usage: teamwork for week 13

author: 黄哲昊 毛晨光 鲁潇阳

date: 2020.5.30

```
clear all; close all; clc
```

1. Leonard Euler和**Colin Maclaurin**在**1735**年左右独立发现的**Euler-Maclaurin**公式可以说明采用复合梯形公式，在**等间距节点**对**周期函数**积分时所能达到的精度远比$O(h^2)$要高。

Euler-Maclaurin定理：如果$f \in C^{2n}[a,b]$，T_h是对$\int_a^b f(x)dx$的复合梯形法则的计算结果，则

$$T_h - \int_a^b f(x)dx = \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] - \frac{h^4}{720}[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)]$$
$$+ \frac{h^6}{30,240}[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \cdots$$
$$+(-1)^{n-2}\frac{b_{2n-2}}{(2n-2)!}h^{2n-2}[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)]$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{b_{2n}}{(2n)!}h^{2n}f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

公式中的$(-1)^{j-1}b_{2j}$称为**Bernoulli**数。

这样如果f是周期是$b-a$或$\frac{b-a}{m}$(m是正整数)的周期函数，与积分从何处开始无关，上式的所有项除了最后一项都是零。而且如果f无穷可微，n能够取到任意大，梯形法则的误差将比h的任何幂次减小得都快，这样得收敛速度称为超代数收敛(这种超代数收敛并不唯一针对复合梯形法则，其他方法包括高斯积分公式也可能，甚至对非周期光滑函数超代数收敛)。

请在等间距节点上用复合梯形法则计算

$$\int_1^{1+4\pi} e^{\sin x}dx$$

比较步长$h = \pi, \pi/2, \pi/4, \pi/8, \pi/16$的结果，检验上述说法。

解:

```
clear all; close all; clc
f_1 = @(x) exp(sin(x));
I_1_check = integral(f_1, 1, 1+4*pi);
fprintf("积分的真实值为：%f", I_1_check)
```

```
积分的真实值为：15.909853
```

```
T_1 = zeros(5, 1);
for i = 1:5
```

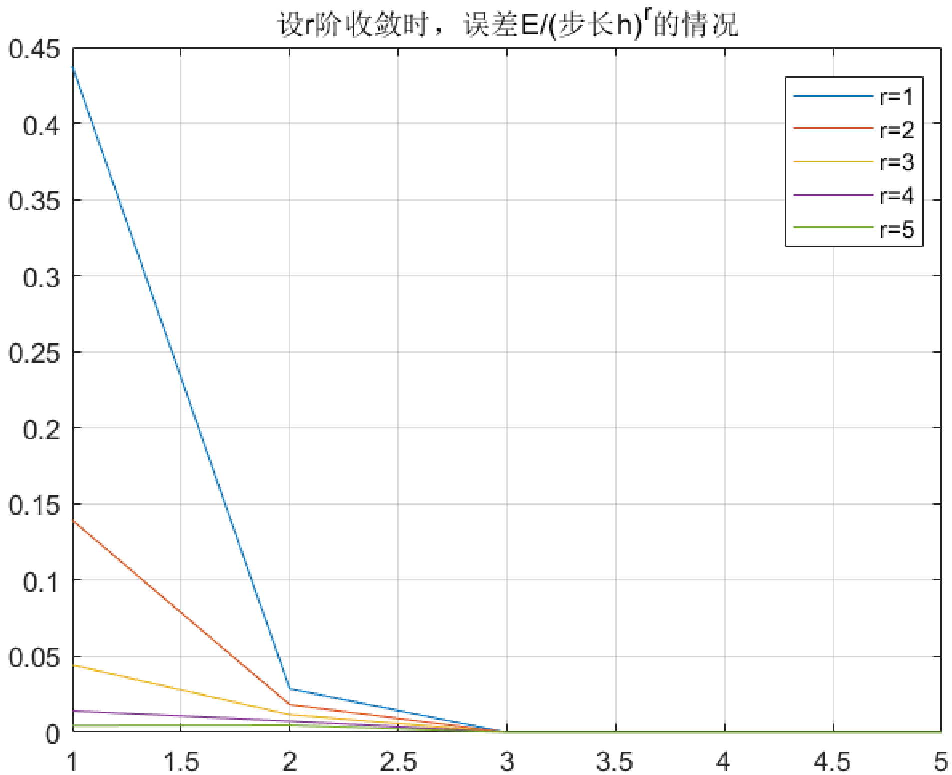
```
    n = 2^(i+1);
    T_1(i) = TrapComp(f_1, 1, 1+4*pi, n);
end
E_1 = T_1 - I_1_check;
fprintf("分段数\t h \t T_h \t 误差")
```

```
分段数   h    T_h     误差
```

```
for i = 1:5
    fprintf("%d \t PI/%d \t %f \t %f\n", 2^(i+1), 2^(i-1), T_1(i), E_1(i))
end
```

```
4    PI/1    17.284118    1.374265
8    PI/2    15.864888    -0.044965
16    PI/4    15.909853    -0.000000
32    PI/8    15.909853    0.000000
64    PI/16    15.909853    -0.000000
```

```
% 计算收敛阶数
R_1_1 = zeros(5, 5);
for i = 1:5
    R_1_1(i, :) = abs(E_1(1:5))'./(pi./2.^(0:4)).^(i);
end
plot(1:5, R_1_1(1, :))
hold on
plot(1:5, R_1_1(2, :))
plot(1:5, R_1_1(3, :))
plot(1:5, R_1_1(4, :))
plot(1:5, R_1_1(5, :))
hold off
legend("r=1","r=2","r=3","r=4","r=5",'Location',"best")
title("设r阶收敛时，误差E/(步长h)^r的情况")
grid on
```



从图中可以看到随着步长h的减小，复合梯形法则计算的积分值与真实值之间的误差与步长h的r阶次方的比值，仍然趋向于0，说明5阶的情况下迭代速度超过h的最高5阶幂次，是超代数收敛。

2. 求对所有形式是 $f(x) = ae^x + b\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 的函数都准确的公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

$f(x)$ 的表达式中的 a 和 b 是任意常数。

解:

对$f(x)$积分得

$$\int_0^1 ae^x = a\cdot(e-1)$$

$$\int_0^1 bcos(\frac{\pi}{2}x) = b\cdot\frac{2}{\pi}\cdot sin(\frac{\pi}{2}) = b\cdot\frac{2}{\pi}$$

又因为$f(0)=a+b; f(1)=a\cdot e$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(1) = A_0(a+b) + A_1\cdot e\cdot a = (e-1)\cdot a + \frac{2}{\pi}b$$

解方程即为

$$\begin{cases} A_0 = \frac{2}{\pi} \\ A_1 = 1 - \frac{1+\frac{2}{\pi}}{e} \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}f(0) + (1 - \frac{1+\frac{2}{\pi}}{e})f(1)$$

3. 已知"嫦娥一号"卫星的近地点距离$h_1 = 200$**km,** 远地点距离$h_2 = 51000$**km,** 地球半径$R = 6378$**km.** 求

(1) 椭圆轨道的长半轴$a = ?$**,** 短半轴$b = ?$

提示：如图所示$a^2 = b^2 + c^2$**.**

(2) 分别利用**5**点和**10**点高斯积分方法计算椭圆轨道的长度***L*****,**

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x^2+y^2}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

(3) 与**Matlab**内置函数**`integral`**的计算结果比较， 高斯积分方法计算值的相对误差是多少?

解:

（1）

```
clear all; close all; clc
format long
h_1 = 200;
h_2 = 51000;
R = 6378;
% 长半轴
a_3 = (h_1 + h_2 + 2*R)/2
```

```
a_3 =
        31978
```

```
c_3 = h_2 + R  - a_3;
% 短半轴
b_3 = sqrt(a_3^2 - c_3^2)
```

```
b_3 =
     1.942762167636584e+04
```

椭圆轨道的长半轴$a = 31978$km，短半轴$b = 19427.76$km。

（2）

使用勒让德多项式的解作为高斯积分的取点

```
f_3 = @(x) 4*sqrt(a_3^2.*cos(x).^2 + b_3^2.*sin(x).^2);
[I_3_5, root_3_5, weight_3_5] = GaussL(f_3, 0, pi/2, 5) % 5点高斯积分
```

```
I_3_5 =
     1.639108808646213e+05
root_3_5 = 1×5
  -0.906179845938664  -0.538469310105683  -0.000000000000000   0.538469310105683 ···
weight_3_5 = 5×1
   0.236926885056189
   0.478628670499368
   0.568888888888887
   0.478628670499367
   0.236926885056189
```

```
[I_3_10, root_3_10, weight_3_10] = GaussL(f_3, 0, pi/2, 10) % 10点高斯积分
```

```
I_3_10 =
     1.639111645064743e+05
root_3_10 = 1×10
  -0.973906528517172  -0.865063366688984  -0.679409568299024  -0.433395394129248 ···
weight_3_10 = 10×1
   0.066671344308687
   0.149451349150585
   0.219086362515977
   0.269266719309997
   0.295524224714759
   0.295524224714741
   0.269266719310010
   0.219086362515970
   0.149451349150587
   0.066671344308687
```

通过5点高斯积分得到的$L = 1.6391 \times 10^5 km$，通过10点高斯积分得到的$L = 1.6391 \times 10^5 km$。

（3）

```
I_3_check = integral(f_3, 0, pi/2)
```

```
I_3_check =
     1.639111645052142e+05
```

```
E_3_5 = abs(I_3_check - I_3_5)/I_3_check
```

```
E_3_5 =
     1.730453162396780e-06
```

```
E_3_10 = abs(I_3_check - I_3_10)/I_3_check
```

```
E_3_10 =
```

```
7.687397886702232e-12
```

通过与Matlab内置函数‘integral’比较，5点高斯积分的相对误差为1.7304×10^{-6}，10点高斯积分的相对误差为7.6872×10^{-12}

4. 利用**2**点高斯积分计算二重积分

$$I = \int \int_K (2 - x - 2y) dxdy$$

其中K是以下三点定义的三角形: $(0, 0)$，$(1, 1/2)$和$(0, 1)$.

提示:

(a) 当$h(x) \le y \le g(x)$，可设

$$y = [g(x) - h(x)]z + h(x)$$

则$z \in [0, 1]$.

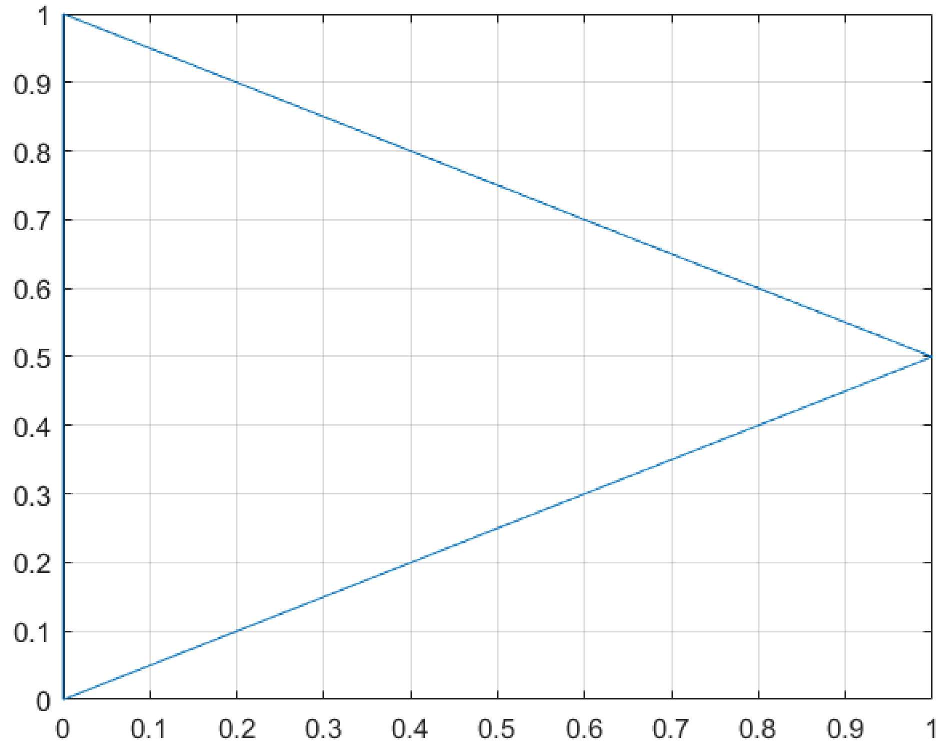
(b) 此题的精确解为**1/3.**

解:

方法一

首先画出积分区域

```
clear all; close all; clc
x_4_plot = [0, 1, 0, 0];
y_4_plot = [0, 0.5, 1, 0];
plot(x_4_plot, y_4_plot);
grid on
```



可以得到$0 \le x \le 1, \frac{1}{2}x \le y \le 1 - \frac{1}{2}x$

```
f_4 = @(x, y) 2-x-2*y;
b_4 = 1; a_4 = 0;
root_4 = [-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
weight_4 = [1, 1];
x_4 = (b_4 - a_4)/2*root_4+(b_4 + a_4)/2;
X_4 = repmat(x_4, 2, 1)
```

```
X_4 = 2×2
   0.211324865405187   0.788675134594813
   0.211324865405187   0.788675134594813
```

```
h = @(x) 0.5*x;
g = @(x) 1-0.5*x;
```

令$Y = \begin{pmatrix} (g(X_4(1)) - h(X_4(1)))z_1 + h(X_4(1)) & (g(X_4(2)) - h(X_4(2)))z_1 + h(X_4(2)) \\ (g(X_4(1)) - h(X_4(1)))z_2 + h(X_4(1)) & (g(X_4(2)) - h(X_4(2)))z_2 + h(X_4(2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(X_4(1) - h(X_4(1)) & g(X_4(2) - h \\ h(X_4(1)) & h(X_4(2 \end{pmatrix}$

```
Y_4 = [x_4',ones(2, 1)]*[g(x_4) - h(x_4); h(x_4)];
Z_4 = f_4(X_4, Y_4);
I_4_1 = (b_4 - a_4)*(g(x_4) - h(x_4))/4.*weight_4*Z_4*weight_4'
```

```
I_4_1 =
   0.333333333333333
```

方法二

y=(1-x)z+0.5x 带入到func中

$$I=\int\int_K (2-x-2y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 [2-x-2(1-x)z-x](1-x)dxdz$$

```
func = @(x,z) (2-x-2*(1-x).*z-x).*(1-x);
b1 = 1; a1 = 0;% x的取值范围
b2 = 1; a2 = 0;% z的取值范围
root2 = [-sqrt(1/3) sqrt(1/3)]';
weight2 = [1 1];
x2 = (b1 - a1)/2*root2 + (b1 + a1)/2;
y2 = (b2 - a2)/2*root2 + (b2 + a2)/2;
[X,Y] = meshgrid(x2,y2);
Z = func(X,Y);
I_4_2 = (b2 - a2)*(b1 - a1)/4*weight2*Z*weight2'
```

```
I_4_2 =
   0.333333333333333
```

验证得到的结果为1/3。

5. 利用**5**点高斯积分计算三重积分

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$$

解:

```
clear all; close all; clc
f_5 = @(x, y, z) 1./sqrt(x + y + z);
b_5 = 1; a_5 = 0;
% 计算五点高斯积分的权重和取点
rm = sqrt(5 - 2*sqrt(10./7))/3;
rp = sqrt(5 + 2*sqrt(10./7))/3;
root_5 = [-rp -rm 0 rm rp]';
wm = (322. + 13.*sqrt(70))/900;
wp = (322. - 13.*sqrt(70))/900;
weight_5 = [wp wm 128./225 wm wp];
% 计算网格
x_5 = (b_5 - a_5)/2*root_5 + (b_5 + a_5)/2;
y_5 = (b_5 - a_5)/2*root_5 + (b_5 + a_5)/2;
z_5 = (b_5 - a_5)/2*root_5 + (b_5 + a_5)/2;
[X_5, Y_5, Z_5] = meshgrid(x_5, y_5, z_5);
F_5 = f_5(X_5, Y_5, Z_5);
% 方法1
% 运用矩阵计算
I_5_1 = ((b_5 - a_5)/2)^3*weight_5*sum(F_5.*reshape(weight_5, 1, 1, 5), 3)*weight_5'
```

```
I_5_1 = 0.8628
```

```
%方法2
% 或者使用循环进行求和运算
I_5_2 = 0;
```

```
for i = 1:5
    for j = 1:5
        for k = 1:5
            I_5_2 = I_5_2 + weight_5(i)*weight_5(j)*weight_5(k)*F_5(i,j,k);
        end
    end
end
I_5_2 = I_5_2*((b_5-a_5)/2)^3
```

```
I_5_2 = 0.8628
```

```
% 求解精确值
I_5_check = integral3(f_5, 0, 1, 0, 1, 0 ,1)
```

```
I_5_check = 0.8629
```

```
% 计算相对误差
E_5 = abs(I_5_check - I_5_1)/I_5_check
```

```
E_5 = 5.7758e-05
```

5点高斯积分计算得到的积分值为0.86283，真实值为0.86288，两者的相对误差为5.7758×10^{-5}

6. 利用表格中的数据求在$x = 3.6$处的二阶微商

| x_k **|** y_k **|**

| 3 | 0.4817 |

| 3.3 | 0.9070 |

| 3.6 | 1.4496 |

| 3.9 | 2.1287 |

(1) 选择合适的**3**点作二阶多项式插值后求解；

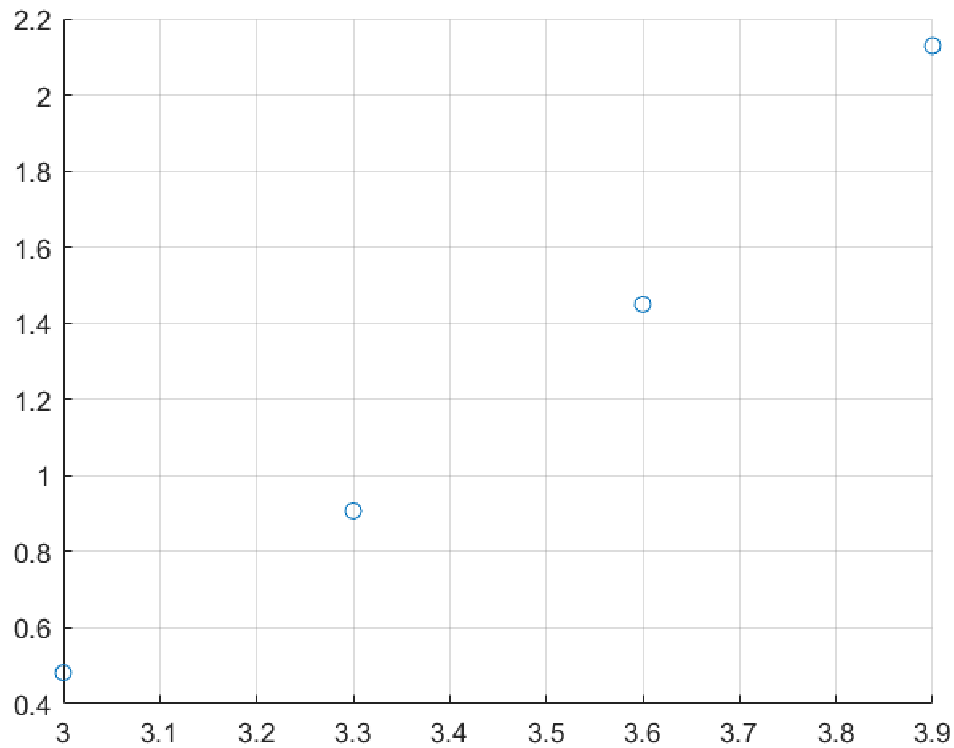
(2) 应用**matlab**内置函数`diff`求解。

解：

（1）

首先用散点图的方式观察数据：

```
clear all; close all; clc
x_6 = [3, 3.3, 3.6, 3.9];
y_6 = [0.4817, 0.9070, 1.4496, 2.1287];
scatter(x_6, y_6)
grid on
```



由于求$x = 3.6$处的二阶微商，故采用中间值为3.6的3.3、3.6、3.9三点进行二阶多项式插值。

```
p_6 = polyfit(x_6(2:end), y_6(2:end), 2);
df2_6_poly = 2*p_6(1)
```

```
df2_6_poly =
   1.516666666666691
```

由二阶多项式插值得到的二阶微商为1.5167。

（2）

```
h_6 = 0.3;
delty_6 = diff(y_6);
df1_6_diff = delty_6./h_6; % 一阶差分
delt2y_6 = diff(df1_6_diff);
df2_6_diff = delt2y_6./h_6 % 二阶差分
```

```
df2_6_diff = 1×2
   1.303333333333333   1.516666666666665
```

使用diff得到的二阶微商也为1.5167。

7. 以下表格记录了**1960**年至**2010**年之间每隔**10**年所统计的加拿大人口总数，

| 年 t | 人口, p (百万) |

1960	**17.9**
1970	**21.3**
1980	**24.6**
1990	**27.8**
2000	**30.8**
2010	**34.1**

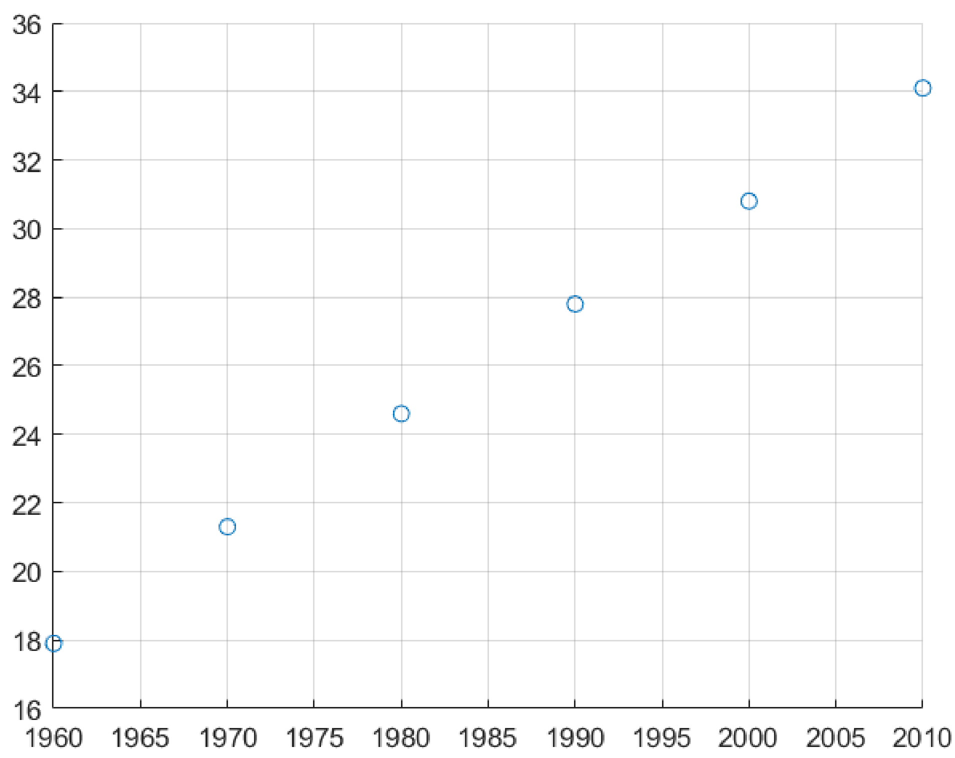
(1) 利用三点反向差分公式计算**2010**年人口增长率。

(2) 利用**(1)**的结果， 以及两点中心差分公式， 预测**2020**年的人口总数。

解:

（1）

```
clear all; close all; clc
t_7 = [1960:10:2010];
p_7 = [17.9, 21.3, 24.6, 27.8, 30.8, 34.1];
scatter(t_7, p_7);
grid on
```




```
h_7 = 10;
df_7_2010 = (3*p_7(6)-4*p_7(5)+p_7(4))/(2*h_7)
```

```
df_7_2010 =
```

```
0.345000000000000
```

三点反向差分公式得到2010年人口增长率为0.345

（2）

$P'(2010) = \frac{P(2020) - P(2000)}{20}$反推$P'(2020)$的人口数

```
pred_2020 = p_7(5) + 20*df_7_2010
```

```
pred_2020 =
  37.700000000000010
```

则预测2020年的结果为37.7百万人。

function

TrapComp：组合梯形公式

```
function I = TrapComp(f,a,b,n)
%
% TrapComp estimates the value of the integral of f(x)
% from a to b by using the composite trapezoidal rule
% applied to n equal-length subintervals.
%
% I = TrapComp(f,a,b,n) where
%
% f is an inline function representing the integrand,
% a and b are the limits of integration,
% n is the number of equal-length subintervals in [a,b],
%
% I is the integral estimate.
%
% Ramin S. Esfandiari, Numerical Methods for Engineers and Scientists Using
% Matlab,
% Section 6.3.4, p.291
%
h = (b - a)/n;
x = a:h:b;
I = h * (f(a)/2. + sum(f(x(2:n))) + f(b)/2);
end
```

djp：求解勒让德多项式的零点

```
function x=jp(N,alpha,beta)

    n=1:N;

    a(1)=(alpha+beta+2)/2;

    b(1)=(beta-alpha)/2;

    a([2:N+1])=(2*n+alpha+beta+1).*(2*n+alpha+beta+2)./(2*(n+1).*(n+alpha+beta+1));
```

```
    b([2:N+1])=(alpha*alpha-beta*beta)*(2*n+alpha+beta+1)./(2*(n+1).*(n+alpha+beta+1).*(2*n+alp

    c=(n+alpha).*(n+beta).*(2*n+alpha+beta+2)./((n+1).*(n+alpha+beta+1).*(2*n+alpha+beta));

    A=diag(b./a)+diag(1./a([1:N]),1)+diag(c./a([2:N+1]),-1);

    x=sort(eig(A))';
end

function x=djp(N,alpha,beta,m)

    N1=N-m;

    alpha1=alpha+m;

    beta1=beta+m;

    x=jp(N1,alpha1,beta1);
end
```

GaussL：使用勒让德多项式作为高斯积分的取点

```
function [I, root, weight] = GaussL(f, a, b, n)
    root = djp(n-1, 0, 0, 0); % 计算n次勒让德多项式的零点
    % 求解高斯积分的权重
    pow = [0:n-1]';
    A = root.^pow;
    B = zeros(n, 1);
    for i = 1:n
        func = @(x) (x.^(i-1));
        B(i) = integral(func, -1, 1);
    end
    weight = A\B;
    x = (b - a)/2*root + (b + a)/2;
    I = (b - a)/2*f(x)*weight;
end
```