ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method)

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน มีหลักการดังนี้

1. เริ่มต้นจากค่าเริ่มต้น 1 ค่า โดยที่เริ่มต้นที่จุด x_0

2. ทำการลากเส้นตั้งฉากแกน x สัมผัสกราฟ $f(x)$ ได้จุด $(x_0, f(x_0))$

3. ทำการหาความชันที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะได้ $f'(x_0)$ ความชันตัดแกน x

4. จุดที่ความชัน $f'(x_0)$ ตัดแกน x นั้นคือ จุด x_1

5. จากนั้นให้ทำขั้นตอนที่ 2-3 เพื่อได้จุดใหม่ เมื่อได้จุดใหม่แล้ว ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้รากของสมการตามเงื่อนไขที่กำหนด

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน มีหลักการดังนี้ (รอบที่ 1)

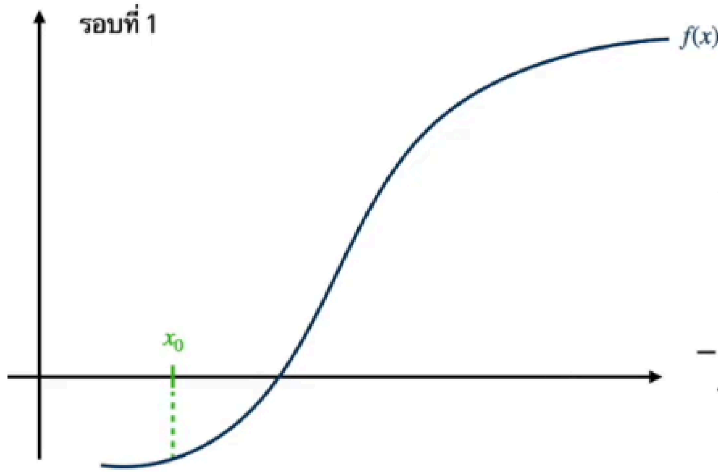
1. เริ่มต้นจากค่าเริ่มต้น 1 ค่า โดยที่เริ่มต้นที่จุด x_0

2. ทำการลากเส้นตั้งฉากแกน x สัมผัสกราฟ $f(x)$ ได้จุด $(x_0, f(x_0))$

3. ทำการหาความชันที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะได้ $f'(x_0)$ ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$ คือ $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

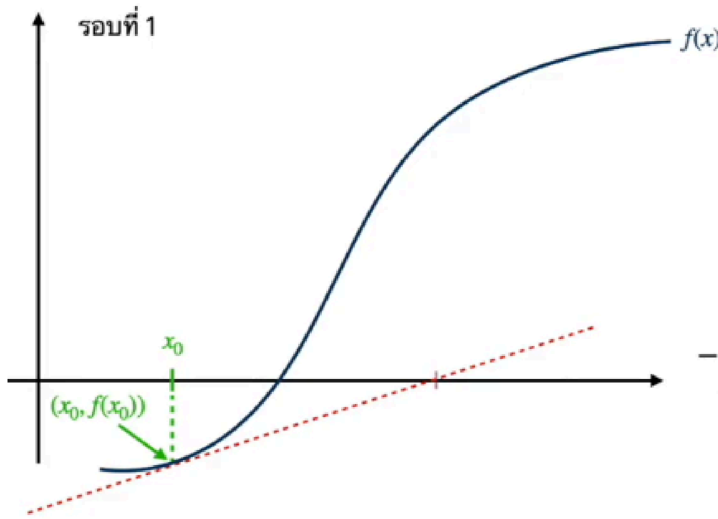
4. ได้จุด x_1 ที่สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$ ตัดแกน x

5. $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, เมื่อ $f(x) = 0$



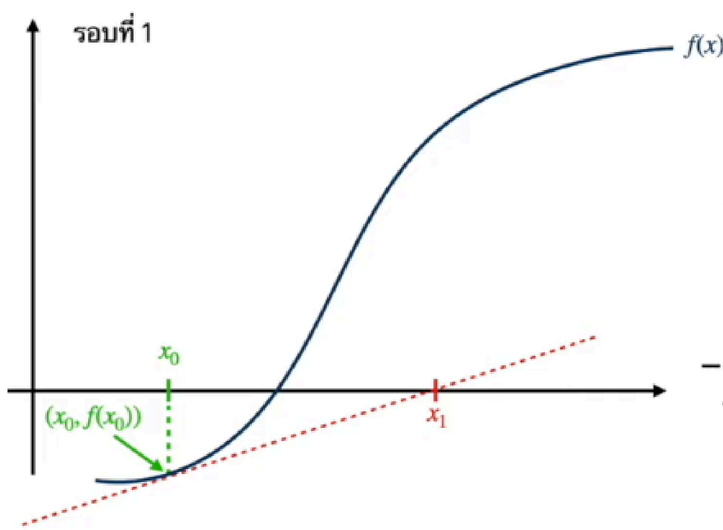
สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$f(x_1) = 0$$
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



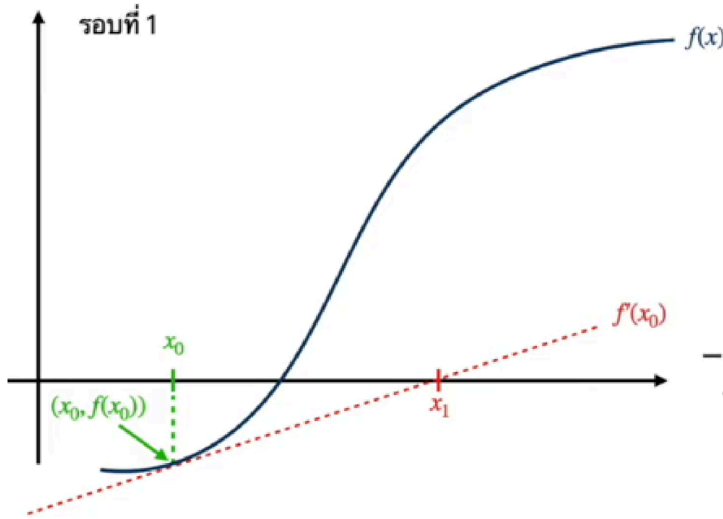
สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$f(x_1) = 0$$
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$f(x_1) = 0$$
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชัน $f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$f(x_1) = 0$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน มีหลักการดังนี้ (รอบที่ 2)

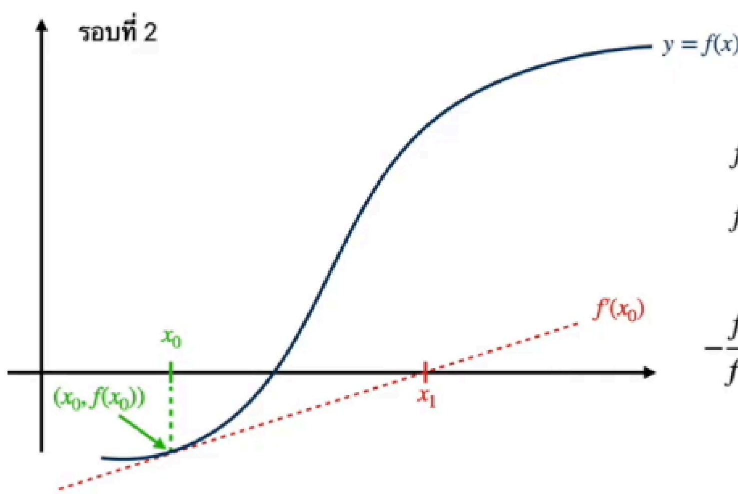
1. เปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก x_0 เป็น x_1

2. ทำการลากเส้นตั้งฉากแกน x สัมผัสกราฟ $f(x)$ ได้จุด $(x_1, f(x_1))$

3. ทำการหาความชันที่จุด $(x_1, f(x_1))$ จะได้ $f'(x_1)$ ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และมีความชัน $f'(x_1)$ คือ $f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

4. ได้จุด x_2 ที่สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และมีความชัน $f'(x_1)$ ตัดแกน x

5. $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, เมื่อ $f(x_2) = 0$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และมีความชัน $f'(x_1)$

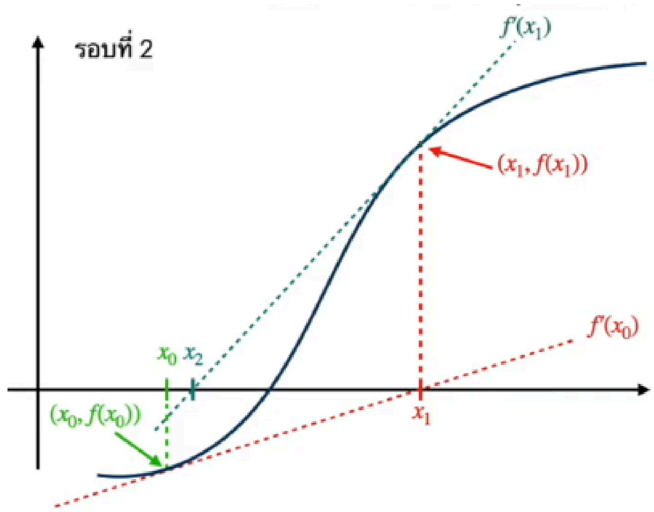
$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = 0$$

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และมีความชัน $f'(x_1)$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = 0$$

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน มีหลักการดังนี้ (รอบที่ 3)

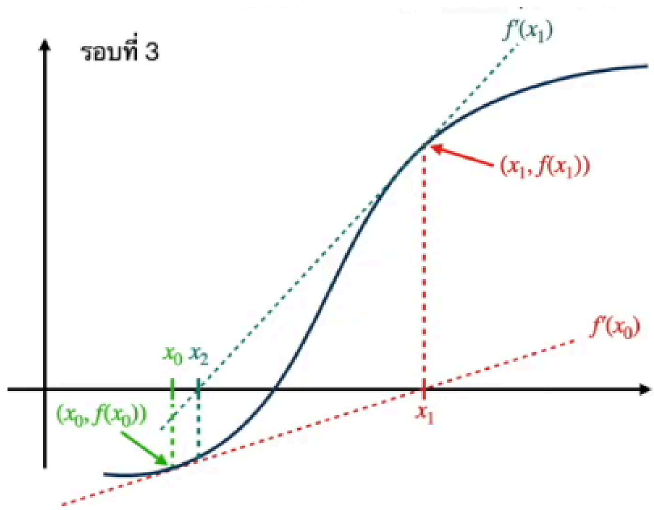
1. เปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก x_1 เป็น x_2

2. ทำการลากเส้นตั้งฉากแกน x สัมผัสกราฟ $f(x)$ ได้จุด $(x_2, f(x_2))$

3. ทำการหาความชันที่จุด $(x_2, f(x_2))$ จะได้ $f'(x_2)$ ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ และมีความชัน $f'(x_2)$ คือ $f(x_3) = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$

4. ได้จุด x_3 ที่สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ และมีความชัน $f'(x_2)$ ตัดแกน x

5. $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, เมื่อ $f(x_3) = 0$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ และมีความชัน $f'(x_2)$

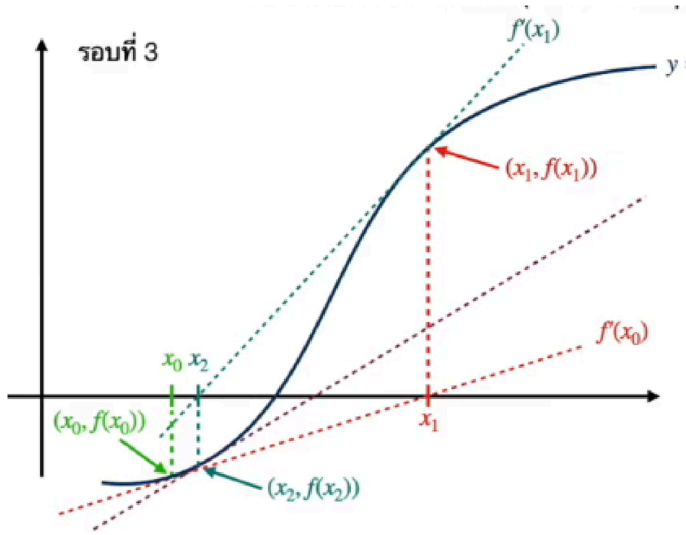
$$f(x_3) = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$f(x_3) = 0$$

$$0 = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_3 - x_2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ และมีความชัน $f'(x_2)$

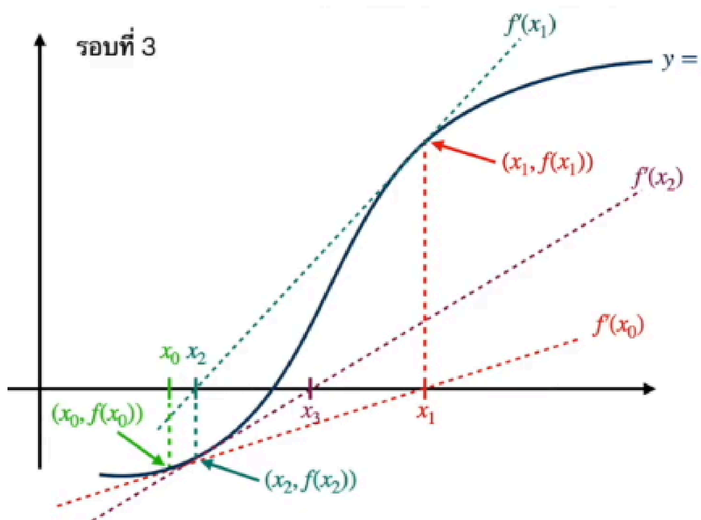
$$f(x_3) = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$f(x_3) = 0$$

$$0 = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_3 - x_2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ และมีความชัน $f'(x_2)$

$$f(x_3) = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$f(x_3) = 0$$

$$0 = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_3 - x_2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปของการทำซ้ำเป็น

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i = 1,2,3,\ldots$$

โดยกำหนดจุดเริ่มต้น x_0 เพื่อใช้ประมาณค่า x_1 แล้วทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนที่ค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวนมีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด จะได้ค่า x_i เป็นรากของสมการ

ข้อสังเกตุ

จากสูตรในการทำซ้ำของระเบียนวิธีนิวตัน-ราฟสัน จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน จะใช้ได้เมื่อ $f(x_i)$ หาอนุพันธ์ได้และ $f'(x_i) \neq 0$, เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots$

- สรุป(แนวคิดการหาผลเฉลยของสมการโดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน)

1. กำหนดช่วง (a, b) ที่มีรากอยู่ภายในช่วง, ค่าคลาดเคลื่อน, สมการ $f'(x)$

2. ทำการเลือก x_o ในช่วง a, b ($x_0 \in (a, b)$), ให้ $i = 1$

3. คำนวน $x_i = x_{i-1} - \dfrac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

4. คำนวนหาค่าคลาดเคลื่อน แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้
   1. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวนมีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด เราจะได้ค่าประมาณค่าผลเฉลย (x_i)
   2. ถ้าค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวนมีค่ามากกว่ากว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด ให้กลับไปทำข้อที่ 3 โดยเพิ่มค่า $i = i + 1$

- ตัวอย่างที่ 1 จงหารากสมการ $f(x) = 5x^3 - 4x + 1$ ในช่วง $[-2, -0.5]$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (ε_{abs}) เท่ากับ 0.1

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $a = -2, b = -0.5, f(x) = 5x^3 - 4x + 1$, $\varepsilon_{abs} = 0.1$

รอบที่ 1 (i=1);

1. $a = -2, b = -0.5, \varepsilon_{abs} = 0.1,\ f'(x) = 15x^2 - 4$

2. เลือก $x_0 = -0.75$

3. จาก $x_i = x_{i-1} - \dfrac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$ ทำการหาค่า x_1 จะได้

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow = -0.75 - \dfrac{5(-0.75)^3 - 4(-0.75) + 1}{15(-0.75)^2 - 4}$ ดังนั้น $x_1 = -1.176056$

4. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-1.176056 - (-0.75)| = 0.426056,$

$\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 2 (i=2);

1. ทำการหาค่า x_2 จะได้

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow = -1.176056 - \dfrac{5(-1.176056)^3 - 4(-1.176056) + 1}{15(-1.176056)^2 - 4}$ ดังนั้น $x_2 = -1.031022$

4. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$\epsilon_{abs} = |x_2 - x_1| \Rightarrow = |-1.031022 - (-1.176056)| = 0.145035, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. ทำการหาค่า x_3 จะได้

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow = -1.031022 - \dfrac{5(-1.031022)^3 - 4(-1.031022) + 1}{15(-1.031022)^2 - 4}$

ดังนั้น $x_3 = -1.0012$

4. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$\epsilon_{abs} = |x_3 - x_2| \Rightarrow = |-1.0012 - (-1.031022)| = 0.0298, \epsilon_{abs} < \varepsilon_{abs}$

$\therefore$ ค่า $x = -1.0012$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = -1.0012$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์น้อยกว่า 0.1

- ตัวอย่างที่ 2 คำนวนหาจุดตัดระหว่างเส้นโค้ง $y = \cos(2x+1)$ และ $y = 2x + 3$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบรณ์ $(\varepsilon_{abs}) = 0.0005$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า $f(x) = \cos(2x+1), f(x) = 2x + 3$ $\varepsilon_{abs} = 0.0005$ ทำการหาจุดตัดของสมการ 2 เส้น คือ นำสมการ $f(x)$ ทั้งสองสมการเท่ากัน

ดังนั้นจะได้เป็น $\cos(2x+1) = 2x + 3 \Rightarrow \cos(2x+1) - 2x - 3 = 0$

กำหนดให้ $f(x) = \cos(2x + 1) - 2x - 3$ จะได้ $f'(x) = -2\sin(2x + 1) - 2$ และ $x_0 = 1.00000$

รอบที่ 1 (i=1)

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{d}{dx}u$$
$$= -\sin(2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1)$$
$$= -\sin(2x+1)\cdot \cancel{\frac{d}{dx}2x}^{\,2} + \cancel{\frac{d1}{dx}}^{\,0}$$
$$= -2\sin(2x+1)$$

1. $x_0 = 1.00000$ ทำการหาค่า $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ จะได้

$$x_1 = 1.00000 - \frac{\cos(2(1.00000) + 1) - 2(1.00000) - 3}{-2\sin(2(1.00000) + 1) - 2} \Rightarrow = -1.64611$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-1.64611 - 1.00000| = 2.64611, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$$

รอบที่ 2 (i=2)

1. $x_1 = -1.64611$ ทำการหาค่า $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ จะได้

$$x_2 = -1.64611 - \frac{\cos(2(-1.64611) + 1) - 2(-1.64611) - 3}{-2\sin(2(-1.64611) + 1) - 2} \Rightarrow = -2.47890$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-2.47890 - (-1.64611)| = 0.85429, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$$

รอบที่ 3 (i=3)

1. $x_2 = -2.47890$ ทำการหาค่า $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ จะได้

$$x_3 = -2.47890 - \frac{\cos(2(-2.47890) + 1) - 2(-2.47890) - 3}{-2\sin(2(-2.47890) + 1) - 2} \Rightarrow = -2.11073$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-2.11073 - (-2.47890)| = 0.36817, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$$

รอบที่ 4 (i=4)

1. $x_3 = -2.11073$ ทำการหาค่า $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$ จะได้

$$x_4 = -2.11073 - \frac{\cos(2(-2.11073)+1) - 2(-2.11073) - 3}{-2\sin(2(-2.11073)+1) - 2} \Rightarrow = -2.00671$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-2.00671 - (-2.11073)| = 0.10402, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$$

รอบที่ 5 (i=5)

1. $x_4 = -2.00671$ ทำการหาค่า $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$ จะได้

$$x_5 = -2.00671 - \frac{\cos(2(-2.00671)+1) - 2(-2.00671) - 3}{-2\sin(2(-2.00671)+1) - 2} \Rightarrow = -1.99431$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-1.99431 - (-2.00671)| = 0.01239, \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$$

รอบที่ 6 (i=6)

1. $x_5 = -1.99431$ ทำการหาค่า $x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)}$ จะได้

$$x_6 = -1.99431 - \frac{\cos(2(-1.99431)+1) - 2(-1.99431) - 3}{-2\sin(2(-1.99431)+1) - 2} \Rightarrow = -1.99413$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-1.99413 - (-1.99431)| = 0.00018, \epsilon_{abs} < \varepsilon_{abs}$$

$\therefore$ ค่า $x = -1.99413$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ หรือ รากของสมการ คือ $x = -1.99413$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์น้อยกว่า 0.0005

จากตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $x_0 = 2.00000$ ($f(x) = \cos(2x+1) - 2x - 3$ และ $f'(x) = -2\sin(2x+1) - 2$)

รอบที่ 1 (i=1)

1. $x_0 = 2.00000$ ทำการหาค่า $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ จะได้

$$x_1 = 2.00000 - \frac{\cos(2(2.00000)+1) - 2(2.00000) - 3}{-2\sin(2(2.00000)+1) - 2} \Rightarrow = -79.75556$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$\epsilon_{abs} = |x_1 - x_0| \Rightarrow = |-79.75556 - 2.00000| = 81.75556,\ \epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 2 (i=2)

1. $x_1 = -79.75556$ ทำการหาค่า $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ จะได้

$$x_2 = -79.75556 - \frac{\cos(2(-79.75556)+1) - 2(-79.75556) - 3}{-2\sin(2(-79.75556)+1) - 2} \Rightarrow = 8005.02712$$

2. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$\epsilon_{abs} = |x_2 - x_1| \Rightarrow = |8005.02712 - (-79.75556)| = 8084.78268,$

$\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

รอบที่ 3 (i=3);

1. $x_2 = 8005.02712$ ทำการหาค่า x_3 จะได้

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow = 8005.02712 - \dfrac{5(8005.02712)^3 - 4(8005.02712) + 1}{15(8005.02712)^2 - 4}$ ดังนั้น

$x_3 = -39996.48392$

4. คำนวนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

$\epsilon_{abs} = |x_3 - x_2| \Rightarrow = |-39996.48392 - (8005.02712)| = 12001.51104,$

$\epsilon_{abs} > \varepsilon_{abs}$

$\therefore$ จะเห็นได้ว่าลำดับของค่าประมาณลู่ออก ทำให้ไม่สามารถหาค่ารากของสมการได้

ดังนั้นในการหารากสมการด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) จะขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าเริ่มต้นในการคำนวนด้วย

$$Programming(Python)$$

ทำการเขียนขั้นตอนวิธีสำหรับระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันได้ดังนี้

Input: $f(x), f'(x), x_0, \varepsilon$

Output:

- รอบที่(i), x_{i-1}, x_i, $f(x)$, $f'(x)$, ค่าคลาดเคลื่อน (ϵ)
- ค่าประมาณของรากสมการ x (final) หรือข้อความแสดงความล้มเหลวในการดำเนินการ

Algorithm: function NewtonRaphsonMethod(x_0, f, df, esp)

1. i = 0, checkErorr = 1, xOld = x_0, xNew = 0
2. While checkError > esp
    1. xNew = $xOld - \dfrac{f(xOld)}{df(xOld)}$
    2. checkError = Calculate error
    3. i = i + 1
    4. Print Output
    5. xOld = xNew
    6. If i = 10000 then
        1. Print(Can not find roots of equation)
        2. checkError = 0
3. Return xNew

```python
import math as m
```

```python
def NewtonRaphsonMethod(x, f, df, esp):
  i = 0
  xOld = x
  xNew = 0
  checkError = 1
  while checkError > esp:
    xNew = xOld - (f(xOld)/df(xOld))
    checkError = abs(xNew - xOld)
    i = i + 1
    print("i = ", i)
    print("xOld = ", xOld, " f(xOld) = ", f(xOld), " f'(xOld) = ", df(xOld))
    print("Error = ", checkError)
    print("------------------------------------------------------------")
    xOld = xNew
    if i == 10000:
      print("Can not find root of equation..")
      checkError = 0
  return xNew
```

```python
if __name__ = "__main__":
  x = 0.5
  esp = 0.000001
  f = lambda x: x**2 + 4x - 1
  df = lambda x: 2*x + 4
  rootEquation = NewtonRaphsonMethod(x, f, df, esp)
  print("Root of Equation is ", rootEquation)
```

ตัวอย่างที่ 2.11 หน้า 50-51 จากหนังสือระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ของ ธนาวุฒิ ประกอบผล จงหารากสมการ $\sin(x) = x^2$ เมื่อ $x > 0$ กำหนดความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.001 ($f(x) = \sin(x) - x^2$ และ $f'(x) = \cos(x) - 2x$)

```python
if __name__ == "__main__":
  x = 0.8571428
  esp = 0.001
  f = lambda x: m.sin(x) - x**2
  df = lambda x: m.cos(x) - (2*x)
  rootEquation = NewtonRaphsonMethod(x, f, df, esp)
  print("Root of Equation is ", rootEquation)
```

```
i =  1
xOld =  0.8571428  f(xOld) =  0.021281548149173046  f'(xOld) =  -1.0596854901261412
Error =  0.020082890095912763
------------------------------------------------------------
i =  2
xOld =  0.8772256909591276  f(xOld) =  -0.0005566519979561813  f'(xOld) =  -1.1151644246306727
Error =  0.0004991658500409502
------------------------------------------------------------
Root of Equation is  0.8767265251090867
```

$f(x) = \cos(2x+1) - 2x - 3$, $f'(x) = -2\sin(2x+1) - 2$ และ $x_0 = 1.00$ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ 0.0005

```python
if __name__ == "__main__":
  x = 1.00
  esp = 0.0005
  f = lambda x: m.cos(2*x + 1) - 2*x -3
  df = lambda x: -2*(m.sin(2*x +1)) - 2
  rootEquation = NewtonRaphsonMethod(x, f, df, esp)
  print("Root of Equation is ", rootEquation)
```

```python
def NewtonRaphsonMethod(x, f, df, esp):
  i = 0
  xOld = x
  xNew = 0
  checkError = 1
  while checkError > esp:
    xNew = xOld - (f(xOld)/df(xOld))
    checkError = abs(xNew - xOld)
    i = i + 1
    print("i = ", i)
    print("xOld = ", xOld, " f(xOld) = ", f(xOld), " f'(xOld) = ", df(xOld))
    print("xNew = ", xNew, " Error = ", checkError)
    print("------------------------------------------------------------")
    xOld = xNew
    if i == 10000:
      print("Can not find root of equation..")
      checkError = 0
  return xNew
```

Excel

ปูพื้นฐาน การ ดิฟ ก่อน

โจทย์ของคุณ: f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3

1. พจน์แรก: x^4

- ตบเลข 4 ลงมาข้างหน้า
- เลขชี้กำลังลดลง 1 (จาก 4 เหลือ 3)
- **ผลลัพธ์:** 4x^3

2. พจน์ที่สอง: + 2x^2

- มีเลข 2 รออยู่แล้ว
- ตบเลขชี้กำลัง 2 ลงมาคูณกับเลขข้างหน้า (2 \times 2 = 4)
- เลขชี้กำลังลดลง 1 (จาก 2 เหลือ 1 หรือแค่ x เฉยๆ)
- **ผลลัพธ์:** + 4x *(ตรงนี้ที่คุณพิมพ์ผิดเป็น 4-x)*

3. พจน์ที่สาม: - x (หรือ -1x^1)

- x เฉยๆ คือ x กำลัง 1
- ตบ 1 ลงมาคูณ
- เลขชี้กำลังลดลงเหลือ 0 (x^0 มีค่าเท่ากับ 1) หรือจำง่ายๆ ว่า **"ดิฟ x ได้ 1"**
- **ผลลัพธ์:** - 1

4. พจน์สุดท้าย: - 3 (ค่าคงที่)

- จำง่ายๆ ว่า **"ดิฟตัวเลขเปล่าๆ ได้ 0 เสมอ"**
- **ผลลัพธ์:** 0 (ตัดทิ้งไปเลย)

สรุปรวมร่าง

เมื่อเอาผลลัพธ์ทั้ง 4 ข้อมาต่อกัน จะได้:

f'(x) = 4x^3 + 4x - 1

ให้นักศึกษาทำการเขียนโปรแกรมหารากสมการดังต่อไปนี้ (โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน)

1. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ กำหนดช่วง [-1.5, 0.5] และ $x_0 = 1$, ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $(\varepsilon_{rel}) = 10^{-6}$

สมการคือ

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$$

ดิฟมาจะได้

$$f(x)' = 4x^3 + 4x - 1$$

ค่าของแต่ละตัวแปล

error = 0.000001

x0 = 1

f(xi) = (x0)^4 + 2 * (x0)^2 - (x0) - 3

f(xi)′ = 4 * (x0)^3 + 4 * (x0) - 1

x1 = (x0)-(f(xi) / f(xi)′)

check error = abs(x1-(x0))

check ro = if(check error ≤ error,true)

เนื่องจากด้านบนผมเขียนไปมันคือรอบ 1 ผมจะไม่เขียนอีกนะ

รอบ 2

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	=B43^4 + 2 * B43^2 - B43 - 3				
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	=4 * B43^3 + 4 * B43 - 1		9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	=B43-(C41/C42)	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	=ABS(C43-B43)	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	ABS(number)	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	=IF(C44<=G39, TRUE)		TRUE		
		IF(logical_test, [value_if_true], [value_if_false])				

รอบ 3

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	=C43^4 + 2 * C43^2 - C43 - 3			
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	=4 * C43^3 + 4 * C43 - 1			
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	=C43-(D41/D42)			
check error	0.142857143	0.018375453	0.00036	1.342E-07		
check ro	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE		

A	B	C	D	E	F	G
						f(x) = x^4 + 2 * x^2 - x - 3
					x0	1
						f(x)' = 4 * x^3 + 4 * x - 1
						0.000001
Newton-Raphson	round 1	round 2	round 3			
f(xi)	-1	0.175343607	0.00329	1.232E-06		
f(xi)'	7	9.542274052	9.18537	9.1784986		
x1	1.142857143	1.12448169	1.12412	1.124123		
check error	0.142857143	0.018375453	=ABS(D43-C43)			
check ro	FALSE	FALSE	ABS(number)	UE		

หากกรณีที่ อจ. ไม่ได้ให้ x0 มา ซึ่งผมึดมาไม่ให้แน่ๆ เราจะหาได้ไง?

1. วิธีที่ปลอดภัยที่สุด: "เลือกจุดกึ่งกลางช่วง"

ให้จับเลขหัวท้ายบวกกันแล้วหาร 2 เลยครับ วิธีนี้ง่ายและปลอดภัยที่สุด เพราะค่าที่ได้จะอยู่ตรงกลางพอดี ไม่เอียงไปทางไหนมากเกินไป

- **จากโจทย์:** ช่วงคือ [-1.5, 0.5]
- **วิธีคิด: (**-1.5 + 0.5)/2 = -0.5
- **สรุป:** เลือก x**0 = -0.5** ครับ

2. วิธีเลือกเลขจำนวนเต็มที่ใกล้ที่สุด (เน้นคิดเลขง่าย)
ถ้าเราขี้เกียจคิดเลขทศนิยมเยอะๆ เราสามารถเลือกเลขจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วงนั้นได้ครับ
- ในช่วง [-1.5, 0.5] มีเลขจำนวนเต็มคือ **-1** และ **0**
- คุณสามารถเลือก **x0 = -1** หรือ **x0 = 0** ก็ได้เช่นกัน (แต่วิธีนี้ต้องระวังนิดนึงว่าค่า f'(x) ณ จุดนั้นต้องไม่เท่ากับ 0)

แล้วถ้าเราเลือก x0 ผิดละ จะรู้ได้ยังไง

1. อาการ "Error พุ่งกระฉูด" (Divergence) 🚀
นี่คืออาการที่พบบ่อยที่สุดเมื่อเลือก x0 ไม่ดี
- **สังเกตใน Excel:** ค่า x ในรอบถัดๆ ไปจะกระโดดไปไกลมาก เช่น จาก 2 กลายเป็น 50, กลายเป็น 5000 หรือกลายเป็นเลขยกกำลังสูงๆ (`1.5E+24`) จนสุดท้าย Excel ขึ้น `######` หรือ `#NUM!`
- **สาเหตุ:** คุณไปเลือกจุดเริ่มต้นตรงที่กราฟมีความชันน้อยมาก (เกือบแบน) ทำให้เส้นสัมผัส (Tangent Line) พุ่งออกไปไกลลิบครับ

2. อาการ "หารศูนย์" (Division by Zero) ⛔
- **สังเกตใน Excel:** ขึ้นตัวแดงว่า `#DIV/0!` ทันทีในบรรทัดถัดไป
- **สาเหตุ:** บังเอิญว่าจุด x0 ที่คุณเลือก (หรือจุดที่คำนวณได้ระหว่างทาง) ดันไปตรงกับ **จุดยอดภูเขา หรือ ก้นเหว** ของกราฟพอดี
- ซึ่งตรงจุดนั้นค่าความชัน **f'(x) = 0** ครับ พอสูตรเอาไปเป็นตัวหาร คอมพิวเตอร์เลย error ครับ

3. อาการ "ติดลูปวนไปมา" (Oscillation) 🏓
- **สังเกตใน Excel:** ค่า x กระโดดสลับไปมาที่เดิมไม่ยอมจบซักที
  - เช่น รอบ 1 ได้ x=2
  - รอบ 2 ได้ x=-2
  - รอบ 3 กลับมาได้ x=2 อีกแล้ว
  - วนอยู่แบบนี้ Error ไม่ลดลง
- **สาเหตุ:** เลือกจุดเริ่มต้นอยู่กึ่งกลางระหว่างหลุมพรางของกราฟพอดี ทำให้มันเด้งไปเด้งมาเหมือนปิงปอง

4. อาการ "ได้คำตอบนะ...แต่ไม่ใช่ที่ต้องการ" (Wrong Convergence) 🤔
อันนี้คือเคสที่คุณเพิ่งเจอเมื่อกี้เลยครับ! คือ Excel คำนวณออกมาได้ `TRUE` สวยงาม Error น้อยมาก แต่...
- **สังเกตใน Excel:** ค่า x สุดท้ายที่ได้ **ไม่อยู่ในช่วงที่โจทย์กำหนด**
  - โจทย์บอกให้หาในช่วง [-1.5, 0.5]
  - แต่คำตอบดันไปโผล่ที่ 1.12 (ซึ่งอยู่นอกเขต)

- **สาเหตุ:** ฟังก์ชันหนึ่งๆ อาจจะมีคำตอบ (ราก) หลายจุดครับ การเลือก x0เหมือนการเลือก "จุดปล่อยลูกบอล" ถ้าปล่อยผิดฝั่ง ลูกบอลก็กลิ้งลงหลุมผิดหลุมครับ

Code Python

ให้นักศึกษาทำการเขียนโปรแกรมหารากสมการดังต่อไปนี้ (โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน)

1. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ กำหนดช่วง [-1.5, 0.5] และ $x_0 = 1$, ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $(\varepsilon_{rel}) = 10^{-6}$

```
def newton_raphson(x, esp):
# ฟังก์ชัน f(x)
    f = lambda x: x4 + 2*x2 - x - 3
# อนุพันธ์ f'(x) (Diff แล้ว)
    df = lambda x: 4x**3 + 4x - 1

    i = 0
    checkError = 1000  # ค่าเริ่มต้นสมมติให้เยอะไว้ก่อน

    print(f"{'Iter':<5} {'x_old':<12} {'f(x)':<12} {'f\\'(x)':<12} {'x_new':<12} {'Erro
r':<12}")
    print("-" * 70)

    while checkError > esp:
    # คำนวณค่า f(x) และ f'(x) ณ จุดปัจจุบัน
    f_val = f(x)
    df_val = df(x)

    # ป้องกันการหารด้วย 0
    if df_val == 0:
        print("Error: อนุพันธ์เป็น 0 (Slope is zero)")
```

```
        return None

    # สูตร Newton-Raphson: x_new = x_old - (f(x) / f'(x))
    x_new = x - (f_val / df_val)

    # คำนวณ Error (Relative Error)
    if x_new != 0:
        checkError = abs((x_new - x) / x_new)

    # แสดงผลลัพธ์แต่ละรอบ
    print(f"{i+1:<5} {x:.6f}     {f_val:.6f}     {df_val:.6f}     {x_new:.6f}     {checkErr
or:.6e}")

    # อัปเดตค่า x สำหรับรอบถัดไป
    x = x_new
    i += 1

    # กันลูปไม่จบ
    if i >= 100:
        print("หาคำตอบไม่เจอใน 100 รอบ")
        break

    return x_new

# -- กำหนดค่าตามโจทย์ ---

x0 = 1           # ค่าเริ่มต้น
tolerance = 1e-6  # ค่า Error (10^-6 หรือ 0.000001)

print(f"Start Newton-Raphson at x0 = {x0}\n")
root = newton_raphson(x0, tolerance)

print("-" * 70)
print(f"คำตอบสุดท้าย (Root) คือ: {root:.6f}")
```