Universidade do Minho

Departamento de Produção e Sistemas

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho 2

Benjamim Coelho, Henrique Neto, Leonardo Marreiros e Paulo Ricardo Pereira

e-mail: {a89616,a89618,a89537,a86475}@alunos.uminho.pt

8 de Dezembro - 2020

Conteúdo

Grelha com os novos valores

O número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição é 89618, pelo que **B** = **9**, **C** = **6**, **D** = **1**, **E** = **8**.

						10	8				
-					12	14	15	40			-
-	-			15				20		-	-
-	-	-	3	18	9			6	-	-	-
-	-	-	-	20	1		8	-	-	-	-

Tabela 1.1: Grelha com os novos valores

Formulação e Modulação do Problema

2.1 Contextualização

A exploração de minas a céu aberto é uma operação de exploração na qual blocos de terra são escavados da superfície para extrair o minério neles contido. Durante o processo de exploração, a superfície do terreno é escavada, formando uma cova cada vez mais profunda até o término da operação de mineração. A forma final dessa mina a céu aberto é determinada antes do início da operação de mineração.

Para projetar o contorno ideal - que maximize o lucro - toda a área de exploração é dividida em blocos bidimensionais (nesta versão simplificada). Através de informações geológicas, o valor do minério em cada bloco é estimado (Tabela 1.1). Sucessivamente, uma receita para cada bloco na mina (Tabela 2.1) conforme os custos crescentes provenientes das escavações. O objetivo deste trabalho é definir o corte ideal, isto é, definir os blocos que devem ser extraídos, para maximizar o lucro total da mina, satisfazendo as restrições da inclinação das paredes do corte da mina e as restrições que permitem que os blocos subjacentes sejam escavados somente depois dos blocos no topo deles.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
-	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	-
-	-	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	-	-
-	-	-	-1	14	5	-4	-4	2	-	-	-
-	-	-	-	15	-4	-5	3	-	-	-	-

Tabela 2.1: Grelha com as receitas de cada bloco

2.2 Problema de Fecho Máximo

O grafo que traduz o nosso problema, representado na figura 2.1, irá ser referido como o grafo orientado G. Cada vértice deste grafo tem um peso associado, negativo se a receita correspondente ao bloco desse vértice for negativa ou positivo no caso contrário. O objetivo deste problema é determinar o subconjunto fechado de vértices S em que o somatório dos pesos é máximo.

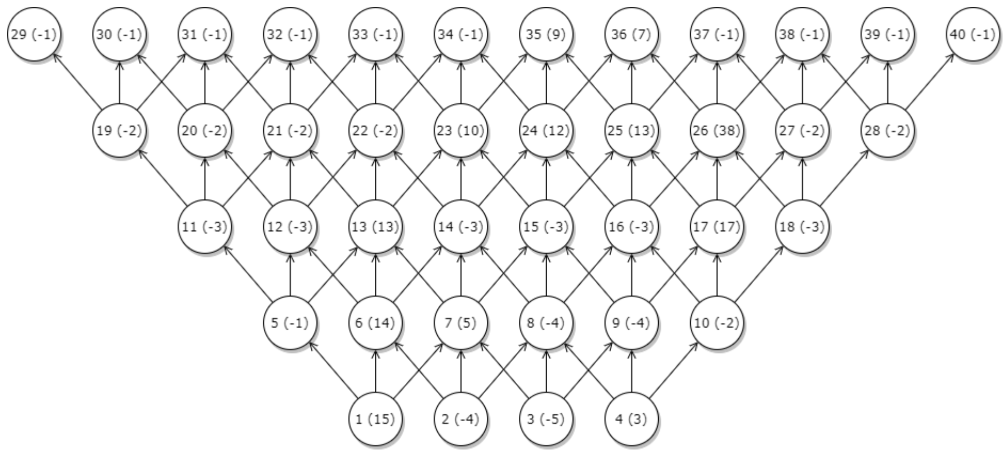

Figura 2.1: Grafo G

O problema de fecho máximo de um grafo pode ser formulado como um problema de programação linear com variáveis binárias. Seja x_j uma variável binária que toma o valor 1 se o vértice j pertencer ao fecho do grafo, e 0, caso contrário. A formulação matemática deste problema é então a seguinte:

$$\max \quad \sum_{j \in V} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\text{suj. a} \quad x_i - x_j \leq 0, \forall (i,j) \in A \tag{2.2}$$

$$x_j \text{ binário}, \forall j \in V$$

Como foi dito anteriormente, o objetivo do nosso problema é maximizar o somatório dos pesos (receitas) correspondentes aos vértices pertencentes ao subconjunto S calculado (2.1).

As restrições do nosso problema em (2.2) traduzem a necessidade de remover os 3 blocos de cima do bloco escolhido para ser escavado, ou seja, se um dado vértice pertencer ao subconjunto resultante então os vértices que correspondem aos 3 blocos diretamente acima também vão ter de pertencer. Além disso, também temos de respeitar a conservação do fluxo e a capacidade máxima de cada arco. O fluxo de entrada deve ser igual ao fluxo de saída.

2.3 Problemas de Fluxo Máximo e Custo Mínimo

O fecho máximo de um grafo pode ser determinado resolvendo um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar G'. Neste grafo auxiliar iremos ter 2 vértices adicionais: o vértice 41 e o vértice 42. O vértice 41 terá arcos que vão para todos os vértices com lucro (custo positivo) cujas capacidades corresponderão ao lucro correspondente. Todos os vértices com prejuízo(custo negativo) terão arcos que vão para o vértice 42 cujas capacidades serão o simétrico dos custos dos vértices correspondentes (de modo a ficarem positivas). Os arcos restantes terão capacidade igual a $+\infty$.

Deste modo, o fecho máximo do grafo original G pode ser determinado pelo corte mínimo do grafo G', ou seja, pelo problema dual do problema de fluxo máximo.

O objetivo deste problema é selecionar o conjunto de vértices que maximiza o lucro. A cada seleção corresponde um corte s,t de valor finito em que, num dos conjuntos da partição estão o nó 41 e os nós dos vértices selecionados. Como nenhum dos arcos de capacidade infinita pode fazer parte de um corte mínimo a seleção de um vértice lucrativo implica a seleção dos vértices que dão prejuízo que correspondem aos blocos que necessitam de ser escavados. Os arcos que atravessam o corte definem a sua capacidade, que por fim terá o mesmo valor que o fluxo máximo.

Seja S o conjunto de blocos com lucro selecionados, S' o conjunto dos blocos com lucros não selecionados e I o conjunto dos blocos com prejuízo que vão ser necessários remover. Vamos designar por l_j o lucro do vértice j e por C_i o prejuízo do vértice i.

$$
\begin{aligned}
\text{lucro de operação} &= \sum_{j\in S} l_j - \sum_{i\in I} c_i \\
&= \sum_{j\in S} l_j + \sum_{j\in S'} l_j - (\sum_{j\in S'} l_j + \sum_{i\in I} c_i) \\
&= \sum_{j\in(S\cup S')} l_j - \text{ capacidade do corte}
\end{aligned}
$$

O lucro da operação é dado pela diferença entre o valor da soma do lucro de todos os vértices com lucro e o valor da capacidade de corte. Assim, como a primeira parcela é uma constante, minimizar a capacidade do corte equivale a maximizar o lucro da operação.

Fizemos também a tabela seguinte, em que associámos um índice a cada bloco

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	-40
-	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	-
-	-	11	12	13	14	15	16	17	18	-	-
-	-	-	5	6	7	8	9	10	-	-	-
-	-	-	-	1	2	3	4	-	-	-	-

Tabela 2.2: Grelha com os índices

2.4 Rede do problema do fluxo máximo

A rede do problema do fluxo máximo que representa o nosso problema é apresentada a seguir.

Foi omitida a capacidade das ligações entre nós intermédios, para facilitar a leitura do diagrama. Esta capacidade é igual a ∞ em todas as ligações. Para além disso, os arcos que saem do mesmo bloco lucrativo têm a mesma cor.

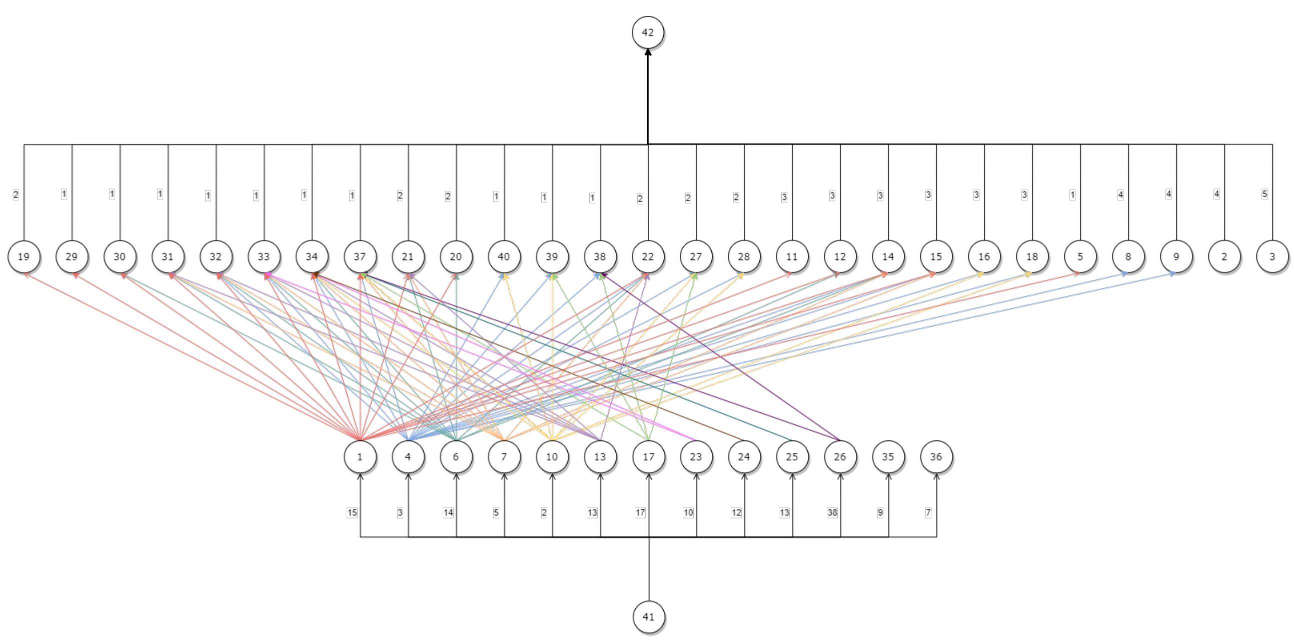

Figura 2.2: Grafo auxiliar G’

Ficheiro de Input do Relax4

Para construir o ficheiro de *input* do Relax4, usamos a numeração de vértices indicada na Tabela 2.2. O fluxo máximo no grafo corresponderá ao fluxo no arco (42, 41), um arco entre o terminal e a fonte, por onde se faz o retorno do fluxo que atravessa o grafo. O objetivo é maximizar este fluxo, e portanto devemos associar ao arco de retorno um custo unitário inicial de transporte igual a -1, dado que o Relax4 assume que todos os problemas são de minimização. Assim, deve-se minimizar a função simétrica.

O ficheiro de *input* do Relax4 é:

```
42
117
29  42  0  1
30  42  0  1
19  42  0  2
31  42  0  1
20  42  0  2
11  42  0  3
32  42  0  1
21  42  0  2
12  42  0  3
5  42  0  1
33  42  0  1
22  42  0  2
41  13  0  13
41  6  0  14
41  1  0  15
34  42  0  1
41  23  0  10
14  42  0  3
41  7  0  5
2  42  0  4
41  35  0  9
41  24  0  12
15  42  0  3
8  42  0  4
3  42  0  5
41  36  0  7
41  25  0  13
16  42  0  3
9  42  0  4
41  4  0  3
37  42  0  1
41  26  0  38
41  17  0  17
41  10  0  2
38  42  0  1
27  42  0  2
18  42  0  3
39  42  0  1
28  42  0  2
40  42  0  1
23  33  0  1000
23  34  0  1000
24  34  0  1000
25  37  0  1000
26  37  0  1000
26  38  0  1000
13  31  0  1000
13  32  0  1000
13  33  0  1000
13  34  0  1000
13  21  0  1000
13  22  0  1000
17  37  0  1000
17  38  0  1000
17  39  0  1000
17  27  0  1000
6  30  0  1000
6  31  0  1000
6  32  0  1000
6  33  0  1000
6  34  0  1000
6  20  0  1000
6  21  0  1000
6  22  0  1000
6  12  0  1000
6  14  0  1000
7  31  0  1000
7  32  0  1000
7  33  0  1000
7  34  0  1000
7  37  0  1000
7  21  0  1000
7  22  0  1000
7  14  0  1000
7  15  0  1000
10  34  0  1000
10  37  0  1000
10  38  0  1000
10  39  0  1000
10  40  0  1000
10  27  0  1000
10  28  0  1000
10  16  0  1000
10  18  0  1000
1  29  0  1000
1  30  0  1000
1  31  0  1000
1  32  0  1000
1  33  0  1000
1  34  0  1000
1  37  0  1000
1  19  0  1000
1  20  0  1000
1  21  0  1000
1  22  0  1000
1  11  0  1000
1  12  0  1000
1  14  0  1000
1  15  0  1000
1  5  0  1000
4  32  0  1000
4  33  0  1000
4  34  0  1000
4  37  0  1000
4  38  0  1000
4  39  0  1000
4  40  0  1000
4  22  0  1000
4  27  0  1000
4  28  0  1000
4  14  0  1000
4  15  0  1000
4  16  0  1000
4  18  0  1000
4  8  0  1000
4  9  0  1000
42  41  -1  1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

Ficheiro de Output

O ficheiro de *output* do Relax4 é:

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 117
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.


  29 42  1.
  30 42  1.
  19 42  2.
  31 42  1.
  20 42  2.
  11 42  3.
  32 42  1.
  21 42  2.
  12 42  3.
  5 42  1.
  33 42  1.
  22 42  2.
  41 6  5.
  41 1  15.
  34 42  1.
  41 23  1.
  14 42  3.
  41 7  5.
  41 24  1.
  15 42  3.
  8 42  3.
  41 25  1.
  16 42  2.
  41 4  3.
  37 42  1.
  41 26  1.
  41 17  3.
  41 10  2.
  38 42  1.
  27 42  2.
  39 42  1.
  23 33  1.
  24 34  1.
  25 37  1.
  26 38  1.
  17 39  1.
  17 27  2.
  6 30  1.
  6 31  1.
  6 32  1.
  6 22  1.
  6 14  1.
  7 14  2.
  7 15  3.
  10 16  2.
  1 29  1.
  1 19  2.
  1 20  2.
  1 21  2.
  1 22  1.
  1 11  3.
  1 12  3.
  1 5  1.
  4 8  3.
  42 41  37.

OPTIMAL COST =  -37.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 69
NUMBER OF ITERATIONS =  126
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  23
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  2
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  23
***********************************
```

Interpretação da solução óptima

O custo óptimo obtido no problema tem o valor de -37. Ora, tendo em conta que estamos a minimizar o simétrico do fluxo máximo, podemos concluir que este terá o valor 37. Posteriormente a partir do output do Relax4 foi possível reconstruir o grafo bipartido (G') associando a cada aresta o seu respetivo fluxo (as arestas com fluxo 0 foram removidas por questões de simplificação) de modo a que cada aresta ficasse identificada pelo seu fluxo e capacidade.

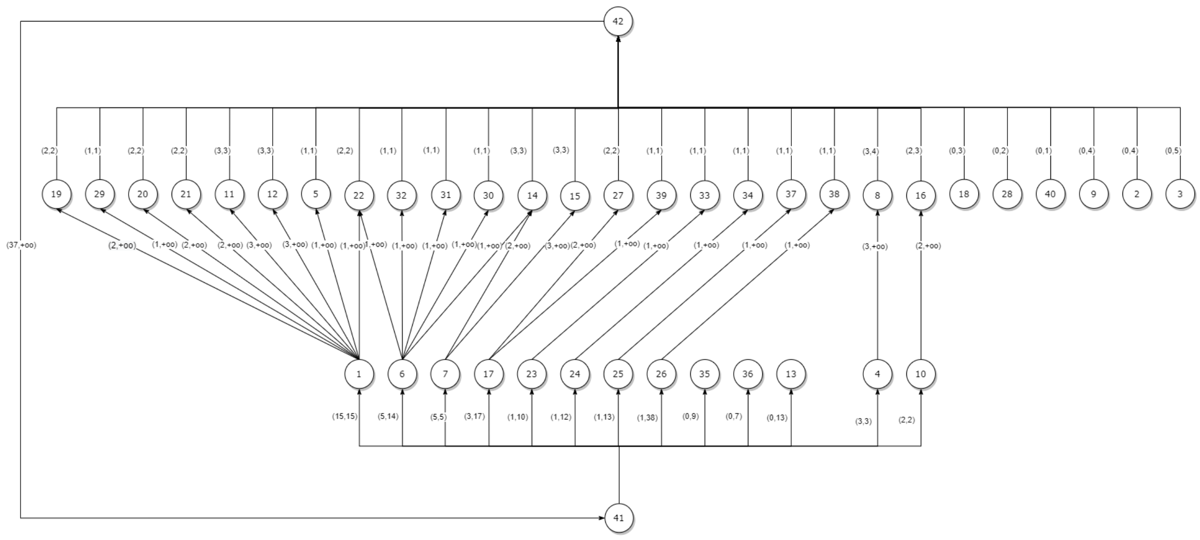

Figura 5.1: Grafo Solução

A partir disto prosseguimos com o corte mínimo do grafo nos conjuntos s e t, em s conterá o vértice 41 e os vértices aos quais a escavação é admissível e t conterá o vértice 42 e os restantes vértices. Deste modo, para identificar o corte precisamos de ter em conta que no final, a soma das capacidades dos arcos que o atravessam tem de ter o mesmo valor que o fluxo máximo, ou seja neste caso esse valor é 37. Ora, sabemos adicionalmente que estes arcos terão o fluxo máximo que lhes é permitido pelo sua capacidade finita.

Sendo assim, após uma analise sucessiva dos vértices e das respetivas arestas, concluímos que a_{41_1} e a_{41_7} seriam os únicos arcos maximizados que não atravessariam o corte. Isto deve-se ao facto de que o fluxo destes arcos ser inconsistente e desta forma não é possível combina-los com outros arcos maximizados de maneira a que se cumpra o critério que exige que a capacidade do corte tenha o mesmo valor do fluxo máximo. Aliás é possível também observar soluções alternativas ao problema nos quais estes arcos não estão maximizados que comprovam a sua inconsistência. Por exemplo a solução em que em que os fluxos f's dos arcos $a_{41\_1}, a_{1\_22}, a_{6\_22}, a_{41\_7}$, a_{7_14}, a_{6_14} e a_{41_5} tomam os respetivos valores de $f_{41\_1} = 14, f_{1\_22} = 0, f_{6\_22} = 2, f_{41\_7} = 3,$ $f_{7\_14} = 0, f_{6\_14} = 3$ e $f_{41\_6} = 8$ corresponde a uma solução ótima alternativa em que os arcos a_{41_1} e a_{41_7} não se encontram maximizados, comprovando assim que estes não atravessariam o corte.

A figura 5.2 retrata o corte resultante, com o conjunto s representado a verde e conjunto t representado a vermelho.

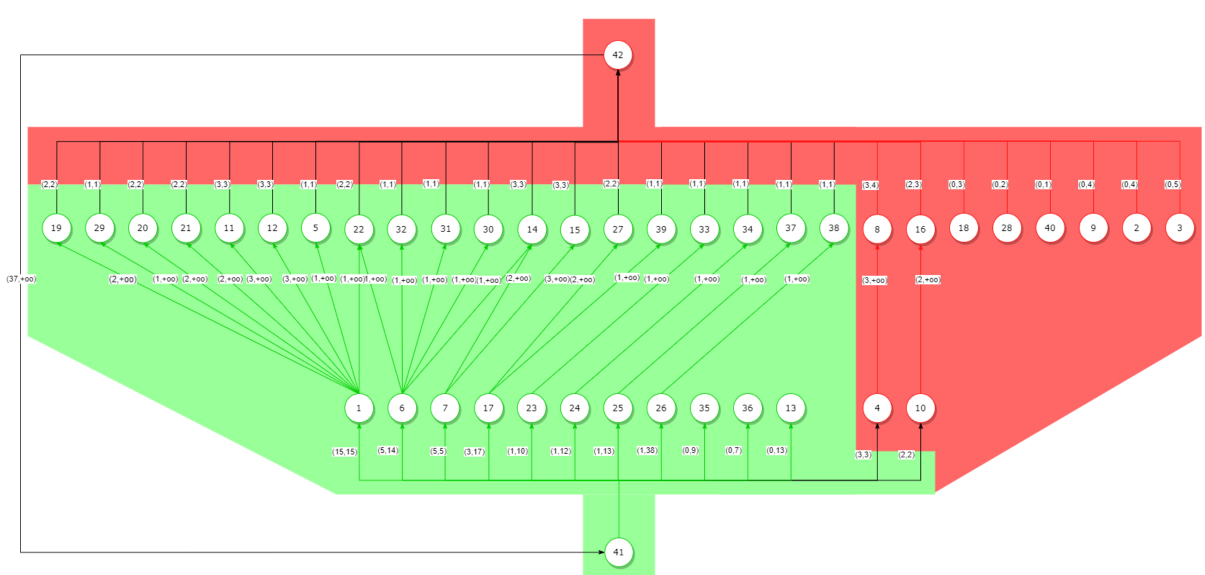

Figura 5.2: Corte mínimo da solução

Por fim, podemos observar que os vértices do conjunto s correspondem a solução pedida visto que, de modo genérico, são estes os vértices em que os custos de mineração impostos são cumpridos, ou seja se um bloco foi selecionado para escavação ou três que se encontram por cima também foram. A tabela 5.1 evidencia o resultado obtido representando os vértices a serem escavados marcados a verde e os restantes a cinzento.

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	-
-	-	11	12	13	14	15	16	17	18	-	-
-	-	-	5	6	7	8	9	10	-	-	-
-	-	-	-	1	2	3	4	-	-	-	-

Tabela 5.1: Grelha de índices do resultado

Por fim podemos concluir que o lucro total será a soma das receitas de cada bloco a ser escavado (que se encontram identificadas na tabela 2.1) que, como evidenciado pela formulação do problema, coincidirá com a diferença de todos os proveitos pela capacidade do corte que neste caso é 37. Desta forma obtemos:

$$\sum_{j \in (S \cup S')} l_j - capacidade\_de\_corte = 158 - 37 = 121$$

Adicionalmente, por analise da tabela inicial, podemos concluir que o proveito total terá o valor de 185 ao qual é imposto um custo de 64 proveniente do custo associado a remover cada bloco selecionado.

Validação do modelo

6.1 Restrições de conservação do fluxo e Restrições de capacidade máxima

O fluxo de entrada em 41 é igual ao fluxo de saída em 42. Seja O o vértice origem 41 e S o vértice destino 42 e analisando o resultado obtido, temos:

– **Vértice 1:** $x_{O1} = x_{119} + x_{129} + x_{120} + x_{121} + x_{111} + x_{112} + x_{15} + x_{122}$

Origem	Destino	Fluxo
1	11	3
1	12	3
1	19	2
1	20	2
1	21	2
1	22	1
1	29	1
1	5	1
Total		15

Origem	Destino	Fluxo
41	1	15
Total		15

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $15 = 3+3+2+2+2+1+1+1$, ou seja, $15 = 15$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 1 é 15 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 15$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 7:** $x_{O7} = x_{715} + x_{714}$

Origem	Destino	Fluxo
7	14	2
7	15	3
Total		5

Origem	Destino	Fluxo
41	7	5
Total		5

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $5 = 3 + 2$, ou seja, $5 = 5$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 7 é 5 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 5$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 6:** $x_{O6} = x_{614} + x_{622} + x_{632} + x_{631} + x_{630}$

Origem	Destino	Fluxo
6	14	1
6	22	1
6	30	1
6	31	1
6	32	1
Total		5

Origem	Destino	Fluxo
41	6	5
Total		5

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, ou seja, $5 = 5$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 6 é 14 e seja x_{ij} cada um dos fluxos $\forall_{x_{ij}}, \leq x_{ij} \leq 14$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 17:** $x_{O17} = x_{1727} + x_{1739}$

Origem	Destino	Fluxo
17	27	2
17	39	1
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
41	17	3
Total		3

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $3 = 2 + 1$, ou seja, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 17 é 17 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 17$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 23:** $x_{O23} = x_{2333}$

Origem	Destino	Fluxo
23	33	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
41	23	1
Total		1

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 23 é 10 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 10$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 24:** $x_{O24} = x_{2434}$

Origem	Destino	Fluxo
24	34	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
41	24	1
Total		1

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 24 é 12 e seja x_{ij} cada um dos fluxos $\forall \mathrm{x}_{ij}$, $0 \leq x_{ij} \leq 12$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 25:** $x_{O25} = x_{2537}$

Origem	Destino	Fluxo
25	37	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
41	25	1
Total		1

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, 1 = 1. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 25 é 13 e seja x_{ij} cada um dos fluxos $\forall \mathrm{x}_{ij}$, $0 \leq x_{ij} \leq 13$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 26:** $x_{O26} = x_{2638}$

Origem	Destino	Fluxo
26	38	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
41	26	1
Total		1

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, 1 = 1. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 26 é 38 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 38$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 35:** $x_{O35} = 0$

O vértice 35 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 35 não tem sucessores, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, 0 = 0. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 35 é 9 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 9$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 36:** $x_{O36} = 0$

O vértice 35 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 36 não tem sucessores, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, 0 = 0. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 36 é 7 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 7$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 13:** $x_{O13} = 0$

O vértice 13 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 13 não tem sucessores, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, 0 = 0. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 13 é 13 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 13$, cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 4:** $x_{O4} = x_{48}$

Origem	Destino	Fluxo
4	8	3
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
41	4	3
Total		3

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, 3 = 3. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 4 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 10:** $x_{O10} = x_{1016}$

Origem	Destino	Fluxo
10	16	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
41	10	2
Total		2

A primeira tabela representa a saída de fluxo, a segunda representa a entrada de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 10 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 19:** $x_{119} = x_{19S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	19	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
19	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 19 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 29:** $x_{129} = x_{29S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	29	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
29	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 29 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 20:** $x_{120} = x_{20S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	20	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
20	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 20 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 21:** $x_{121} = x_{21S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	21	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
21	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 21 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 11:** $x_{111} = x_{11S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	11	3
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
11	42	3
Total		3

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 11 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 12:** $x_{112} = x_{12S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	12	3
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
12	42	3
Total		3

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 12 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 5:** $x_{15} = x_{5S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	5	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
5	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 5 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 15:** $x_{715} = x_{15S}$

Origem	Destino	Fluxo
7	15	3
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
15	42	3
Total		3

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 15 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 14:** $x_{714} + x_{614}= x_{14S}$

Origem	Destino	Fluxo
6	14	1
7	14	2
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
19	42	3
Total		3

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 + 1 = 3$, ou seja, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 14 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 22:** $x_{122} + x_{622}= x_{22S}$

Origem	Destino	Fluxo
1	22	1
6	22	1
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
22	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 + 1 = 2$, ou seja, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 22 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 32:** $x_{632} = x_{32S}$

Origem	Destino	Fluxo
6	32	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
32	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 32 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 31:** $x_{631} = x_{31S}$

Origem	Destino	Fluxo
6	31	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
31	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 31 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 30:** $x_{630} = x_{30S}$

Origem	Destino	Fluxo
6	30	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
30	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 30 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 27:** $x_{1727} = x_{27S}$

Origem	Destino	Fluxo
17	27	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
27	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 27 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 39:** $x_{1739} = x_{39S}$

Origem	Destino	Fluxo
17	39	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
39	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 39 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 33:** $x_{2333} = x_{33S}$

Origem	Destino	Fluxo
23	33	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
33	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 33 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 34:** $x_{2434} = x_{34S}$

Origem	Destino	Fluxo
24	34	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
34	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 34 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 37:** $x_{2537} = x_{37S}$

Origem	Destino	Fluxo
25	37	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
37	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 37 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 38:** $x_{2638} = x_{38S}$

Origem	Destino	Fluxo
26	38	1
Total		1

Origem	Destino	Fluxo
38	42	1
Total		1

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $1 = 1$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 38 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 8:** $x_{48} = x_{8S}$

Origem	Destino	Fluxo
4	8	3
Total		3

Origem	Destino	Fluxo
8	42	3
Total		3

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $3 = 3$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 8 é 4 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 4$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

- **Vértice 16:** $x_{1016} = x_{16S}$

Origem	Destino	Fluxo
10	16	2
Total		2

Origem	Destino	Fluxo
16	42	2
Total		2

A primeira tabela representa a entrada de fluxo, a segunda representa a saída de fluxo. Logo, substituindo na expressão anterior, $2 = 2$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 16 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 18:** $0 = x_{18S}$

O vértice 18 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 18 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 18 é 3 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 3$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 28:** $0 = x_{28S}$

O vértice 28 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 28 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 28 é 2 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 2$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 40:** $0 = x_{40S}$

O vértice 40 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 40 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 40 é 1 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 1$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 9:** $0 = x_{9S}$

O vértice 9 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 9 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 9 é 4 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 4$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 2:** $0 = x_{2S}$

O vértice 2 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 2 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 2 é 4 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 4$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

– **Vértice 3:** $0 = x_{3S}$

O vértice 3 não consta no output do Relax4, isto é, como o vértice 3 não tem antecedentes, o seu fluxo é 0. Logo, substituindo na expressão anterior, $0 = 0$. Além disso, pela Tabela 2.1 vemos que a capacidade máxima do vértice 3 é 5 e seja x_{ij} cada um dos fluxos, $\forall_{x_{ij}}, 0 \leq x_{ij} \leq 5$ cumprindo assim a restrição da capacidade máxima.

6.2 Restrição fluxo de entrada é igual ao fluxo de saída

O fluxo de entrada no vértice origem 41 é igual ao fluxo de saída no vértice de destino 42. Analisando o output do Relax4 podemos validar esta restrição somando todas as entradas com origem 41 e somando todas as entradas com destino 42. Vejamos:

Origem	Destino	Fluxo
41	1	15
41	10	2
41	17	3
41	23	1
41	24	1
41	25	1
41	26	1
41	4	3
41	6	5
41	7	5
Total		37

Origem	Destino	Fluxo
5	42	1
8	42	3
11	42	3
12	42	3
14	42	3
15	42	3
16	42	2
19	42	2
20	42	2
21	42	2
22	42	2
27	42	2
29	42	1
30	42	1
31	42	1
32	42	1
33	42	1
34	42	1
37	42	1
38	42	1
39	42	1
Total		37

Tal como pretendíamos mostrar, a soma destes valores é igual pelo que a restrição que dita que o fluxo de entrada tem de ser igual ao fluxo de saída é cumprida.

6.3 Validação do modelo com programação linear - lpsolve

Outra maneira de validar o nosso modelo é resolver o mesmo problema com recurso a programação linear, neste caso, utilizando o lpsolve. Assim, o input utilizado foi:

```
/* Função Objetico */ \\
max: 15x1 -4x2 -5x3 +3x4 -x5 +14x6 + 5x7 - 4x8 -4x9 -2x10 -3x11 -3x12 +13x13
 -3x14 -3x15 -3x16 +17x17 -3x18 -2x19 -2x20 -2x21 -2x22 +10x23 +12x24 +13x25
 +38x26 -2x27 -2x28 -x29 -x30 -x31 -x32 -x33 -x34 +9x35 + 7x36 -x37 -x38 -x39
 -x40;
/*Restrições*/
```

```
x1-x5<=0;
x1-x6<=0;
x1-x7<=0;
x2-x6<=0;
x2-x7<=0;
x2-x8<=0;
x3-x7<=0;
x3-x8<=0;
x3-x9<=0;
x4-x8<=0;
x4-x9<=0;
x4-x10<=0;
x5-x11<=0;
x5-x12<=0;
x5-x13<=0;
x6-x12<=0;
x6-x13<=0;
x6-x14<=0;
x7-x13<=0;
x7-x14<=0;
x7-x15<=0;
x8-x14<=0;
x8-x15<=0;
x8-x16<=0;
x9-x15<=0;
x9-x16<=0;
x9-x17<=0;
x10-x16<=0;
x10-x17<=0;
x10-x18<=0;
x11-x19<=0;
x11-x20<=0;
x11-x21<=0;
x12-x20<=0;
x12-x21<=0;
x12-x22<=0;
x13-x21<=0;
x13-x22<=0;
x13-x23<=0;
x14-x22<=0;
x14-x23<=0;
x14-x24<=0;
x15-x23<=0;
x15-x24<=0;
x15-x25<=0;
x16-x24<=0;
x16-x25<=0;
x16-x26<=0;
x17-x25<=0;
x17-x26<=0;
x17-x27<=0;
x18-x26<=0;
x18-x27<=0;
x18-x28<=0;
x19-x29<=0;
x19-x30<=0;
x19-x31<=0;
x20-x30<=0;
x20-x31<=0;
x20-x32<=0;
x21-x31<=0;
x21-x32<=0;
x21-x33<=0;
x22-x32<=0;
x22-x33<=0;
x22-x34<=0;
x23-x33<=0;
x23-x34<=0;
x23-x35<=0;
x24-x34<=0;
x24-x35<=0;
x24-x36<=0;
x25-x35<=0;
x25-x36<=0;
x25-x37<=0;
x26-x36<=0;
x26-x37<=0;
x26-x38<=0;
x27-x37<=0;
x27-x38<=0;
x27-x39<=0;
x28-x38<=0;
x28-x39<=0;
x28-x40<=0;
```

```
bin x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16
x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29 x30
x31 x32 x33 x34 x35 x36 x37 x38 x39 x40;
```

O output obtido foi o seguinte:

Variables	MILP Feasible	result
	121	121
x1	1	1
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	0
x5	1	1
x6	1	1
x7	1	1
x8	0	0
x9	0	0
x10	0	0
x11	1	1
x12	1	1
x13	1	1
x14	1	1
x15	1	1
x16	0	0
x17	1	1
x18	0	0
x19	1	1
x20	1	1
x21	1	1
x22	1	1
x23	1	1
x24	1	1
x25	1	1
x26	1	1
x27	1	1
x28	0	0
x29	1	1
x30	1	1
x31	1	1
x32	1	1
x33	1	1
x34	1	1
x35	1	1
x36	1	1
x37	1	1
x38	1	1
x39	1	1
x40	0	0

Também podemos observar o log de output:

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 20, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 20.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 85 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 1, 0.0x MIP order, 1 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 1, with a dynamic range of 1.
Time to load data was 0.003 seconds, presolve used 0.006 seconds,
... 0.014 seconds in simplex solver, in total 0.023 seconds.
```

Podemos ver que o valor ótimo da nossa função objetivo é 121, ou seja o maior lucro possível da nossa mina é 121. Adicionalmente as variáveis que possuem o valor 1 indicam os respetivos vértices a serem escavados. Ora, este é o mesmo valor que obtivemos no nosso modelo de fluxo máximo, e os vértices selecionados coincidem também com os obtidos na solução proveniente do Relax4, o que permite validar a solução.

Conclusão

Concluindo, com este trabalho implementamos um método de determinar os blocos que devem ser extraídos de uma mina a céu aberto para maximizar o lucro, utilizando para este efeito um software de optimização de redes. Criámos um modelo e cumprimos com todas as restrições impostas: capacidade máxima, conservação do fluxo e fluxo de entrada igual ao fluxo de saída. Além disso, analisando a solução obtida podemos também confirmar que todos os blocos adjacentes acima de um dado bloco foram removidos em conformidade com o pretendido. Como forma de adicionar mais um passo de validação, criámos também um modelo de programação linear com o objetivo de confirmar a solução obtida.

Dito isto, a solução que obtemos foi 121 de lucro, em que temos 185 de proveito e 64 de custos.