基本数值计算方法

第13周习题

更新时间： 2020.05.28

作业要求

请于下周五(2020.06.05)之前在Canvas平台上交作业。

小组作业

1. Leonard Euler和Colin Maclaurin在1735年左右独立发现的Euler-Maclaurin公式可以说明采用复合梯形公式， 在**等间距节点**对**周期函数**积分时所能达到的精度远比$O(h^2)$要高。

   Euler-Maclaurin定理： 如果$f \in C^{2n}[a,b], T_h$是对$\int_a^b f(x)dx$的复合梯形法则的计算结果， 则

$$
\begin{aligned}
T_h - \int_a^b f(x)dx = &\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] - \frac{h^4}{720}[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] \\
&+ \frac{h^6}{30,240}[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \cdots \\
&+ (-1)^{n-2}\frac{b_{2n-2}}{(2n-2)!}h^{2n-2}[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)] \\
&+ (-1)^{n-1}\frac{b_{2n}}{（2n）!}h^{2n}f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]
\end{aligned}
$$

   公式中的$(-1)^{j-1}b_{2j}$称为Bernoulli数。

   这样如果f是周期是$b-a$或$\frac{b-a}{m}$ (m是正整数)的周期函数， 与积分从何处开始无关， 上式的所有项除了最后一项都是零。 而且如果f无穷可微， n能够取到任意大， 梯形法则的误差将比h的任何幂次减小得都快， 这样得收敛速度称为超代数收敛 (这种超代数收敛并不唯一针对复合梯形法则， 其他方法包括高斯积分公式也可能， 甚至对非周期光滑函数超代数收敛)。

   请在等间距节点上用复合梯形法则计算

$$\int_1^{1+4\pi} e^{\sin x} dx$$

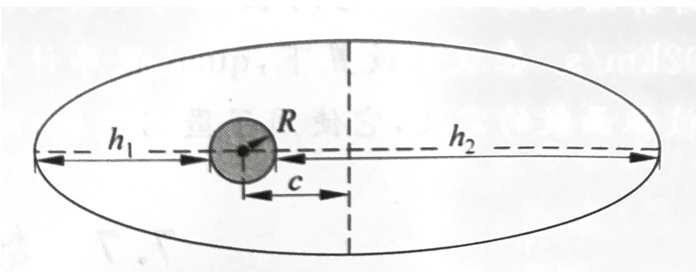
比较步长$h = \pi, \pi/2, \pi/4, \pi/8, \pi/16$的结果， 检验上述说法。

2. 求对所有形式是$f(x) = ae^x + b\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$的函数都准确的公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

$f(x)$的表达式中的a和b是任意常数。

3. 已知"嫦娥一号"卫星的近地点距离$h_1 = 200$km, 远地点距离$h_2 = 51000$km, 地球半径$R = 6378$ km. 求



(1) 椭圆轨道的长半轴$a = ?$, 短半轴$b = ?$
提示：如图所示$a^2 = b^2 + c^2$.
(2) 分别利用5点和10点高斯积分方法计算椭圆轨道的长度L,

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x^2 + y^2} d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta$$

(3) 与Matlab内置函数 `integral` 的计算结果比较， 高斯积分方法计算值的相对误差是多少？
提示：高斯积分所采用的样点和权重可在文献[1]或 https://dlmf.nist.gov/ 中查找.

4. 利用2点高斯积分计算二重积分

$$I = \int\int_K (2 - x - 2y)dxdy$$

其中K是以下三点定义的三角形: $(0, 0)$, $(1, 1/2)$和$(0, 1)$.
提示：
(a) 当$h(x) \le y \le g(x)$, 可设

$$y = [g(x) - h(x)]z + h(x)$$

则$z \in [0,1]$.

(b) 此题的精确解为1/3.

5. 利用5点高斯积分计算三重积分

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$$

6. 利用表格中的数据求在$x=3.6$处的二阶微商

x_k	y_k
3	0.4817
3.3	0.9070
3.6	1.4496
3.9	2.1287

(1) 选择合适的3点作二阶多项式插值后求解；

(2) 应用matlab内置函数 `dif` f求解。

7. 以下表格记录了1960年至2010年之间每隔10年所统计的加拿大人口总数，

年 t	人口, p (百万)
1960	17.9
1970	21.3
1980	24.6
1990	27.8
2000	30.8
2010	34.1

(1) 利用三点反向差分公式计算2010年人口增长率。

(2) 利用(1)的结果， 以及两点中心差分公式， 预测2020年的人口总数。

1. Frank W J Olver, *NIST handbook of mathematical functions*， 第3章 ↩