สูตรของ “เทย์เลอร์”

ความคลาดเคลื่อนแบบแพร่กระจายและความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย

- ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error)
    - การประมาณค่าอนุพันธ์
    - กำหนดฟังก์ชัน f(x) พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันรอบ x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1!} + f'(\zeta)\frac{h^2}{2!}, (\zeta) \in (x, x+h)$$

- จัดรูป

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\zeta), \zeta \in (x, x+h)$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon$$

เมื่อ ε เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย

$Ex.$
กำหนดให้$f(x) = (x+1)^2$จงหาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันfที่$x = 1$โดยให้$h = 0.1$และ$h = 0.5$

- การประมาณค่าอนุพันธ์

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon$$
$$f'(x) = \frac{((x+h)+1)^2 - (x+1)^2}{h}$$
$$f'(x) = \frac{h^2 + 2h(x+1)}{h} = h + 2x + 2$$

ดังนั้นที่ $x = 1$ และ $h = 0.1$; $\quad f'(x) = 0.1 + 2(1) + 2 = 4.1$
ดังนั้นที่ $x = 1$ และ $h = 0.5$; $\quad f'(x) = 0.5 + 2(1) + 2 = 4.5$

คำนวนค่าจริง $f'(x) = 2(x+1);$ ที่ $x = 1$ จะได้ $f'(1) = 2(1+1) = 4$
ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนที่ใช้ $h = 0.1$ มีค่า $4 - 4.1 = -0.1$
และค่าคลาดเคลื่อนที่ใช้ $h = 0.5$ มีค่า $4 - 4.5 = -0.5$

- อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

  อนุกรมเทย์เลอร์เป็นอนุกรมอนันต์ (Infinite Series) ที่ใช้แทนฟังก์ชันใดๆ ได้โดยใช้ค่าของฟังก์ชันนั้นและอนุพันธ์อันดับต่างๆ ของฟังก์ชันนั้น ณ จุดใดจุดหนึ่ง
  ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติเพียงพอที่จะเขียนแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์บนช่วงใดช่วงหนึ่ง จึงต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วงนั้น
  สมมุติว่าฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาค่าได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ จุดใดๆ ในช่วงเปิดนี้สามารถเขียนได้ดังสมการ

  $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots$$

  หรือ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ โดย $f^{(n)}(x)$ คือ อนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

  เมื่อใดก็ตามที่ $x_0 = 0$ อนุกรมอนันต์ข้างต้นจะเรียกว่า อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin Series) ตัวอย่างของอนุกรมแมคคลอริน ได้แก่

  อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series): $\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ เมื่อ $|x| < 1$

  ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ สำหรับทุกค่า x

  ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ: $\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ เมื่อ $|x| < 1$

  ฟังก์ชันไซน์: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ สำหรับทุกค่า x

  ฟังก์ชันโคไซน์: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ สำหรับทุกค่า x

  อนุกรมทวินาม (Binomial Series):

  $$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots \text{ เมื่อ } |x| < 1$$

  โดย $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha - n)!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$

- ความสัมพันธ์แบบวนซ้ำแบบเดี่ยว (Single Recursion)

1. ความสัมพันธ์เวียนซํ้าแบบเดียว (Single Recursion)

ลำดับ $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ ซึ่งทราบค่าของสมาชิกตัวแรก โดยสมาชิกตัวอื่นๆ t_k สามารถหาได้จาก t_{k-1} และปริมาณที่ทราบค่าอื่นๆ แล้วเรียก t_k ว่า สูตรความสัมพันธ์เวียนเกิดซ้ำแบบเดี่ยว (Single Recursion Formula)

สูตรความสัมพันธ์เวียนเกิดซ้ำแบบเดี่ยว (Single Recursion Formula) คือ $t_k = t_{k-1} + b$ เมื่อ $t_0 = a$

ตัวอย่าง

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)
$a, a+b, a+2b, \ldots, a+kb, \ldots, a+nb, \ldots$

วิธีทำ

ถ้า $a = 1$ และ $b = 1$ จะได้ผลลัพธ์คือ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$a = 1$ และ $b = 2$ จะได้ผลลัพธ์คือ $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$a = 2$ และ $b = 2$ จะได้ผลลัพธ์คือ $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

$$t_0 = a = a$$

$$t_1 = a + b = t_0 + b$$

$$t_2 = a + 2b = [a + b] + b = t_1 + b$$

$$t_3 = a + 3b = [a + 2b] + b = t_2 + b$$

$$\ldots$$

$$t_k = [a + (k-1)b] + b = t_{k-1} + b$$

2. ความสัมพันธ์เวียนซ้ำแบบหลายค่า (Multi-recursion Formula)

ถ้าทราบค่าเริ่มต้นของลำดับและความสัมพันธ์ระหว่าง t_{k-1}, t_k, t_{k+1} เรียกว่า สูตรความสัมพันธ์เวียนเกิดซ้ำแบบหลายค่า (Multi-recursion Formula)

สูตรความสัมพันธ์เวียนเกิดซ้ำแบบหลายค่า (Multi-recursion Formula) คือ
$t_{k+2} = t_{k+1} + t_k$ เมื่อ $t_1 = 1$ และ $t_2 = 1$

ตัวอย่าง ลำดับฟีโบแนคชี (Fibonacci Sequence) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

วิธีทำ

$t_1 = 1$

$t_2 = 1$

$t_3 = t_2 + t_1 = 1 + 1 = 2$

$t_4 = t_3 + t_2 = 2 + 1 = 3$

$t_5 = t_4 + t_3 = 3 + 2 = 5$

$\ldots$

$t_{k+2} = t_{k+1} + t_k$