基本数值计算方法

第11周习题

更新时间： 2020.05.14

作业要求

请在下周五(2020.05.22)之前在Canvas平台上交作业。

小组作业

1. 如果一个矩阵A是正定对称矩阵或是正定厄密矩阵， 那么它可以表达成

$$A = U^T U$$

   其中U是一个上三角矩阵， 这样的分解称为Cholesky分解。 Matlab中 \ 求解$Ax = b$时， 若A是正定对称(或正定厄密)矩阵， 则用下面的方法实现：
   - 先做Cholesky分解， 使得$A = U^T U$.
   - 然后求解$U^T y = b$, 因为U^T是下三角矩阵， 可利用前向替代法求解y.
   - 最后求解$Ux = y$, 因为U是上三角矩阵， 可利用反向替代法求解x.

   请利用Matlab的内置函数 `chol` 进行Cholesky分解， 编写代码实现反向替代法和正向替代法，求解以下线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   提示：若A不是对称矩阵， 仍可以采用Cholesky分解求解$(A^T A)x = A^T b$.
2. 参考样本程序， 编写代码， 同时实现雅可比迭代与高斯-赛德尔迭代， 并求解方程组$Ax = b$. 精度$\epsilon = 0.5e - 6$, 矩阵A定义为

$$
\begin{aligned}
&a_{ii} = -4 \\
&a_{ij} = 2, \text{当} |i-j| = 1 \\
&a_{ij} = 0, \text{当} |i-j| \geq 2 \\
&i, j = 1, 2, \cdots, 10
\end{aligned}
$$

右端项b为：

$$b^T = [2\ 3\ 4\ \cdots\ 11]$$

使用初始值$x_i = 0$, 也可以使用其他初始值。 将结果与Matlab的 \ 直接求得的结果进行对比。

3. 在求解$Ax = b$中， 可以把A表达成$A = V - U$, 这样$Vx = Ux + b$, 由此可以使用迭代公式

$$Vx^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

来求解。
现在取V的主对角线上(diagonal)和上一行的副对角线上(upper diagonal)的矩阵元与A对应的矩阵元相同， 其余矩阵元为零. 采用与雅可比迭代法一样的迭代终止条件， 编写程序实现以上迭代方法， 并求解以下线性方程组

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 10 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 12 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -2 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}$$

初始试探值可取

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. 正交矩阵A定义为矩阵与自身转置为单位矩阵的方阵， 即

$$AA^T = A^T A = I$$

请验证下列矩阵是正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$$

5. 利用 `pinv`， `qr`， `\` 求解如下超定方程组:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 2.0 \\ 1.9 & -3.0 & 2.2 \\ 2.1 & -2.9 & 2.0 \\ 6.1 & 2.1 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 & 2.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.01 \\ 0.98 \\ 4.94 \\ 4.10 \end{pmatrix}$$

6. 以下数据是1900-2010年的美国总人口数，单位为百万人：

年份	**人口数**	**年份**	**人口数**
1900	75.995	1960	179.323
1910	91.972	1970	203.212
1920	105.711	1980	226.505
1930	123.203	1990	249.633
1940	131.669	2000	281.422
1950	150.697	2010	308.748

假设人口增长的模型是t的三次多项式，
(1) 请采用QR分解法(Matlab内置的 `qr` 函数)， 实现最小二乘法，从而确定三次多项式中的4个参数， 并计算χ^2.
(2) 采用这个模型， 预测2020年的人口数。
提示：
(a) 先要对t做定标处理， 即采用变换

$$s = (t - 1955)/55$$

则新变量s在$[-1, 1]$区间内， 而模型为

$$y = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3$$

(b) 你可以选取缩小的样本， 比如6个数据 `s=((1950:20:2000)'-1950)/50` , 做两阶多项式拟合

$$y = a_0 + a_1 s + a_2 s^2$$

预测2010年的人口, 通过和实际人口普查数据的比较测试你的程序。