

# 基本数值计算方法

## 第5周习题

更新时间： 2020.04.02

### 作业要求

1. 每周请在QQ公告处关注作业内容, 并在下周四在Canvas平台上交作业。 小组作业只需交**一份**。
2. 作业报告应包括
  - a) 对算法的简述 (可以用思维导图, 概念图, 流程图)
  - b) 源码
  - c) 结果展示 (图表)
  - d) 结果分析
  - e) 附件内容 (如参考文献等)
3. 脚本文件的要求:
  - a) 首行加入注释: 用途, 作者, 日期, 输入变化和输出变量的简要说明
  - b) 程序主体的首行加入: `clear all; close all; clc`
  - c) 在程序中加入对变量及算符的注释
  - d) 等号两端加入空格。
4. 电子版文件名(若包含多个源文件, 请打包成一个文件)格式: 第n周作业\_姓名\_学号.xxx, 或第n周小组作业\_小组k.xxx.

### 小组作业

1. 证明方程  $e^x + 10x - 2 = 0$  存在唯一实根, 用二分法求此根, 要求误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ 。
2. 用定点迭代法求解方程  $x = e^{-x}$  在  $x = 0.5$  附近的一个根, 要求: 事先确定有根区间并判断迭代公式的收敛性, 误差上限为  $\epsilon = 10^{-5}$ 。
3. 用定点迭代法和定点迭代法的Aitken(埃特金)加速方法<sup>[1]</sup>, 计算  $x = \ln(x + 2)$  在  $x = 0.5$  附近的近似根, 要求  $|x^* - x_k| < 10^{-4}$ , 并比较收敛的快慢。
4. 割线法是跟牛顿法相似的数值方法, 但它需要两个接近真实根的初值  $x_0$  和  $x_1$ , 由此得到函数  $f(x)$  上两个点  $(x_0, y_0 = f(x_0))$  和  $(x_1, y_1 = f(x_1))$ , 连接这两点得到一条直线, 称之为割线:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

我们用这条割线近似函数本身, 因此设  $y = 0$ , 由上式解出割线与  $x$ -轴的截点, 作为下次迭代的初

值。这个过程一直进行下去，利用如下迭代关系：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} y_n$$

分别用割线法和牛顿法求解下列方程的根，比较两者的收敛速度：

(1)  $x e^x - 1 = 0$ ;

(2)  $\ln x + x - 2 = 0$ .

5. Halley方法是求解非线性方程的一个数值方法，它采用的递推公式是

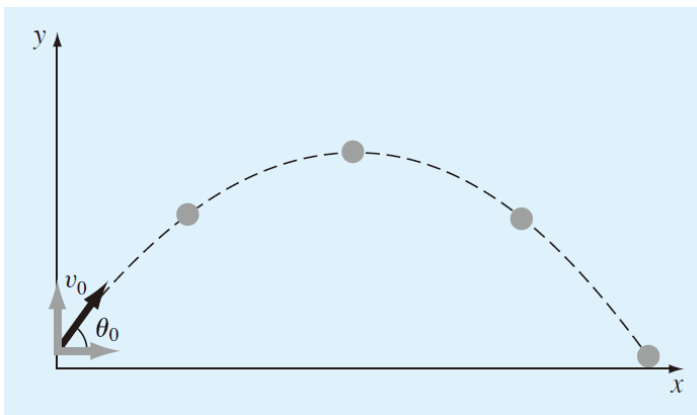
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

(1) 编写程序实现Halley算法，并求解  $f(x) = 5x^7 + 2x - 1$  和  $g(x) = 1/x^3 - 10$ .

(2) 请根据你的结果判断Halley方法的收敛速度是否比牛顿方法更快？Halley方法是线性收敛，二次收敛，还是三次收敛？

6. 已知一个小球做斜抛运动，它的运动轨道由下式给出

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + y_0$$



若初始速率  $v_0 = 30 \text{ m/s}$ , 发球处的高度为  $1.8\text{m}$ , 接球处的高度为  $1\text{m}$ 。求投射的初始角度  $\theta_0$ , 使得发球处和接球处的水平距离为  $90\text{m}$ .  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

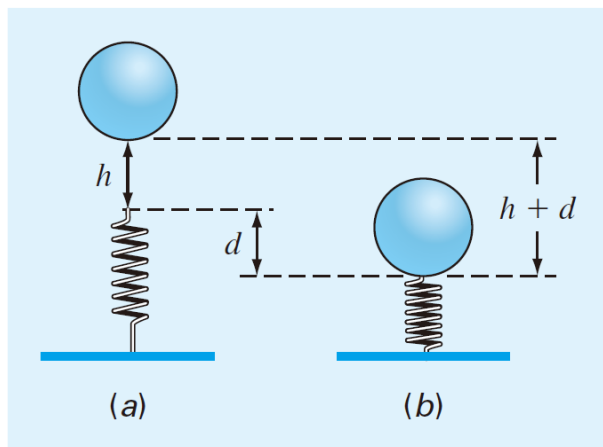
7. 一个质量为  $m$  的物块从高处  $h$  静止释放后落到一个非线性弹簧上，使得弹簧收缩  $d$ , 此时物块所受的恢复力为

$$F = -(k_1 d + k_2 d^{3/2})$$

忽略空气阻力等因素，可以证明下式满足

$$0 = \frac{2k_2 d^{5/2}}{5} + \frac{1}{2}k_1 d^2 - mgd - mgh$$

若已知这些参数  $k_1 = 40,000 \text{ g/s}^2$ ,  $k_2 = 40 \text{ g/(s}^2\text{m}^5)$ ,  $m = 95 \text{ g}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $h = 0.43 \text{ m}$ , 求  $d$ .



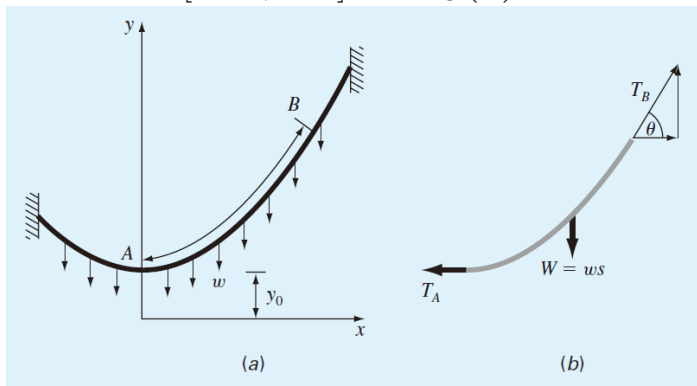
8. 一根质量均匀分布的缆线两端固定被悬挂起来，通过受力分析，发现缆线的高度  $y$  与水平位置  $x$  的关系由下式决定

$$y = \frac{T_A}{w} \cosh\left(\frac{w}{T_A}x\right) + y_0 - \frac{T_A}{w}$$

其中  $T_A$  是  $x = 0$  处的张力， $w$  是缆线单位长度的重量。

(1) 若  $w = 10 \text{ N/m}$ ,  $y_0 = 5 \text{ m}$ , 并且  $x = 50 \text{ m}$  处,  $y = 15 \text{ m}$ , 求  $T_A$ .

(2) 请在区间  $[-50, 100]$  上绘制  $y(x)$  曲线。



1. 请阅读 [Aitken\\_method.pdf](#)或其他相关的文献。↩