3}(-1)(1)(-1) \end{aligned}$$

$$det(A) = |A| = (-1) + 6 + 4 + (-6) + (-4) + (-1) = \mathbf{6}$$