Étude graphique de la dérivée arithmétique

Zac Assoumani

12 février 2020

Abstract
À partir de deux hypothèses sur une fonction d'entiers, on va en déduire des propositions mathématiques, avec des jolies représentations graphiques et des motifs en tous genres.

Table des matières

1 La dérivée arithmétique d

On définit la dérivée arithmétique comme une application $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ respectant les deux règles suivantes :
— $\forall p \in \mathbb{P}, d(p) = 1$
— $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, d(ab) = ad(b) + bd(a)$.

Lemme 1. *Pour tout n entier et k entier non-nul,*

$$d(n^k) = kn^{k-1}d(n).$$

Preuve. Trivial pour $k = 1$.
Par hérédité, $d(n^{k+1}) = d(nn^k) = nd(n^k) + n^k d(n) = kn^k d(n) + n^k d(n) = (k + 1)n^k d(n)$. ■

Proposition 1. *Une telle fonction existe, est unique, et se définit ainsi :*
— *$d(0) = d(1) = 0$*
— *pour $n \geq 2$, si $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition de n en facteurs premiers, alors*

$$d(n) = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}. \tag{1}$$

Preuve. $\boxed{\text{Unicité :}}$

- $d(0) = d(0^2) = 0d(0) = 0$
- $d(1) = d(1^2) = 2d(1) \Rightarrow d(1) = 0$
- $n \geq 2$: vrai pour $k = 1$.
  Par hérédité si $n = \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{\alpha_i}$ et d'après la seconde règle,

$$d(n) = {p_{k+1}}^{\alpha_{k+1}} d(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}) + d({p_{k+1}}^{\alpha_{k+1}}) \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

  Puis d'après le lemme 1 et l'hypothèse de récurrence,

$$d(n) = {p_{k+1}}^{\alpha_{k+1}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} + \alpha_{k+1} {p_{k+1}}^{\alpha_{k+1}-1} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} =$$

$$({p_{k+1}}^{\alpha_{k+1}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i})(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} + \frac{\alpha_{k+1}}{p_{k+1}}) = n \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{p_i}.$$

$\boxed{\text{Existence :}}$

$\underline{d(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N} :}$ $d(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{\frac{n}{p_i}}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$.

$\underline{d(\mathbb{P}) = \{1\} :}$ n n'a qu'un seul facteur premier, lui-même, et de coefficient 1. Donc

$$d(n) = n \frac{1}{n} = 1.$$

Puisque $\mathbb{P}$ est non-vide son image ne l'est pas non plus, d'où l'inclusion inverse.

$\underline{d(ab) = ad(b) + bd(a) :}$

- Si $a = 0$ et $b \in \mathbb{N}$, $d(0b) = 0d(b) + bd(0) = 0$.
- Si $a = 1$ et $b \in \mathbb{N}$, $d(1b) = 1d(b) + bd(1) = d(b)$.
- Si $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \geq 2$ et $b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \geq 2$,

$$d(ab) = d(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i+\beta_i}) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i+\beta_i})(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i + \beta_i}{p_i}) = (ab \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}) + (ab \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{p_i}) = ad(b) + bd(a).$$

■

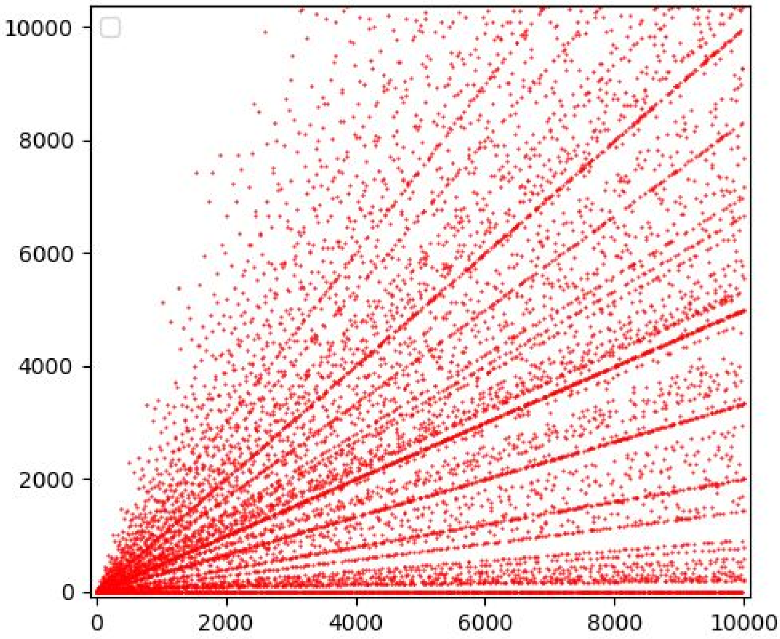

FIGURE 1 – Aperçu du nuage des points $(n, d(n))$ pour $n \leq 10000$.

2 Représentation graphique de d

La représentation graphique de d (figure 1) met en avant l'abondance de points sur certaines droites, comme celles de pentes 0, 1, $1/2$, $1/3$ ou $3/2$ parmi bien d'autres.

2.1 Les "droites" A_n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \{(np, d(np)) \mid p \in \mathbb{P}\}$.

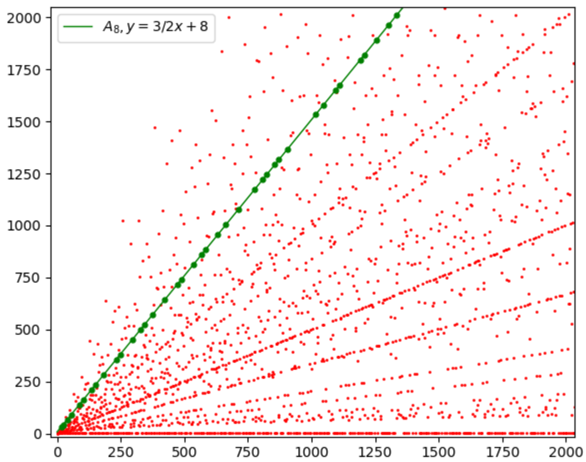

FIGURE 2 – Points de A_8 pour $8p \leq 2000$.

Proposition 2. *Pour tout entier n non-nul, A_n est inclus dans le graphe de la fonction affine d'équation*

$$y = \frac{d(n)}{n} x + n. \tag{2}$$

Preuve. Soit $p \in \mathbb{P}$.

$$d(np) = pd(n) + n = \frac{d(n)}{n} np + n.$$

Donc le point $(np, d(np))$ appartient au graphe de la fonction susnommée. ■

Proposition 3. *Pour tout entier n ayant au moins deux facteurs premiers distincts,*

$$\bigcap_{\substack{p/n \\ p\in\mathbb{P}}} A_{n/p} = \{(n, d(n))\}. \tag{3}$$

Preuve.

$\boxed{\supset :}$ $p/n \Rightarrow (\frac{n}{p}p, d(\frac{n}{p}p)) = \{(n, d(n))\} \in A_{n/p}$.

$\boxed{\subset :}$ Il existe au moins deux droites $A_{n/p}$ distinctes, leur intersection est donc un point ou l'ensemble vide. Or elle contient $\{(n, d(n))\}$. ■

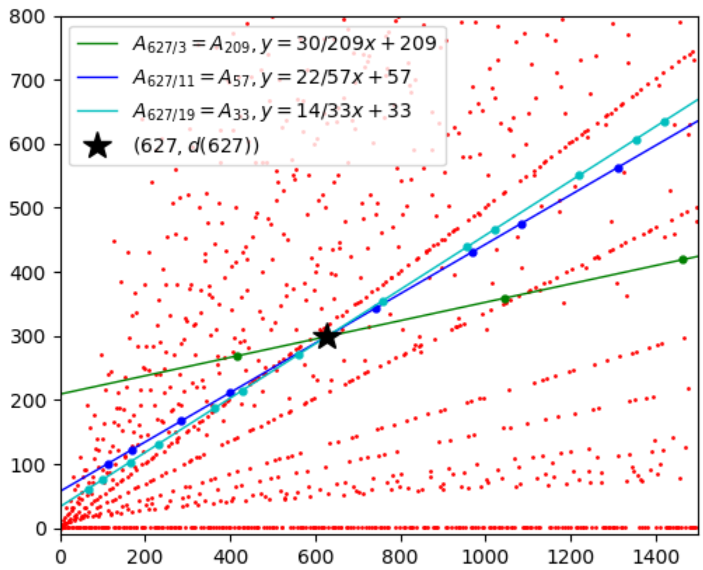

FIGURE 3 – Illustration de (3) pour $n = 627$.

2.2 Encadrement des valeurs

Lemme 2. *Si n est produit de k facteurs premiers, alors*

$$d(n) \geq kn^{\frac{k-1}{k}}.$$

Preuve. On peut écrire n sous la forme $n = \prod_{i=1}^{k} p_{a_i}$, donc

$$d(n) = n\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_{a_i}} = \sum_{i=1}^{k}(\prod_{j\neq i} p_{a_j}).$$

La moyenne arithmétique étant supérieure à la moyenne arithmétique,

$$d(n) \geq k(\prod_{i=1}^{k}\textstyle\prod_{j\neq i} p_{a_j})^{k} = kn^{\frac{k-1}{k}}.$$

■

Lemme 3. *Pour tout $n \geq 2$ se décomposant en $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$,*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \log_2(n).$$

Preuve. Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\log_2(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}) \geq \log_2(\prod_{i=1}^{k} 2^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

■

Proposition 4. *Pour $n \geq 4$ non-premier,*

$$2\sqrt{n} \leq d(n) \leq \frac{n \log_2(n)}{2}. \tag{4}$$

Preuve.

$\boxed{2\sqrt{n} \leq d(n) :}$ n est facteur de k facteurs premiers, avec $k \geq 2$ puisque $n \notin \mathbb{P}$.
Donc d'après le lemme 2

$$d(n) \geq kn^{\frac{k-1}{k}} \geq 2\sqrt{n}.$$

$\boxed{d(n) \leq \frac{n\log_2(n)}{2} :}$

$$d(n) = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} \leq n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

Le résultat se déduit directement du lemme 3. ■

Il y a cas d'égalité pour la borne inférieure si n est le carré d'un nombre premier, et pour la borne supérieure si n est de la forme $n = 2^k$ avec k un entier (figure 4).

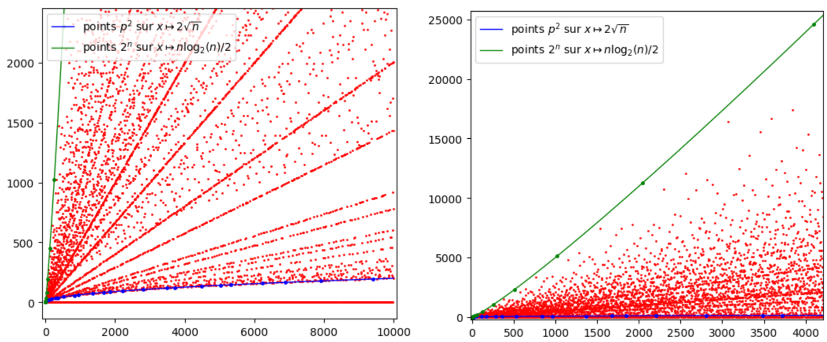

FIGURE 4 – Encadrement de la fonction d.

Corollaire 1. $\forall n \geq 2$,

$$d^{-1}(n) \subset [\![0, \frac{n^2}{4}]\!].$$

Preuve.

$$d(a) = n \Rightarrow n \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow \frac{n^2}{4} \geq a.$$

■

Corollaire 2. *Tout $n \geq 2$ possède un nombre fini d'antécédents par d.*

Preuve. $d^{-1}(n)$ est inclus dans un ensemble fini. ■

Corollaire 3. *d n'est pas surjective.*

Preuve. Montrons pour cela que 2 n'a pas d'antécédent par la fonction d. D'après le corollaire 1,

$$d^{-1}(2) \subset [\![0, 1]\!].$$

Or

$$d([\![0, 1]\!]) = \{0\}$$

Donc

$$d^{-1}(2) \subset d^{-1}(d([\![0, 1]\!])) = d^{-1}(0).$$

Ainsi $d^{-1}(2) \subset (d^{-1}(0) \cap d^{-1}(2)) = \varnothing$. ■

3 La dérivée logarithmique dl

3.1 Généralités

On définit la dérivée logarithmique

$$dl : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto \frac{d(n)}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}.$$

Proposition 5. $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$,

$$dl(ab) = dl(a) + dl(b). \tag{5}$$

Preuve.

$$dl(ab) = \frac{d(ab)}{ab} = \frac{ad(b) + bd(a)}{ab} = \frac{d(a)}{a} + \frac{d(b)}{b} = dl(a) + dl(b).$$

■

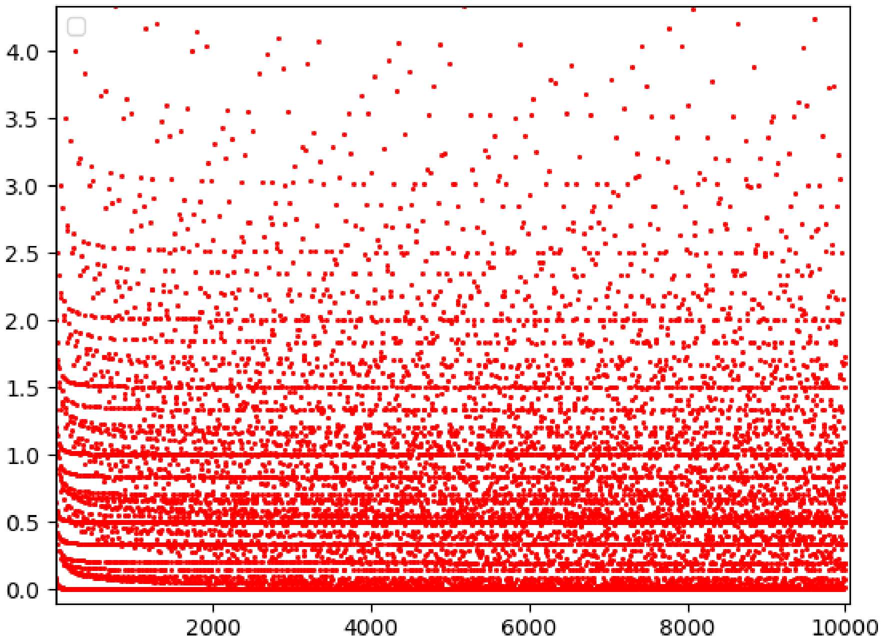

FIGURE 5 – Aperçu du nuage des points $(n, dl(n))$ pour $n \leq 10000$.

On peut remarquer la présence de courbes quasiment horizontales sur sa représentation graphique.

3.2 Les "courbes" A'_n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A'_n = \{(np, dl(np)) \mid p \in \mathbb{P}\}$.

Proposition 6. *Pour tout entier n non-nul, A'_n est inclus dans le graphe de la fonction d'équation*

$$y = dl(n) + \frac{n}{x}. \tag{6}$$

Preuve. Soit $p \in \mathbb{P}$.

$$dl(np) = dl(n) + dl(p) = dl(n) + \frac{1}{p} = dl(n) + \frac{n}{np}.$$

Donc le point $(np, dl(np))$ appartient au graphe de la fonction susnommée. ∎

Graphiquement, cela correspond bien à une courbe dont l'ordonnée tend vers $dl(n)$, qui est également la valeur de la pente associée à A_n.

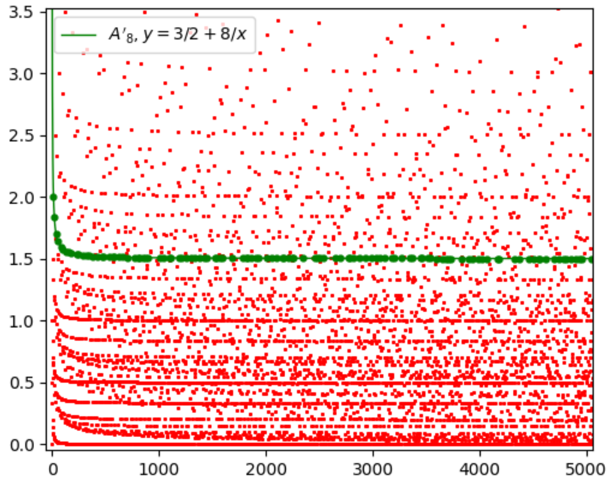

FIGURE 6 – Points de A'_8 pour $8p \leq 10000$.

3.3 L'ensemble L_d

On définit $L_d = \{dl(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. D'après (2), L_d représente également l'ensemble des pentes des droites associées aux A_n.

Proposition 7.

$$L_d \subsetneq \mathbb{Q}^+. \tag{7}$$

Preuve.
$\boxed{L_d \subset \mathbb{Q}^+ :}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(n) \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{d(n)}{n} \in \mathbb{Q}^+$.
$\boxed{\mathbb{Q}^+ \not\subset L_d :}$ Montrons par l'absurde que $1/4 \notin L_d$.
On suppose qu'il existe des nombres premiers $p_1 \dots p_k$ et des coefficients entiers non-nuls $\alpha_1 \dots \alpha_k$ tels que $r = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1/4$.
2 ne peut faire partie de ces nombres premiers, car si tel est le cas alors $r \geq 1/2 > 1/4$. Ainsi les $p_1 \dots p_k$ sont tous impairs, donc le dénominateur de r l'est aussi et se trouve de ce fait irréductible à $4 \Rightarrow$ contradiction.
r ne peut donc pas être égal à $1/4$. ∎

Proposition 8.

$$L_d \text{ est dense dans } \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Preuve. $\boxed{\text{0 valeur d'adhérence :}}$ Les ordonnées de A'_1 tendent vers 0.

$\boxed{a > 0 \text{ valeur d'adhérence :}}$ Pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver N_0 tel que $p_{N_0} > \frac{2}{\epsilon}$. On a l'inégalité

$$a \leq \frac{\lfloor ap_{N_0} \rfloor}{p_{N_0}} < a + \frac{1}{p_{N_0}} < a + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $n > N_0$, le $n^{\text{ème}}$ point de $A'_{\frac{\lfloor ap_{N_0} \rfloor}{p_{N_0}}}$, est d'abscisse

$$x_n = p_{N_0}^{\lfloor ap_{N_0} \rfloor} p_n$$

et d'ordonnée

$$y_n = dl(x_n) = \underbrace{\frac{\lfloor ap_{N_0} \rfloor}{p_{N_0}}}_{\in]a, a+\epsilon[} + \underbrace{\frac{1}{p_n}}_{< \frac{\epsilon}{2} \text{ pour } n > N_0} \in]a, a+\epsilon[\text{ à partir d'un certain rang.}$$

En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on peut obtenir une suite d'ordonnées (appartenant à L_d) tendant vers a. ∎

3.4 Les "courbes" $B_{p,n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$, on définit $B_{p,n} = \{(np^k, dl(np^k)) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 9. *Pour tout entier n non-nul, $B_{p,n}$ est inclus dans le graphe de la fonction d'équation*

$$y = \frac{\log_p(\frac{x}{n})}{p} + dl(n). \tag{9}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$dl(np^k) = dl(p^k) + dl(n) = \frac{k}{p} + dl(n) = \frac{\log_p(\frac{np^k}{n})}{p} + dl(n).$$

Donc le point $(np^k, dl(np^k))$ appartient au graphe de la fonction susnommée. ∎

3.5 Répartition des valeurs

On définit $M_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} dl(n)$ comme la moyenne des termes $\{dl(1) \dots dl(N)\}$.

Proposition 10.

$$\lim_{N \to \infty} M_N = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} \approx 0.773155. \tag{10}$$

Preuve. On définit $\alpha_k : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui a un entier n non-nul associe sa valuation p_k-adique.

$$M_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{\alpha_k(n)}{p_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \sum_{n=1}^{N} \alpha_k(n).$$

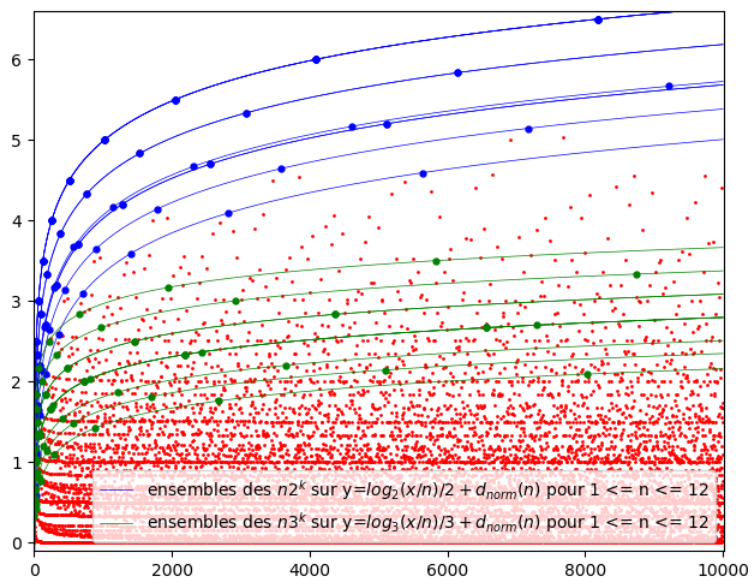

FIGURE 7 – Points des $B_{p,n}$ pour $p = 2$ et $p = 3$ et pour $1 \leq n \leq 12$.

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_k(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \times card(\{n \in [\![1, N]\!] \mid \alpha_k(n) = i\}) =$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \times card(\{n \in [\![1, N]\!] \mid {p_k}^i/n \wedge \neg({p_k}^{i+1}/n)\}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\left\lfloor \frac{N}{{p_k}^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{{p_k}^{i+1}} \right\rfloor \right).$$

On peut encadrer cette expression

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\frac{N}{{p_k}^i} - \frac{N}{{p_k}^{i+1}} - 2 \right) \leq \sum_{n=1}^{N} \alpha_k(n) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\frac{N}{{p_k}^i} - \frac{N}{{p_k}^{i+1}} + 2 \right).$$

Définissons

$$a_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\frac{N}{{p_k}^i} - \frac{N}{{p_k}^{i+1}} \right)$$

et

$$b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} 2i.$$

On peut alors écrire l'inégalité suivante :

$$a_N - b_N \leq M_N \leq a_N + b_N.$$

$$b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \left(\left\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \right\rfloor \right) \left(\left\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \right\rfloor + 1 \right) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \left(\frac{\log(N)}{\log(p_k)} + 2 \right)^2$$

Pour $N \leq 4$, $\frac{\log(N)}{\log(p_k)} \geq 2$, donc

$$b_N \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \left(\frac{2\log(N)}{\log(p_k)} \right)^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \left(\frac{2\log(N)}{\log(2)} \right)^2 = \frac{4}{\log^2(2)} \frac{\log^2(N)}{N} \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k}$$

Or $\pi(N) \leq N$ et $\forall k, p_k \geq k$, donc

$$b_N \leq \frac{4}{\log^2(2)} \frac{\log^2(N)}{N} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}}_{H_N \underset{N\to\infty}{\sim} \log(N)} \underset{N\to\infty}{\sim} C_{te} \times \frac{\log^3(N)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Donc $\lim_{N\to\infty} b_N = 0$.

Par ailleurs

$$a_N = \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\frac{1}{{p_k}^i} - \frac{1}{{p_k}^{i+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} i \left(\frac{p_k - 1}{{p_k}^{i+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\pi(N)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor} \underbrace{\left(\frac{p_k - 1}{{p_k}^3} \right) i \left(\frac{1}{p_k} \right)^{i-1}}_{u_{k,i}}.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{i\geq 1} u_{k,i}$ converge vers $\left(\frac{p_k-1}{{p_k}^3}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = \frac{1}{p_k(p_k-1)}$, terme positif et négligeable devant $1/k^2$ donc général d'une série convergente. Ainsi la famille $(u_{k,i})_{(k,i)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, et d'après le théorème de Fubini sa somme vaut $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}$.

$$N \geq {p_k}^{i+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} N \geq p_k \\ i \leq \frac{\log(N)}{\log p_k} - 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} k \in [\![1, \pi(N)]\!] \\ i \in [\![1, \lfloor \frac{\log(N)}{\log(p_k)} \rfloor]\!] \end{array} \right. \Rightarrow u_{k,i} \text{ est compris dans la somme définissant } a_N.$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on peut alors attendre tous les termes de la famille $(u_{k,i})_{(k,i)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}.$$

M_N étant encadrée par deux fonctions de même limite $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}$, on peut en conclure, à l'aide du théorème d'encadrement appliqué aux suites, que c'est également la limite de M_N. ■

On définit m_N comme la médiane des termes $\{dl(1)\ldots dl(N)\}$.

Conjecture. *La suite* $(m_N)_{N\geq 1}$ *admet une limite finie.*

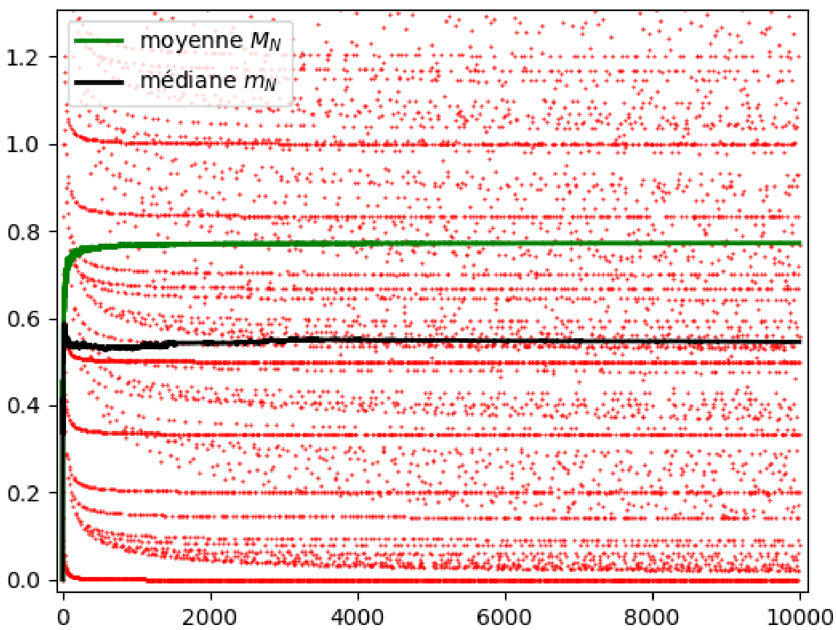

FIGURE 8 – Moyennes et médianes progressives pour $n \leq 10000$.

3.6 Autres propriétés

Proposition 11.

$$dl^{-1}(1) = \{p^p \mid p \in \mathbb{P}\}. \tag{11}$$

Preuve.

$\boxed{\supset :}$ Conséquence du lemme 1.

$\boxed{\subset :}$ On raisonnera par l'absurde. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ possédant strictement plus d'un diviseur, tel que $dl(n) = 1$. On l'écrit sous la forme $n = \prod_{i=1}^{k} {p_{a_i}}^{\alpha_{a_i}}$, avec $k > 1$. Alors

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_{a_i}}{p_{a_i}} = 1$$

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{\alpha_{a_i}}{p_{a_i}} = 1 - \frac{\alpha_{a_1}}{p_{a_1}} = \frac{p_{a_1} - \alpha_{a_1}}{p_{a_1}}.$$

Le membre tout à gauche est strictement positif, donc $1 \leq \alpha_{a_1} < p_{a_1}$. Le numérateur tout à droite est alors compris dans $[\![1, p_{a_1} - 1]\!]$, et sa fraction se retrouve irréductible.
Si l'on écrit le membre tout à gauche comme une fraction, son dénominateur $\prod_{i=2}^{k} p_{a_i}$ ne peut pas être réduit en $p_{a_1} \Rightarrow$ contradiction.
Puisqu'un antécédent de 1 ne peut avoir qu'un seul facteur premier distinct p, il est nécessairement de la forme $n = p^p$. ■

Corollaire 4. *Sur le graphe de d, les seules droites de pente 1 sont celles associées aux A_{p^p} pour p premier.*

Preuve. Conséquence de (2). ■

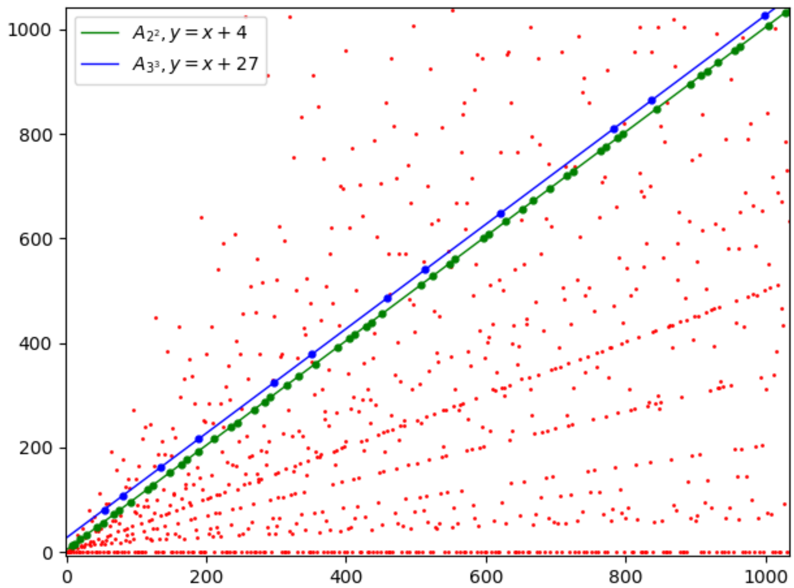

FIGURE 9 – Illustration du corollaire 4 pour $p = 2$ et $p = 3$.

Il est intéressant de remarquer que sur les abscisses comprises dans l'intervalle d'entiers $[\![0, N]\!]$, l'ensemble A_n (ou A'_n) contient $\pi(\lfloor \frac{N}{n} \rfloor)$ points. Autrement dit,

$$C_n^N = card(A_n \cap ([\![0, N]\!] \times \mathbb{N})) = \pi(\lfloor \frac{N}{n} \rfloor) \underset{N \to \infty}{\sim} \frac{N}{n \ln(N)}.$$

Ainsi pour n et n' deux entiers,

$$\frac{C_n^N}{C_n'^N} \sim \frac{n'}{n}.$$

Sur la représentation, l'ensemble A_n (respectivement A'_n) sera donc $\frac{n'}{n}$ fois plus « dense » que l'ensemble $A_{n'}$ (respectivement $A'_{n'}$).
Les pentes associées aux entiers les plus petits (cf. table 1) sont les plus visibles sur le graphe de d. Sur l'histogramme 10 des N premières valeurs de dl et de pas e, on aperçoit bien les "raies" auxquelles appartiennent les abscisses des premiers $dl(n)$, avec les hauteurs associées $h_{N,e}(dl(2)) \simeq \frac{\overbrace{h_{N,e}(0)}^{h_{N,e}(dl(1))}}{2}$, $h_{N,e}(dl(3)) \simeq \frac{h_{N,e}(0)}{3}$, $h_{N,e}(dl(4)) \simeq \frac{h_{N,e}(0)}{4} \dots$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
d(n)	0	1	1	4	1	5	1	12	6	7	1	16	1	9	8	16
dl(n)	0	$1/2$	$1/3$	1	$1/5$	$5/6$	$1/7$	$3/2$	$2/3$	$7/10$	$1/11$	$4/3$	$1/13$	$9/14$	$8/15$	2

TABLE 1 – Table des valeurs de d et dl pour $1 \leq n \leq 16$.

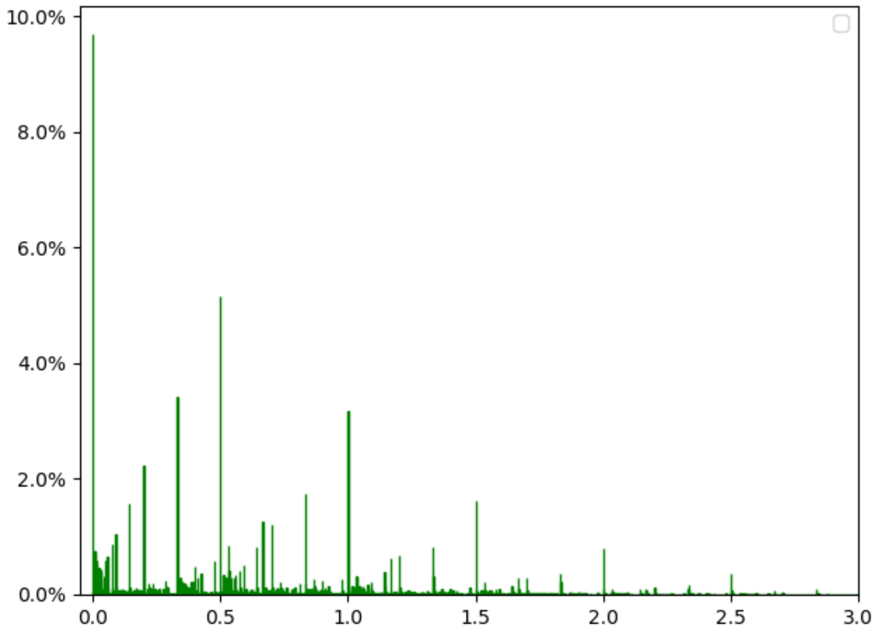

FIGURE 10 – Histogramme de présence des $N = 30000$ premières valeurs pour un pas $e = 0.002$.

Conjecture. $\forall q \in L_d$,

$$\lim_{\substack{e \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{h_{N,e}(q)}{h_{N,e}(0)} = \sum_{a \in dl^{-1}(q)} \frac{1}{a}.$$