基本数值计算方法

第10周习题

更新时间： 2020.05.07

作业要求

1. 请在下周五(2020.05.15)之前在Canvas平台上交作业。 小组作业只需交一份。
2. 脚本文件的要求：
   a) 首行加入注释：用途，作者，日期， 输入变化和输出变量的简要说明
   b) 程序主体的首行加入： clear all; close all; clc
   c) 在程序中加入对变量及算符的注释
   d) 等号两端加入空格。
3. 电子版文件名(若包含多个源文件，请放置在一个目录下后打包成一个文件)格式：第n周作业_姓名_学号.xxx, 或第n周小组作业_小组k.xxx.

小组作业

1. **条件数**(condition number)是一个矩阵的稳定性或者敏感度的度量，如果一个矩阵的条件数 在1附近，那么它就是良态(well-conditioned)的，如果远大于1，那么它就是 病态(ill-conditioned)的。 矩阵条件数的定义如下：

   $$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

   其中$\|A\|$是矩阵A的范数。 使用Matlab内置函数 `norm` 和 `inv` 求解**希尔伯特矩阵**(Hilbert Matrix)的各类条件数， 并判断其稳定性.
2. 采用牛顿法和高斯消元法求解以下非线性方程组， 并和Matlab内置函数 `fsolve` 的结果比较：

   $$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 9x^2 + 25y^2 - 225 &= 0 \end{aligned}$$

   提示：试探初值可取$(2.5, 2.0)$
3. 求解$Ax = b$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-27\\-15\\-15\\\vdots\\-15\\-15\end{pmatrix}$$

使得A为不同维度的稀疏矩阵。采用托马斯方法(追赶法)求解，请与Matlab `x=A\b` 比较计算结果和计算时间, 评析你的结论。

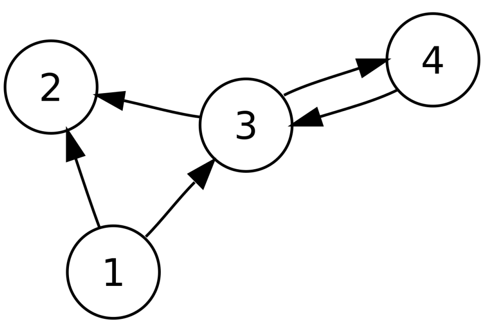
提示：Matlab内置函数 `sparse`，`spdiags`，`nnz`，`spy` 产生和观察稀疏矩阵等。

4. 读取某个大小为512×512的图像(比如图像为jpg形式，Matlab相关命令： `imread` ，`imshow` ，`rgb2gray` ， `graythresh` ，`im2bw` 等)， 由此创建你的方矩阵A, 令x的精确解为元素都为1的向量，由此产生向量b. 使用雅可比迭代法求解线性方程组$Ax=b$. 你的结果是什么？ 雅可比迭代法收敛吗？ 如果采用Matlab内置的 `x=A\b` 会有什么结果?
5. PageRank算法

我们可以从某个根网页出发通过一系列超链接到达其他的网页。假设这些所有网页的集合为W, n是W集合中网页总数。

现在建立部分互联网的$n\times n$的**关联矩阵**G（connectivity matrix）. 若从网页j到网页i存在一个链接， 则$g_{ij}=1$; 否则$g_{ij}=0$. G矩阵第j列就显示了网页j的所有外向链接， 其所有非零元素的数目就是W集合中存在的超链接总数。

(1) 以下图为例， 考虑互联网四结点子集图， 问网页关联矩阵G是什么?



(2) 用向量c表示网页的**出度**， 即c_j表示从网页j出发的超链接的数量，

$$c_j=\sum_{i=1}^{n}G_{ij}$$

求出上图实例中的c.

(3) PageRank算法： 假设每次仅以很小的可能，从互联网里选中某个随机网， 这种随机行走称为马尔科夫链, 或称马尔科夫过程(Markov chain/process)； 也就是从任意的一个试探状态起， 我们用一个n行的列向量$x^{(1)}$来表示这样的状态， 其中第j行元素$x_j^{(1)}$表示网页j被点击的概率， 那么在一次随机行走后， 向量$x^{(1)}$将被更新一次:

$$x^{(2)} = Ax^{(1)}$$

其中A称为马尔科夫链的**转移概率矩阵**(transition probability matrix), 它的元素都严格地在0-1之间， 第j列表示从网页j跳到其他网页的概率， 其列元素之和等于1。 我们假定p为超链接随机行走的概率， $p = 0.85$是其典型取值， 那么， $1-p$就是选定任意网页而不再继续外链的概率，$\delta = (1-p)/n$是选定了某一具体网页。 这样， A元素的取值如下

$$A_{ij} = \begin{cases} p\dfrac{G_{ij}}{c_j} + \delta, & c_j \neq 0 \\ \dfrac{1}{n}, & c_j = 0 \end{cases}$$

请根据上述说明计算(1)实例中的转移概率矩阵A.
(4) 经过多次随机行走后， $x^{(k)}$将收敛到一个某个值，这就是网页的PageRank值， 即

$$x = Ax$$

x的元素全为正数且小于1， 并且

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

求解$x = Ax$的一个算法是： 首先求解

$$(I - pGD)x = e$$

其中I是单位矩阵，D是出度倒数形成的对角矩阵

$$d_{jj} = \begin{cases} \dfrac{1}{c_j}, & c_j \neq 0 \\ 0, & c_j = 0 \end{cases}$$

I, G, D都作为稀疏矩阵处理。 e是与x一样维度的向量， 其元素均为1. 然后再对所得的x采用比例因子进行定标处理， 使其满足等式$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$。
请利用(1)给出的实例， 参考样本程序， 使用**LU分解法**求解x, 从而得到网站点击率的排名。