usage: homework for week 4

author: 黄哲昊

date: 2020.3.26

```
%clear all; close all; clc
```

个人作业

1. 设$a = 1000$，取**4**位有效数字用如下两个等价的式子

$$x = \sqrt{a+1} - \sqrt{a},\ x = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

进行计算， 求x的近似值$\hat{x}$， 并将结果与准确值$x = 0.015807437\ldots$进行比较， 你的结果各有多少位有效数字?

解:

$$\hat{x}_1 = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \sqrt{1001} - \sqrt{1000} = 31.64 - 31.62 = 0.02$$ （根据最后的减法保留到小数点后第2位）

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1001}+\sqrt{1000}} = \frac{1}{31.64+31.62} = 0.01581$$ （根据最后的除法保留四位有效数字）

根据x的近似值$\hat{x}$的相对误差满足$|e_r| \le \frac{1}{2} \times 10^{-p}$， 则$\hat{x}$至少有$p$位有效位数，

函数Significant_figures计算相应的有效位数。

```
format long
a = 1000
```

```
a =
        1000
```

```
x_hat1 = 0.02
```

```
x_hat1 =
   0.020000000000000
```

```
x_hat2 = 0.01581
```

```
x_hat2 =
   0.015810000000000
```

```
x_real = 0.015807437
```

```
x_real =
   0.015807437000000
```

```
x_hat1_sf = Significant_figures(x_hat1, x_real)
```

```
x_hat1_sf =
     1
```

```
x_hat2_sf = Significant_figures(x_hat2, x_real)
```

```
x_hat2_sf = 
     4
```

因此可知$\hat{x}_1$有1位有效位数，$\hat{x}_2$有4位有效位数。

2. 序列$\{y_k\}$满足递推关系$y_n = 5y_{n-1} - 2$，$n = 1, 2, \ldots$. 若取$y_0 = 1.73$计算到y_{10}时，将会产生多大的误差?

解:

$y_0 = 1.73$为三位有效数字，故结果均保留三位有效数字，得

$\hat{y}_1 = 5 \times 1.73 - 2 = 6.65$

$\hat{y}_2 = 5 \times 6.65 - 2 = 33.2 - 2 = 31.2$

$\hat{y}_3 = 5 \times 31.2 - 2 = 1.54 \times 10^2$

$\hat{y}_4 = 5 \times 154 - 2 = 7.68 \times 10^2$

$\hat{y}_5 = 5 \times 768 - 2 = 3.84 \times 10^3$

$\hat{y}_6 = 5 \times 3840 - 2 = 19200 - 2 = 1.92 \times 10^4$

$\hat{y}_7 = 5 \times 19200 - 2 = 96000 - 2 = 9.60 \times 10^4$

$\hat{y}_8 = 5 \times 96000 - 2 = 480000 - 2 = 4.80 \times 10^5$

$\hat{y}_9 = 5 \times 4.80 \times 10^5 - 2 = 2.40 \times 10^6 - 2 = 2.40 \times 10^6$

$\hat{y}_{10} = 5 \times 2.40 \times 10^6 - 2 = 1.20 \times 10^7 - 2 = 1.20 \times 10^7$

接下去用递推式计算y_{10}的准确值

```
y_0 = 1.73
```

```
y_0 = 
   1.730000000000000
```

```
y_10 = y_0
```

```
y_10 = 
   1.730000000000000
```

```
for i = 1:10
    y_10 = 5*y_10 - 2;
end
fprintf("%f", y_10)
```

```
12011719.250000
```

```
y_hat10 = 1.20e7
```

```
y_hat10 = 
```

```
    12000000
```

```
e = y_hat10 - y_10
```

```
e =
    -1.171925000000000e+04
```

```
e_r = e / y_10
```

```
e_r =
    -9.756513415013425e-04
```

由计算得到$y_{10} = 12011719.25$， $e \approx -1.17 \times 10^4$， $e_r \approx -9.76 \times 10^{-4}$

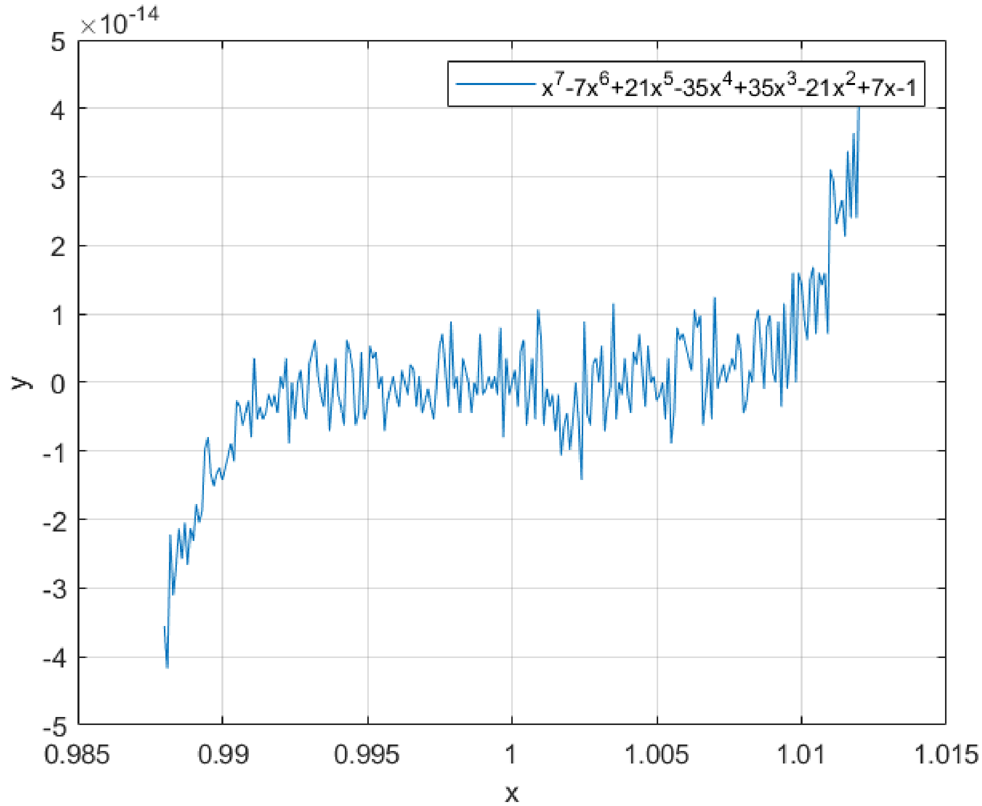
3. 以下是绘制七阶多项式曲线的程序：

$x = 0.988 : .0001 : 1.012;$
$y = x.^7 - 7 * x.^6 + 21 * x.^5 - 35 * x.^4 + 35 * x.^3 - 21 * x.^2 + 7 * x - 1;$

请绘制这条曲线， 讨论其误差来源， 并指出改善的算法。

解：

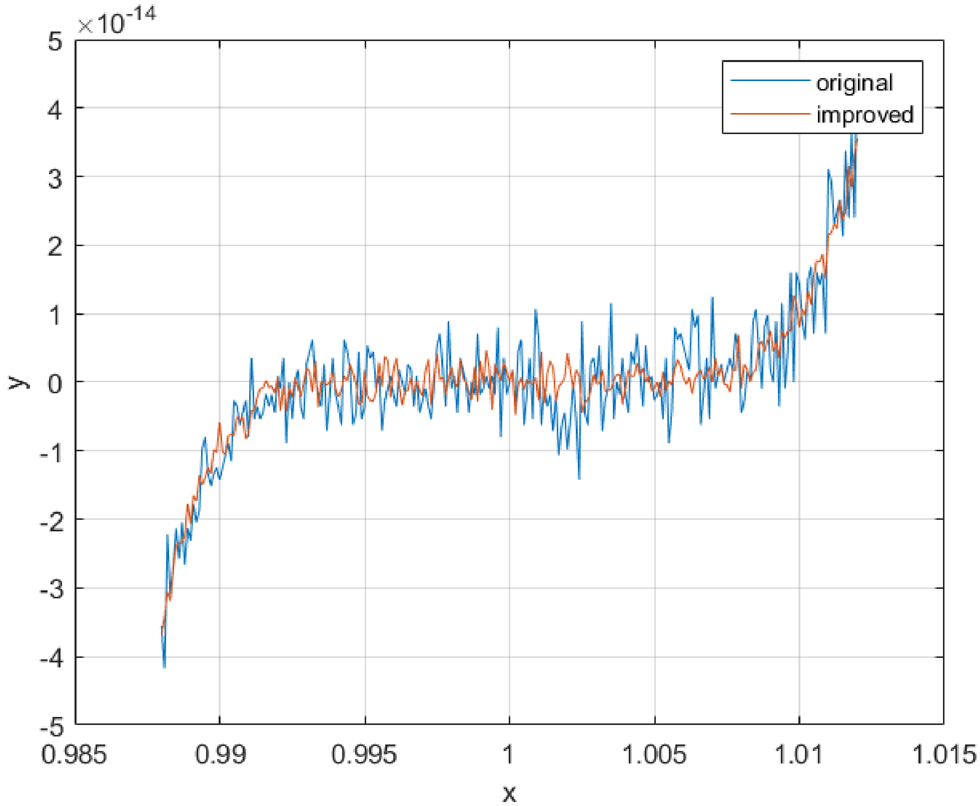
```
x = 0.988:.0001:1.012;
y = x.^7 - 7*x.^6 + 21*x.^5 - 35*x.^4 + 35*x.^3 - 21*x.^2 + 7*x - 1;
plot(x, y)
grid on
xlabel('x'), ylabel('y')
legend("x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1")
```



主要误差来源于舍入误差，由于有限的精度运算造成的误差；还有算法误差，由于这种多项式算法执行了$\sum_{i=1}^{7} i = \frac{7\times(7+1)}{2} = 28$和$7$次加法

利用Matlab内置函数：polyval(p,x)可以减少乘法次数，提高精确度

```
p = [1 -7 21 -35 35 -21 7 -1];
y_improve = polyval(p, x);
plot(x, y, x, y_improve)
grid on
xlabel('x'), ylabel('y')
legend('original', 'improved')
```



4. 寻找不严重丢失有效位的方法来计算下列函数

a) $\sqrt{x^2+1}-x$；

b) e^x-x-1；

c) $\sin(x)-\tan(x)$.

解：

a) 避免两个相近的数相减：$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b)当$x>>0$或$x<<0$时会出现大数吃小数的情况，

为了减小误差：$x(\dfrac{(e^x-1)}{x}-1)$

c)利用三角恒等式：$sin(1-\dfrac{1}{cos(x)})$

5. 函数求值问题的绝对条件数定义为

$$cond = \frac{||\text{问题的解的变化量}||}{||\text{输入数据的变化量}||}$$
$$= \frac{|f(\hat{x}) - f(x)|}{|\hat{x} - x|}$$

设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

a) 求*f*的绝对和相对条件数。

b) 在绝对意义下*f*在哪里是良态的? 在相对意义下呢?

c) 假设用$\hat{x} = 10^{-16}$代替$\hat{x} = 10^{-17}$ (一个小的绝对改变，但却是一个大的相对改变)。 利用*f*的绝对条件数，请问在自变量这种改变下，*f*的改变有多大?

解:

a）绝对条件数:

$$cond = \frac{|f(\hat{x}) - f(x)|}{|\hat{x} - x|}$$
$$f(\hat{x}) - f(x) \approx f'(x)(\hat{x} - x)$$
$$\therefore cond = |f'(x)| = |(\sqrt[3]{x})'| = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

相对条件数:

$$cond = \left|\frac{[f(\hat{x}) - f(x)]/f(x)}{(\hat{x} - x)/x}\right| \approx \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}$$

b）在绝对意义下，当$x \to 0, cond \to \infty$，这时计算*f*是高度敏感的。

在相对意义下，$cond \approx \frac{1}{3}$，计算*f*是非常良态的。

c）当用 $\hat{x} = 10^{-16}$ 代替 $\hat{x} = 10^{-17}$ ，绝对条件数: $cond = \left|\frac{\sqrt[3]{10^{-16}} - \sqrt[3]{10^{-17}}}{10^{-16} - 10^{-17}}\right| = 2.7635 \times 10^{10}$

通过计算可以看到虽然自变量仅仅是一个小的绝对改变，但事实上*f*的改变量相对自变量而言却高出了非常多的数量级。

```
cond = abs(((10^(-16)).^(1/3)-(10^(-17)).^(1/3))/(10^(-16)-10^(-17)))
```

```
cond = 2.7635e+10
```

计算有效位数的函数:Significant_figures

```
function output = Significant_figures(x_hat, x_real)
    e_r = (x_hat - x_real) / x_real;
    count = 0;
    while(abs(e_r) <= 0.5*10^(-count))
        count = count + 1;
    end
    output = count;
end
```