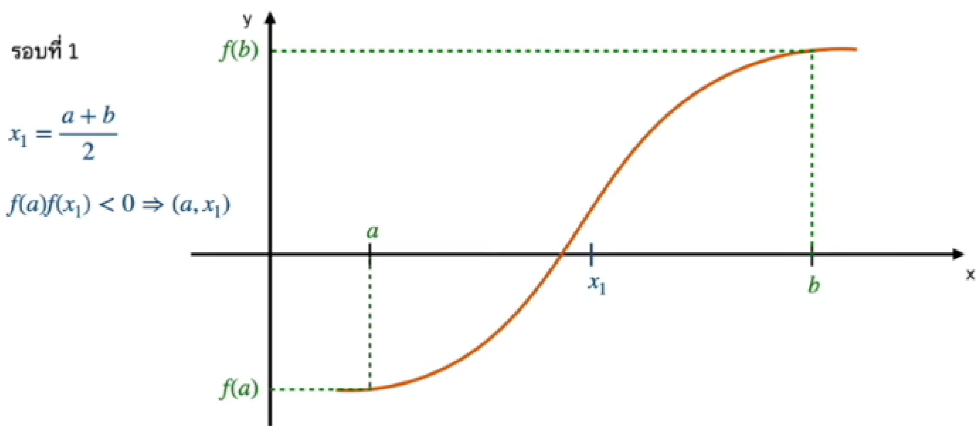
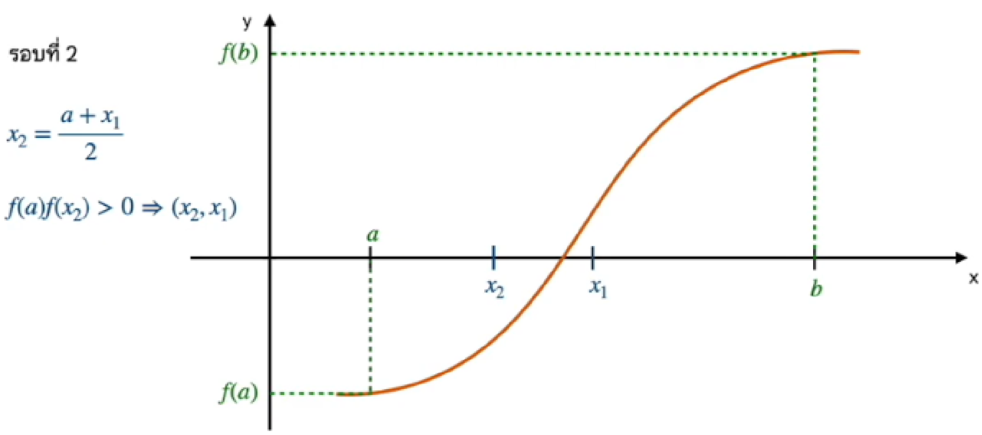
ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method)

- สมมติ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ แล้ว ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน แล้ว จะมีอย่างน้อย 1 รากของสมการ $f(x) = 0$

- สูตรสำหรับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (a, b) เป็น $x = \dfrac{a+b}{2}$ แล้ว $f(x)$ จะเป็นได้ 3 กรณี ดังนี้

  - $f(a)f(b) = 0$ แล้ว x เป็นรากของสมการ
  - $f(a)f(x) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (a, x)
  - $f(a)f(x) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x, b)

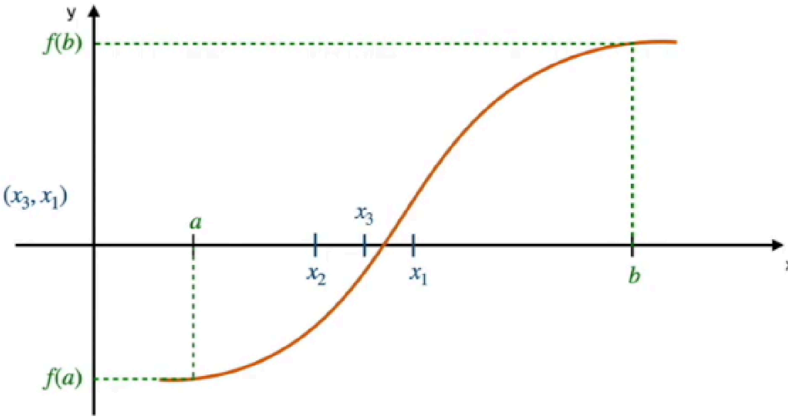




รอบที่ 3

$$x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

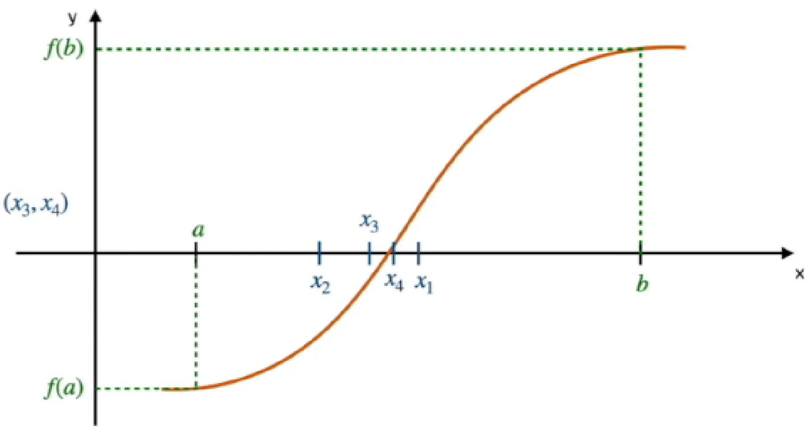
$$f(x_2)f(x_3) > 0 \Rightarrow (x_3, x_1)$$



รอบที่ 4

$$x_4 = \frac{x_3 + x_1}{2}$$

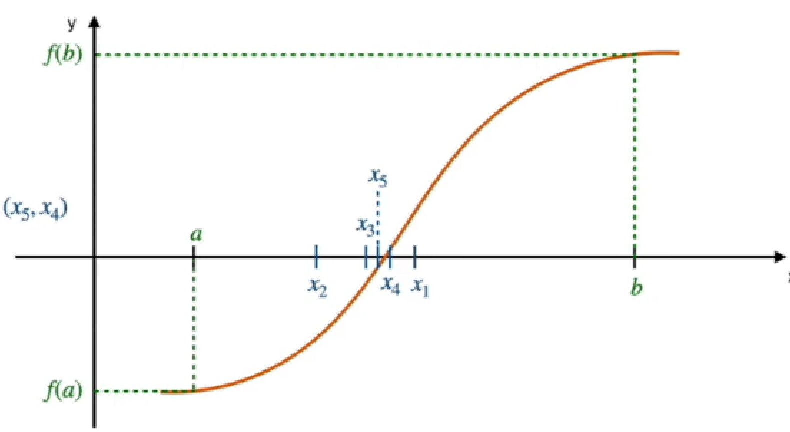
$$f(x_3)f(x_4) < 0 \Rightarrow (x_3, x_4)$$



รอบที่ 5

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

$$f(x_3)f(x_5) > 0 \Rightarrow (x_5, x_4)$$



สรุป(แนวคิดการหาผลเฉลยของสมการโดยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง)

1. กำหนดช่วง (a, b) ที่มีรากอยู่ภายในช่วง ทำการหา $f(a)$ และ $f(b)$

2. หาจุดกึ่งกลางช่วง (a, b) แทนด้วยจุด m หาได้จาก $m = \dfrac{a+b}{2},$ ทำการหา $f(m)$

3. กำหนดช่วงย่อยใหม่โดยพิจารณาค่าของฟังก์ชัน

    1. ถ้า $f(m)f(a) < 0$ แสดงว่า รากอยู่ในช่วง (a, m) ดังนั้น $b = m$

    2. ถ้า $f(m)f(a) > 0$ แสดงว่า รากอยู่ในช่วง (m, b) ดังนั้น $a = m$

4. เลือกช่วงใหม่จากข้อ 3 แล้วแทนใน (a, b)

5. คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อน แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้

    1. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณมีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด เราจะได้ค่าประมาณค่าผลเฉลย (m) ของฟังก์ชันที่ทำให้ $f(x) = 0$

    2. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณมีค่ามากกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด ให้กลับไปทำข้อที่ 2 โดยใช้ช่วงใหม่(จากข้อ 3)

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ บนช่วงปิด $[1, 2]$ ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $(\varepsilon_{abs}) = 10^{-6}$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = 1, b = 2, f(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \varepsilon_{abs} = 10^{-6}$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = 1, b = 2$, $f(a) = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$, $f(b) = 2^3 + 4(2^2) - 10 = 14$

2. $m = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$, $f(m) = 1.5^3 + 4(1.5^2) - 10 = 2.375$

3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1,1.5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $[1,2]$ เป็น $[1,1.5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.5 - 0| = 1.5$, $\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 2 (i=2)

1. $a = 1, b = 1.5$, $f(a) = 1^3 + 4(1^2) - 10 = -5$, $f(b) = (1.5)^3 + 4((1.5)^2) - 10 = 2.375$

2. $m = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$, $f(m) = (1.25)^3 + 4((1.25)^2) - 10 = -1.796875$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.25,1.5)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1,1.5)$ เป็น $(1.25,1.5)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.25 - 1.5| = 0.25, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 3 (i=3)

1. $a = 1.25, b = 1.5$, $f(a) = (1.25)^3 + 4((1.25)^2) - 10 = -1.796875$,
$f(b) = (1.5)^3 + 4((1.5)^2) - 10 = 2.375$

2. $m = \dfrac{1.25+1.5}{2} = 1.375$, $f(m) = (1.375)^3 + 4((1.375)^2) - 10 = 0.162109375$

3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.25,1.375)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.25,1.5)$ เป็น $(1.25,1.375)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.375 - 1.25| = 0.125, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 4 (i=4)

1. $a = 1.25, b = 1.375$, $f(a) = (1.25)^3 + 4((1.25)^2) - 10 = -1.796875$,
$f(b) = (1.375)^3 + 4((1.3755)^2) - 10 = 0.162109375$

2. $m = \dfrac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$, $f(m) = (1.3125)^3 + 4((1.3125)^2) - 10 = -0.848388671875$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.3125, 1.375)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.25, 1.375)$ เป็น $(1.3125, 1.375)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.3125 - 1.375| = 0.0625, \epsilon_{abs} > \epsilon_{abs}$

รอบที่ 5 (i=5)

1. $a = 1.3125, b = 1.375$, $f(a) = (1.3125)^3 + 4((1.3125)^2) - 10 = -0.848388671875$,
$f(b) = (1.375)^3 + 4((1.3755)^2) - 10 = 0.162109375$

2. $m = \dfrac{1.3125 + 1.375}{2} = 1.34375$, $f(m) = (1.34375)^3 + 4((1.34375)^2) - 10 = -0.350982666015625$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.34375, 1.375)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.3125, 1.375)$ เป็น $(1.34375, 1.375)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.34375 - 1.3125| = 0.03125, \epsilon_{abs} > \epsilon_{abs}$

รอบที่ 20 (i=20)

1. $a = 1.3652286529541016, b = 1.3652305603027344$,
$f(a) = (1.3652286529541016)^3 + 4((1.3652286529541016)^2) - 10 = -2.2465803844795573e - 05$,
$f(b) = (1.3652305603027344)^3 + 4((1.3652305603027344)^2) - 10 = 9.030992742964372e - 06$

2. $m = \dfrac{1.3652286529541016 + 1.3652305603027344}{2} = 1.365229606628418$,
$f(m) = (1.365229606628418)^3 + 4((1.365229606628418)^2) - 10 = -6.7174129139147e - 06$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.365229606628418, 1.3652305603027344)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.3652286529541016, 1.3652305603027344)$ เป็น $(1.365229606628418, 1.3652305603027344)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |1.365229606628418 - 1.3652286529541016| = 9.5367431640625e - 07, \epsilon_{abs} < \epsilon_{abs}$

$\therefore$ ค่า $x = 1.365229606628418$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = 1.365229606628418$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ 10^{-6}

ตัวอย่างที่ 2 จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 7]$ โดยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 5%

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = -1, b = 7, f(x) = x^2 + 3x - 9, \varepsilon_{rel} = 5\%$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = -1, b = 7$, $f(a) = (-1)^2 + 3(-1) - 9 = -11$, $f(b) = 7^2 + 3(7) - 9 = 61$
2. $m = \dfrac{-1+7}{2} = 3$, $f(m) = 3^2 + 3(3) - 9 = 9$
3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-1,3)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $[-1,7]$ เป็น $(-1,3)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|3-0|}{|3|} \times 100\,\% = 100\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 2 (i=2);

1. $a = -1, b = 3$, $f(a) = (-1)^2 + 3(-1) - 9 = -11$, $f(b) = 3^2 + 3(3) - 9 = 9$
2. $m = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $f(m) = 1^2 + 3(1) - 9 = -5$
3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1,3)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(-1,3)$ เป็น $(1,3)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1-3|}{|1|} \times 100\,\% = 200\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. $a = 1, b = 3$, $f(a) = (1)^2 + 3(1) - 9 = -5$, $f(b) = 3^2 + 3(3) - 9 = 9$
2. $m = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $f(m) = 2^2 + 3(2) - 9 = 1$
3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1,2)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1,3)$ เป็น $(1,2)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัม~~บูรณ์~~พัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|2-1|}{|2|} \times 100\,\% = 50\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 4 (i=4);

1. $a = 1, b = 2$, $f(a) = (1)^2 + 3(1) - 9 = -5$, $f(b) = 2^2 + 3(2) - 9 = 1$
2. $m = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$, $f(m) = (1.5)^2 + 3(1.5) - 9 = -2.25$
3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.5,2)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1,2)$ เป็น $(1.5,2)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัม~~บูรณ์~~พัทธ์ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.5-2|}{|1.5|} \times 100\,\% = 33.34\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 5 (i=5);

1. $a = 1.5, b = 2$, $f(a) = (1.5)^2 + 3(1.5) - 9 = -2.25$, $f(b) = 2^2 + 3(2) - 9 = 1$
2. $m = \dfrac{1.5+2}{2} = 1.75$, $f(m) = (1.75)^2 + 3(1.75) - 9 = -0.6875$
3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.75,2)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.5,2)$ เป็น $(1.75,2)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัม~~บูรณ์~~ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.75-1.5|}{|1.75|} \times 100\,\% = 14.29\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 6 (i=6);

1. $a = 1.75, b = 2$, $f(a) = (1.75)^2 + 3(1.75) - 9 = -0.6875$, $f(b) = 2^2 + 3(2) - 9 = 1$
2. $m = \dfrac{1.75+2}{2} = 1.875$, $f(m) = (1.875)^2 + 3(1.875) - 9 = 0.140625$
3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.75,1.875)$
4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.75,2)$ เป็น $(1.75,1.875)$
5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัม~~บูรณ์~~ $\epsilon_{rel} = \dfrac{|1.875-1.75|}{|1.875|} \times 100\,\% = 6.67\,\%$, $\epsilon_{rel} > \varepsilon_{rel}$

รอบที่ 7 (i=7);

1. $a = 1.75, b = 1.875$, $f(a) = (1.75)^2 + 3(1.75) - 9 = -0.6875$,
$f(b) = (1.875)^2 + 3(1.875) - 9 = 0.140625$

2. $m = \frac{1.75 + 1.875}{2} = 1.8125$, $f(m) = (1.8125)^2 + 3(1.8125) - 9 = -0.27734$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(1.8125, 1.875)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(1.75, 1.875)$ เป็น $(1.8125, 1.875)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัม~~บูรณ์~~ $\epsilon_{rel} = \frac{|1.8125 - 1.875|}{|1.8125|} \times 100\,\% = 3.45\,\%$, $\epsilon_{rel} < \epsilon_{rel}$

$\therefore$ ค่า $x = 1.8125$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = 1.8125$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 3.45%

ตัวอย่างที่ 3 จงหารากของสมการ $5x^3 - 4x + 1 = 0$ ในช่วง $[-5, 0]$ โดยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $(\varepsilon_{abs}) = 0.0001$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = -5, b = 0, f(x) = 5x^3 - 4x + 1, \varepsilon_{abs} = 0.0001$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = -5, b = 0$, $f(a) = 5(-5)^3 - 4(-5) + 1 = -604$, $f(b) = 5(0)^3 - 4(0) + 1 = 1$

2. $m = \frac{-5 + 0}{2} = -2.5$, $f(m) = 5(-2.5)^3 - 4(-2.5) + 1 = -67.125$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-2.5, 0)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $[-5, 0]$ เป็น $(-2.5, 0)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |-2.5 - 0| = 2.5$, $\epsilon_{abs} > \epsilon_{abs}$

รอบที่ 2 (i=2);

1. $a = -2.5, b = 0$, $f(a) = 5(-2.5)^3 - 4(-2.5) + 1 = -67.125$,
$f(b) = 5(0)^3 - 4(0) + 1 = 1$

2. $m = \dfrac{-2.5 + 0}{2} = -1.25$, $f(m) = 5(-1.25)^3 - 4(-1.25) + 1 = -3.765625$

3. $f(m)f(a) > 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-1.25, 0)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(-2.5, 0)$ เป็น $(-1.25, 0)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |-1.25 - (-2.5)| = 1.25$, $\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. $a = -1.25, b = 0$, $f(a) = 5(-1.25)^3 - 4(-1.25) + 1 = -3.765625$,
$f(b) = 5(0)^3 - 4(0) + 1 = 1$

2. $m = \dfrac{-1.25 + 0}{2} = -0.625$, $f(m) = 5(-0.625)^3 - 4(-0.625) + 1 = 2.279296875$

3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-1.25, -0.625)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(-1.25, 0)$ เป็น $(-1.25, -0.625)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |-0.625 - (-1.25)| = 0.625$, $\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 4 (i=4);

1. $a = -1.25, b = -0.625$, $f(a) = 5(-1.25)^3 - 4(-1.25) + 1 = -3.765625$,
$f(b) = 5(-0.625)^3 - 4(-0.625) + 1 = 2.279296875$

2. $m = \dfrac{-1.25 + (-0.625)}{2} = -0.9375$,
$f(m) = 5(-0.9375)^3 - 4(-0.9375) + 1 = 0.630126953125$

3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-1.25, -0.9375)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(-1.25, -0.625)$ เป็น $(-1.25, -0.9375)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |-0.9375 - (-0.625)| = 0.3125$, $\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 16 (i=16);

1. $a = -1.00006103515625, b = -0.999908447265625$,
$f(a) = 5(-1.00006103515625)^3 - 4(-1.00006103515625) + 1 = -0.0006714425992413453$,
$f(b) = 5(-0.999908447265625)^3 - 4(-0.999908447265625) + 1 = 0.0010069543534143577$

2. $m = \dfrac{(-1.00006103515625) + (-0.999908447265625)}{2} = -0.9999847412109375$,
$f(m) = 5(-0.9999847412109375)^3 - 4(-0.9999847412109375) + 1 = 0.00016784318724560876$

3. $f(m)f(a) < 0$, แสดงว่ารากของสมการอยู่ในช่วง $(-1.00006103515625, -0.9999847412109375)$

4. เปลี่ยนช่วงเดิม $(-1.00006103515625, -0.999908447265625)$ เป็น $(-1.00006103515625, -0.9999847412109375)$

5. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |-0.9999847412109375 - (-0.999908447265625)| = 7.62939453125e-05$,
$\epsilon_{abs} < \varepsilon_{abs}$

$\therefore$ ค่า $x = -0.9999847412109375$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ
คือ $x = -0.9999847412109375$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ 10^{-4}

- การประมวณจำนวนรอบของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

เมื่อ $\mathcal{E}$ แทนขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนที่เราต้องการ เราสามารถหาจำนวนรอบ N ที่ใช้ในการคำนวน เพื่อพิจารณาขนาดของช่วงที่เล็กลงในแต่ละรอบ ได้ดังอสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{b-a}{2^N} \leq \mathcal{E}$$

จากตัวอย่างที่ 3 จงหารากของสมการ $5x^3 - 4x + 1 = 0$ ในช่วง $[-5, 0]$ โดยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $(\varepsilon_{abs}) = 0.0001$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = -5, b = 0, f(x) = 5x^3 - 4x + 1, \varepsilon_{abs} = 0.0001$
เราสามารถหาจำนวนรอบได้จาก $\dfrac{b-a}{2^N} \leq \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
\frac{b-a}{2^N} \le \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \frac{0-(-5)}{2^N} \le 10^{-4} \\
&\Rightarrow \quad 2^{-N} \le \frac{10^{-4}}{5} \\
&\Rightarrow \quad -N\log(2) \le -4\log(10) - \log(5) \\
&\Rightarrow \quad \frac{4\log(10)+\log(5)}{\log(2)} \le N \\
&\Rightarrow \quad 15.60964 \le N
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกตของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

1. ระเบียบวิธีลู่เข้าสู่ค่ารากช้า จะขึ้นกับขนาดของความกว้างช่วงที่พิจารณา
2. ระเบียบวิธีนี้จะลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เสมอเมื่อฟังก์ชันที่พิจารณาเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนด
3. ไม่สามารถให้หารากของบางฟังก์ชันได่

- ลง Code

ทำการเขียนขั้นตอนวิธีสำหรับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงได้ดังนี้

Input: ช่วง $a, b, f(x), \varepsilon$ โดยที่ $f(a)f(b) < 0$

Output:

- รอบที่(i), $a, b, f(a), f(b)$, ค่า $m, f(m)$, ค่าคลาดเคลื่อน (ϵ)
- ค่าประมาณของรากสมการ x (final) หรือข้อความแสดงความล้มเหลวในการดำเนินการ

Algorithm: function Bisection(a, b, f, esp)

1. i = 0, checkErorr = 1, aOld = 0, bOld = 0, mOld = 0
2. While checkError > esp
    1. mNew = $\dfrac{a+b}{2}$
    2. checkErorr = Calculate error
    3. If f(mNew)*f(a) < 0 then
        1. aOld = a, bOld = b, b = mNew, mOld = b

       Else
        1. aOld = a, bOld = b, a = mNew, mOld = b
    4. i = i + 1
    5. Print Output
    6. If i = 10000 then
        1. Print(Can not find roots of equation)
        2. checkError = 0
3. Return mNew

```
จงหารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ บนช่วงปิด $[1,2]$
ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์
$\varepsilon_{abs} = 10^{-6} $
```

จงหารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ บนช่วงปิด $[1, 2]$ ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$

จงหารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ บนช่วงปิด $[1, 2]$ ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$

```python
def bisection(a, b, f, esp):
  i = 0
  checkError = 1
  aOld = 0
  bOld = 0
  mOld = 0
  espError = esp
  while checkError > espError:
    mNew = (a + b)/2
    # Absolute Error
    checkError = abs(mNew - mOld)
    if f(mNew)*f(a) < 0:
      aOld = a
      bOld = b
      b = mNew
      mOld = b
      strCondition = "f(m)f(a) < 0"
    else:
      aOld = a
      bOld = b
      a = mNew
```

```python
    # Absolute Error
    checkError = abs(mNew - mOld)
    if f(mNew)*f(a) < 0:
      aOld = a
      bOld = b
      b = mNew
      mOld = b
      strCondition = "f(m)f(a) < 0"
    else:
      aOld = a
      bOld = b
      a = mNew
      strCondition = "f(m)f(a) > 0"
    i = i + 1
    print("i = ", i)
    print("a = ", aOld, " f(a) = ", f(aOld), " b = ", bOld, " f(b) = ", f(bOld))
    print("m = ", mNew, " f(m) = ", f(mNew))
    print(strCondition, " new interval is (", a, ",", b,") old interval is (", aOld, ",", bOld,")")
    print("error = ", checkError)
    print("--------------------------------------------------------------------------------")
    if i == 10000:
      print("Can not find root of equation")
      checkError = 0
  return mNew
```

```python
        strCondition = "f(m)f(a) < 0"
    else:
        aOld = a
        bOld = b
        a = mNew
        strCondition = "f(m)f(a) > 0"
    i = i + 1
    print("i = ", i)
    print("a = ", aOld, " f(a) = ", f(aOld), " b = ", bOld, " f(b) = ", f(bOld))
    print("m = ", mNew, " f(m) = ", f(mNew))
    print(strCondition, " new interval is (", a, ",", b,") old interval is (", aOld, ",", bOld,")")
    print("error = ", checkError)
    print("------------------------------------------------------------------------------------")
    if i == 10000:
      print("Can not find root of equation")
      checkError = 0
  return mNew
```

```python
[11] if __name__ == "__main__":
       esp = 0.000001
       f = lambda x: x**3 + 4*(x**2) - 10
       root = bisection(1, 2, f, esp)
       print("Root of Equation is ", root)
```

```
---------------------------------------------------------------------------------
i =  13
a =  1.364990234375  f(a) =  -0.003959101522923447  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
m =  1.3651123046875  f(m) =  -0.0019436590100667672
f(m)f(a) > 0  new interval is ( 1.3651123046875 , 1.365234375 ) old interval is ( 1.364990234375 , 1.365234375 )
error =  0.0001220703125
---------------------------------------------------------------------------------
i =  14
a =  1.3651123046875  f(a) =  -0.0019436590100667672  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
m =  1.36517333984375  f(m) =  -0.000935847281880342
f(m)f(a) > 0  new interval is ( 1.36517333984375 , 1.365234375 ) old interval is ( 1.3651123046875 , 1.365234375 )
error =  6.103515625e-05
---------------------------------------------------------------------------------
i =  15
a =  1.36517333984375  f(a) =  -0.000935847281880342  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
m =  1.365203857421875  f(m) =  -0.00043191879925075227
f(m)f(a) > 0  new interval is ( 1.365203857421875 , 1.365234375 ) old interval is ( 1.36517333984375 , 1.365234375 )
error =  3.0517578125e-05
---------------------------------------------------------------------------------
i =  16
a =  1.365203857421875  f(a) =  -0.00043191879925075227  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
m =  1.3652191162109375  f(m) =  -0.0001799489032272561
f(m)f(a) > 0  new interval is ( 1.3652191162109375 , 1.365234375 ) old interval is ( 1.365203857421875 , 1.365234375 )
error =  1.52587890625e-05
---------------------------------------------------------------------------------
i =  17
a =  1.3652191162109375  f(a) =  -0.0001799489032272561  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
m =  1.3652267456054688  f(m) =  -5.39625415285627724e-05
f(m)f(a) > 0  new interval is ( 1.3652267456054688 , 1.365234375 ) old interval is ( 1.3652191162109375 , 1.365234375 )
error =  7.62939453125e-06
---------------------------------------------------------------------------------
i =  18
a =  1.3652267456054688  f(a) =  -5.39625415285627724e-05  b =  1.365234375  f(b) =  7.202476263046265e-05
```

Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Round 1	Round 2	Round 3						f(x) = x ^ 3 + 4x ^ 2 - 10		
2	a	1.00000000	1.00000000	1.25000000						e	0.00000100	
3	b	2.00000000	1.50000000	1.50000000								
4	f(a)	-5.00000000	-5.00000000	-1.79687500								
5	f(b)	14.00000000	2.37500000	2.37500000								
6	m	1.50000000	1.25000000	1.37500000								
7	f(m)	2.37500000	-1.79687500	0.16210938								
8	f(m)f(a)	-11.87500000	8.98437500	-0.29129028								
9	e_abs	1.50000000	0.25000000	0.12500000								
10	error	FALSE	FALSE	FALSE								
11												
12		Round 1	Round 2	Round 3	Round 4	Round 5	Round 6	Round 7				
13	a	0.00000000	0.50000000	0.75000000	0.87500000	0.93750000	0.96875000	0.98437500		f(x) = x^3 + 3x^2 - 1		
14	b	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000		e	0.01000000	
15	f(a)	-1.00000000	-0.12500000	1.10937500	1.96679688	2.46069336	2.72457886	2.86083603				
16	f(b)	3.00000000	3.00000000	3.00000000	3.00000000	3.00000000	3.00000000	3.00000000				
17	m	0.50000000	0.75000000	0.87500000	0.93750000	0.96875000	0.98437500	0.99218750				
18	f(m)	-0.12500000	1.10937500	1.96679688	2.46069336	2.72457886	2.86083603	2.93005323				
19	f(m)f(a)	0.12500000	-0.13867188	2.18191528	4.83968401	6.70435310	7.79457336	8.38240186				
20	e_abs	0.50000000	0.25000000	0.12500000	0.06250000	0.03125000	0.01562500	0.00781250				
21	error	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE				

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ กำหนดช่วง [0, 1], ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $(\varepsilon_{abs}) = 10^{-2}$

สมการของข้อนี้คือ

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

ตัวแปลของข้อนี้ได้แก่

a, b, f(a), f(b), x, f(x), f(x)f(a), e_abs, error

หลักการคิด

เราจะกำหนด

a = 0

b = 1

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์(abs) = 0.01

จากสมการข้างต้น

$$f(a) = 0^3 + (3 * 0)^2 - 1$$

$$f(b) = 1^3 + (3 * 1)^2 - 1$$

$$x = (a + b)/2$$

$$f(x)f(a) = f(x) * f(a)$$

$$e_{abs} = abs(x - 0)$$

แรก $-\ 0$ รอต่อๆไปให้เอาค่า x ใหม่ลบ x เก่า

$$errpr = if(e_{abs} < 0.01, true)$$

รอบที่ 2

เราต้องเช็คว่า f(x) มีเครื่องหมายเหมือนใคร?

1. **ถ้า f(x) เครื่องหมายเดียวกับ f(a):**
   - แสดงว่าคำตอบอยู่ฝั่งขวา (ช่วง x ถึง b)
   - ให้เอา x ไปแทนที่ **a** (a(ใหม่) = x)
2. **ถ้า f(x) เครื่องหมายเดียวกับ f(b):** (หรือเครื่องหมายตรงข้ามกับ f(a))

- แสดงว่าคำตอบอยู่ฝั่งซ้าย (ช่วง a ถึง x)
- ให้เอา x ไปแทนที่ **b** (b(ใหม่) = x)

$Code\ Python$

จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
บนช่วงปิด $[1, 2]$ ด้วยวิธีการแบบแบ่งครึ่งช่วงโดย
ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$

```
def bisection(a, b, f, eps):
  i, aOld, bOld, mOld, checkError, espError = 0,0,0,0,1,esp
  while checkError > espError:
    mNew = (a + b) / 2
    checkError = abs(mNew - mOld)
    if f(a) * f(mNew) < 0:
      b = mNew
      aOld = a
      bOld = b
      b = mNew
      mOld = mNew
      strCon = "f(m)*f(a) < 0"
    else:
      aOld = a
      bOld = b
      a = mNew
      strCon = "f(m)*f(a) > 0"
    i += 1
    print(f"i = {i}")
    print(f"a = {aOld}, f(a) ={f(aOld)}, b ={bOld}, f(b) ={f(bOld)}")
    print(f"m = {mNew}, f(m) ={f(mNew)}")
    print(strCon, "new interval is (",a, ",",b,") old invetval is (", aOld, ",", bOld,")")
    print("Error =",checkError)
    print("_"*30)
```

```
    if i == 10000:
      print("Cannot find root of equation!!")
      checkError = 0
  return mNew

if __name__=="__main__":
  esp = 10**(-6)
  f = lambda x: x**3 + 4*x**2 - 10
  root = bisection(1, 2, f, esp)
  print("Root of equation is ",root)
```

จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
กำหนดช่วง $[0, 1]$ ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$

```
def bisection(a, b, f, eps):
  i, aOld, bOld, mOld, checkError, espError = 0,0,0,0,1,esp
  while checkError > espError:
    mNew = (a + b) / 2
    checkError = abs(mNew - mOld)
    if f(a) * f(mNew) < 0:
      b = mNew
      aOld = a
      bOld = b
      b = mNew
      mOld = mNew
      strCon = "f(m)*f(a) < 0"
    else:
      aOld = a
      bOld = b
      a = mNew
      strCon = "f(m)*f(a) > 0"
    i += 1
    print(f"i = {i}")
    print(f"a = {aOld}, f(a) ={f(aOld)}, b ={bOld}, f(b) ={f(bOld)}")
    print(f"m = {mNew}, f(m) ={f(mNew)}")
    print(strCon, "new interval is (",a, ",",b,") old invetval is (", aOld, ",", bOld,")")
```

```
    print("Error =",checkError)
    print("_"*30)

    if i == 10000:
      print("Cannot find root of equation!!")
      checkError = 0
  return mNew

if __name__=="__main__":
  esp = 10**(-6)
  f = lambda x: x**3 + 3*x**2 - 1
  root = bisection(0, 1, f, esp)
  print("Root of equation is ",root)
```