UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Andrei POŞTARU   Olga BENDERSCHI

Probabilităţi și Statistică

Lucrări de laborator

1.1. Metoda Monte Carlo. Aplicaţii. Precizia metodei.

Termenul ,,Metoda Monte Carlo” este sinonim cu termenul ,,Metoda experimentelor statistice”. Apariţia acestei metode se raportează de obicei la anul 1949, în care apare articolul ,,The Monte Carlo method” (Metropolis N., Ulam S.). Întemeietorii metodei sunt consideraţi americanii J. Neumann şi S. Ulam care, în legătură cu lucrările efectuate pentru crearea bombei atomice, au propus să se utilizeze aparatul teoriei probabilităţilor pentru rezolvarea unor probleme cu caracter aplicativ la calculatoarele electronice.

De fapt, ideea utilizării fenomenelor aleatoare în domeniul calculelor de aproximare poate fi raportată la anul 1873, când a apărut o lucrare a lui Hall despre determinarea numărului π cu ajutorul aruncărilor la întâmplare a unui ac pe o foaie de hârtie pa care s-au trasat drepte paralele.

Metoda Monte Carlo este o metodă de rezolvare numerică a problemelor matematice, bazată pe modelarea variabilelor aleatoare.

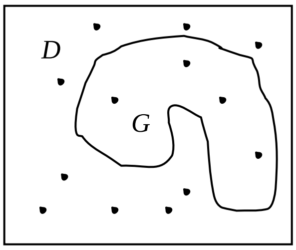
Fie ξ o variabilă aleatoare. Să efectuăm n experimente independente astfel, încât fiecare să se încheie cu o valoare a lui ξ (ne putem imagina că în fiecare experiment, pur şi simplu, se măsoară valoarea lui ξ). Acest proces de construire pentru ξ a n valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ reprezintă *modelarea variabilei aleatoare* ξ, iar valorile x_i se numesc *realizările lui* ξ.

Dacă este vorba de studierea unor fenomene reale, atunci modelarea variabilelor aleatoare, legate de ele, este numită ,,*simulare*”.

Procedeul principal de elaborare a metodei Monte Carlo pentru rezolvarea unei probleme constă în reducerea acesteia la calculul valorilor medii. Mai exact, pentru a calcula valoarea aproximativă a unei mărimi scalare a (care poate fi rădăcina unei ecuaţii, valoarea unei integrale definite etc.) trebuie să găsim o variabilă aleatoare ξ, astfel încât să avem $M\xi = a$. Atunci, modelând variabila aleatoare ξ, adică construind pentru ea n realizări $x_1, x_2, \dots, x_n$, vom considera:

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Mărimea a (deci şi ξ) poate fi atât scalară, cât şi vectorială. Metoda Monte Carlo poate fi aplicată, în primul rând, problemelor care admit o descriere probabilistă. Dar, aşa cum vom vedea, în multe cazuri se poate construi un model probabilist şi pentru probleme strict deterministe.



Fie că dorim să estimăm aria S_G a unei figuri plane mărginite G. Pentru aceasta alegem un dreptunghi D, cu aria S_D care să includă pe G. În D luăm la întâmplare n puncte. Fie prin $n(G)$ numărul punctelor care nimeresc în G. Este evident că dacă n e mare, atunci $\frac{n(G)}{n} \approx \frac{S_G}{S_D}$, de unde rezultă estimaţia $S_G \approx \frac{n(G)}{n} S_D$.

În acest exemplu variabila aleatoare ξ este prezentă implicit şi are două valori posibile: S_D, dacă punctul nimereşte în G, şi 0 dacă punctul nimereşte în $D \backslash G$. Se verifică cu uşurinţă că $M\xi = S_G$, iar

$$\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i = \frac{n(G)}{n} S_D.$$

Pe lângă noţiunea de *modelare a variabilei aleatoare* mai putem vorbi şi despre *modelarea unui eveniment aleator* sau *a unui experiment* şi, în general, *a unui fenomen*. De fiecare dată prin modelare vom subînţelege *recrearea, reproducerea* cu ajutorul calculatorului electronic a funcţionării modelului probabilist al fenomenului.

Exemplu de modelare: modelarea variabilei aleatoare ξ cu legea uniformă de repartiţie pe [0,1].

Să aruncăm de k ori o monedă simetrică şi să punem $\alpha_i = 1$ sau $\alpha_i = 0$ după cum la aruncarea i, $i = 1, 2, \ldots, k$, cade stema sau banul. Este evident că suma

$$S_k = \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + \alpha_k \cdot \frac{1}{2^k}$$

este un număr pe [0,1] şi reprezintă o variabilă aleatoare discretă cu 2^k valori posibile. Dacă k este mare ($k \geq 40$), atunci repartiţia variabilei aleatoare S_k coincide practic cu repartiţia variabilei aleatoare, uniform repartizate pe [0,1]. Mai exact se poate demonstra că, cu probabilitatea 1,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \cdot 2^{-i}$$

are legea uniformă de repartiţie pe [0,1].

Prin urmare, dacă vrem să modelăm variabila aleatoare ξ cu repartiţie uniformă pe [0,1], atunci n realizări $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru ξ le putem obţine aruncând o monedă simetrică de nk ori: fiecare k aruncări ne dau o realizare x_i.

Valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale variabilei aleatoare uniforme pe [0,1], se numesc *numere aleatoare*.

Dacă pentru variabila cu repartiţie uniformă pe [0,1] a fost obţinut un număr necesar de realizări, acestea pot fi înmagazinate în memoria calculatorului (spre a fi folosite ulterior). Tabele de numere aleatoare se găsesc în cărţile de teoria probabilităţilor şi statistică matematică. Astfel de tabele au fost alcătuite cu mult înainte de apariţia metodei Monte Carlo în forma ei actuală. Necesitatea lor apare în legătură cu aplicarea procedeelor de alegere la întâmplare, la planificarea diverselor experimente în biologie, medicină, agricultură etc.

Pentru alcătuirea tabelelor de numere aleatoare Kendall folosea ruleta, alcătuită dintr-un disc divizat în zece sectoare egale corespunzătoare cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tot în acest scop a fost folosit un dispozitiv special cu acţiune rapidă – ruleta electronică, care servea ca generator de numere aleatoare, bazat pe nişte principii fizice (de generare de impulsuri aleatoare).

Totodată, se întreprindeau măsuri de precauţie pentru a asigura imparţialitatea experimentelor. În plus se aplica un complex de teste pentru a verifica dacă numerele care se obţineau erau într-adevăr aleatoare.

Dacă dispunem de un tabel suficient de cuprinzător de numere aleatoare, atunci problema sursei de realizări independente ale variabilei aleatoare uniform repartizate pe [0,1] poate fi considerată rezolvată în principiu. Totuşi, din punct de vedere practic, păstrarea unui tabel amplu în memoria calculatorului este destul de incomodă, de aceea tabelele de numere aleatoare practic nu se utilizează.

În calculele practice realizările variabilei aleatoare uniform repartizate pe [0,1] se obţin cel mai simplu cu ajutorul unui algoritm. Numerele obţinute pe această cale se numesc *pseudoaleatoare* (spre deosebire de numerele *aleatoare*, care se obţin, de exemplu, cu ajutorul monedei). Evident, se impune condiţia ca obţinerea acestor numere să aibă loc într-un timp suficient de scurt de funcţionare a calculatorului.

În limbajul PASCAL există un *generator de numere pseudoaleatoare* – funcţia RANDOM. Înainte de a folosi în program funcţia RANDOM, apelăm obligatoriu la funcţia RANDOMIZE, ce iniţiază procesul de generare a variabilei aleatore.

Utilizând acest generator, putem scrie un program care *ia la întâmplare* un număr de pe [0,1]:

```
Program Punct;
Var x :real;
Begin
     randomize;
     x:= random;
     Writeln( ‘abscisa punctului’, x:1:3);
End.
```

La modelarea variabilei aleatoare η cu *legea de repartiţie uniformă pe* $[a, b]$, vom folosi formula

$$\eta = a + (b - a) \cdot \xi,$$

unde ξ este o variabilă aleatoare cu repartiţie uniformă pe [0,1].

Prin urmare realizările $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale lui η se obţin din realizările $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale lui ξ conform formulei:

$$y_i = a + (b - a) \cdot x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

În PASCAL există, de asemenea funcţia RANDOM(k) care *ia la întâmplare* un număr din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, k - 1\}$. Dacă trebuie să se aleagă un număr din mulţimea $\{1, 2, \ldots, k\}$, atunci în program se va scrie RANDOM(k) +1.

Vom scrie un program care modelează o aruncare a zarului:

```
Program Zar1;
Var x:integer;
 Begin
      randomize;
      x:= random(6) + 1;
      writeln(' Numarul de puncte este : ', x);
 End.
```

Putem modela un experiment mai complicat, şi anume, aruncarea a două zaruri până când ambele vor cădea cu aceeaşi faţă, cu afişarea numărului de aruncări:

```
Program Zar2;
Var z1, z2, k :integer;
Begin
     randomize;
     repeat
           z1:=random(6)+1;
           z2:=random(6)+1;
           writeln(z1, ' ', z2);
           k:=k +1;
      until z1=z2;
      writeln(' Numarul de aruncari: ', k);
End.
```

Aplicaţii

Cu ajutorul metodei Monte Carlo se pot rezolva următoarele probleme:

1. Calculul probabilităţii unui eveniment aleator

Dacă evenimentul aleator A se produce în experimentul dat cu o probabilitate necunoscută $P(A)$, atunci conform metodei Monte Carlo, valoarea aproximativă a acestei probabilităţi se calculează astfel: se modelează experimentul dat de n ori şi se pune $P(A) \approx \frac{n(A)}{n}$, $n(A)$ fiind numărul de apariţii ale lui A în experimentele efectuate.

2. Calculul valorii medii a unei variabile aleatoare

Dacă cunoaştem n realizări $x_1, x_2, ..., x_n$ ale variabilei aleatoare ξ, atunci considerăm că

$$M\xi \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Principala problemă de calcul, care se rezolvă de obicei prin metoda Monte Carlo, este problema estimării valorii medii a unei variabile aleatoare, adică problema calculului unei integrale de tip *Lebesgue* în raport cu o anumită măsură de probabilitate.

Precizia metodei Monte Carlo

Am menţionat deja că metoda Monte Carlo se bazează pe calculul valorilor medii. Astfel apare problema preciziei formulei

$$M\xi \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

($x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n realizări obţinute în urma modelării lui ξ): pentru ce n cu o probabilitate nu mai mică decât β are loc inegalitatea

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi\right| < \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$, $\beta \in (0, 1)$)?

Astfel, fiind daţi ε > 0 şi β∈(0, 1), se cere să determinăm acea valoare a lui *n* care satisface relaţia: $$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi \right| < \varepsilon \right) = \beta$$

sau $$P\left(-\varepsilon < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - nM\xi}{n} < \varepsilon \right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{D\xi}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - nM\xi}{\sqrt{nD\xi}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{D\xi}} \right) = \beta$$

În virtutea teoremei limită centrale pentru variabile aleatoare independente identic repartizate (x_1, x_2, …, x_n sunt atare variabile), ultima egalitate devine

$$2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{D\xi}} \right) = \beta \cdot$$

Astfel trebuie să rezolvăm ecuaţia $\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{D\xi}} \right) = \frac{\beta}{2}$, adică

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{D\xi}} = \Phi_0^{-1}\left(\frac{\beta}{2} \right). \qquad (6)$$

Mărimea $\Phi_0^{-1}\left(\frac{\beta}{2} \right)$, pe care o notam prin x_β , o găsim în tabelul valorilor funcţiei $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$. De exemplu, pentru β=0.95 găsim x_β = 1.96, adică $\Phi_0^{-1}\left(\frac{0.95}{2} \right) = 1.96$.

Rezolvând ecuaţia (6) obţinem $$n = \frac{D\xi \cdot x_\beta^2}{\varepsilon^2}. \qquad (7)$$

Astfel, dacă $n \geq \left[\frac{D\xi \cdot x_\beta^2}{\varepsilon^2} \right] + 1$, precizia ε este asigurată.

Exemplu. Într-o urnă sunt k_1 bile albe, k_2 bile negre, k_3 bile roşii. Din ea se alege la întâmplare câte o bilă până când vor fi extrase două bile albe consecutiv (în cazul schemei fără întoarcere s-ar putea întâmpla să fie scoase toate bilele fără a fi scoase două bile albe consecutiv). Fie ξ numărul de bile extrase. Să se calculeze $M\xi$ şi $P(A)$, unde A = {au fost extrase două bile negre consecutiv}. Să se analizeze ambele scheme: *cu* şi *fără* întoarcere.

Prima problemă constă în „recunoaşterea" culorilor bilelor. Pentru aceasta vom considera că bilele sunt numerotate în felul următor: numerele de la 1 până la k_1 sunt atribuite culorii albe, numerele de la k_1+1 până la $k_1 + k_2$ sunt atribuite culorii negre, iar toate celelalte – culorii roşii. Alegând cu ajutorul funcţiei *random* un număr *x* din mulţimea {1, 2, ..., $k_1 + k_2 + k_3$}, vom raţiona astfel: dacă $x \le k_1$, aceasta înseamnă că s-a ales o bilă albă, dacă $k_1 < x \le k_1 + k_2$, aceasta înseamnă că s-a ales o bilă neagră, iar dacă $x \ge k_1 + k_2 + 1$ – că s-a ales o bilă roşie.

Având aceasta în vedere vom modela experimentul respectiv, adică vom extrage câte o bilă până când vor fi scoase două bile albe consecutiv sau până când vor fi scoase toate bilele din urnă (ţinând cont de schema extragerilor). În consecinţă, lui ξ îi vom atribui ca valoare numărul bilelor scoase.

Repetăm experimentul de n ori.

Numărul n în prealabil trebuie găsit în funcţie de exactitatea ε (vezi formula 7). Pentru aceasta vom estima $D\xi$ cu ajutorul formulei $D\xi = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x_i^2 - \left(\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x_i\right)^2$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ fiind n_0 realizări ale lui ξ, $n_0 \ge 20$.

1.2. Modelarea variabilelor aleatoare cu repartiţii absolut continui. Metoda inversării funcţiei de repartiţie

Considerând că dispunem de un mod de obţinere a unor realizări independente ale variabilei aleatoare ξ cu repartiţie uniformă pe [0,1], vom modela alte variabile aleatoare.

Fie η o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie $F_\eta(x)$ continuă. Se ştie că variabila aleatoare $\xi = F_\eta(\eta)$ are repartiţie uniformă pe [0,1].

Cum $F_\eta(x)$ este continuă, rezultă că $F_\eta^{-1}(\xi) = \eta$, unde F_η^{-1} este inversa funcţiei F_η.

Această relaţie ne oferă o metodă de modelare a variabilei aleatoare η: se modelează variabila ξ cu repartiţie uniformă pe [0,1], adică se construiesc pentru ea n realizări $x_1, x_2, \ldots, x_n$, după care realizările lui η se obţin astfel:

$$y_i = F_\eta^{-1}(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Neajunsul acestei metode derivă din dificultăţile analitice care apar la determinarea funcţiei $F_\eta^{-1}(x)$. Pentru unele repartiţii (de exemplu, pentru acea normală) această funcţie nu poate fi scrisă explicit.

Exemple:

1. Fie η o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a^2}\cdot(a+2x), & x \in [0,a]. \\ 0 \quad , & x \notin [0,a]. \end{cases}$$

Atunci $\quad F(x) = \frac{1}{2a^2}\cdot\int_0^x (a+2t)dt = \frac{1}{2a^2}(ax+x^2), \quad x \in [0,a].$

Prin urmare, $\quad F^{-1}(x) = \frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{1+8x}\right).$

În consecinţă, realizările y_i ale lui η se obţin din realizările x_i ale variabilei cu repartiţie uniformă pe [0,1] conform formulei:

$$y_i = \frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{1+8x_i}\right),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

În acest exemplu inversa funcţiei $F(x)$ poate fi scrisă în mod explicit.

2. Fie η o variabilă aleatoare cu repartiţie exponenţială de parametru α.

Deoarece $$F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

ecuaţia $\xi = F_\eta(\eta)$ devine $\xi = 1 - e^{-\alpha\eta}$ sau $\eta = -\frac{\ln(1-\xi)}{\alpha}$. Deci, $F_\eta^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\alpha}$. Prin urmare, realizările y_i ale lui η se vor obţine conform formulei:

$$y_i = -\frac{\ln(1-x_i)}{\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

(Aici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt, după cum s-a menţionat deja, realizări ale variabilei cu repartiţie uniformă pe [0,1]). Deoarece ξ şi 1 - ξ sunt identic repartizate, în loc de (2) vom folosi formula:

$$y_i = -\frac{\ln x_i}{\alpha}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Şi în acest caz inversa funcţiei $F(x)$ poate fi scrisă în mod explicit.

Modelarea variabilei aleatoare normale *N*(0,1)

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ variabile aleatoare independente cu repartiţie uniformă pe [0,1]. Valoarea medie a sumei $\sum_{i=1}^{k} x_i$ este $\frac{k}{2}$, iar dispersia ei este $\frac{k}{12}$. Prin urmare, variabila aleatoare

$$\eta(k) = \sqrt{\frac{12}{k}} \sum_{j=1}^{k} \left(x_j - \frac{1}{2} \right) \tag{4}$$

are valoarea medie egală cu 0 şi dispersia egală cu 1. În baza teoremei limită centrale pentru $n \to \infty$ repartiţia acestei variabile aleatoare tinde către repartiţia normală $N(0,1)$. În practică se consideră că pentru $k = 12$, când (4) are o formă deosebit de simplă:

$$\eta(12) = \sum_{i=1}^{12} x_j - 6, \tag{5}$$

se obţine o aproximare destul de bună a legii normale $N(0,1)$. Desigur, la rezolvarea unor probleme concrete trebuie să ţinem seama că, dacă există abateri mari, η(12) nu poate da rezultate bune.

Formula (4) se foloseşte mai ales atunci când nu suntem interesaţi de valori mari ale lui |η|. Pentru îmbunătăţirea aproximaţiei a fost propusă formula

$$\zeta(k) = \eta(k) + \frac{\eta^3(k) - 3\eta(k)}{20k}.$$

Dacă suntem interesaţi de valori mari ale lui $|\eta|$ sau dacă avem nevoie de foarte multe realizări, atunci ne putem folosi de formule exacte care cer mai puţine numere aleatoare:

$$\eta_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln \xi_1} \cdot \sin(2\pi\xi_2), \quad \eta_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln \xi_1} \cdot \cos(2\pi\xi_2).$$

Aici variabilele aleatoare η_1 şi η_2 vor fi independente cu repartiţia normală $N(0,1)$, dacă ξ_1 şi ξ_2 sunt independente uniform repartizate pe [0,1].

Pentru modelarea variabilei aleatoare $\eta \sim \boldsymbol{N(a, \sigma)}$ se foloseşte relaţia:

$$\eta = \sigma\cdot\xi + a, \text{ unde } \xi \sim \boldsymbol{N(0, 1)}.$$

Modelarea variabilei aleatoare η cu repartiţia Poisson de parametru λ

Modelarea variabilei aleatoare η cu repartiţia Poisson de parametru λ se bazează pe faptul că $\eta = \min\left\{k : \prod_{j=0}^{k} \xi_j < e^{-\lambda}\right\}$, dacă ξ_0, ξ_1, ξ_2, … sunt variabile aleatoare independente uniform repartizate pe **[0,1].**

De aici rezultă formula pentru realizările lui η:

$$y_i = \min\left\{k : \prod_{j=0}^{k} x_j < e^{-\lambda}\right\},$$

unde x_0, x_1, x_2, ... sunt numere aleatoare.

Modelarea variabilei aleatoare η cu repartiţia binomială B_n^p

Pentru a obţine o realizare y a lui η vom construi mai întâi n realizări x_1, x_2, ..., x_n pentru variabila uniform repartizată pe [0,1] după care considerăm y egal cu numărul cazurilor când $x_i < p$.

Exerciţii.

Să se modeleze:

1) un punct luat la întâmplare în dreptunghiul $[a, b]\times[c, d]$;

2) un punct luat la întâmplare în cercul $x^2 + y^2 \le r^2$;

3) variabila aleatoare egală cu numărul bilelor albe scoase la extragerea a 3 bile din urna conţinând 5 bile albe şi 2 bile negre. Să se considere ambele scheme de extragere.

4) variabila aleatoare discretă ξ cu repartiţia $P(\xi = x) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

1.3. Calculul integralelor cu ajutorul metodei Monte-Carlo

Fie $I = \int_G g(x)dx$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $G \subseteq R^s$, $g(x)$ - mărginită.

Distingem două cazuri.

1) Fie domeniul $G \subset R^s$ mărginit. În acest caz înscriem G într-un paralelipiped D drept (cu laturile paralele axelor de coordonate).

Putem scrie:

$$I = \int_G g(x)dx = \mu(D)\int_D g(x)I_G(x)\frac{1}{\mu(D)}dx,$$

unde
$$I_G = \begin{cases} 1, & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases},$$

iar $\mu(D)$ este măsura *Lebesgue* a lui G (lungimea, aria, volumul).

Deci, $I = M\varphi(\xi)$, unde $\varphi(\xi) = \mu(D)g(\xi)I_G(\xi)$, ξ fiind o variabilă aleatoare (vector aleator) cu repartiţie uniformă în D, adică ξ este un punct luat la întâmplare în D.

Prin urmare,

$$I \approx \frac{1}{n}\mu(D)\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\cdot I_G(x_i),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n realizări ale lui ξ, adică n puncte luate la întâmplare în D.

2) Fie G un domeniu oarecare, eventual nemărginit. Atunci luăm o densitate de repartiţie $f(x)$ oarecare, care nu se anulează în G (de exemplu, repartiţia normală), şi scriem:

$$I = \int_G g(x)dx = \int_G \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \int_{R^s} \frac{g(x)\cdot I_G(\xi)}{f(x)} f(x)dx = M\varphi(\xi),$$

unde $\varphi(\xi) = \dfrac{g(\xi)\cdot I_G(\xi)}{f(\xi)}$, iar ξ este o variabilă cu densitatea de repartiţie $f(x)$.

Modelând această variabilă obţinem n realizări $x_1, x_2, \ldots, x_n$, după care vom considera

$$I \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)\cdot I_G(\xi_i)}{f(x_i)}.$$

Remarcă. Se poate demonstra că pentru un nivel de încredere fixat β eroarea aproximării descreşte la fel ca $\frac{1}{\sqrt{n}}$, indiferent de dimensiunea *s*, dacă $\int_G g^2(x)dx < \infty$.

Spre deosebire de formulele de cuadratură deterministe metoda Monte Carlo la creşterea lui *n* foloseşte şi valorile funcţiei calculate mai înainte.

Exemplu: Să se calculeze integrala $\iint_G \varphi(x,y)dxdy$, unde domeniul $G = \{(x, y)$: $y \le x^2$, $x + y \le 2$, $y \ge 0$, $x \ge 0$ }.

<u>Soluţie-algoritm</u>

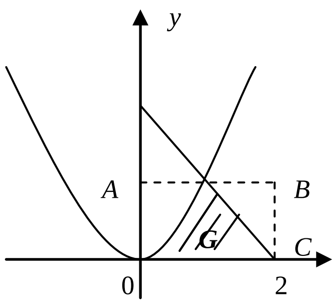


Fig. 1

1. Înscriem domeniul *G* într-un dreptunghi, de exemplu, în dreptunghiul *ABCO* (Fig.1);
2. $S = 0$.
3. Pentru $i = \overline{1,n}$ efectuăm:

în pătratul *ABCO* luăm la întâmplare punctul (x_i, y_i);

dacă ($y_i \le x_i^2$ & $y_i \le 2 - x_i$), atunci $I_G(x_i, y_i) = 1$;

dacă nu are loc ($y_i \le x_i^2$ & $y_i \le 2 - x_i$), atunci $I_G(x_i, y_i) = 0$;

$S = S + \varphi(x_i, y_i)\cdot I_G(x_i, y_i)$.

$I = 2\cdot S/n$.

LUCRAREA DE LABORATOR NR.1

Calculul valorii medii, a probabilităţii unui eveniment aleator şi a integralelor multiple

Această lucrare are ca tematică *modelarea variabilelor aleatoare* şi *aplicarea metodei Monte Carlo la calculul valorii medii*, *probabilităţii şi a integralei definite*.

Sarcinile individuale ale lucrării conţin o problemă cu o *variabilă aleatoare* şi un *eveniment aleator* pentru care urmează a fi calculate valoarea medie, respectiv probabilitatea şi o integrală multiplă. Pentru calculul valorii medii se vor modela n valori ale variabilei aleatoare, iar pentru calculul probabilităţii se va modela de n ori evenimentul aleator dat (şi experimentul respectiv).

Fiecare lucrare de laborator care presupune îndeplinirea unei variante concrete se va încheia cu prezentarea *dării de seamă*, ce va include:

1. Formularea problemei (varianta concretă).
2. Expunerea succintă a metodei (testului, algoritmului) aplicate.
3. Textul programului ce realizează metoda aplicată elaborat într-un limbaj algoritmic.
4. Rezultatele testării programului.
5. Rezolvarea teoretică a problemei (cel puţin pentru unele cazuri particulare).

Probleme propuse

1. O urnă conţine n_1 bile albe, n_2 bile negre şi n_3 bile roşii. Conform schemei cu întoarcere se extrage câte o bilă până când apare o bilă albă sau una neagră. ξ - numărul de bile roşii extrase. A = {ultima bilă extrasă este albă}.

2. O persoană scrie n scrisori, pune fiecare scrisoare în plic, închide plicurile, după care scrie la întâmplare adresele pe plicuri. ξ - numărul scrisorilor care ajung la destinatarul său. A = {cel puţin o scrisoare ajunge la destinatarul său}. ($M\xi = 1$, $P(A) \approx 1- e^{-1}$).

3. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt variabile aleatoare independente cu repartiţia Bernoulli: $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = 0) = q$, $q = 1 - p$. Definim variabilele aleatoare η_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, astfel: $\eta_k = 0$ dacă $\xi_k = \xi_{k+1}$ şi $\eta_k = 1$ dacă $\xi_k \neq \xi_{k+1}$. $\zeta_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}$. $A = \left\{\zeta \geq \frac{n}{2}\right\}$. ($M\zeta_n = 2pqn$)

4. ξ_1 şi ξ_2 sunt variabile aleatoare independente cu repartiţia normală $N(0,1)$. $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2$. $A = \left\{ \left|\xi_1^2 - \xi_2^2\right| < 0.4 \right\}$. ($M\xi = 2$).

5. Se consideră ecuaţia $g(x) = x^2 - 2ax + b = 0$. Fie a şi b variabile aleatoare independente cu repartiţie uniformă pe $[0,1]$. ξ este valoarea minimală a funcţiei $g(x)$. A={rădăcinile ecuaţiei sunt reale}. $\left(M\xi = \frac{1}{6},\ P(A) = \frac{1}{3}\right)$.

6. În condiţiile problemei nr.5 a şi b urmează legea de repartiţie exponenţială de parametru α. ξ - este valoarea minimală a funcţiei $g(x)$. $A = \{\xi \geq 0\}$.

7. În condiţiile problemei nr.5 ξ este valoarea maximală a funcţiei $g(x)$ pe segmentul $[-1, 5]$. A = {g(x) atinge valoarea maximală în punctul $x = 5$} ($M\xi = 20.5$, $P(A) = 1$).

8. În condiţiile problemei nr.5 a şi b au repartiţie uniformă pe $[-1, 2]$. ξ este valoarea minimală a funcţiei $g(x)$, $A = \{g(x) \leq 0\}$.

9. În condiţiile problemei nr.5 a şi b urmează legea de repartiţie $N(0,1)$. ξ este valoarea minimală a funcţiei $g(x)$, $A = \{g(x) \geq 0\}$.

10. Variabila aleatoare η are repartiţia exponenţială de parametru α. $\xi = [\eta]$. $A = \left\{\xi < \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$. $\left(M\xi = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}\right)$.

11. Într-un pătrat se iau la întâmplare punctele *A* şi *B*. Acest experiment se repetă până când cercul, al cărui diametru este segmentul *AB*, se va conţine în întregime în pătrat. ξ - numărul experimentelor. $A = \{\xi = 1\}$.

12. Pe un cerc de raza 1 se iau la întâmplare punctele *A*, *B* şi *C*. ξ - aria triunghiului *ABC*. *A* ={toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite}. ($P(A) = 1/4$).

13. În prima urnă sunt k_1 bile albe şi k_2 negre, iar în a doua urnă sunt m_1 bile albe şi m_2 bile negre. Din prima urnă se extrage o bilă la întâmplare care se pune în a doua urnă. De aici se iau la întâmplare două bile. ξ - numărul bilelor albe extrase din a doua urnă. $A = \{\xi=2\}$.

14. Într-o urnă sunt k_1 bile albe, k_2 bile negre şi k_3 bile roşii. Una câte una se scot toate bilele. ξ - numărul de ordine al extragerii în care prima dată este scoasă o bilă albă. *A* = {o bilă de culoare albă este scoasă înainte de a fi scoasă o bilă de culoare neagră}.

15. În condiţiile problemei nr.14 ξ este numărul bilelor albe scoase în primele k_1 extrageri. *A* = {în primele k_1 extrageri şi în ultimele k_1 extrageri este scos acelaşi număr de bile albe}.

16. În condiţiile problemei nr.14 ξ este numărul de bile roşii scoase între prima şi a doua bilă albă. $A = \{\xi = 0\}$.

17. Din mulţimea $\{1, 2,\dots, N\}$ se extrage cu întoarcere de *s* ori câte un număr. ξ este numărul maximal extras. *A* = {numărul maximal este extras o singură dată}.

18. În condiţiile problemei nr.17 ξ este numărul minimal extras. $A=\{\xi \geq 2\}$.

19. În condiţiile problemei nr.17 ξ este numărul de numere care nu au fost extrase nici o dată. *A* = {1 şi *N* nu sunt extrase}.

20. În pătratul *OABC* cu vârfurile în punctele $O = (0,0)$, $A = (0,1)$, $B = (1,1)$, $C = (1,0)$ se ia la întâmplare câte un punct până când în triunghiul *OAB* nimeresc *s* puncte. ξ - numărul punctelor luate în pătrat. A = {numărul de puncte ce nimeresc în triunghiul OAB diferă cu cel mult 2 de numărul punctelor ce nimeresc în triunghiul OBC}.

21. În condiţiile problemei nr.20 ξ este numărul punctelor care nimeresc în ΔABC. A = {numărul punctelor care nimeresc în ΔABC diferă de numărul celora care nimeresc în ΔOAC cu cel mult 2}.

22. În condiţiile problemei nr.20 ξ este numărul acelor puncte luate în pătrat, abscisele cărora sunt mai mici decât 1/2. A = {în ΔOBC nimereşte un număr par de puncte}.

23. Într-o urnă sunt k_1 bile albe şi k_2 bile negre. Se extrage câte o bilă fără întoarcere până sunt scoase toate bilele albe. ξ este numărul extragerilor. A = {sunt scoase 2 bile albe înainte de a fi scoasă o bilă neagră}.

24. În condiţiile problemei nr.23 ξ este numărul de bile negre extrase. A = {prima bilă extrasă este albă}.

25. Într-o urnă sunt k_1 bile albe şi k_2 bile negre. Se extrage câte o bilă cu întoarcere până când în s extrageri succesive sunt scoase numai bile de culoare neagră. ξ este numărul extragerilor. A = {sunt scoase succesiv cel puţin trei bile albe} (pentru $k_1 = 3$, $k_2 = 7$ şi $s = 5$, $M\xi \approx 16.5$}.

26. Într-un cerc de raza 2 se ia câte un punct până când se obţin două puncte situate de la centru la o distanţă ce nu întrece 1. ξ este numărul punctelor luate. A = {distanţa de la centrul cercului a celui de-al doilea punct nu întrece 1}.

27. În condiţiile problemei nr.26 ξ este numărul punctelor luate după primul „succes”. $A = \{8 \leq \leq \xi \leq 10\}$.

28. Se aruncă două zaruri până când apar doi de 6 de 3 ori. ξ - numărul aruncărilor. $A = \{\xi \geq 4\}$.

29. În condiţiile problemei nr.28 ξ este numărul de apariţii ale perechilor (1, 1), (2, 2), ..., (6, 6). A = {dintre toate perechile (i, i) cea mai frecventă este (6, 6)}.

30. Se aruncă două zaruri până când se obţine de 2 ori suma de 5 puncte. ξ - numărul aruncărilor. A = {cel puţin o dată cad doi de 6}.

31. Se aruncă două zaruri până când se obţine de 2 ori suma de 5 puncte. ξ - numărul apariţiilor sumei 9. $A = \{\xi = 2\}$.

32. Din mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ se extrage cu întoarcere câte un număr până când numărul 1 este scos de 2 ori. ξ este numărul extragerilor efectuate. A={numărul N este scos de cel puţin două ori}.

33. În condiţiile problemei nr. 32 ξ este numărul acelor numere care nu sunt scoase nici o dată. A = {toate numerele sunt scoase cel puţin câte o dată}.

34. Se aruncă trei zaruri până când cel puţin două dintre ele cad cu 6 puncte. ξ - numărul aruncărilor efectuate. $A = \{\xi \in [23,31]\}$.

35. În condiţiile problemei nr. 34 ξ este numărul de 6 ce cad la penultima aruncare. A = {la ultima aruncare cad trei de 6}.

36. Din mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ se extrage cu întoarcere câte un număr până când sunt scoase s numere divizibile cu 5. ξ este numărul extragerilor efectuate. A = {numărul extragerilor este divizibil cu 5}.

37. În condiţiile problemei nr. 36 ξ este numărul maximal extras. A = {ξ este par}.

38. Se iau la întâmplare două numere de pe segmentul [0,1]: a (primul) şi b (al doilea). $\xi = max(x_1, x_2)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + ax + 2b = 0$. $A = \{\xi > 1\}$.

39. În condiţiile problemei nr. 38 $\xi = \min(x_1, x_2)$, $A = \{\xi > 0\}$.

40. Se aruncă zarul până când faţa cu 6 puncte cade de s ori. ξ_i - numărul de apariţii ale feţei cu i puncte, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. $A = \{\xi_1 = \xi_2\}$.

41. Pe segmentul [0, 3] se ia la întâmplare câte un punct până când acesta va nimeri pe segmentul [2, 3]. ξ - numărul de puncte luate. A = {pe [0,1] sunt luate mai multe puncte decât pe [1, 2]}.

42. În condiţiile problemei nr. 41 ξ este numărul de puncte luate pe [0,1]. A = {pe [1, 2] nu este luat nici un punct}.

43. Pe segmentul [0,3] se iau la întâmplare s puncte. ξ este numărul maximal de puncte care nimeresc pe unul dintre segmentele [0,1], [1,2], [2,3]. A = {numărul maximal de puncte nimereşte pe [0,1]}.

44. Pe segmentul [0, 3] se ia la întâmplare câte un număr până când pe segmentul [1, 2] nimeresc s puncte. ξ este numărul de puncte luate. A = {pe [0,1] nimeresc mai puţine puncte decât pe [2,3]}.

45. În condiţiile problemei nr. 44 ξ este numărul de puncte ce nimeresc pe segmentul [0,1]. A = {pe [0,1] nimeresc mai multe puncte decât pe [2, 3]}.

46. Se modelează câte o valoare x_i a variabilei cu repartiţia $N(a, \sigma)$, până când se obţine o valoare ce nu aparţine intervalului $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. ξ este numărul valorilor modelate. A = {ultima valoare modelată este mai mare decât $a + 3\sigma$}.

47. În condiţiile problemei nr.46 ξ este numărul valorilor modelate care nimeresc în intervalul $(0, a + 36)$. A = {pe $(a - 3\sigma, a)$ şi $(a, a + 3\sigma)$ nimereşte aproximativ acelaşi număr de valori (diferenţa $\leq \leq 2$)}.

48. Se modelează câte o valoare a variabilei aleatoare cu repartiţie exponenţială de parametru α până când în intervalul [0, 5] nimeresc s valori. ξ este numărul valorilor modelate. $A = \{M\xi < \xi < 2M\xi\}$.

49. În condiţiile problemei nr.48 ξ este valoarea maximală modelată. $A = \{\xi > 3\}$.

50. O particulă se află iniţial în punctul O al axei numerice. Peste o secundă ea trece în punctul 1 sau în -1 cu probabilitatea p, respectiv q, $p + q = 1$. Peste încă o secundă din punctul în care se află particula trece din nou cu o unitate la dreapta sau la stânga cu probabilitatea p, respectiv q ş.a.m.d. ξ_t – coordonata particulei peste t secunde. $A = \{\xi_t > 0\}$.

51. În condiţiile problemei nr. 50 ξ este numărul de reveniri ale particulei în punctul O după t sec. A = {cea mai mare parte de timp particula se află pe partea pozitivă a axei}.

52. În condiţiile problemei nr. 50 ξ este coordonata maximală a particulei în intervalul de timp $[0, t]$, $A = \{\xi \geq [t/2]\}$.

53. Din mulţimea {0, 1, 2, …, 9} se ia de 6 ori câte un număr cu întoarcere şi aceasta se repetă până când suma primelor trei cifre va fi egală cu suma ultimelor trei cifre. ξ - numărul experimentelor. $A = \{\xi = 1\}$. ($P(A) = 0.005252$).

54. În condiţiile problemei nr.53 ξ este suma ultimilor trei cifre extrase. $A = \{\xi = s\}$, s = 10, 11, 12.

55. Se aruncă zarul până atunci când suma punctelor prima dată întrece 1000. ξ - numărul aruncărilor. $A = \left\{ \max\limits_{i,j} |n_i - n_j| = s \right\}$, s = 1, 2, 3, …, unde n_i este numărul feţelor care cad cu i puncte, i = 1, 2, …, 6.

56. Din mulţimea {0, 1, 2, …, N} se extrage câte un număr cu întoarcere până când sunt extrase r numere diferite. ξ - numărul extragerilor. A = {1 a fost extras cel mai des}. ($N = 10$, $r = 5$, $M\xi \approx 16{,}5$; $P(A) = 0{,}5$).

57. În condiţiile problemei nr.56 ξ este lungimea maximală a unei iteraţii de numere extrase deja cel puţin o dată. A = {ultimul este scos numărul 1}.

58. În pătratul $[0,1] \times [0,1]$ se iau la întâmplare 3 puncte A, B, C şi acest experiment se repetă până când aria triunghiului ABC întrece prima dată valoarea 0,45. ξ - numărul experimentelor. $A = \{\xi = 1\}$.

59. În condiţiile problemei nr.58 ξ este perimetrul ultimului triunghi ABC. $A = \{\xi > 2\}$.

60. În pătratul $[0,1] \times [0,1]$ se ia la întâmplare un punct (x, y) şi acest experiment este repetat până când va fi satisfăcută condiţia $|x - y| < 0{,}25$. ξ - numărul experimentelor. $A = \{\xi = 1\}$.

61. Sunt date două urne cu bile albe, negre şi roşii. Prima urnă conţine 4 bile albe, 2 bile negre şi 3 bile roşii, iar a doua conţine respectiv, 8, 4 şi 5 bile. Din prima urnă se extrage la întâmplare o bilă care se introduce în a doua urnă după care din aceasta se extrage la întâmplare o bilă care se introduce în prima urnă ş. a. m. d. până când se egalează numărul de bile albe în urne. ξ - numărul de extrageri din prima urnă. $A = \{\xi \geq k\}$, k = 5; 10; 14.

62. În condiţiile problemei nr.61 ξ este numărul de bile roşii extrase din urna a doua. $A = \{\xi$ este par$\}$.

63. Se aruncă o monedă până când stema cade succesiv de trei ori. ξ - numărul aruncărilor monedei. A = {banul cade cel puţin o dată de trei ori succesiv}. ($M\xi \approx 14$, $P(A) \approx 0.52$).

64. În condiţiile problemei nr.63 ξ este numărul iteraţiilor de steme. $A = \{\xi \leq 5\}$.

65. Se consideră un şir de experimente Bernoulli. θ_k – numărul de ordine al experimentului în care apare al k-lea succes. $A = \{\theta_k = k + 2\}$. ($M\,\theta_k = k/p$).

66. În triunghiul cu vârfurile în punctele (0, 0), (2, 1), (2, 0) se ia la întâmplare un punct. ξ este abscisa, iar η - ordonata punctului. $A = \{\xi + \eta > 2\}$. ($M\xi = 4/3$, $M\eta = 5/12$).

67. Variabilele aleatoare ξ_1, ξ_2, ξ_3 sunt independente şi au repartiţia $N(0, 1)$. $\xi = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 \cdot \xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}}$.

$A = \{\xi < 0\}$.

68. Variabila aleatoare η are repartiţie exponenţială de parametru $\alpha = 1$. $\xi = \{\eta\}$. $A = \{\xi = \eta\}$ ($P(A) = 1 - e^{-1}$).

69. Din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ se extrage câte un număr cu întoarcere până când suma numerelor extrase prima dată întrece valoarea $\frac{N(1+N)}{2}$. ξ - numărul extragerilor. A = {cel puţin unul dintre numerele 1 şi N nu este extras nici o dată}.

70. În condiţiile problemei nr.69 ξ este numărul acelor numere care nu sunt extrase nici o dată. A = {1 este scos exact o dată}.

71. Se efectuează un şir de experimente Bernoulli, succesul având probabilitatea p în fiecare experiment. ξ este numărul experimentelor efectuate până la apariţia primei secvenţe 00. $A = \{\xi = 3\}$. $\left(M\xi = \frac{1+q}{q^2},\ q = 1-p\right)$.

72. În condiţiile problemei nr.71 ξ este numărul experimentelor efectuate până la apariţia primei secvenţe 111. $A = \{\xi = 5\}$. $\left(M\xi = \frac{1+p+p^2}{p^3}\right)$.

73. În condiţiile problemei nr.71 ξ este numărul experimentelor efectuate până la apariţia primei secvenţe 01. $A = \{\xi = 4\}$. $\left(M\xi = \frac{1}{pq}\right)$.

74. Pe segmentul [0,1] se ia la întâmplare un şir de numere $\eta_1, \eta_2, \ldots$. ξ – acea valoare a lui k pentru care suma $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k$ prima dată întrece 1. $A = \{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k < x\}$. $\left(M\xi = e,\ P(A) = \frac{x^n}{n!}\right)$.

75. Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt independente având repartiţia normală $N(0, 1)$. $\xi = \frac{\xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}$. $A = \left\{\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n} < \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}\right\}$. $\left(M\xi = \frac{1}{n}\right)$.

76. În condiţiile problemei nr.75 variabilele aleatoare au densitatea de repartiţie $f(x) = cx^2$ dacă $x\in[0, 2]$ şi $f(x) = 0$, dacă $x\notin[0,2]$.

77. Variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt independente, uniform repartizate pe [0,1]. $\xi = \sum_{i=1}^{n} |\xi_{i+1} - \xi_i|$. $A=\{2.71< \xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_k < 2.72\}$. ($M\xi=n/3$).

78. Într-o urnă sunt M_k bile numerotate cu k, $k = 1, 2, 3, 4$. Se scot fără întoarcere n bile. ξ - numărul de numere care nu sunt scoase nici o dată. $A = \{ \xi = i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

79. Din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ se extrage de k ori câte un număr fără întoarcere. ξ - suma numerelor extrase. A = {primele trei numere extrase x_1, x_2, x_3 formează o secvenţă crescătoare: $x_1 < x_2 < x_3$}. $\left(M\xi = \frac{1+N}{2}k\right)$.

80. Se efectuează un şir de experimente Bernoulli, succesul având probabilitatea p în fiecare experiment. Considerăm că în experimentul i ($i \geq 2$) apare secvenţa 00, dacă rezultatele experimentelor i-1 şi i sunt 0. μ_{00} – numărul secvenţelor 00 în n experimente. A = {avem s secvenţe 00 succesive}, $s = 1, 2, 3, \ldots$. ($M\mu_{00} = (n - 1)q^2$, $q = 1- p$).

81. În condiţiile problemei nr.80 considerăm că în experimentul i ($i \geq 3$) apare secvenţa 111, dacă rezultatele experimentelor i-2, i-1 şi i sunt 1. μ_{111} – numărul secvenţelor 111 în n experimente. A = {avem s secvenţe 111 succesive} $s = 1, 2, 3, \ldots$. ($M\mu_{111} = (n - 2)p^3$).

82. Se efectuează k experimente Bernoulli, succesul şi insuccesul având în fiecare experiment probabilitatea p, respectiv q, $p + q = 1$. ξ – numărul iteraţiilor (de succese şi de insuccese). A={ultima iteraţie este de succese}. ($p = 0.3$, $M\xi \approx 8.98$).

83. În condiţiile problemei nr.82 ξ este lungimea maximală a unei iteraţii. A ={iteraţia de lungimea maximală este alcătuită din succese}. ($k = 20$, $p= 0.5$, $M\xi \approx 4.67$; $k = 50$, $p= 0.5$, $M\xi \approx 6$).

84. În condiţiile problemei nr.82 ξ este numărul iteraţiilor de lungimea 1. A = {prima şi ultima iteraţie au aceeaşi lungime}.

85. În condiţiile problemei nr.82 ξ este numărul iteraţiilor de lungimea 2. $A = \{\xi = 1\}$.

86. Din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ se extrage câte un număr cu întoarcere până când sunt extrase toate numerele pare. ξ – numărul de numere impare care nu sunt extrase nici o dată. A = {1 este scos cel puţin de două ori}.

87. În condiţiile problemei nr.86 ξ este numărul maximal de extrageri ale unui număr. $A = \{\xi = k\}$, $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

88. Se aruncă zarul până când cad toate feţele cel puţin câte o dată. ξ - numărul aruncărilor. $A = \{\xi \le 12\}$.

89. Se aruncă zarul până când cad toate feţele pare cel puţin câte o dată. ξ- numărul aruncărilor. A = {cel mai des cade faţa cu 6 puncte}. ($M\xi \approx 11{,}38$).

90. În condiţiile problemei nr.89 ξ este numărul de feţe impare care nu apar nici o dată. $A = \{\xi = k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

91. Se aruncă zarul până apar primele trei feţe. ξ - numărul aruncări-lor . $A = \{\xi \le 5\}$, B = {apar toate feţele zarului}.

92. Din mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ se extrag unul câte unul toate numerele şi acest experiment se repetă până când ele sunt scoase în ordinea $1, 2, \ldots, N$. ξ - numărul experimentelor efectuate. $A=\{\xi > M\xi\}$. ($N = 4$; $M\xi = 22.9$; $p \approx 0.36$).

93. În planul XOY se consideră dreptunghiul $OABC$ cu vârfurile în punctele $O = (0, 0)$, $A = (0, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 0)$. Pe laturile OA şi BC se ia la întâmplare punctul Q, respectiv R. ξ - lungimea segmentului QR. $A = \{\xi > 2.2\}$. ($P(A) \approx 0{,}04$).

94. Pe segmentul [0,1] se iau la întâmplare două puncte. Aceste puncte divizează segmentul [0,1] în trei segmente mai mici. Experimentul este repetat de k ori. ξ_k – numărul cazurilor când din cele trei segmente se poate forma un triunghi. $A = \{\xi = 1\}$. $\left(P(A) = \frac{1}{4}\right)$.

95. Pe segmentul [0,1] se ia la întâmplare un punct. ξ – lungimea celui mai mare dintre cele două segmente care se obţin. $A=\{\xi\in[0.55,0.65]\}$. ($P(A) = 0,2$).

96. În condiţiile problemei nr.95 ξ – lungimea celui mai mic dintre cele două segmente care se obţin. $A = \{\xi\in[0.2,0.3]\}$. ($P(A) = 0,2$).

97. Dintr-o urnă care conţine k_1 bile albe, k_2 bile negre şi k_3 bile roşii se scoate câte o bilă cu întoarcere până când se obţin s iteraţii de bile albe. ξ - numărul bilelor extrase. A = {bile negre sunt scoase mai multe decât roşii}.

98. În condiţiile problemei nr.97 ξ este numărul iteraţiilor de bile negre extrase. A = {bile albe sunt scoase mai multe decât negre}.

99. În condiţiile problemei nr.97 ξ este numărul total al iteraţiilor de bile albe, negre şi roşii. A = {prima iteraţie corespunde culorii albe}.

100. Dintr-o urnă care conţine k_1 bile albe, k_2 bile negre şi k_3 bile roşii se scoate câte o bilă cu întoarcere până când se obţine o iteraţie alcătuită din s bile albe. ξ - numărul iteraţiilor de bile albe. A = {prima iteraţie corespunde culorii albe}.

101. Dintr-o urnă care conţine k_1 bile albe, k_2 bile negre şi k_3 bile roşii se scoate câte o bilă cu întoarcere până când se obţine cel puţin o iteraţie de bile pentru fiecare culoare. ξ - numărul bilelor extrase. A={prima iteraţie corespunde culorii roşii}.

102. În condiţiile problemei nr.101 ξ este numărul bilelor în cea mai lungă iteraţie. A = {cea mai lungă este iteraţia ce corespunde culorii albe}.

103. Se modelează un şir de valori ale variabilei aleatoare cu repartiţie Poisson de parametru λ până când se obţine o valoare x_i din segmentul $[2\lambda, 3\lambda]$. ξ - numărul valorilor modelate. A = {se obţine cel puţin o valoare mai mare decât 3λ}.

104. În condiţiile problemei nr.103. ξ este numărul valorilor modelate mai mici decât λ. A = {numărul valorilor modelate, mai mici ca λ, diferă de numărul valorilor mai mari ca λ cu cel mult 2}.

105. Se modelează un şir de valori x_i ale variabilei aleatoare ξ cu repartiţie Poisson de parametru λ până când se obţin s valori mai mari decât λ. ξ - numărul valorilor modelate. A = {cel puţin una dintre valorile x_1, x_2 este mai mare decât λ}.

106. Se efectuează n experimente Bernoulli, succesul având probabilitatea p în fiecare experiment. ξ_n – numărul iteraţiilor de succese. $A = \{\xi_n = 0\}$, $B = \{\xi_n = 1\}$. ($M\xi_n = npq + p^2$, $P(A) = q^n$, $P(B) = nq^n(q - p) - p(q^n - p^n)$ dacă $p \neq q$; $P(B) = C_{n+1}^2 2^{-n}$, dacă $p = q = =1/2$).

107. Pe segmentul [0, 1] apar la întâmplare unul câte unul numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vrem să întrerupem acest proces la apariţia celui mai mare dintre numerele acestea. Cum să procedăm? Am putea opri procesul chiar la primul număr x_1; dar dacă n este mare această decizie nu ar fi justificată. Se propune următoarea strategie: să urmărim apariţia primilor m numere $x_1, x_2, \dots, x_m$ şi să întrerupem procesul la apariţia primului număr mai mare decât toate aceste numere sau (dacă nu apare un număr mai mare) la ultimul număr x_n. ξ_m– numărul la care este întrerupt procesul. $A = \left\{\xi_m > 1 - \frac{2}{n}\right\}$, $m = \frac{n}{e}$, $e \approx 2{,}718$. Să se calculeze $M\xi_\alpha$, $\alpha = \frac{n}{5}, \frac{n}{4}, \frac{n}{2}$.

108. Variabilele aleatoare ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 sunt independente, având aceeaşi lege de repartiţie cu valoare medie finită (normală, uniformă, exponenţială etc.). Fie $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \xi_{(3)}$ seria variaţională a lor. $\eta_1 = (\xi_{(3)} - \xi_{(1)})$, $\eta_2 = |\xi_1 - \xi_2|$, $A = \{\xi_{(2)} - \xi_{(1)} > \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\}$. ($M(\xi_{(1)} - \xi_{(2)}) = 3/2 \cdot M|\xi_1 - \xi_2|$).

109. În planul de coordonate XOY se consideră triunghiul isoscel format din vectorul unitar OA, situat pe axa OX, şi vectorul unitar OB, ce formează cu OA un unghi aleator, care are repartiţie uniformă pe segmentul $[0, \pi]$. ξ - aria triunghiului OAB, C = {triunghiul OAB se situează în primul cadran}. ($M\xi = 1/\pi$).

110. Pe cercul de raza 1 se iau la întâmplare punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ξ - lungimea celui mai mic arc al cercului ce conţine aceste puncte. $A = \{\xi < x\}$, $x \le 1/2$. ($P(A) = nx^{n-1}$).

111. Din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ se extrage câte un număr cu întoarcere până când numărul 1 este scos de k ori. ξ – valoarea minimală a lui k pentru care toate numerele 2, 3, …, N sunt scoase cel puţin câte o dată. A = {2 şi 3 sunt scoase de acelaşi număr de ori}.

112. Variabila aleatoare ξ este determinantul matricei $\|a_{ij}\|$ - $n \times n$, unde a_{ij} sunt numere luate la întâmplare pe segmentul $[-1, 1]$. A = {prima linie a matricei conţine numai elemente pozitive}. ($M\xi = 0$).

113. În condiţiile problemei nr.112 a_{ij} sunt realizări ale variabilei aleatoare $N(0,1)$ (adică a_{ij} urmează legea de repartiţie normală $N(0,1)$). A = {prima coloană conţine numai elemente negative}. ($M\xi = 0$).

114. Din mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ conform schemei fără întoarcere se extrag numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$, $k \le N - 1$. Primele k numere extrase se scriu în ordine crescătoare: $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(k)}$. $\xi = x_{(k)}$, $A_l = \{x_{(l)} < x_{(k+1)} < x_{(l+1)}\}$, $l = 1, 2, \ldots, k - 1$. $\left(P(A_l) = \dfrac{1}{k+1}\right)$.

115. În spaţiul R^3 se consideră triunghiul isoscel OAB, format din vectorul unitar OA, situat pe axa OX şi vectorul unitar OB care formează cu OA un unghi cu repartiţie uniformă pe segmentul $[0, 2\pi]$. ξ - lungimea laturii AB. C = {triunghiul OAB se conţine în primul octant}. ($M\xi = 8/6$).

116. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt variabile aleatoare independente, având repartiţie uniformă pe segmentul $[0,1]$. $\eta_n = \xi_{(n)} - \xi_{(1)}$. $A = \left\{\xi_{(2)} - \xi_{(1)} < \dfrac{1}{n+1}\right\}$. $\left(M\eta_n = \dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

117. În condiţiile problemei nr.116 $\eta = \xi_{(3)} - \xi_{(2)}$, $A = \left\{\eta > \frac{1}{n+1}\right\}$.

118. În interiorul sferei de rază 1 cu centrul în originea de coordonate se iau două puncte la întâmplare. ξ - distanţa dintre punctele luate. A = {ambele puncte nimeresc în primul octant}. ($M\xi = 36/35$).

119. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt variabile aleatoare independente, având repartiţie exponenţială de parametru α. $\Delta_i = \xi_{(i)} - \xi_{(i-1)}$, $A = \left\{\Delta_i > \frac{1}{1+i}\right\}$. $\left(M\Delta_i = \frac{1}{\alpha(k-i+1)}\right)$.

120. Pe cercul cu centrul în originea de coordonate 0 se iau la întâmplare n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ξ - numărul minimal n pentru care poligonul convex cu vârfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conţine punctul 0. $A = \{n > 3\}$. ($M\xi = 5$).

121. Pe cercul de rază r se iau la întâmplare punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Notăm cu $A_{(1)} = A_1, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}$ punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ scrise în ordinea în care le întâlnim pe cerc la parcurgerea lui în sensul mişcării acelor ceasornicului. ξ - lungimea arcului $A_{(1)}A_{(2)}$. A = {arcul $A_{(2)}A_{(3)}$ e mai mare decât arcul $A_{(1)}A_{(2)}$}. ($M\xi = 2\pi r/n$).

122. În condiţiile problemei nr.121 notăm prin ξ_i lungimea arcului $A_{(i)}A_{(i+1)}$. $\xi = max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. $A = \{\xi = \xi_1$ sau $\xi = \xi_2\}$. $\left(M\xi = \frac{2\pi r}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \frac{2\pi r}{n}\ln n\right)$.

123. Pe cercul de rază 1 se iau la întâmplare punctele A, B şi C. ξ - aria triunghiului ABC. D = {triunghiul ABC nu conţine centrul cercului} ($M\xi = 3/2\pi = 0.4774\ldots$).

124. În condiţiile problemei nr.123 ξ_1 este perimetrul triunghiului ABC, ξ_2 – raza cercului înscris în triunghiul ABC. $D = \{\angle ABC > \pi/2\}$ ($M\xi_1 = 12/\pi \approx 3.8197$, $M\xi_2 = 12/\pi^2 - 1 \approx 0.2158$).

125. În figura plană convexă G, având aria 1, se iau la întâmplare punctele A_1, A_2, A_3, A_4. ξ - aria triunghiului $A_1A_2A_3$. A = {învelişul convex al punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 este un triunghi}. Să se considere cazul când G este un triunghi cu vârfurile în punctele (0, 0), (2, 0), (0, 1).

126. În condiţiile problemei nr.125 G este un dreptunghi cu vârfurile în punctele (0, 0), (2, 0), (0, 0.5), (2, 0.5).

127. În condiţiile problemei nr.125 G este pătratul cu vârfurile în punctele (0, 0), (1, 0), (0,1), (1, 1).

128. În condiţiile problemei nr.125 G este cercul de rază $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ cu centrul în originea de coordonate.

Problemele nr. 129-131 au ca tematică permutările mulţimii $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Amintim că o permutare a mulţimii $X = \{1, 2, \dots, n\}$ este o aplicaţie bijectivă a mulţimii X pe ea însăşi. Dacă f este o permutare a mulţimii X, atunci vom reprezenta-o astfel:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Notăm, de asemenea: $f^2(k) = f(f(k))$, $f^3(k) = f(f(f(k)))$, ... Fie k un număr din X. În şirul k, $f(k)$, $f^2(k)$, … primul element care se repetă este k. Fie r cel mai mic exponent pentru care $f^r(k) = k$. Permutarea $f = \begin{pmatrix} k & f(k) & \dots & f^{r-1}(k) \\ f(k) & f^2(k) & \dots & f^r(k) \end{pmatrix}$ se numeşte *ciclu* şi se notează $[k, f(k), f^2(k), \dots, f^{r-1}(k)]$.

Se poate demonstra că orice permutare poate fi scrisă în mod unic ca un produs de cicluri (fără elemente comune). Aceste cicluri se determină astfel:

se consideră secvenţa 1, $f(1)$, $f^2(1)$, … şi se formează ca mai sus ciclul care îl conţine pe 1 (dacă $f(1) = 1$, ciclul este format din 1 şi se notează [1]);

din mulţimea $X = \{1, 2, \dots, n\}$ se elimină elementele ce se conţin în ciclul format deja;

se notează cu i_1 cel mai mic element al mulţimii obţinute şi se formează secvenţa i_1, $f(i_1)$, $f^2(i_1)$, … .

Astfel se obţine ciclul care îl conţine pe i_1. După aceasta în mod analog se construieşte următorul ciclu ş. a. m. d.

Mulţimea X fiind finită, acest proces se încheie după un număr finit de paşi.

Exemplu. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 2 & 1 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$=[1, 5, 4] [2, 9, 3] [6, 8] [7].

129. ξ_n este numărul ciclurilor unei permutări a mulţimii $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, luate la întâmplare. A = {există cel puţin un ciclu de lungimea 1}. ($M\xi_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln n + c + o(1)$, $c = 0.5772$).

130. ξ_l este numărul ciclurilor de lungimea l ale unei permutări a mulţimii $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, luate la întâmplare. A = {există cel puţin un ciclu de lungimea 1}. (Pentru $n \to \infty$ ξ_l are repartiţie Poisson de parametru $\lambda = 1/l$, $P(A) \to 1 - 1/l$).

131. Se ia la întâmplare o permutare a mulţimii $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. ξ - lungimea ciclului care îl conţine pe 1. $A = \{\xi = 1\}$ $\left(M\xi = \frac{n+1}{2}\right)$.

132. ξ_n este numărul ciclurilor de lungimea 3 al unei permutări a mulţimii $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ luate la întâmplare. A = {1, 2 şi 3 formează un ciclu de lungimea 3}. (Pentru $n \to \infty$ ξ_n are repartiţie Poisson de parametru 1/3, $P(A) = 2/(n(n-1)(n-2))$).

133. ξ_n este numărul ciclurilor de lungimea 1 ale unei permutări a mulţimii $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ luate la întâmplare. A = {elementul 1 formează ciclu de lungimea 1}. ($M\xi \approx 1$, $P(A) \approx \frac{1}{n}$).

134. În N urne se plasează câte o bilă la întâmplare până când în fiecare urnă nimereşte cel puţin câte o bilă. Se presupune că fiecare bilă poate nimeri în oricare dintre urne cu probabilitatea $\frac{1}{N}$. ξ_i – numărul urnelor în care nimeresc exact câte i bile. $A = \{\xi_1 < \xi_3\}$. ($N = 20$, $M\xi \approx 3.6$, $P(A) \approx 0.4793$).

135. În condiţiile problemei nr.134 ξ este numărul maximal de bile care nimeresc într-una din urne. $A = \{\xi \le N/10\}$. Pentru ce N are loc $P(\xi \ge 5) = 1$?

136. În condiţiile problemei nr.134 ξ este numărul bilelor plasate. $A = \{\xi \le kN\}$ $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

137. În N urne se plasează câte o bilă la întâmplare până când într-una din urne nimeresc k bile. ξ – numărul bilelor plasate. A = {în toate urnele nimereşte cel puţin câte o bilă}.

138. În condiţiile problemei nr.137 ξ este numărul urnelor în care nimeresc $k - 1$ bile. $A = \{\xi = 1\}$.

139. În N urne se plasează câte o bilă la întâmplare până când în fiecare urnă nimereşte cel puţin o bilă. ξ – numărul bilelor plasate. A = {în prima urnă nimeresc k bile}, $k = 1, 2, 3$.

140. În N urne se plasează câte o bilă la întâmplare până când în s urne nimeresc cel puţin câte 2 bile. ξ – numărul urnelor în care nu nimereşte nici o bilă. $A = \{\xi = k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}s$.

141. În N urne se plasează câte o bilă la întâmplare până când în primele s urne nimereşte cel puţin câte o bilă. ξ – numărul urnelor în care nu nimereşte nici o bilă. $A = \{\xi = k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}s$.

142. În N urne se plasează la întâmplare n bile. Fie $\mu_r(n, N)$ numărul urnelor în care nimeresc exact câte r bile, $r \ge 0$. $A = \{\mu_0(n, 2n) < \mu_1(n, 2n)\}$.

În problemele nr.141-143 P este matricea probabilităţilor de trecere la un pas a unui lanţ Markov omogen, iar P_0 este repartiţia iniţială.

143. $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_0 = (0.5, 0, 0.5, 0)$, ξ - numărul paşilor după care sistemul trece prima dată în starea 4. $A = \{\xi = 2\}$.

144. $P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $P_0 = (0.5, 0.5, 0, 0)$, ξ - numărul paşilor după care sistemul trece prima dată în starea 4. $A = \{\xi \geq k\}$, $k = 2, 3, \ldots, 10$.

145. $P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_0 = (1, 0, 0, 0)$. Urmărim evoluţia sistemului din momentul 0 până când nimereşte în starea 4. ξ_i - numărul de treceri prin starea i, $i = 1, 2, 3$. $A = \{\max\limits_i \xi_i = \xi_3\}$.

Lista integralelor multiple

1. $\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}} dxdy$, $G: x^2 + y^2 \leq 25$ (R: $2\pi(7-\sqrt{24})$)

2. $\iint\limits_G \cos(x^2 + y^2)dxdy$, $G: x^2 + y^2 \leq a^2$ (R: $\pi \sin a^2$)

3. $\iint\limits_G \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy$, $G: x^2 + y^2 \leq a^2$ (R: $\pi[(1+a^2)\ln(1+a^2) - a^2]$)

4. $\iint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, $G: x^2 + y^2 \leq ay$ $\left(\mathrm{R}: \frac{4a^3}{9}\right)$

5. $\iint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\left(\mathrm{R}: \frac{2\pi ab}{3}\right)$

6. $\iint\limits_G \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, $G: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ (R: $-6\pi^2$)

7. $\iint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, $G: x^2 + y^2 \leq a^2$ (R: $2\pi a^3/3$)

8. $\iint\limits_G xy^2 dxdy$, $G: y^2 = 2px$, $x = p/2$ $(p > 0)$ $\left(\mathrm{R}: \frac{p^5}{21}\right)$

9. $\iint\limits_G \sqrt{a^2-x^2}dxdy$, G: cerc de raza a cu centrul în originea de coordonate $\left(\text{R}:\frac{8a^3}{3}\right)$

10. $\iint\limits_G (x+y)dxdy$, G: $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ (R: 543,7333)

11. $\iint\limits_G x^3y^5dxdy$, G: $|x|+|y|\le 1$ (R: 0)

12. $\iint\limits_G x^2dxdy$, G: $|x|+|y|\le 1$ $\left(\text{R}:\frac{1}{3}\right)$

13. $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, G: mărginit de dreptele $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$, $(a>0)$ (R: $14a^4$)

14. $\iint\limits_G y^2\sqrt{a^2-x^2}dxdy$, G: $x^2+y^2\le a^2$ $\left(\text{R}:\frac{32a^5}{45}\right)$

15. $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, G: $x^2+y^2\le ax$ $\left(\text{R}:\frac{2a^2}{3}\right)$

16. $\iint\limits_G (x^2+y)dxdy$, G: mărginit de parabolele $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ $\left(\text{R}:\frac{33}{140}\right)$

17. $\iint\limits_G xydxdy$, G: mărginit de axele de coordonate şi parabola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ $\left(\text{R}:\frac{1}{280}\right)$

18. $\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}dxdy$, G: mărginit de dreptele $x=2$, $y=x$ şi hiperbola $xy=1$ $\left(\text{R}:\frac{9}{4}\right)$

19. $\iint\limits_G \cos(x+y)dxdy$, G: triunghi mărginit de dreptele $x=0$, $y=x$, $y=\pi$ (R: - 2)

20. $\iint\limits_G (2x+y)dxdy$, G: trunghi mărginit de axele de cordonate şi dreapta $x+y=3$ $\left(\text{R}:\frac{27}{2}\right)$

21. $\iint\limits_G (x+6y)dxdy$, G: trunghi mărginit de dreaptele $y=x$, $y=5x$, $x=1$ $\left(\text{R}:25\frac{1}{2}\right)$

22. $\iint\limits_G \sqrt{4x^2-y^2}dxdy$, G: trunghi format de dreaptele $y=0$, $x=1$, $y=x$ $\left(\text{R}:\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{9}\right)$

23. $\iint\limits_G \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dxdy$, G: mărginit de axele de coordonate şi parabola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ $\left(\text{R}:\frac{4}{27}\right)$

24. $\iint\limits_G \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dxdy$, G: mărginit de axele de coordonate şi parabola $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$

$\left(\text{R}: \frac{2}{21}ab\right)$

25. $\iint_G (x^2+y^2)dxdy$, G: $y = x$, $x + y = 2a$, $x = 0$ $\left(\text{R}: \frac{4}{3}a^4\right)$

26. $\iint_G xydxdy$, G: $y + x \le 2$, $x^2 + y^2 \le 2y$, $x > 0$ (R: - 0,25)

27. $\iint_G (x+2y)dxdy$, G: mărginit de: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$ $\left(\text{R}: \frac{9}{20}\right)$

28. $\iint_G (4-y)dxdy$, G mărginit de: $x^2 = 4y$, $y = 1$, $x = 0$ $(x > 0)$ $\left(\text{R}: \frac{68}{15}\right)$

29. $\iint_G e^{x+y}dxdy$, G mărginit de $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. (R: e)

30. $\iint_G (x^2+y^2)dxdy$, G mărginit de $x^2+y^2 \le 2ax$ $\left(\text{R}: \frac{3}{2}\pi a^4\right)$

31. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, G inelul dintre cercurile $x^2+y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$ $\left(\text{R}: \frac{128}{3}\pi\right)$

32. $\iint_G \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, G $x^2+y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ $\left(\text{R}: \frac{\pi a^3}{6}\right)$

33. $\iint_G e^{(x+y)^2}dxdy$, G: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y = 1$ (R: ≈0,859)

34. $\iint_G (x^2+y^2)dxdy$, G: $0 \le x \le 1$, $y = x^2$, $\left(\text{R}: \frac{26}{105}\right)$

35. $\iint_G e^{\frac{x}{y}}dxdy$, G triunghi mărginit de dreptele $y = 1$, $x = 0$, $y = x$ (R: ≈ 0,859)

36. $\iint_G \frac{\sin^5(xy)+1}{x^5y^5+1}dxdy$, G: $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (R: ≈ 0,785)

37. $\iint_G \frac{\sqrt{\cos^4 x+\sin^6 y+2}}{1+\sin^6(xy)}dxdy$, G: $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (R: ≈ 2,205)

38. $\iint_G \frac{\sin^2(xy)+1}{x^2+y^2+2}dxdy$, G: $y = x^2 + 1$, $y = 3$ (R: ≈ 0,8025)

39. $\iint_G \frac{\sin^2(xy)+1}{2x\sin^2 x+2}dxdy$, G : $x^2+y^2 \le 0{,}25$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (R: ≈0,097)

40. $\iint\limits_G \frac{xy\sin^2(xy)+2}{y\sin^3 x+1}dxdy$, $G: y <= x,\ x + y = 0{,}5,\ x \ge 0$ (R: ≈ 0,125)

41. $\iint\limits_G \frac{2-y\cos^2(xy)}{x^2y+1}dxdy$, $G: y \le 0{,}5x,\ x + y \le 0{,}5,\ x \ge 0$ (R: ≈ 0,0806)

42. $\iint\limits_G \frac{\sin(xy)+3}{\ln(1+xy)+1}dxdy$, $G: y \ge x/2,\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,482)

43. $\iint\limits_G \frac{2-\ln(1+x^2y)}{2xy^2+1}dxdy$, $G: y \ge x,\ x + y = 0{,}5,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,011)

44. $\iint\limits_G \frac{3+\cos(x^2y^3)}{\ln(1+x^2y^3)+1}dxdy$, $G: x^2 + y^2 \le 1,\ y < x,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 1,544)

45. $\iint\limits_G \frac{e^{x^2y^2}-\sin(x^2y^2)}{2xy+1}dxdy$, $G: y = x,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,217)

46. $\iint\limits_G \frac{3+\sin^2(xy)}{e^{\sin^3(xy)}+2}dxdy$, $G: y < x,\ x =1,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,507)

47. $\iint\limits_G \frac{2-y\cos^2(xy)}{2xy+1}dxdy$, $G: y = x^2,\ y = 0{,}5,\ x = 0,\ y = 0$ (R: ≈ 0,354)

48. $\iint\limits_G \frac{xy\sin^2 x+1}{\ln(1+xy)+1}dxdy$, $G: y = x,\ x + y = 0{,}5,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,061)

49. $\iint\limits_G \frac{e^{x^2y^2}+y\cos^2(xy)}{\sin^4(xy)+1}dxdy$, $G: \frac{2}{\pi}x+y=1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 1,058)

50. $\iint\limits_G \frac{xy+1}{\sin(xy)+1}dxdy$, $G: \frac{1}{3}x+y=1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,836)

51. $\iint\limits_G \frac{2\sin x+3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dxdy$, $G: \frac{1}{\pi}x+y=1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (R: ≈ 0,447)

52. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz$, $G: x^2 + y^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2$ $\left(\text{R}: \frac{1}{3}\right)$

53. $\iiint\limits_G xzdxdydz$, $G: x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ $\left(\text{R}: \frac{1}{48}\right)$

54. $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, $G: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\left(\text{R}: \frac{4\pi abc}{5}\right)$

55. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, G: $x^2+y^2=z^2$, $z = 0$, $z = 1$ $\left(\mathrm{R}: \frac{\pi}{12}\right)$

56. $\iiint\limits_G xzdxdydz$, G: mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi de planul $z = 0$ $(z \geq 0)$ (R:0)

57. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, G: mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ $\left(\mathrm{R}: \frac{\pi}{10}\right)$

58. $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$, G: mărginit de suprafeţele $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $\left(\mathrm{R}: \frac{1}{8}\right)$

59. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\cdot zdxdydz$, G: mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$ $\left(\mathrm{R}: \frac{4\pi}{21}\right)$

60. $\iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ G: mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ $\left(\mathrm{R}: \frac{3\sqrt{3}\pi}{5}\right)$