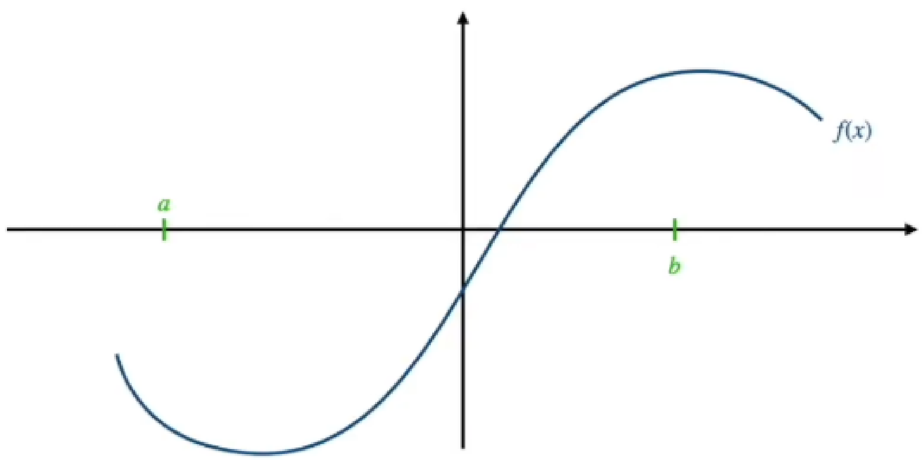
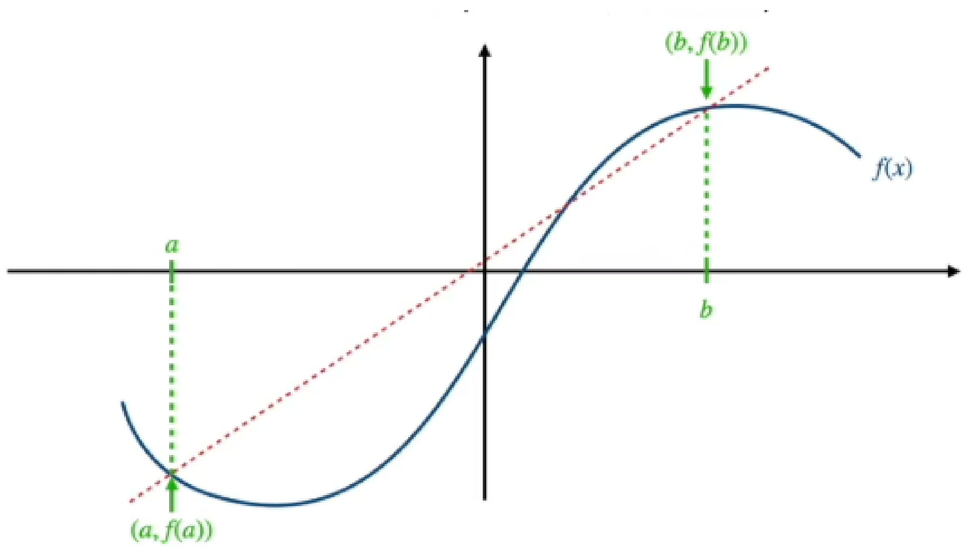
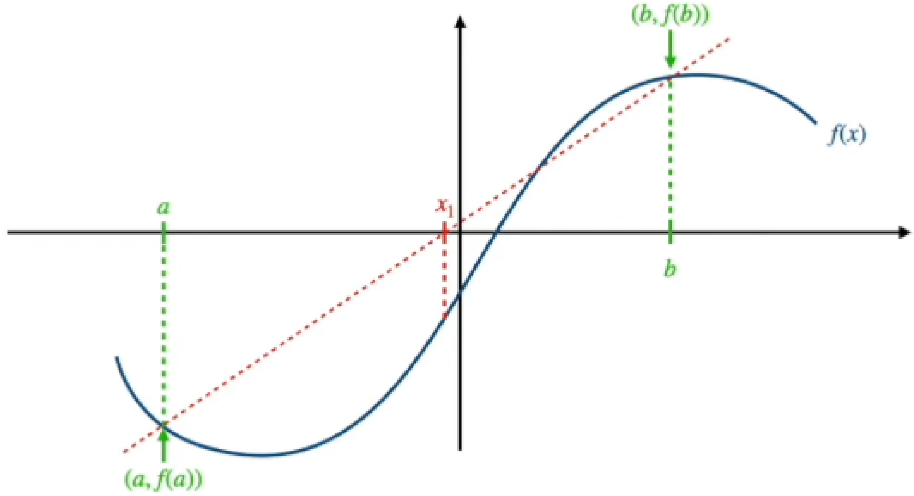
ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ (False Position Method)

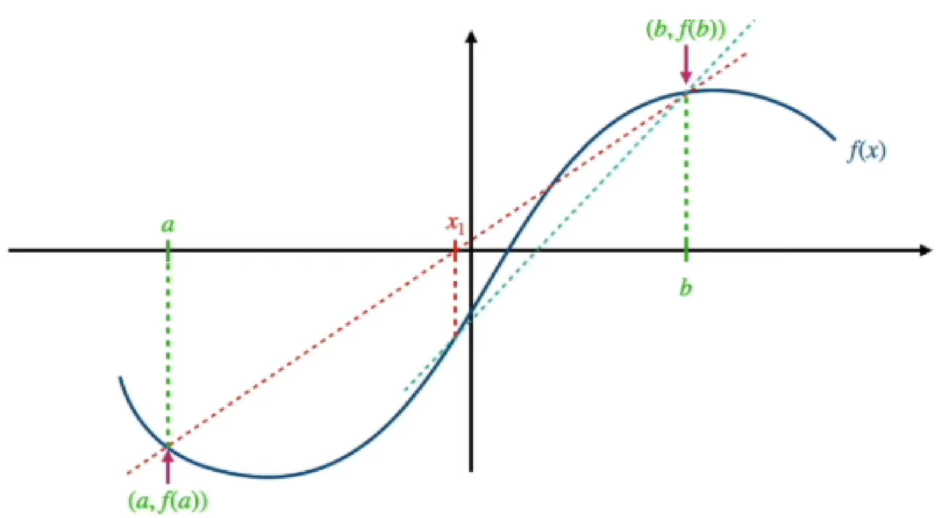
- การหาค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตำแหน่ง a และ b แล้วเชื่อมโยงค่าฟังก์ชันดังกล่าวด้วยเส้นตรง เส้นตรงนี้ตัดแกน x ที่ตำแหน่ง x_1 ตำแหน่งดังกล่าวจะเป็นรากของสมการในครั้งนั้น จากนั้นจึงปรับค่า a หรือ b ใหม่ให้เหมาะสมกับเงื่อนไข โดยอยู่บนหลักการที่ว่าค่าฟังก์ชัน $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้รากของสมการตามเงื่อนไขที่กำหนด

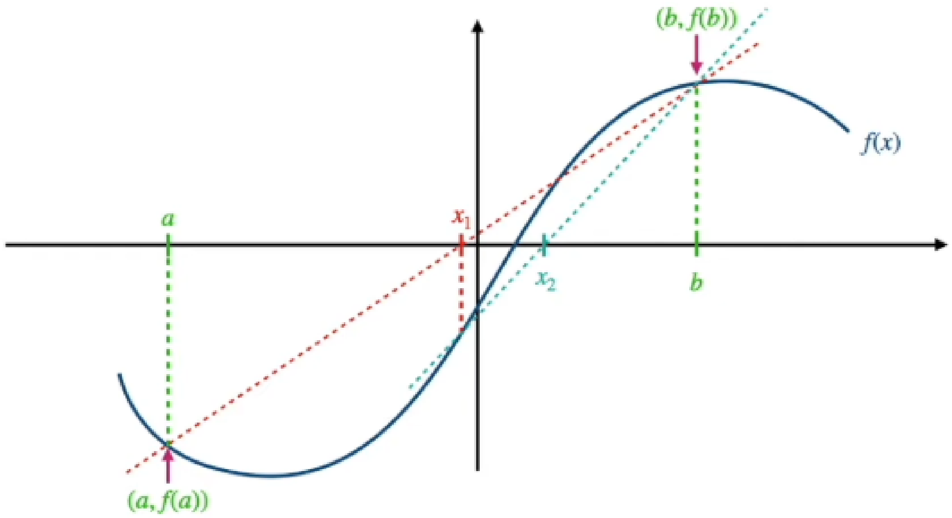
สมการเส้นตรงคือ $\dfrac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \dfrac{x - a}{b - a}$




(b, f(b))
f(x)
a
b
(a, f(a))


(b, f(b))
f(x)
a
x1
b
(a, f(a))


(b, f(b))
f(x)
a
x1
b
(a, f(a))



- เส้นตรงตัดแกน x ที่ $(x,0)$

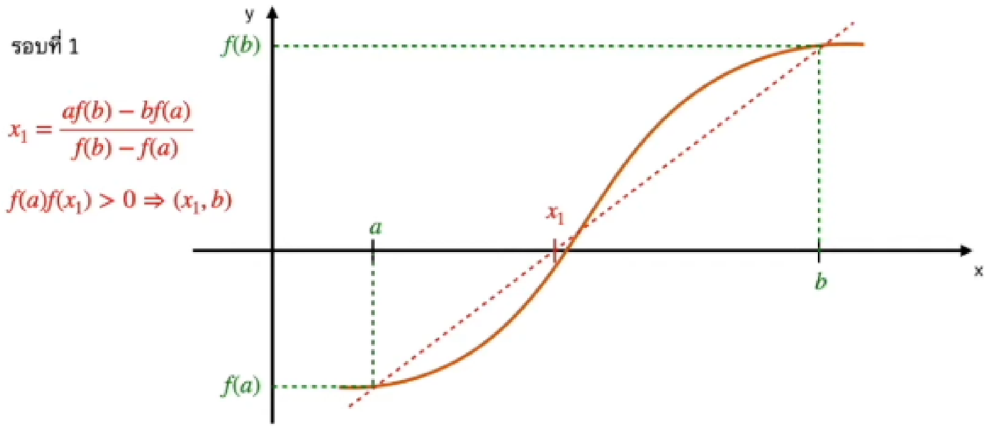
$$
\begin{aligned}
\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)} &= \frac{x-a}{b-a} \\
x-a &= \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \\
x &= a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \\
x &= \frac{af(b)-af(a)-bf(a)+af(a)}{f(b)-f(a)} \\
x &= \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}
\end{aligned}
$$

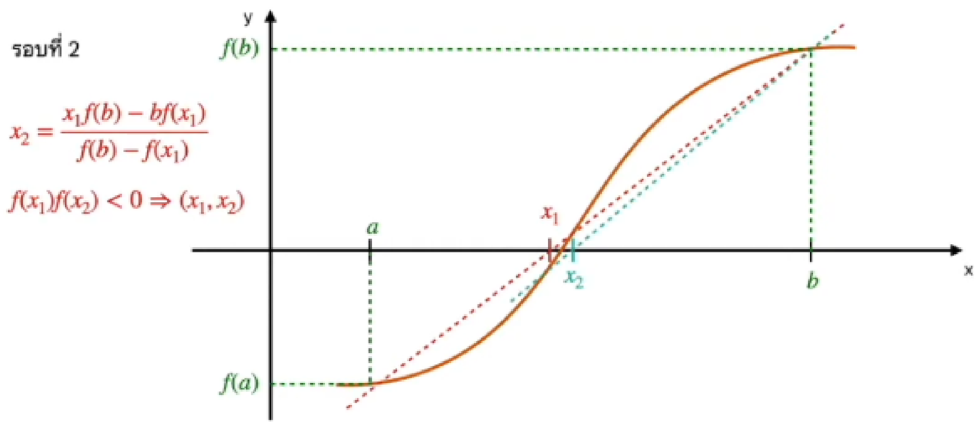
แล้ว $f(x)$ จะเป็นได้ 3 กรณี ดังนี้

1. ถ้า $f(a)f(x)=0$ แล้ว x เป็นรากของสมการ หรือ

2. ถ้า $f(a)f(x)<0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (a,x) หรือ

3. ถ้า $f(a)f(x)>0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x,b)


รอบที่ 1
$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$
$f(a)f(x_1) > 0 \Rightarrow (x_1, b)$
y
$f(b)$
x_1
a
b
x
$f(a)$


รอบที่ 2
$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$
$f(x_1)f(x_2) < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$
y
$f(b)$
x_1
a
x_2
b
x
$f(a)$

- สรุป(แนวคิดการหาผลเฉลยของสมการโดยระเบียบวิธีวางตัวผิดที่)

1. กำหนดช่วง (a, b) ที่มีรากอยู่ภายในช่วง ทำการหา $f(a)$ และ $f(b)$

2. หาจุด x หาได้จาก $x = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)},$ ทำการหา $f(x)$

3. กำหนดช่วงย่อยใหม่โดยพิจารณาค่าของฟังก์ชัน

    1. ถ้า $f(x)f(a) < 0$ แสดงว่า รากอยู่ในช่วง (a, x) ดังนั้น $b = x$

    2. ถ้า $f(x)f(a) > 0$ แสดงว่า รากอยู่ในช่วง (x, b) ดังนั้น $a = x$

4. เลือกช่วงใหม่จากข้อ 3 แล้วแทนใน (a, b)

5. คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อน แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้

    1. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณมีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด เราจะได้ค่าประมาณค่าผลเฉลย (x) ของฟังก์ชันที่ทำให้ $f(x) = 0$

    2. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณมีค่ามากกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด ให้กลับไปทำข้อที่ 2 โดยใช้ช่วงใหม่(จากข้อ 3)

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยระเบียบวิธีวางตัวผิด(False Position Method) กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 10%

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = -1, b = 5, f(x) = x^2 + 3x - 9, \varepsilon_{rel} = 10\%$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = -1, b = 5$, $f(a) = (-1)^2 + 3(-1) - 9 = -11$, $f(b) = (5)^2 + 3(5) - 9 = 31$

2. $x = \dfrac{(-1)(31) - 5(-11)}{31 - (-11)} = 0.57143$, $f(x) = (0.57143)^2 + 3(0.57143) - 9 = -6.95918$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(0.57143,5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $[-1,5]$ เป็น $(0.57143,5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|0.57143 - 0|}{|0.57143|} \times 100\,\% = 100\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 2 (i=2);

1. $a = 0.57143, b = 5$, $f(a) = (0.57143)^2 + 3(0.57143) - 9 = -6.95918$,
$f(b) = (5)^2 + 3(5) - 9 = 31$

2. $x = \dfrac{(0.57143)(31) - 5(-6.95918)}{31 - (-6.95918)} = 1.38334$, $f(x) = (1.38334)^2 + 3(1.38334) - 9 = -2.93635$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.38334,5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม (0.57143, 5) เป็น $(1.38334,5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.38334 - 0.57143|}{|1.38334|} \times 100\,\% = 58.69\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. $a = 1.38334, b = 5$, $f(a) = (1.38334)^2 + 3(1.38334) - 9 = -2.93635$,
$f(b) = (5)^2 + 3(5) - 9 = 31$

2. $x = \dfrac{(1.38334)(31) - 5(-2.93635)}{31 - (-2.93635)} = 1.69627$, $f(x) = (1.69627)^2 + 3(1.69627) - 9 = -1.03385$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.69627,5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.38334,5)$ เป็น $(1.69627,5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.69627 - 1.38334|}{|1.69627|} \times 100\,\% = 18.45\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 4 (i=4);

1. $a = 1.69627, b = 5$, $f(a) = (1.69627)^2 + 3(1.69627) - 9 = -1.03385$,
$f(b) = (5)^2 + 3(5) - 9 = 31$

2. $x = \dfrac{(1.69627)(31) - 5(-1.03385)}{31 - (-1.03385)} = 1.80289$, $f(x) = (1.69627)^2 + 3(1.69627) - 9 = -0.34091$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.80289,5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.69627,5)$ เป็น $(1.80289,5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.80289 - 1.69627|}{|1.80289|} \times 100\,\% = 5.91\,\%$, $\epsilon_{rel} < \varepsilon_{rel}$

$\therefore$ ค่า $x = 1.80289$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = 1.80289$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมพันธ์เท่ากับ $5.91\,\%$

- ตัวอย่างที่ 2 จงหารากสมการ $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ในช่วง $[1,2]$ โดยระเบียบวิธีวางตัวผิด(False Posisition Method) กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $(\varepsilon_{rel}) = 10^{-6}$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = 1, b = 2, f(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \varepsilon_{rel} = 10^{-6}$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = 1, b = 2$, $f(a) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = -5$, $f(b) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$

2. $x = \dfrac{(1)(14) - (2)(-5)}{14 - (-5)} = 1.2631579$,
$f(x) = (1.2631579)^3 + 4(1.2631579)^2 - 10 = -1.602274384$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.2631579,2)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $[1,2]$ เป็น $(1.2631579,2)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.2631579 - 0|}{|1.2631579|} = 1$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 2 (i=2);

1. $a = 1.2631579, b = 2$, $f(a) = (1.2631579)^3 + 4(1.2631579)^2 - 10 = -1.602274384$,
$f(b) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$

2. $x = \dfrac{(1.2631579)(14) - (2)(-1.602274384)}{14 - (-1.602274384)} = 1.3388278$,
$f(x) = (1.3388278)^3 + 4(1.3388278)^2 - 10 = -0.430364748$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.3388278, 2)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.2631579, 2)$ เป็น $(1.3388278, 2)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.3388278 - 1.2631579|}{|1.3388278|} = 0.0565195$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. $a = 1.3388278, b = 2$, $f(a) = (1.3388278)^3 + 4(1.3388278)^2 - 10 = -0.430364748$,
$f(b) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$

2. $x = \dfrac{(1.3388278)(14) - (2)(-0.430364748)}{14 - (-0.430364748)} = 1.3585463$,
$f(x) = (1.3585463)^3 + 4(1.3585463)^2 - 10 = -0.110008788$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.3585463, 2)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.3388278, 2)$ เป็น $(1.3585463, 2)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.3585463 - 1.3388278|}{|1.3585463|} = 0.0145144$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 10 (i=10);

1. $a = 1.3652283, b = 2$, $f(a) = (1.3652283)^3 + 4(1.3652283)^2 - 10 = -2.785E - 05$,
$f(b) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$

2. $x = \dfrac{(1.3652283)(14) - (2)(-2.785E - 05)}{14 - (-2.785E - 05)} = 1.3652296$,
$f(x) = (1.3652296)^3 + 4(1.3652296)^2 - 10 = -6.997E - 06$

3. $f(x)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.3652296, 2)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.3585463, 2)$ เป็น $(1.3652296, 2)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.3652296 - 1.3585463|}{|1.3652296|} = 9.249E - 07$, $\epsilon_{rel} < \varepsilon_{rel}$

$\therefore$ ค่า $x = 1.3652296$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = 1.3652296$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมพันธ์เท่ากับ $9.249E - 07$

$Programming(Python)$

ทำการเขียนขั้นตอนวิธีสำหรับระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ได้ดังนี้

Input: ช่วง $a, b, f(x), \varepsilon$ โดยที่ $f(a)f(b) < 0$

Output:

- รอบที่(i), $a, b, f(a), f(b)$, ค่า x , $f(x)$, ค่าคลาดเคลื่อน (ϵ)
- ค่าประมาณของรากสมการ x (final) หรือข้อความแสดงความล้มเหลวในการดำเนินการ

Algorithm: function FalsePositionMethod(a, b, f, esp)

1. i = 0, checkErorr = 1, aOld = 0, bOld = 0, xOld = 0
2. While checkError > esp
    1. xNew = $\dfrac{(aOld)f(bOld) - (bOld)f(aOld)}{f(bOld) - f(aOld)}$
    2. checkError = Calculate error
    3. If f(xNew)*f(a) < 0 then
        1. aOld = a, bOld = b, b = xNew, xOld = b

       Else
        1. aOld = a, bOld = b, a = xNew, xOld = b
    4. i = i + 1
    5. Print Output
    6. If i = 10000 then
        1. Print(Can not find roots of equation)
        2. checkError = 0
3. Return mNew

```python
def falsePostionMethod(a, b, f, esp):
  i = 0
  aOld = 0
  bOld = 0
  checkError = 1000
  xOld = 0
  xNew = 0
  while checkError > esp:
    xNew = ((a*f(b)) - (b*f(a)))/(f(b) - f(a))
    #Absolute Error
    #checkError = abs(xNew - xOld)

    #Relative Error
    checkError = (abs(xNew - xOld)/abs(xNew)) * 100

    if f(xNew)*f(a) < 0:
      bOld = b
      aOld = a
      b = xNew
      xOld = b
    else:
      aOld = a
      bOld = b
      a = xNew
```

```python
bOld = 0
checkError = 1
xOld = 0
xNew = 0
while checkError > esp:
  xNew = ((a*f(b)) - (b*f(a)))/(f(b) - f(a))
  #Absolute Error
  checkError = abs(xNew - xOld)

  #Relative Error
  #checkError = abs(xNew - xOld)/abs(xNew)

  if f(xNew)*f(a) < 0:
    bOld = b
    aOld = a
    b = xNew
    xOld = b
  else:
    aOld = a
    bOld = b
    a = xNew
    xOld = a

  i = i + 1
  print("i = ", i, " a = ", aOld, " b = ", bOld, " x = ", xNew, " error = ", checkError)
```

```python
        a = xNew
        xOld = a

      i = i + 1
      print("i = ",i)
      print("a = ", aOld, " f(a) = ", f(aOld))
      print("b = ", bOld, " f(b) = ", f(bOld))
      print("x = ", xNew, " f(x) = ", f(xNew), " error = ", checkError)
      print("------------------------------------------------------------")

      if i == 10000:
        print("Can not find root of Equation")
        checkError = 0
    return xNew
```

```python
if __name__ == "__main__":
  a = 1
  b = 5
  f = lambda x: x**2 + 3*x - 9
  x =
```

```python
      print("------------------------------------------------------------")

      if i == 10000:
        print("Can not find root of Equation")
        checkError = 0
    return xNew
```

```python
if __name__ == "__main__":
  a = 1
  b = 5
  esp = 0.000001
  f = lambda x: x**2 + 3*x - 9
  x = falsePositionMethod(a, b, f, esp)
  print("Root of Equation is ", x)
```

Excel

ให้นักศึกษาทำการเขียนโปรแกรมหารากสมการดังต่อไปนี้ (โดยใช้ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่)

1. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ กำหนดช่วง [-1.5, 0.5], ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $(\varepsilon_{rel}) = 10^{-6}$

สมการขอข้อนี้คือ

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$$

ตัวแปล ได้แก่

a, b, f(a), f(b), x, f(x), f(x)f(a), check error, check loop

กำหนดค่า

a = -1.5

b = 0.5

สมการหาค่า x = (a(f(b)-b(f(a)))/(f(b)-f(a))

$$(\varepsilon_{rel}) = 10^{-6}$$

โดยสมการแต่ละตัวแปลจะได้ดังนี้

รอบแรก

a = -1.5

b = 0.5

$$f(a) = a^4 + 2 * a^2 - a - 3$$

$$f(b) = b^4 + 2 * b^2 - b - 3$$

$$x = (a(f(b) - b(f(a)))/(f(b) - f(a))$$

$$f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3$$

$$f(x)f(a) = f(x) * f(a)$$

$$check\ error = abs(f(x) - (f(x)//\text{ค่าเก่า})/abs(f(x))$$

$$check\ loop = if(check\ error <= 0.000001, true)$$

รอบที่ 2

เราต้องเช็คว่า f(x) มีเครื่องหมายเหมือนใคร?

1. **ถ้า f(x) เครื่องหมายเดียวกับ f(a):**
   - แสดงว่าคำตอบอยู่ฝั่งขวา (ช่วง x ถึง b)
   - ให้เอา x ไปแทนที่ **a** (a(ใหม่) = x)
2. **ถ้า f(x) เครื่องหมายเดียวกับ f(b):** (หรือเครื่องหมายตรงข้ามกับ f(a))
   - แสดงว่าคำตอบอยู่ฝั่งซ้าย (ช่วง a ถึง x)
   - ให้เอา x ไปแทนที่ **b** (b(ใหม่) = x)

$$Code\ Python$$

$$1. \quad f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$$

กำหนดช่วง $[-1.5, 0.5]$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $(\varepsilon_{rel}) = 0.5\%$

```
def fps(a, b, f, esp):
    # กำหนดค่าเริ่มต้นตัวแปรต่างๆ
    i, aOld, bOld, xOld, xNew, checkError = 0, 0, 0, 0, 0, 1000

    while checkError > esp:
    # สูตร False Position Method
    xNew = ((a * f(b)) - (b * f(a))) / (f(b) - f(a))

    # คำนวณ Error (ระวังการหารด้วย 0 ในรอบแรก ถ้า xNew เป็น 0)
    if xNew != 0:
        checkError = abs(xNew - xOld) / abs(xNew) * 100

    # เช็คเงื่อนไขเพื่อเปลี่ยนช่วง a หรือ b
    if f(a) * f(xNew) < 0:
        aOld = a
        bOld = b
        b = xNew
        xOld = b  # เก็บค่าเก่าไว้เทียบ Error รอบหน้า
    else:
        aOld = a
        bOld = b
        a = xNew
        xOld = a  # เก็บค่าเก่าไว้เทียบ Error รอบหน้า

    i += 1
```

```
    # แสดงผลลัพธ์แต่ละรอบ
    print(f"i ={i}")
    print(f"a ={aOld}, f(a) ={f(aOld)}")
    print(f"b ={bOld}, f(b) ={f(bOld)}")
    print(f"x ={xNew}, f(x) ={f(xNew)}, error ={checkError}")
    print("_" * 30)

    # กันลูปไม่จบสิ้น (Infinite Loop)
    if i == 10000:
        print("Cannot find root of equation!!")
        checkError = 0

    return xNew

# -- ส่วนของการเรียกใช้ฟังก์ชัน ---
a, b = -1.5, 0.5
# สมการ f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3
f = lambda x: x**4 + 2*x**2 - x - 3
esp = 0.5  # ค่า Error ที่ยอมรับได้ (0.5%)

root = fps(a, b, f, esp)
print("Root of equation is ", root)
```