

# Mechanika Kwantowa R 2021/2022

Kacper Cybiński

7 marca 2022

# Organizacja wykładu

1. Dwa kolokwia - po 30 pkt
2. Egzamin - 40 pkt

Łącznie 100 pkt, progi punktowe:

$$45 - 55 = 3, 55 - 65 = 3.5, 65 - 75 = 4, 75 - 85 = 4.5, 85 - 95 = 5, 95 - 100 = 5!$$

Egzamin ustny (zmiana oceny co najwyżej o 0.5)

Serie domowe dobrowolne (ale na pewno pomogą napisać dobrze kolokwia!)

[Strona wykładu](#)

Polecane podręczniki:

- L. Schiff *Mechanika Kwantowa (obszerna)*
- R. Liboff *Wprowadzenie do Mechaniki Kwantowej (mniej obszerna)*
- L. Susskind *Quantum Mechanics (Do ogarnięcia koncepcyjnego)*

# Lecture 1

## 1.1 Krótka historia fizyki

- **Arystoteles** - Jeden absolutny układ odniesienia, więc nie ma sensu pojęcie *obserwatora*
- **Newton** - Ciała, a więc i układy odniesienia (obserwatorzy inercjalni) są liczne, oraz mogą się poruszać między sobą. Siła, czas, przestrzeń są wciąż pojęciami absolutnymi.
- **Teoria względności** - Ruch, czas, przestrzeń, masa są zależne od obserwatora. Obserwator nie musi być inercjalny. Mówimy o *Uoperacyjnieniu pojęć zasadniczych*.
- **Teoria Kwantowa** - Okazuje się, że cały zestaw wielkości fizycznych służących do opisu świata zależy od tego jaki jest kontekst pomiarowy, tj. od relacji obserwatora z innymi elementami otaczającego go świata. *Czyli po raz pierwszy uwzględniamy fakt, że opisujemy wszechświat w którym sami istniejemy, czyli opisujemy ten układ od środka.*

[Prezentacja o historii fizyki wg Witkacego](#)

## 1.2 Hipoteza Kwantu

Co doprowadziło do wniosków, że energię trzeba skwantować?

### 1.2.1 Ciało Doskonale Czarne

Paradoks polegał na tym, że z ciała doskonale czarnego powinniśmy mieć zabójcze promieniowanie gamma itp, a go nie było IRL. And here comes the *Max Planck*.

Planck zapostulował, że przekaz energii odbywa się za pomocą całkowitych wartości ([Kwant Energii](#))  
Zdefiniował to jako:

$$E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \quad (1.1)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \omega = 2\pi\nu$$

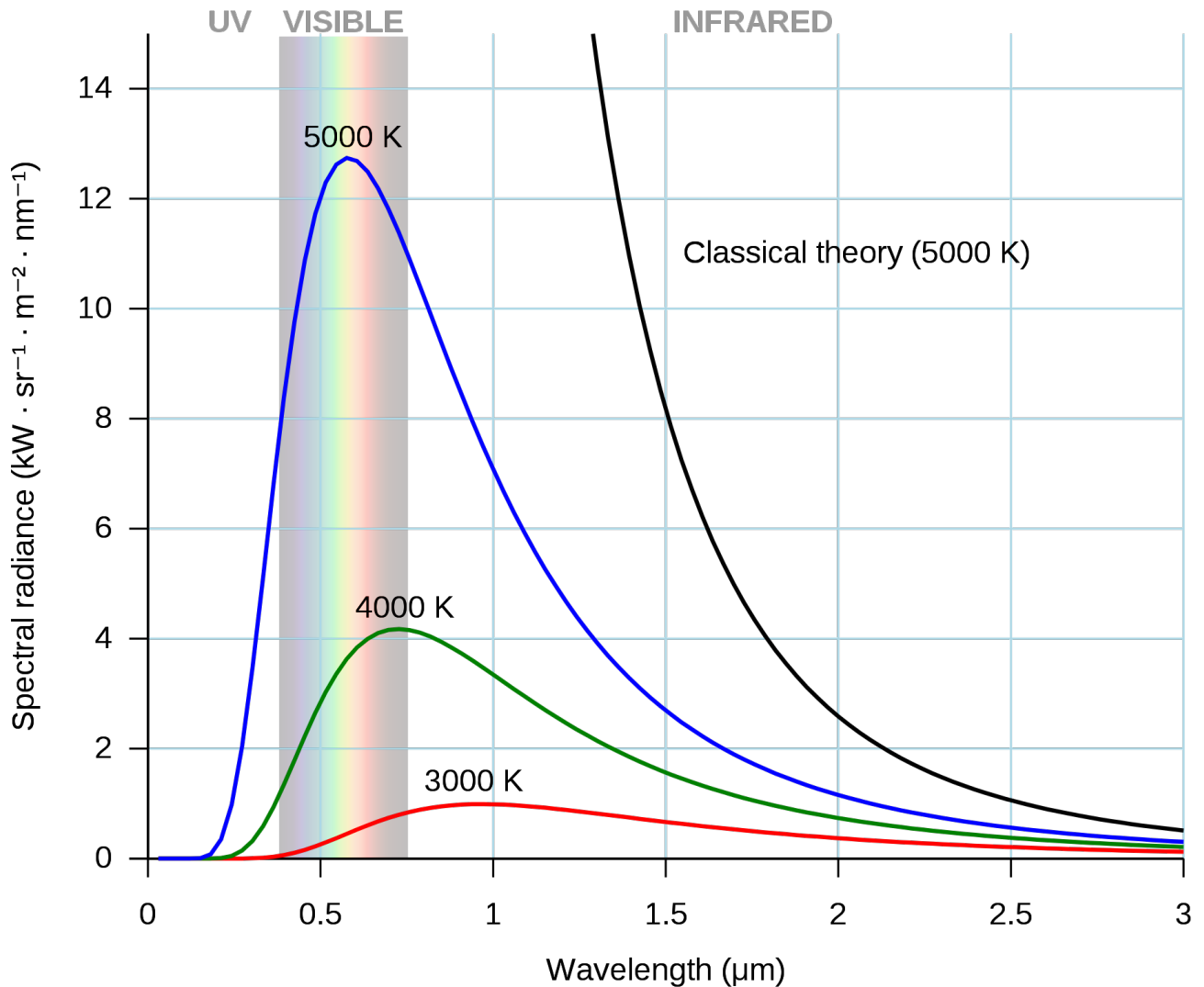
gdzie  $h$  - [stała Plancka](#),  $h = 6.2626070150 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ ,  $\nu$  - częstotliwość promieniowania

### 1.2.2 Efekt Fotoelektryczny

### 1.2.3 Analiza pól EM

Analiza pól  $\mathcal{E}$  i  $B$  w odniesieniu do sześcienu z przewodnika prowadzi do wniosku, że energia "porcji promieniowania" transformuje się jak

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{u}{c}}}$$



Rysunek 1.1: Wykres promieniowania ciała doskonale czarnego

gdzie  $u$  - promieniowanie. Transformuje się to analogicznie do częstotliwości w efekcie Dopplera  $\Rightarrow E \sim \nu$

Rozkład energii będzie nam opisywać [Rozkład Boltzmanna](#), czyli rozkład prawdopodobieństwa zaobserwowania stanu Energetycznego, dany wzorem:

$$p(E_i) \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

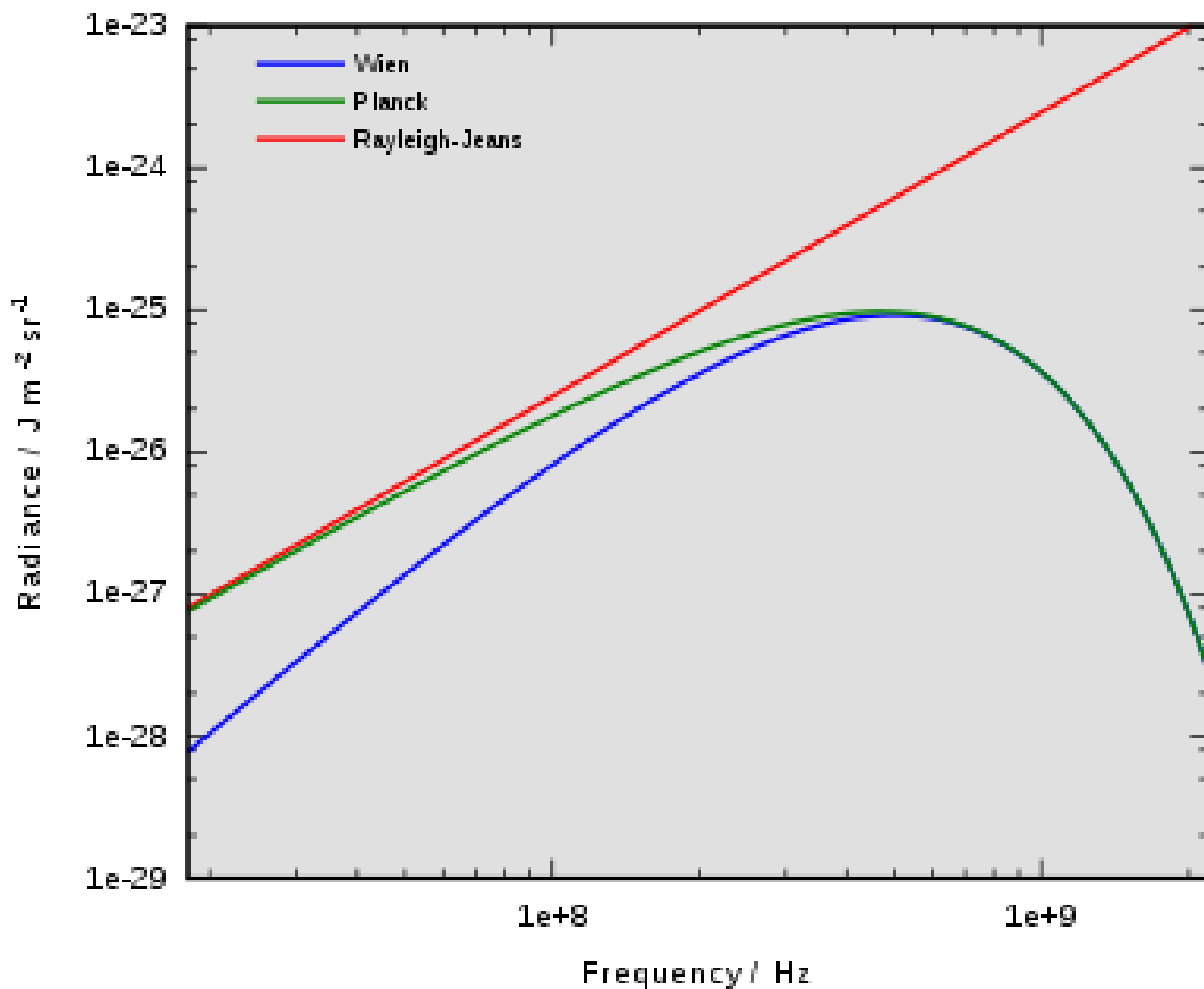
co w przypadku rozkładu ciągłego daje nam zasadę ekwipartycji, ale dla dużych wartości energii się rozbiega z doświadczeniem.

## 1.3 Skutki skwantowania energii

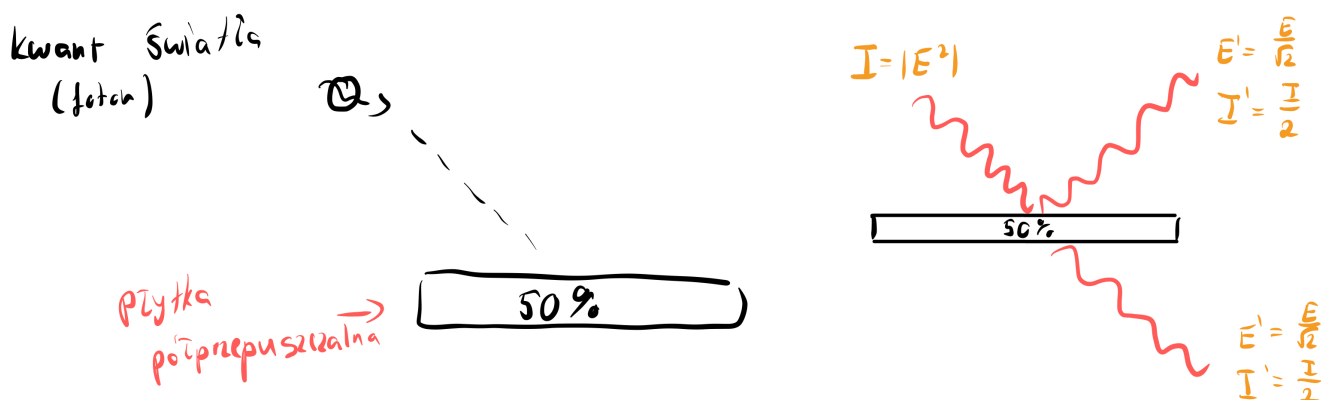
Przed wszystkim skutkiem jest [indeterminizm](#).

[Teoria parametrów ukrytych](#) - Teoria, że w kwantach energii występują nierejestrowane przez nas parametry, które jednakowoż zawsze determinują rozróżnienie kwantów energii. Parafrazując Drazana, dodawanie fotonom(kwantom) "włosów", "ogonów" itp - elementów rozróżniających je.

Jeśli jednak nie chcemy dodawać fotonom 'włosów', ani 'ogonów' i chcielibyśmy, żeby wszystkie fotony były "identyczne" to aby odtworzyć zachowanie klasyczne w granicy (podział natężenia 50%), to



Rysunek 1.2: Porównanie hipotezy Plancka z prawem Rayleigha-Jeansa i rozkładem Wiena. Further reading o 'Katastrofie w nadfiolecie' na [Wikipedii o ciele doskonale czarnym](#)

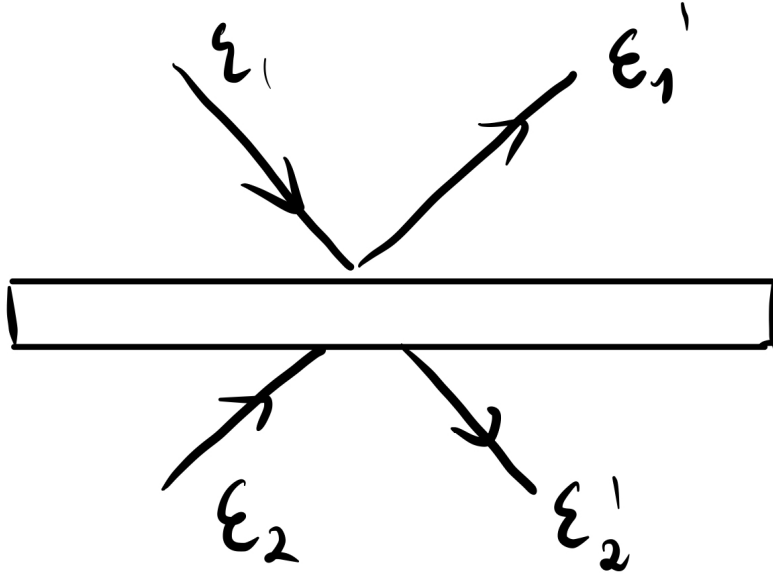


Rysunek 1.3: Demonstracja działania płytki półprzepuszczalnej.

musimy uznać, że foton zachowuje się niedeterministycznie, tj. wprowadzić element probabilistyczny. Wtedy z prawdopodobieństwem 50% każdy foton przechodzi lub odbija się.

Kiedy patrzymy na płytkę światłodzielącą (Rysunek 1.4), to możemy przedstawiać bieg promienia w niej jako superpozycję fal (zapis macierzowy).

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}'_1 \\ \mathcal{E}'_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.4: Demonstracja działania płytki światłodzieliącej (*Beam Splitter*).

Gdzie  $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{R}_1\mathcal{E}_1 + \mathcal{T}_2\mathcal{E}_2$ . Chcemy, żeby **energia była zachowana**

$$\implies |\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 = |\mathcal{E}'_1|^2 + |\mathcal{E}'_2|^2$$

Co możemy też tłumaczyć jako zachowanie długości wektora  $\begin{bmatrix} \mathcal{E}'_1 \\ \mathcal{E}'_2 \end{bmatrix}$ , czyli macierz  $B$  jest macierzą **Unitarną**, tj.  $B \cdot B^\dagger = 1$ .

$$BB^\dagger = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1^* & \mathcal{T}_1^* \\ \mathcal{T}_2^* & \mathcal{R}_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathcal{R}_1|^2 + |\mathcal{T}_1|^2 & \mathcal{R}_1^*\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1^*\mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_1\mathcal{T}_2^* + \mathcal{T}_1\mathcal{R}_2^* & |\mathcal{R}_2|^2 + |\mathcal{T}_2|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wynika stąd, że  $|\mathcal{R}_1|^2 = |\mathcal{R}_2|^2 = R$  - współczynnik odbicia natężenia, a  $|\mathcal{T}_1|^2 = |\mathcal{T}_2|^2 = T$  - współczynnik transmisji natężenia, gdzie  $R + T = 1$ .

W związku z tym też ogólnie mówiąc np.  $B = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} \\ -\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{bmatrix}$ , a  $B_{50\%} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Tj.  $B \in \mathcal{U}(2)$

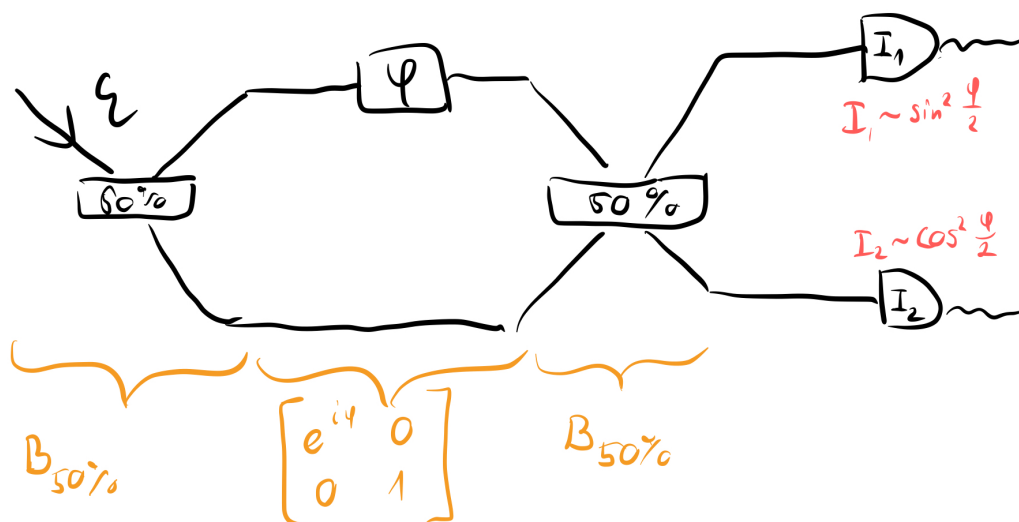
## 1.4 Superpozycja

Pokażemy zjawisko interferencji w sensie kwantowym patrząc na kanoniczny przykład - [Interferometr Macha-Zehndera](#), widoczny na Rysunku 1.5. Rozpatrujemy od teraz falę padającą postaci  $\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

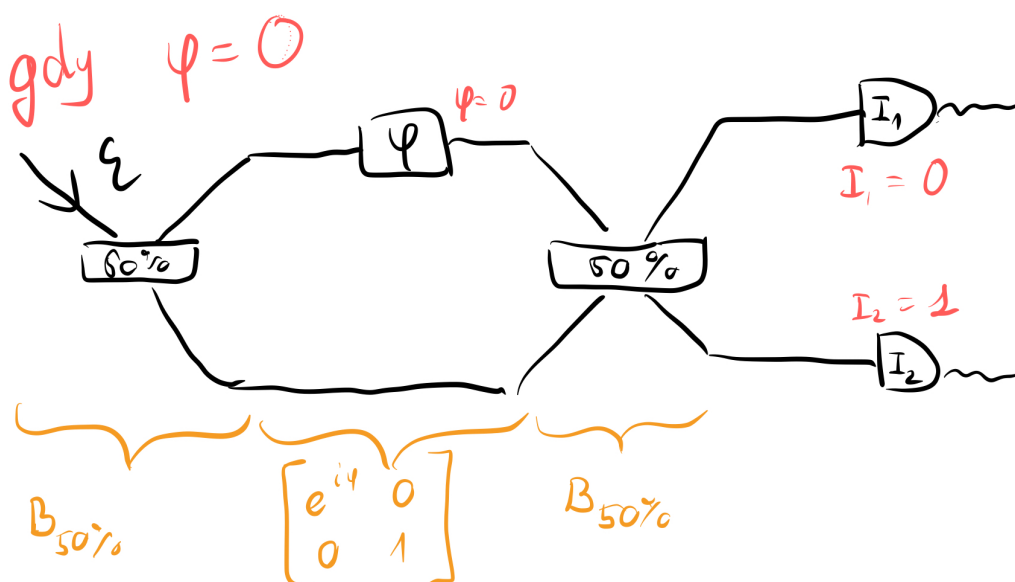
Teraz aby zrozumieć jak w takim układzie zachowuje się foton musimy odejść od klasycznego myślenia, że leci on jakąś drogą, a musimy przejść do myślenia o jego drodze jako **nieokreślonej**, tj. do momentu wykonania pomiaru (wejścia w interakcję z nim) podąża on jednocześnie wszystkimi możliwymi dla siebie trajektoriami, tym samym przyjmując właściwości falowe. Da to efekt jak ten widoczny na Rysunku 1.6.

Od teraz ten stan 'obierania wszystkich możliwości na raz' przez foton będziemy określać jako **stan fotonu** oznaczany  $|\Psi\rangle$ . Tłumaczy się to na funkcję gęstości prawdopodobieństwa znalezienia fotonu w jego możliwych trajektoriach.

W szczególności w opisywanym wyżej przypadku stan  $|\Psi\rangle$  będzie opisywany przez **superpozycję** stanów 1 i 2 odpowiadających pójsciem drogą odpowiednio górną i dolną, tj.  $|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$  gdzie  $\Psi_i$



Rysunek 1.5: Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa



Rysunek 1.6: Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa w przypadku zerowej zmiany fazy, tj. w szczególności dla jednego fotonu

- amplituda prawdopodobieństwa obrania ścieżki  $i$ , a  $p_i = |\Psi_i|^2$  - prawdopodobieństwo, że foton leci  $i$ -tą trajekcją.

$$|\Psi\rangle = \Psi_1 |1\rangle \oplus \Psi_2 |2\rangle \quad (1.2)$$

Gdzie znakiem  $\oplus$  oznaczamy dodawanie fal. Ta operacja to [Superpozycja](#). Warto też zanotować, że skoro  $|\Psi_i| = p_i$  to ich suma musi się dodawać do 1

$$\sum_i |\Psi_i|^2 = 1$$

(innymi słowy prawdopodobieństwo znalezienia fotonu w całej przestrzeni zdarzeń jest 1)

Dla zbudowania intuicji na ten moment możemy sobie utożsamiać tę funkcję prawdopodobieństwa z obserwowanym natężeniem światła:

$$|\Psi_i|^2 \sim |\mathcal{E}_i|^2 \sim I_i$$

## 1.5 Hipoteza De Broigle'a

*Side note 1:* W naszych rozważaniach nie będzie mieć znaczenia faza całkowita, znaczenie będzie mieć tylko faza względna między ramionami, tj.  $\mathcal{E}_i \rightarrow e^{i\xi}\mathcal{E}_i$ . Innymi słowy, 'globalna faza' **nie istnieje!**.

Wyszliśmy w naszych dywagacjach od myślenia o fotonach jako o obiektach falowych, ale nie można zapomnieć o tym, że fotony mają również właściwości korpuskularne, więc sugeruje to, że dla materii też to powinno działać. W związku z tym [Hipoteza De Broigle'a](#) odpowiadać nam będzie za opisanie 'fal materii', gdzie ich długość fali to będzie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Co dla światła ma interpretację:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \mu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Gdzie  $E$  - Energia.

Further reading:

- [Notatki Demko do tego wykładu](#)
- [Zadanka na ćwiczenia 1](#)
- [Zadanka na ćwiczenia 2](#)



# Lecture 2

## 2.1 Stany i pomiary kwantowe

W tym wykładzie zajmiemy się powoli formalizowaniem intuicji nabywanej na poprzednim wykładzie. Zdefiniujemy  $|i\rangle$  - pewne stany rozróżnialne (istnieje pomiar dający różne wyniki dla różnych stanów).

### Zasada superpozycji

Jeśli  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$  są dopuszczalnymi stanami układu, to  $|1\rangle \oplus |2\rangle$ <sup>1</sup> też musi być dopuszczalnym stanem układu

Matematyczna struktura odpowiednia dla superpozycji to:

- Przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  nad  $\mathcal{C}$
- $\mathcal{H}$  - przestrzeń wektorowa nad  $\mathcal{C}$  z iloczynem skalarnym  $\langle \Psi | \phi \rangle$ ,  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^2$ , zupełna<sup>3</sup>
- **Uwaga:** każda skończona wymiarowa przestrzeń Hilberta ( $\dim \mathcal{H} = d$ ) jest izomorficzna z  $\mathcal{C}^d$ .

**Stan Kwantowy:** Niech  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ . **Uwaga:**  $|\Psi\rangle \stackrel{F}{\equiv} e^{i\xi} |\Psi\rangle \implies |\Psi\rangle \stackrel{F}{\equiv} z \cdot |\Psi\rangle$ <sup>4</sup>

Stanem kwantowym nazwiemy też promień w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$

**Pomiary kwantowe:** W przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  bierzemy sobie wektory  $|a_i\rangle \in \mathcal{H}$ , tworzące bazę ortonormalną w  $\mathcal{H}$ . Będzie to zespół rozróżnialnych stanów różniących się pewną obserwowalną wielkością fizyczną  $A$ . Czyli przyjmujemy:

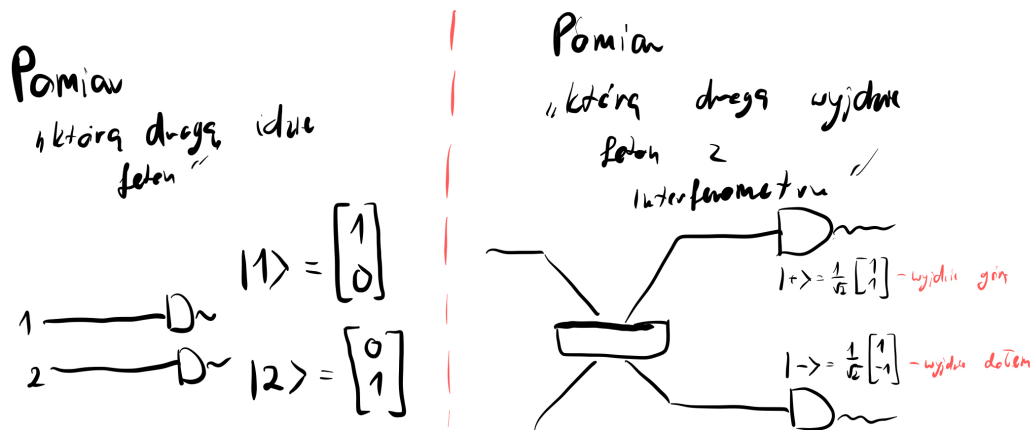
$|a_i\rangle$  - mają dobrze określoną wartość wielkości fizycznej  $A$ . Zawsze jak je mierzymy to dostajemy  $a_i$ . Innymi słowy, jak mamy kilka wielkości fizycznych  $A, B, C, \dots$ , to w ogólności **nie będziemy mogli znaleźć jednej bazy ortonormalnej**  $|a_i, b_i, c_i, \dots\rangle$ . Jest to esencja mechaniki kwantowej, że różne wielkości fizyczne związane są z różnymi, niekompatybilnymi wobec siebie bazami, które opisują każdą z osobna.<sup>5</sup>

<sup>2</sup>wektor reprezentuje stan

<sup>3</sup>każdy ciąg Cauchy zbiega do elementu  $\mathcal{H}$

<sup>4</sup>Symbol  $\stackrel{F}{\equiv}$  oznacza 'w interpretacji fizycznej ...'

<sup>5</sup>Czyli pomiar  $\neq$  zagłębienie do garnka /sprawdzanie stanu który jest zdeterminowany/



Rysunek 2.1: Porównanie podejść **dopracuj** opis

### Postulat pomiarowy

Jeśli  $|\Psi\rangle$  jest dowolnym stanem, na którym chcemy zmierzyć wielkość fizyczną  $A$ , z którą stowarzyszona jest baza  $\{|a_i\rangle\}$ . Możemy napisać:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$$

Wtedy uzyskany wynik  $a_i$  z prawdopodobieństwem  $p_i = |\alpha_i|^2 = |\langle a_i | \Psi \rangle|^2$ . Tym samym stan po pomiarze ma dobrze określone wielkości  $a_i$ , tj. jest  $|\Psi\rangle = |a_i\rangle$ .

Czyli też jak już raz dokonamy pomiaru na stanie kwantowym to on już nie wróci do możliwości interferencji, i za każdym kolejnym pomiarem już będziemy obserwować ten sam stan, tj. zacznie się zachowywać jakby był klasyczny.

**Observabl-a:** Z pomiarem wielkości  $A$  ( $\{|a_i\rangle\}$ ) stowarzyszamy operator

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$$

gdzie  $\hat{A}$  jest operatorem Hermitowskim<sup>6</sup> czyli w szczególności mając  $\hat{A}$  możemy też znaleźć  $\{|a_i\rangle\}$  robiąc rozkład własny.

*Crash course z notacji Diraca:*

**ket:**

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

**bra:**

$$\langle a| = |a\rangle^\dagger = [a_1, a_2, \dots, a_n]^* = \mathbf{v}^\dagger$$

<sup>6</sup>Operator hermitowski -  $A^\dagger = A$

Czyli jak je połączymy dostajemy **braket**:

$$\langle a|b\rangle = [a_1, a_2, \dots, a_n]^* \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = \text{liczba}^7$$

Zaś z kolei jak pomnożymy w odwrotnej kolejności mamy **ketbra**:

$$|a\rangle\langle b| = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot [a_1, a_2, \dots, a_n]^* = M \in M(\mathcal{C})_n^n$$

co rozumiemy też jako operator rzutowy.

Obserwable jest wygodniej liczyć jako wartości oczekiwane z jakichś rozkładów prawdopodobieństw:

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i a_i = \sum_i |\langle a_i | \Psi \rangle|^2 \cdot a_i$$

Gdzie wiemy, że człon  $|\langle a_i | \Psi \rangle|^2$  możemy rozpisać jako:

$$|\langle a_i | \Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi | a_i \rangle|^2 = \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | \quad |a_i\rangle\langle a_i| \quad | \Psi \rangle$$

W związku z tym możemy dalej rozpisać  $\langle A \rangle$  jako:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \quad \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| \quad | \Psi \rangle = {}^8 \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

<sup>7</sup>Iloczyn skalarny

<sup>8</sup> $\sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| = \hat{A}$

# Spis treści

<b>1</b>		<b>2</b>
1.1	Krótką historia fizyki . . . . .	2
1.2	Hipoteza Kwantu . . . . .	2
1.2.1	Ciało Doskonale Czarne . . . . .	2
1.2.2	Efekt Fotoelektryczny . . . . .	2
1.2.3	Analiza pól EM . . . . .	2
1.3	Skutki skwantowania energii . . . . .	3
1.4	Superpozycja . . . . .	5
1.5	Hipoteza De Broigle’a . . . . .	7
<b>2</b>		<b>8</b>
2.1	Stany i pomiary kwantowe . . . . .	8

# Spis rysunków

1.1	Wykres promieniowania ciała doskonale czarnego . . . . .	3
1.2	Porównanie hipotezy Plancka z prawem Rayleigha-Jeansa i rozkładem Wiena. Further reading o 'Katastrofie w nadfiolecie' na <a href="#">Wikipedii o ciele doskonale czarnym</a> . . .	4
1.3	Demonstracja działania płytki półprzepuszczalnej. . . . .	4
1.4	Demonstracja działania płytki światłodzieliącej ( <i>Beam Splitter</i> ). . . . .	5
1.5	Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa . . . . .	6
1.6	Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa w przypadku zerowej zmiany fazy, tj. w szczególności dla jednego fotonu . . .	6
2.1	Porównanie podejść <b>dopracuj opis</b> . . . . .	9

# Indeks

Hipoteza De Broigle'a, 7

indeterminizm, 3

Interferometr Macha-Zehndera, 5

Kwant Energii, 2

Observabl-a, 9

Pomiary kwantowe, 8

Postulat pomiarowy, 9

Rozkład Boltzmann'a, 3

Stan

    fotonu, 5

    kwantowy, 8

stała Plancka, 2

Superpozycja, 6

Teoria parametrów ukrytych, 3

Zasada

    superpozycji, 8