

基本数值计算方法

第7周习题

更新时间： 2020.04.16

作业要求

1. 请在下周五(2020.04.23)之前在Canvas平台上交作业。 小组作业只需交一份。本周作业旨在加强 Matlab的编程能力， 请每位同学参与小组讨论， 完成所有习题。
2. 脚本文件的要求：
 - a) 首行加入注释：用途，作者，日期，输入变化和输出变量的简要说明
 - b) 程序主体的首行加入： clear all; close all; clc
 - c) 在程序中加入对变量及算符的注释
 - d) 等号两端加入空格。
3. 电子版文件名(若包含多个源文件，请放置在一个目录下后打包成一个文件)格式：第n周作业_姓名_学号.xxx, 或第n周小组作业_小组k.xxx.

小组作业

1. 下面代码是用来计算下述函数：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

```
x = linspace(-4,4);
N = length x;
for j = 1:N
    if x(j)>=0 and x(j)<=1
        f(j) = x(j);
    elseif x(j)>1 or x(j)<2
        f(j) = 2 - x;
    else
        f(j) = zero;
    end
```

请改正其中的错误。

2. 编写一个函数文件产生希尔伯特矩阵(Hilbert matrix):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

该函数只需要一个输入变量，即矩阵的阶数 n ，输出变量有两个： $n \times n$ 的希尔伯特矩阵和它的行列式。使用 `det` 验证对于 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ，希尔伯特矩阵 H_n 的行列式分别是 1, 12, 2160, 6048000, 266716800000的倒数。

3. 以下是Fibonacci正弦函数和Fibonacci余弦函数的定义

$$\text{sFs}(x) = \frac{\gamma^x - \gamma^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad \text{cFs}(x) = \frac{\gamma^x + \gamma^{-x}}{\sqrt{5}}$$

其中 $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$ 。复数类正弦Fibonacci函数由下式定义

$$\text{cqsF}(x, n) = \frac{\gamma^x - \cos(n\pi x)\gamma^{-x}}{\sqrt{5}} + i \frac{\sin(n\pi x)\gamma^{-x}}{\sqrt{5}}$$

- (1) 使用匿名函数计算三个函数的函数值，在一张图上绘制 $\text{sFs}(x)$ 和 $\text{cFs}(x)$ 函数曲线， x 取值范围为 $[-5, 5]$
 - (2) 使用 `plot3` 绘制3D图形，其中 x 取值范围为 $[-5, 5]$ ， y 值为 $\text{cqsF}(x, 5)$ 的实数部分， z 值为 $\text{cqsF}(x, 5)$ 的虚数部分。
4. (选做) 使用 `meshgrid` 和 `mesh` 绘制3D图形

$$z = f(x, y) = (1 - x^2)e^{-p} - pe^{-p} - e^{-(x+1)^2 - y^2}$$

$$x = -4 : 0.1 : 4, \quad y = -4 : 0.1 : 4$$

其中 $p = x^2 + y^2$ 。使用 `surf` 和 `contour` 重新绘制，并使用 `subplot` 将3张图沿竖直方向放置在一起。

5. Illinois算法是1971年Dowell和Jarret提出的一个寻根方法^[1]，它的想法是：

初始试探区间: 函数值在两端异号, $f_0 f_1 < 0$

For $k = 1, 2, \dots$

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f[x_0, x_1]}$$

- 如果 $f_1 f_2 < 0$, (x_0, f_0) 由 (x_1, f_1) 替代

- 如果 $f_1 f_2 > 0$, (x_0, f_0) 由 $(x_1, g f_1)$ 替代
 (x_1, f_1) 由 (x_2, f_2) 替代

$$\text{其中 } f_{0,1,2} = f(x_{0,1,2}), f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$g = 0.5$$

编写程序实现Illinois算法, 求解开普勒方程

$$E - e \sin E = M$$

参数 e 取为哈雷彗星轨道的偏心率 $e = 0.96727464$, $M = 4.527594 \times 10^{-3}$, 设置精度 $|\Delta E| < 1e-6$.

提示: 为了测试Illinois算法, 可以先采用试验方程 $\sin x = 0.5 = 0$, 试探区间取为 $[0, 1.5]$, 根为 $\pi/6$.

6. 设 $f(x) = x + 2/x$, 请编写程序

(1) 应用 $x = (1, 2, 2.5)$ 处的三个数据点进行二阶拉格朗日多项式插值求 $f(1.5)$ 和 $f(1.2)$ 的近似值。

(2) 应用 $x = (0.5, 1, 2, 2.5)$ 处的四个数据点进行三阶拉格朗日多项式插值求 $f(1.5)$ 和 $f(1.2)$ 的近似值。

7. 考虑区间 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = \sin x$, 确定步长 h , 使得线性拉格朗日插值的精度为 10^{-6} .

8. 给出概率积分 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 的数据表

x	0.46	0.47	0.48	0.49
$f(x)$	0.4846555	0.4937452	0.5027498	0.5116683

用二阶多项式插值计算:

(1) 当 $x = 0.472$ 时, 积分值等于多少?

(2) 当 x 为何值时积分为0.5?

提示: 可使用 `polyfit` .

1. Dowell, M. and Jarrett, P., *A modified regula falsi method for computing the root of an equation*, BIT, 11, 168–174, 1971. [↩](#)