基本数值计算方法

第9周习题

更新时间： 2020.04.30

作业要求

1. 请在下周五(2020.05.08)之前在Canvas平台上交作业。 小组作业只需交一份。
2. 脚本文件的要求：
   a) 首行加入注释：用途，作者，日期， 输入变化和输出变量的简要说明
   b) 程序主体的首行加入： clear all; close all; clc
   c) 在程序中加入对变量及算符的注释
   d) 等号两端加入空格。
3. 电子版文件名(若包含多个源文件，请放置在一个目录下后打包成一个文件)格式：第n周作业_姓名_学号.xxx, 或第n周小组作业_小组k.xxx.

小组作业

1. 已知实验数据如下

t_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

   用最小二乘法采用模型函数$y=a+bt^2$拟合上述数据。
   (1) 请推导a, b的求解公式。
   (2) 根据(1)的结果， 编写脚本， 确定a与b, 并计算均方误差RMSE
2. 有等距取值点上的25个观测值y如下

```
t = 1:25
y = [5.0291      6.5099 5.3666 4.1272 4.2948
        6.1261 12.5140      10.0502      9.1614 7.5677
        7.2920 10.0357      11.0708      13.4045      12.8415
        11.9666      11.0765      11.7774      14.5701      17.0440
        17.0398      15.9069      15.4850      15.5112      17.6572]
```

   (1) 用直线模型$y(t)=a_0+a_1t$拟合数据，并绘出残差$y(t_k)-y_k$. 你一定可以观察到，有一个数据点处的残差特别大。它可能是一个离群点。

(2) 剔除离群点，再用直线拟合，并再次绘出残差。你在残差曲线里看出了什么模式了吗?
(3) 不考虑离群点，用下列模型拟合所给数据$y(t)=\beta_1+\beta_2 t+\beta_3\sin t$，并绘出拟合曲线。

3. 考虑如下的估计式

$$\prod_{p<P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\approx C_1+C_2\ln P$$

其中P为素数，p为所有不大于P的素数。编写脚本，从素数列表中的数据计算这些乘积，并由此做拟合确定C_1和C_2.
提示：可用 `primes(103)` 来产生素数序列

4. 产生11个数据点，$t_k=(k-1)/10$, $y_k=\mathrm{erf}(t_k)$ (`erf` 为误差函数), $k=1,\cdots,11.$
(1) 分别用1-10阶多项式对数据进行最小二乘法拟合。在拟合区间之间，对拟合多项式的值与$\mathrm{erf}(t)$的实际函数值进行比较。问：最大误差与多项式阶次有何关系?
(2) 由于$\mathrm{erf}(x)$是奇函数，即$\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}(x)$, 因此采用$t$的奇次幂的组合拟合数据更为合理

$$\mathrm{erf}(t)\approx c_1 t+c_2 t^3+\cdots+c_n t^{2n-1}$$

问：拟合区间中的误差与n之间的关系。
(3) 事实上，多项式不能较好近似$\mathrm{erf}(t)$, 因为随t变大，多项式值无界，而$\mathrm{erf}(t)$趋于1，所以，请对同一组数据采用如下拟合模型

$$\mathrm{erf}(t)\approx c_1+e^{-t^2}\left(c_2+c_3 z+c_4 z^2+c_5 z^3\right)$$

其中$z=1/(1+t)$. 请讨论该模型的误差与多项式模型的比较。

5. 分别用3阶多项式和5阶多项式拟合数据。数据由如下函数

$$y=\sin\left(\frac{1}{x+0.2}\right)+0.2x$$

加上一些随机噪声生成，随机噪声的分布是标准差为0.06的正态分布。请在同张图上画出两条拟合曲线，并讨论拟合结果。
提示：使用 `randn` 产生随机噪声，使用 `polyfit` 做多项式拟合。

6. 在某项科学实验中，需要观察水的渗透速度，测得时间t与水的重量的数据如下：

t (s)	1	2	4	8	16	32	64
w (g)	4.22	4.02	3.85	3.59	3.44	3.02	2.59

采用理论模型$w = ct^{\lambda}$拟合数据，确定参数c与λ.

7. 原子弹爆炸的能量估计。1945年7月16日，美国在Las Alamos沙漠试爆了世界上第一颗原子弹。两年之后，美国政府首次公开了这次爆炸的录像带，而其他数据和资料仍然不被外界所知。物理学家G.I.Taylor通过研究录像带，通过测量爆炸形成的“蘑菇云”的半径估计了爆炸所释放的能量。他得到的估计值与若干年后正式公布的爆炸能量21kt相当接近 (1kt为1千吨TNT炸药的爆炸能量, $1\ \mathrm{kt} = 4.184 \times 10^{12}$ 焦耳)。Taylor的想法是：蘑菇云半径r与时间t, 爆炸能量E以及空气密度ρ有关，在分析这几个量的单位后，采用量纲分析法得到如下蘑菇云半径的近似表达式

$$r = \left(\frac{t^2 E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$$

其中r, t, E的单位分别是米，秒和焦耳，空气密度ρ取为1.25 kg/m^3. 请下载并读取数据文件 `Taylor_bomb_energy.xlsx` , 根据蘑菇云半径随时间变化的数据估计E，请用kt表示你的计算结果。