基本数值计算方法

第4周习题

更新时间： 2020.03.26

作业要求

1. 每周请在QQ公告处关注作业内容, 并在下周四在Canvas平台上交作业。 小组作业只需交**一份。**
2. 作业报告应包括
   a) 对算法的简述（可以用思维导图，概念图，流程图）
   b) 源码
   c) 结果展示（图表）
   d) 结果分析
   e) 附件内容（如参考文献等）
3. 脚本文件的要求：
   a) 首行加入注释：用途，作者，日期， 输入变化和输出变量的简要说明
   b) 程序主体的首行加入： clear all; close all; clc
   c) 在程序中加入对变量及算符的注释
   d) 等号两端加入空格。
4. 电子版文件名(若包含多个源文件，请打包成一个文件)格式：第n周作业_姓名_学号.xxx, 或第n周小组作业_小组k.xxx.

个人作业

1. 设$a = 1000$, 取4位有效数字用如下两个等价的式子

$$x = \sqrt{a+1} - \sqrt{a},\ x = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

   进行计算， 求x的近似值$\hat{x}$, 并将结果与准确值$x = 0.015807437\ldots$进行比较， 你的结果各有多少位有效数字?
2. 序列$\{y_k\}$满足递推关系$y_n = 5y_{n-1} - 2, n = 1, 2, \ldots$. 若取$y_0 = 1.73$, 计算到$y_{10}$时， 将会产生多大的误差?
3. 以下是绘制七阶多项式曲线的程序：

```
x=0.988:.0001:1.012;
y=x.^7 - 7*x.^6 + 21*x.^5 - 35*x.^4 + 35*x.^3 - 21*x.^2 + 7*x - 1;
```

请绘制这条曲线， 讨论其误差来源， 并指出改善的算法。

4. 寻找不严重丢失有效位的方法来计算下列函数

   a) $\sqrt{x^2+1}-x$;

   b) e^x-x;

   c) $\sin(x)-\tan(x)$.

5. 函数求值问题的绝对条件数定义为

$$\begin{aligned}\text{cond} &= \frac{\|\text{问题的解的变化量}\|}{\|\text{输入数据的变化量}\|} \\ &= \frac{|f(\hat{x}) \quad - f(x)|}{|\hat{x}-x|}\end{aligned}$$

   设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

   a) 求f的绝对和相对条件数。

   b) 在绝对意义下f在哪里是良态的？ 在相对意义下呢？

   c) 假设用$\hat{x}=10^{-16}$代替$\hat{x}=10^{-17}$ (一个小的绝对改变，但却是一个大的相对改变)。 利用f的绝对条件数，请问在自变量这种改变下，f的改变有多大？

小组作业

1. 编写程序，按照下式计算常数e,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

   a) 对$n=10^{(1,2,...,20)}$, 进行计算。

   b) 将结果和内部函数 `exp(1)` 比较，确定近似值的误差。

   c) 误差是否随n的增加而降低？请画出误差的变化趋势曲线。

2. 可以证明

$$\pi=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

   请自定义函数 `my_pi` ， 以正整数n为变量， 计算有限项求和

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

分别取$n = 10, 20, 40$， 打印出结果从而证明等式成立，并求出相对误差。

3. 编写程序，用无穷级数计算指数函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

a) 若按自然顺序求和，应用什么判停标准?

b) 用$x = \pm 1, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20$测试程序，将内部函数$\exp(x)$的结果作为准确值，评估计算结果的误差。

c) 当$x < 0$时，能否通过此程序得到准确的结果？能否通过级数项的重新排列或分组得到较准确的结果? 请设法改进你的程序。

4. 在Fourier级数理论中， Lebesgue常数的作用非常重要， 实践中常用下列公式计算Lebesgue常数

$$\rho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tan \frac{k\pi}{2n+1}$$

写一个程序， 用来计算Lebesgue常数$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{100}$ (要求结果保留8位有效数字)， 并验证下列不等式是否成立?

$$0 \le \frac{4}{\pi^2} \ln(2n+1) + 1 - \rho_n \le 0.0106$$