基本数值计算方法

第15周习题

更新时间： 2020.06.11

作业要求

请于下周五(2020.06.19)之前在Canvas平台上交作业。

小组作业

1. 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{y} \\ y(0) = 2, \quad t \in [0, 7.0] \end{cases}$$

(1) 设置步长$h = 0.7$, 采用前向欧拉算法。
(2) 设置步长$h = 0.7$, 采用Heun方法(即改进的欧拉公式)。
(3) 设置步长$h = 0.7$, 采用经典RK4方法。
(4) 精确解为$y = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$, 请将上述数值计算结果与之比较， 讨论误差。并将结果画在一张图上.

2. 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - \dfrac{xy}{2} \\ y(1) = 1, \quad x \in [1, 5] \end{cases}$$

(1) 设置步长$h = 0.4$, 采用前向欧拉算法。
(2) 设置步长$h = 0.4$, 采用Heun方法(即改进的欧拉公式)。
(3) 设置步长$h = 0.4$, 采用经典RK4方法。

(4) 精确解为$y=2-e^{\frac{1-x^2}{4}}$, 请将上述数值计算结果与之比较， 讨论误差。并将结果画在一张图上.

3. 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=y+t^3\\ y(0)=1, \quad x\in[0,5]\end{cases}$$

(1) 设置步长$h=0.5$, 采用前向欧拉算法。
(2) 设置步长$h=0.5$, 采用中心公式。
(3) 设置步长$h=0.5$, 采用经典RK4方法。
(4) 精确解为$y=7e^t-t^3-3t^2-6t-6$, 请将上述数值计算结果与之比较， 讨论误差。并将结果画在一张图上.

4. 求解变系数的一阶微分方程

$$\begin{cases}y'(t)+f(t)y(t)=g(t)\\ y(1)=1, \quad t\in[1,5]\end{cases}$$

已知$f(t)$在时间节点 `ft` 的函数值为 `f` . $g(t)$在时间节点 `gt` 的函数值为 `g`

```
ft = linspace(0,5,25);
 f = ft.^2 - ft - 3;

 gt = linspace(1,6,25);
 g = 3 * sin(gt - 0.25);
```

(1) 设置步长$h=0.1$, 采用RK2的中心公式， 计算$y(t)$的近似值。
(2) 设置步长$h=0.1$, 采用经典RK4公式， 计算$y(t)$的近似值, 并与(1)题结果比较。请将结果画在一张图上。
提示： 可调用matlab的内置函数 `interp1` 对$f(t)$与$g(t)$进行插值。

5. 误差函数$\operatorname{erf}(x)$由以下积分形式定义

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

也可以通过求解以下常微分方程求得近似值

$$\begin{cases}y'=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\\ y(0)=0\end{cases}$$

选择合适的步长，采用RK4方法在$0 \le x \le 2$上求解，并与matlab内置函数 `erf(x)` 比较结果.

6. 请将以下2阶常微分方程改写成两个一阶常微分方程组

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 6y + e^{\sin t} = 0$$

7. 请将以下两个2阶常微分方程改写成四个一阶常微分方程组

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{\gamma}{m}\left(\frac{dy}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$