usage: teamwork for week 4

author: 黄哲昊 毛晨光 鲁潇阳

date: 2020.3.29

```
%clear all; close all; clc
```

小组作业

1. 编写程序，按照下式计算常数*e*，

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n —— (1)$$

a) 对$n = 10^{(1,2,...,20)}$，进行计算。

b) 将结果和内部函数**exp(1)**比较，确定近似值的误差。

c) 误差是否随*n*的增加而降低？请画出误差的变化趋势曲线。

解：

a)

```
%公式1
calculate_e = @(x) (1+ones(size(x))./x).^x
```

```
calculate_e = 包含以下值的 function_handle:
    @(x)(1+ones(size(x))./x).^x
```

```
% a为当n=10^(1,2,...,20)的计算结果
a = calculate_e(10.^(1:20))
```

```
a = 1×20
   2.5937e+00    2.7048e+00    2.7169e+00    2.7181e+00    2.7183e+00    2.7183e+00 ···
```

b)

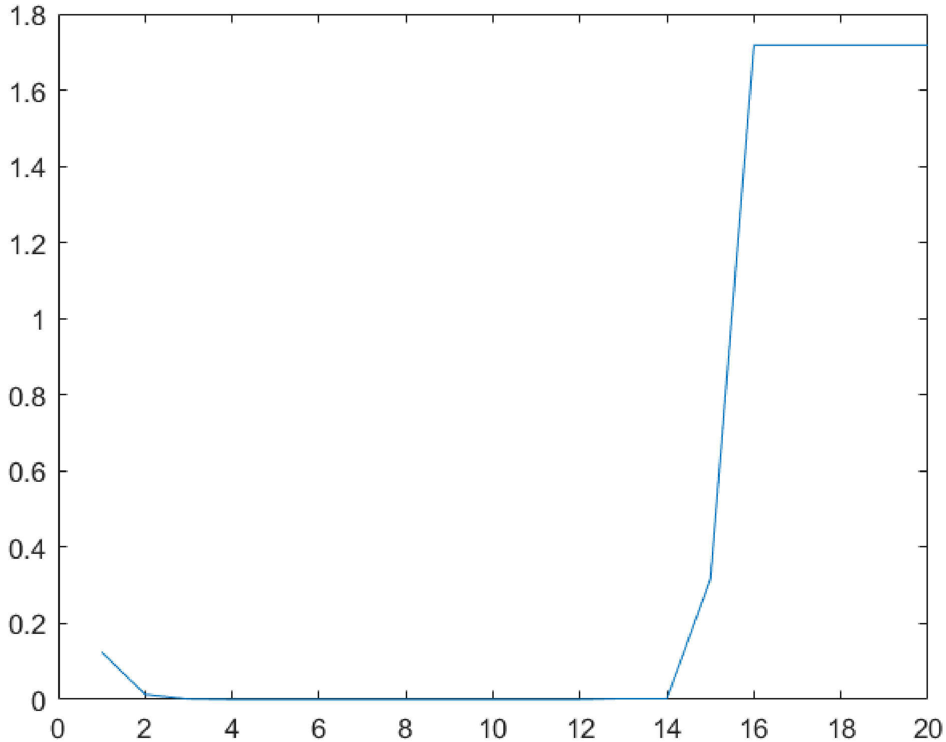
近似值的绝对误差（由于相对误差与绝对误差只相差$exp(1)$倍，总体趋势不变，故无需计算）

```
e = absolute_e(a, exp(1))
```

```
e = 1×20
  -1.2454e-01  -1.3468e-02  -1.3579e-03  -1.3590e-04  -1.3591e-05  -1.3594e-06 ···
```

c)

```
plot(1:20, abs(e))
```



由图可知，绝对误差的绝对值在$1 \le n \le 10$逐渐降低，当$n > 10$由于舍入误差而升高。

2. 可以证明

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

请自定义函数my_pi， 以正整数n为变量， 计算有限项求和

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}——(2)$$

分别取$n = 10, 20, 40$， 打印出结果从而证明等式成立，并求出相对误差。

解：

```
%公式2
n = [10 20 40]
```

```
n = 1×3
    10    20    40
```

```
p = my_pi(n)
```

```
p = 1×3
   3.0418e+00   3.0916e+00   3.1166e+00
```

```
%计算所得pi的相对误差:
e_r_p = relative_e(p, pi)
```

```
e_r_p = 1×3
  -3.1752e-02  -1.5906e-02  -7.9565e-03
```

```
%进一步验证等式成立
more_n = 40:20:1000
```

```
more_n = 1×49
          40          60          80         100         120         140 ···
```

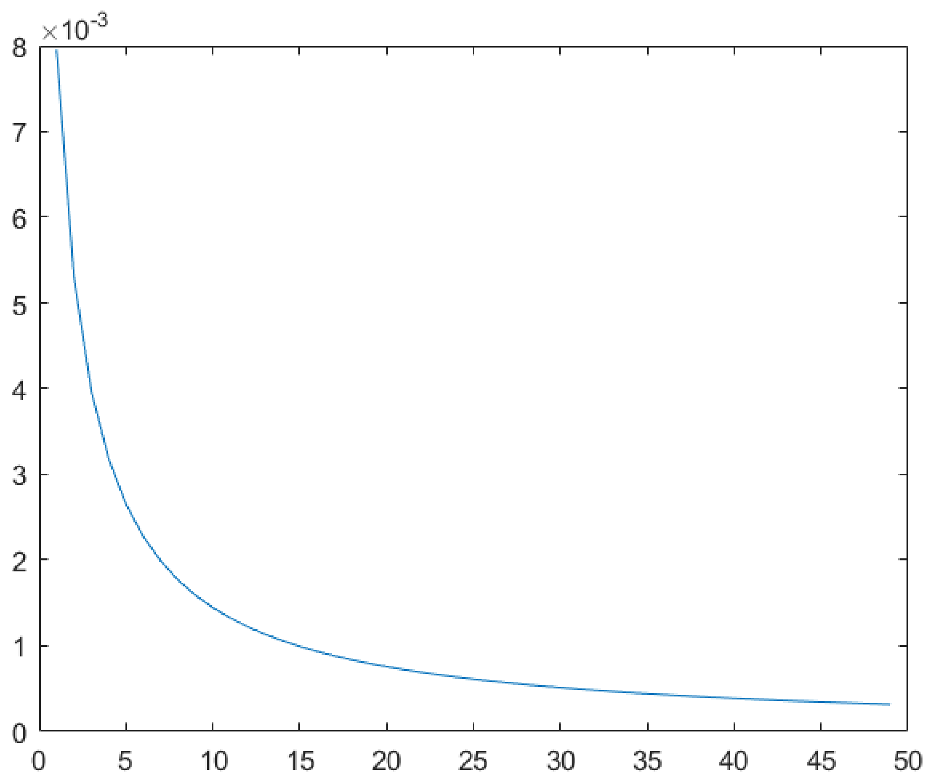
```
more_p = my_pi(more_n)
```

```
more_p = 1×49
   3.1166e+00   3.1249e+00   3.1291e+00   3.1316e+00   3.1333e+00   3.1344e+00 ···
```

```
e_r_more_p = relative_e(more_p, pi)
```

```
e_r_more_p = 1×49
  -7.9565e-03  -5.3048e-03  -3.9787e-03  -3.1830e-03  -2.6525e-03  -2.2736e-03 ···
```

```
plot(1:length(e_r_more_p),abs(e_r_more_p))
```



由图可知，当$n \to \infty$，相对误差越来越小，结果会越接近于π，等式是成立的。

3. 编写程序，用无穷级数计算指数函数

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ ——(3)

a) 若按自然顺序求和，应用什么判停标准?

b) 用 $x = \pm 1, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20$ 测试程序，将内部函数 $\exp(x)$ 的结果作为准确值，评估计算结果的误差。

c) 当 $x < 0$ 时，能否通过此程序得到准确的结果？能否通过级数项的重新排列或分组得到较准确的结果? 请设法改进你的程序。

解:

a）用无穷级数与准确值的差的绝对值是否满足预定精度，或达到最多计算项数时停止（由于计算精度，可能无法达到预定精度），作为判停标准。

b)

```
x = [-20 -15 -10 -5 -1 1 5 10 15 20]
```

```
x = 1×10
   -20   -15   -10    -5    -1     1     5    10    15    20
```

```
e_x = my_e_x(x, 1e-6, 100)
```

```
e_x = 1×10
10^8 ×
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002 ···
```

```
e_r_e_x = relative_e(e_x, exp(x))
```

```
e_r_e_x = 1×10
    1.7275    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000 ···
```

```
fprintf('my_e_x\t\texp(x)\t\te_r_e_x\n===========================================\n')
```

```
my_e_x   exp(x)   e_r_e_x
===========================================
```

```
for k=1:length(x)
    fprintf('%f\t%f\t%f\n', e_x(k), exp(x(k)), e_r_e_x(k))
end
```

```
0.000000 0.000000 1.727543
0.000000 0.000000 0.000023
0.000045 0.000045 -0.000001
0.006738 0.006738 -0.000000
0.367879 0.367879 -0.000001
2.718282 2.718282 -0.000000
148.413108 148.413159 -0.000000
22026.448956 22026.465795 -0.000001
3269015.859346 3269017.372472 -0.000000
485164975.136088 485165195.409790 -0.000000
```

当 $x > -10$ 时，级数计算结果与准确值的结果相对误差小于 1%，误差较小；

当 $x \le -10$ 时，x 越小级数计算结果误差越大。

c)

当$x<0$时，使用原程序不能得到较为准确的结果。

由级数项一正一负且随级数项的增加，正负两项和不断减小，故当$x<0$时，使用从最大求和项开始，将正负两项相加后，倒序求和。

```
x = [-20 -15 -10 -5 -1 1 5 10 15 20]
```

```
x = 1×10
   -20   -15   -10    -5    -1     1     5    10    15    20
```

```
e_x = my_e_x_improve1(x, 1e-6, 100)
```

```
e_x = 1×10
10^8 ×
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002 ⋯
```

```
e_r_e_x = relative_e(e_x, exp(x))
```

```
e_r_e_x = 1×10
    1.1801    0.0000   -0.0000   -0.0000         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000 ⋯
```

```
fprintf('my_e_x\t\texp(x)\t\te_r_e_x_improve1\n===========================================\n')
```

```
my_e_x   exp(x)   e_r_e_x_improve1
===========================================
```

```
for k=1:length(x)
    fprintf('%f\t%f\t%f\n', e_x(k), exp(x(k)), e_r_e_x(k))
end
```

```
0.000000 0.000000 1.180132
0.000000 0.000000 0.000026
0.000045 0.000045 -0.000000
0.006738 0.006738 -0.000000
0.367879 0.367879 0.000000
2.718282 2.718282 -0.000000
148.413159 148.413159 -0.000000
22026.465794 22026.465795 -0.000000
3269017.372471 3269017.372472 -0.000000
485165195.409790 485165195.409790 -0.000000
```

与之前的算法相比当$x<0$时的相对误差有较大程度的降低。

同时考虑到polyval函数可以减少乘法次数，减少一定误差，如my_e_x_improve2的结果：

```
x = [-20 -15 -10 -5 -1 1 5 10 15 20]
```

```
x = 1×10
   -20   -15   -10    -5    -1     1     5    10    15    20
```

```
e_x = my_e_x_improve2(x, 100)
```

```
e_x = 1×10
10^8 ×
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002 ⋯
```

```
e_r_e_x = relative_e(e_x, exp(x))
```

```
e_r_e_x = 1×10
   -0.3290    0.0001    0.0000    0.0000         0   -0.0000    0.0000   -0.0000 ⋯
```

```
fprintf('my_e_x\t\texp(x)\t\te_r_e_x_improve2\n===========================================\n')
```

```
my_e_x  exp(x)  e_r_e_x_improve2
===========================================
```

```
for k=1:length(x)
    fprintf('%f\t%f\t%f\n', e_x(k), exp(x(k)), e_r_e_x(k))
end
```

```
0.000000 0.000000 -0.328984
0.000000 0.000000 0.000055
0.000045 0.000045 0.000000
0.006738 0.006738 0.000000
0.367879 0.367879 0.000000
2.718282 2.718282 -0.000000
148.413159 148.413159 0.000000
22026.465795 22026.465795 -0.000000
3269017.372472 3269017.372472 0.000000
485165195.409790 485165195.409790 0.000000
```

可以看到在$x < 0$时更进一步降低了相对误差。

4. 在**Fourier**级数理论中， **Lebesgue**常数的作用非常重要， 实践中常用下列公式计算**Lebesgue**常数

$$\rho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\frac{k\pi}{2n+1} \text{——}(4)$$

写一个程序， 用来计算**Lebesgue**常数$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{100}$ (要求结果保留**8**位有效数字)， 并验证下列不等式是否成立?

$$0 \le \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1) + 1 - \rho_n \le 0.0106\text{——}(6)$$

解:

```
L = Lebesgue(100, 8)
```

```
L = 1×100
   1.4360e+00    1.6422e+00    1.7783e+00    1.8801e+00    1.9614e+00    2.0290e+00 ⋯
```

```
%验证式6
proof = (4/(pi^2)*log((1:100)*2 + 1) + 1) - L
```

```
proof = 1×100
   9.2597e-03    1.0092e-02    1.0325e-02    1.0421e-02    1.0470e-02    1.0498e-02 ⋯
```

```
%验证是否每一项都满足大于0，小于0.0106
if(length(proof(0<=proof & proof<=0.0106)) == 100)
    fprintf('Yes\n')
else
    fprintf('No\n')
end
```

```
Yes
```

可以得到式6的每一项都满足大于0，小于0.0106。

计算绝对误差的函数

```
function output = absolute_e(x_approx, x_real)
    output = x_approx - x_real .* ones(size(x_approx));
end
```

计算相对误差的函数

```
function output = relative_e(x_approx, x_real)
    output = (x_approx - x_real .* ones(size(x_approx)))./x_real;
end
```

公式2

```
function output = my_pi(x)
    output = zeros(size(x));
    for i=1:length(x)
        %通过累加的方式减少重复计算，要求x序列为升序
        if (i == 1)
            output(i) = sum(((-1).^((1:x(i))-1))./(2*(1:x(i))-1))*4;
        else
            output(i) = output(i-1) + sum(((-1).^(((x(i-1)+1):x(i))-1))./(2*((x(i-1)+1):x(i))-1
        end
    end
end
```

公式3

args:

x：输入数组，（1，）

epsilon：预定精度

max_n：最多计算的项数

```
function output = my_e_x(x, epsilon, max_n)
    output = zeros(size(x));
    for i = 1:length(x)
        item = 1;
        approx = item;
        count = 0;
        pow = x(i);
        e_x_real = exp(x(i));
        while((count <= max_n) && (abs(approx - e_x_real)/e_x_real > epsilon))
            count = count + 1;
            item = item*pow/count;
            approx = approx + item;
        end
```

```
        output(i) = approx;
    end
end
```

公式3优化

args:

x：输入数组，（1，）

epsilon：预定精度

max_n：最多计算的项数

```
function output = my_e_x_improve1(x, epsilon, max_n)
    output = zeros(size(x));
    for i = 1:length(x)
        pow = x(i);
        if(pow >= 0)
            item = 1;
            approx = item;
            count = 0;
            pow = x(i);
            e_x_real = exp(x(i));
            while((count <= max_n) && (abs(approx - e_x_real) > epsilon))
                count = count + 1;
                item = item*pow/count;
                approx = approx + item;
            end
        else
            approx = 0;
            item = ones(1, max_n);
            for k = 2:max_n
                item(k) = item(k - 1)*pow/(k - 1);
            end
            for k = flip(2:2:max_n)
                approx = approx + item(k) + item(k - 1);
            end
        end
        output(i) = approx;
    end
end

function output = my_e_x_improve2(x, max_n)
    output = zeros(size(x));
    item = ones(1, max_n);
    for k = 2:max_n
        item(k) = item(k - 1)/(k - 1);
    end
    for i = 1:length(x)
        output(i) = polyval(flip(item), x(i));
    end
end
```

公式4

args:

x：计算项数

s：有效位数

```
function output = Lebesgue(x, s)
    output = zeros(1, x);
    for n = 1:x
       for k = 1:n
           output(n) = output(n) + 1/k*tan(k*pi/(2*n + 1));
       end
       output(n) = output(n)*2/pi + 1/(2*n + 1);
    end
    output = round(output, s, 'significant');
end
```

计算有效位数的函数:Significant_figures

```
function output = Significant_figures(x_hat, x_real)
    e_r = (x_hat - x_real) / x_real;
    count = 0;
    while(abs(e_r) <= 0.5*10^(-count))
        count = count + 1;
    end
    output = count;
end
```