

# Mechanika Kwantowa R 2021/2022

Kacper Cybiński

18 marca 2022

# Organizacja wykładu

1. Dwa kolokwia - po 30 pkt
2. Egzamin - 40 pkt

Łącznie 100 pkt, progi punktowe:

$$45 - 55 = 3, 55 - 65 = 3.5, 65 - 75 = 4, 75 - 85 = 4.5, 85 - 95 = 5, 95 - 100 = 5!$$

Egzamin ustny (zmiana oceny co najwyżej o 0.5)

Serie domowe dobrowolne (ale na pewno pomogą napisać dobrze kolokwia!)

[Strona wykładu](#)

Polecane podręczniki:

- L. Schiff *Mechanika Kwantowa (obszerna)*
- R. Liboff *Wprowadzenie do Mechaniki Kwantowej (mniej obszerna)*
- L. Susskind *Quantum Mechanics (Do ogarnięcia koncepcyjnego)*

# Lecture 1

## Krótką historia fizyki i wstęp do kwantów

### 1.1 Krótka historia fizyki

- **Arystoteles** - Jeden absolutny układ odniesienia, więc nie ma sensu pojęcie *obserwatora*
- **Newton** - Ciała, a więc i układy odniesienia (obserwatorzy inercjalni) są liczne, oraz mogą się poruszać między sobą. Siła, czas, przestrzeń są wciąż pojęciami absolutnymi.
- **Teoria względności** - Ruch, czas, przestrzeń, masa są zależne od obserwatora. Obserwator nie musi być inercjalny. Mówimy o *Uoperacyjnieniu pojęć zasadniczych*.
- **Teoria Kwantowa** - Okazuje się, że cały zestaw wielkości fizycznych służących do opisu świata zależy od tego jaki jest kontekst pomiarowy, tj. od relacji obserwatora z innymi elementami otaczającego go świata. *Czyli po raz pierwszy uwzględniamy fakt, że opisujemy wszechświat w którym sami istniejemy, czyli opisujemy ten układ od środka.*

[Prezentacja o historii fizyki wg Witkacego](#)

### 1.2 Hipoteza Kwantu

Co doprowadziło do wniosków, że energię trzeba skwantować?

#### 1.2.1 Ciało Doskonale Czarne

Paradoks polegał na tym, że z ciała doskonale czarnego powinniśmy mieć zabójcze promieniowanie gamma itp, a go nie było IRL. And here comes the *Max Planck*.

Planck zapostulował, że przekaz energii odbywa się za pomocą całkowitych wartości ([Kwant Energii](#))  
Zdefiniował to jako:

$$E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \quad (1.1)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \omega = 2\pi\nu$$

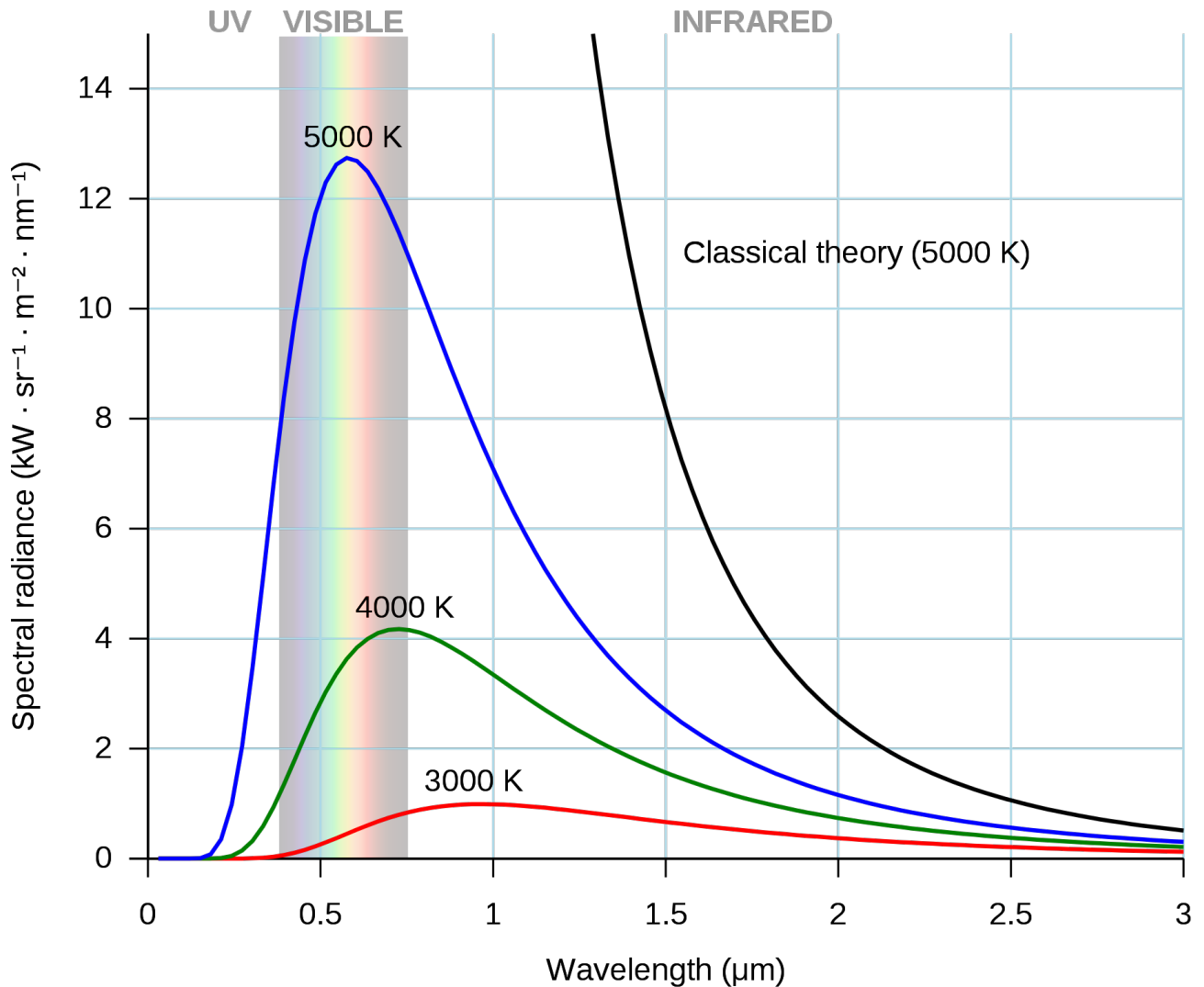
gdzie  $h$  - [Stała Plancka](#),  $h = 6.2626070150 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ ,  $\nu$  - częstotliwość promieniowania

#### 1.2.2 Efekt Fotoelektryczny

#### 1.2.3 Analiza pól EM

Analiza pól  $\mathcal{E}$  i  $B$  w odniesieniu do sześciangu z przewodnika prowadzi do wniosku, że energia "porcji promieniowania" transformuje się jak

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{u}{c}}}$$



Rysunek 1.1: Wykres promieniowania ciała doskonale czarnego

gdzie  $u$  - promieniowanie. Transformuje się to analogicznie do częstotliwości w efekcie Dopplera  $\Rightarrow E \sim \nu$

Rozkład energii będzie nam opisywać [Rozkład Boltzmanna](#), czyli rozkład prawdopodobieństwa zaobserwowania stanu Energetycznego, dany wzorem:

$$p(E_i) \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

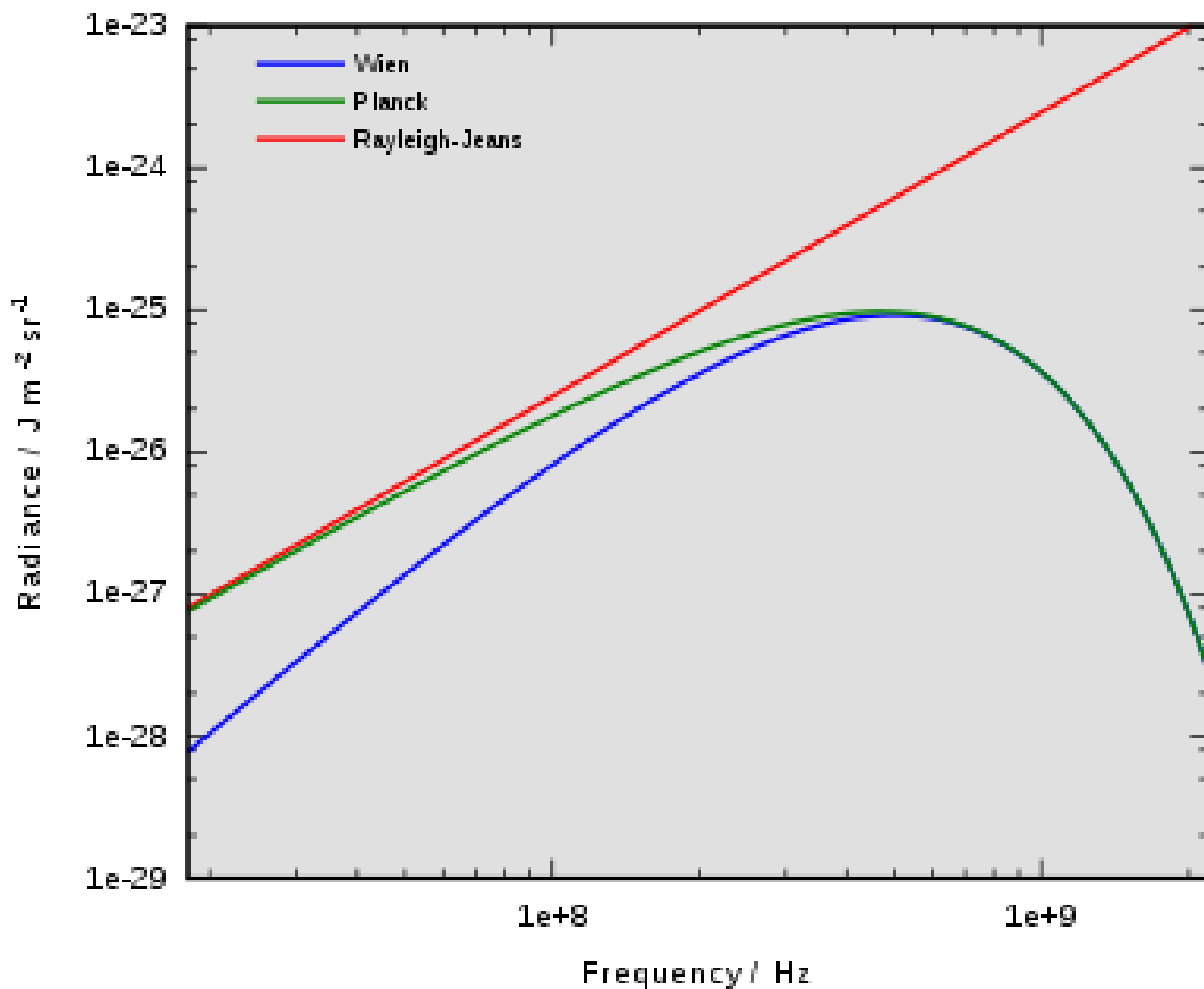
co w przypadku rozkładu ciągłego daje nam zasadę ekwipartycji, ale dla dużych wartości energii się rozbiega z doświadczeniem.

### 1.3 Skutki skwantowania energii

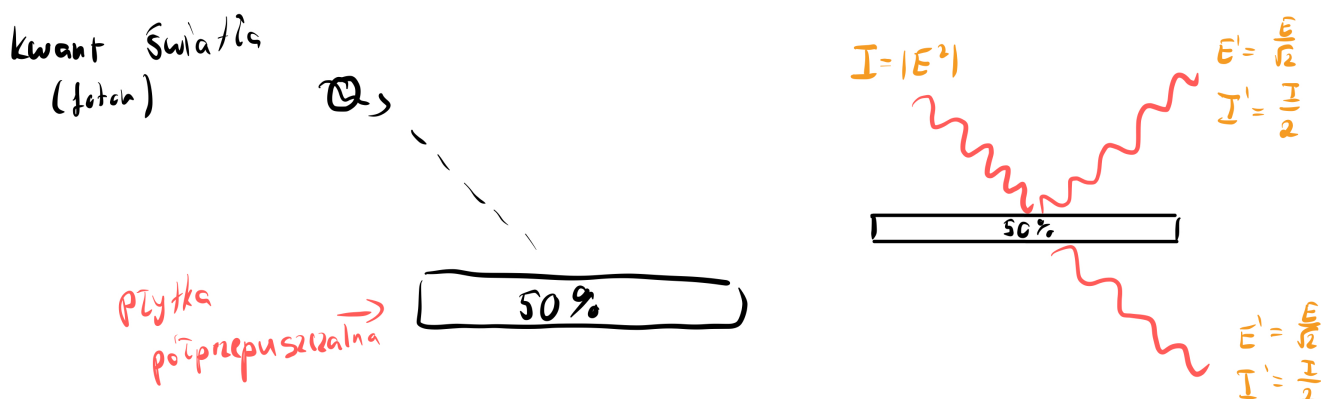
Przed wszystkim skutkiem jest [indeterminizm](#).

[Teoria parametrów ukrytych](#) - Teoria, że w kwantach energii występują nierejestrowane przez nas parametry, które jednakowoż zawsze determinują rozróżnienie kwantów energii. Parafrazując Drazana, dodawanie fotonom(kwantom) "włosów", "ogonów" itp - elementów rozróżniających je.

Jeśli jednak nie chcemy dodawać fotonom 'włosów', ani 'ogonów' i chcielibyśmy, żeby wszystkie fotony były "identyczne" to aby odtworzyć zachowanie klasyczne w granicy (podział natężenia 50%), to



Rysunek 1.2: Porównanie hipotezy Plancka z prawem Rayleigha-Jeansa i rozkładem Wiena. Further reading o 'Katastrofie w nadfiolecie' na [Wikipedii o ciele doskonale czarnym](#)

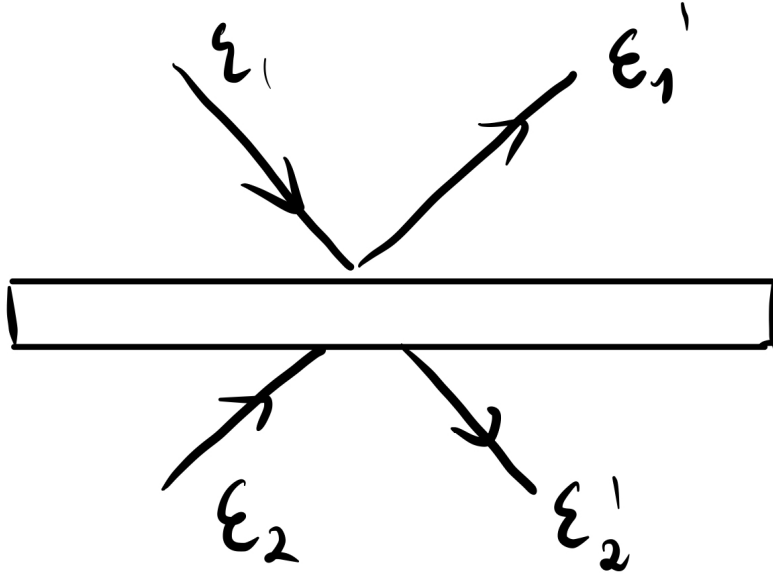


Rysunek 1.3: Demonstracja działania płytki półprzepuszczalnej.

musimy uznać, że foton zachowuje się niedeterministycznie, tj. wprowadzić element probabilistyczny. Wtedy z prawdopodobieństwem 50% każdy foton przechodzi lub odbija się.

Kiedy patrzymy na płytkę światłodzielącą (Rysunek 1.4), to możemy przedstawiać bieg promienia w niej jako superpozycję fal (zapis macierzowy).

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}'_1 \\ \mathcal{E}'_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.4: Demonstracja działania płytki światłodzielnącej (*Beam Splitter*).

Gdzie  $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{R}_1 \mathcal{E}_1 + \mathcal{T}_2 \mathcal{E}_2$ . Chcemy, żeby **energia była zachowana**

$$\Rightarrow |\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 = |\mathcal{E}'_1|^2 + |\mathcal{E}'_2|^2$$

Co możemy też tłumaczyć jako zachowanie długości wektora  $\begin{bmatrix} \mathcal{E}'_1 \\ \mathcal{E}'_2 \end{bmatrix}$ , czyli macierz  $B$  jest macierzą **Unitarną**, tj.  $B \cdot B^\dagger = 1$ .

$$BB^\dagger = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1^* & \mathcal{T}_1^* \\ \mathcal{T}_2^* & \mathcal{R}_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathcal{R}_1|^2 + |\mathcal{T}_1|^2 & \mathcal{R}_1^* \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1^* \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_1 \mathcal{T}_2^* + \mathcal{T}_1 \mathcal{R}_2^* & |\mathcal{R}_2|^2 + |\mathcal{T}_2|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wynika stąd, że  $|\mathcal{R}_1|^2 = |\mathcal{R}_2|^2 = R$  - współczynnik odbicia natężenia, a  $|\mathcal{T}_1|^2 = |\mathcal{T}_2|^2 = T$  - współczynnik transmisji natężenia, gdzie  $R + T = 1$ .

W związku z tym też ogólnie mówiąc np.  $B = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} \\ -\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{bmatrix}$ , a  $B_{50\%} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Tj.  $B \in \mathcal{U}(2)$

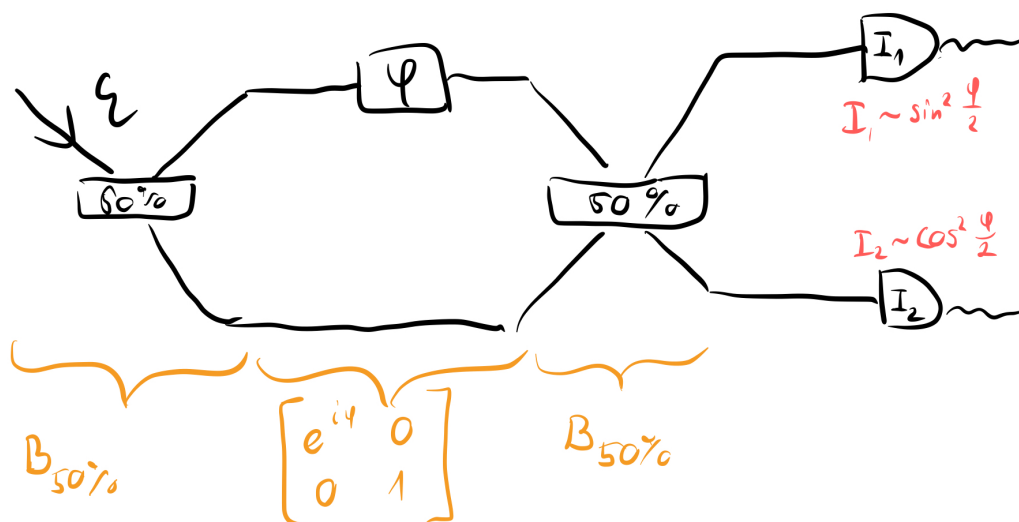
## 1.4 Superpozycja

Pokażemy zjawisko interferencji w sensie kwantowym patrząc na kanoniczny przykład - [Interferometr Macha-Zehndera](#), widoczny na Rysunku 1.5. Rozpatrujemy od teraz falę padającą postaci  $\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

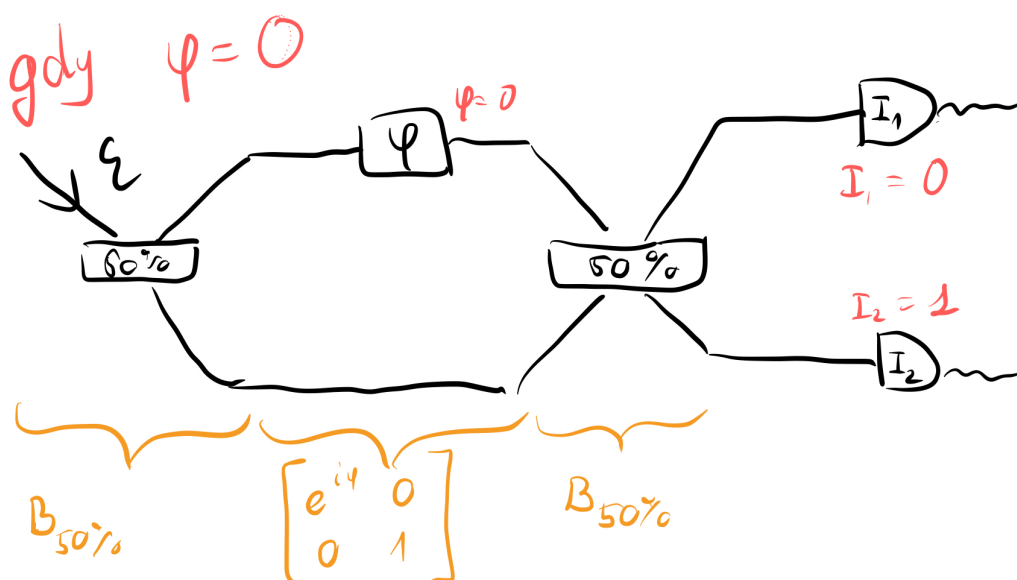
Teraz aby zrozumieć jak w takim układzie zachowuje się foton musimy odejść od klasycznego myślenia, że leci on jakąś drogą, a musimy przejść do myślenia o jego drodze jako **nieokreślonej**, tj. do momentu wykonania pomiaru (wejścia w interakcję z nim) podąża on jednocześnie wszystkimi możliwymi dla siebie trajektoriami, tym samym przyjmując właściwości falowe. Da to efekt jak ten widoczny na Rysunku 1.6.

Od teraz ten stan 'obierania wszystkich możliwości na raz' przez foton będziemy określać jako [stan fotonu](#) oznaczany  $|\Psi\rangle$ . Tłumaczy się to na funkcję gęstości prawdopodobieństwa znalezienia fotonu w jego możliwych trajektoriach.

W szczególności w opisywanym wyżej przypadku stan  $|\Psi\rangle$  będzie opisywany przez **superpozycję** stanów 1 i 2 odpowiadających pójściem drogą odpowiednio górną i dolną, tj.  $|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$  gdzie  $\Psi_i$



Rysunek 1.5: Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa



Rysunek 1.6: Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa w przypadku zerowej zmiany fazy, tj. w szczególności dla jednego fotonu

- amplituda prawdopodobieństwa obrania ścieżki  $i$ , a  $p_i = |\Psi_i|^2$  - prawdopodobieństwo, że foton leci i-tą trajektorią.

$$|\Psi\rangle = \Psi_1 |1\rangle \oplus \Psi_2 |2\rangle \quad (1.2)$$

Gdzie znakiem  $\oplus$  oznaczamy dodawanie fal. Ta operacja to [Superpozycja](#). Warto też zanotować, że skoro  $|\Psi_i| = p_i$  to ich suma musi się dodawać do 1

$$\sum_i |\Psi_i|^2 = 1$$

(innymi słowy prawdopodobieństwo znalezienia fotonu w całej przestrzeni zdarzeń jest 1)

Dla zbudowania intuicji na ten moment możemy sobie utożsamiać tę funkcję prawdopodobieństwa z obserwowanym natężeniem światła:

$$|\Psi_i|^2 \sim |\mathcal{E}_i|^2 \sim I_i$$

## 1.5 Hipoteza De Broigle'a

*Side note 1:* W naszych rozważaniach nie będzie mieć znaczenia faza całkowita, znaczenie będzie mieć tylko faza względna między ramionami, tj.  $\mathcal{E}_i \rightarrow e^{i\xi}\mathcal{E}_i$ . Innymi słowy, 'globalna faza' **nie istnieje!**.

Wyszliśmy w naszych dywagacjach od myślenia o fotonach jako o obiektach falowych, ale nie można zapomnieć o tym, że fotony mają również właściwości korpuskularne, więc sugeruje to, że dla materii też to powinno działać. W związku z tym [Hipoteza De Broigle'a](#) odpowiadać nam będzie za opisanie 'fal materii', gdzie ich długość fali to będzie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Co dla światła ma interpretację:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \mu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Gdzie  $E$  - Energia.

Further reading:

- [Notatki Demko do tego wykładu](#)
- [Zadanka na ćwiczenia 1](#)
- [Zadanka na ćwiczenia 2](#)



# Lecture 2

## Stany i pomiary kwantowe

### 2.1 Stany i pomiary kwantowe

W tym wykładzie zajmiemy się powoli formalizowaniem intuicji nabywanej na poprzednim wykładzie. Zdefiniujemy  $|i\rangle$  - pewne stany rozróżnialne (istnieje pomiar dający różne wyniki dla różnych stanów).

#### Zasada superpozycji

Jeśli  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$  są dopuszczalnymi stanami układu, to  $|1\rangle \oplus |2\rangle$ <sup>1</sup> też musi być dopuszczalnym stanem układu

Matematyczna struktura odpowiednia dla superpozycji to:

- Przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  nad  $\mathcal{C}$
- $\mathcal{H}$  - przestrzeń wektorowa nad  $\mathcal{C}$  z iloczynem skalarnym  $\langle \Psi | \phi \rangle$ ,  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^2$ , zupełna<sup>3</sup>
- **Uwaga:** każda skończona wymiarowa przestrzeń Hilberta ( $\dim \mathcal{H} = d$ ) jest izomorficzna z  $\mathcal{C}^d$ .

**Stan Kwantowy:** Niech  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ . **Uwaga:**  $|\Psi\rangle \stackrel{F}{\equiv} e^{i\xi} |\Psi\rangle \implies |\Psi\rangle \stackrel{F}{\equiv} z \cdot |\Psi\rangle$ <sup>4</sup>

Stanem kwantowym nazwiemy też promień w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$

**Pomiary kwantowe:** W przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  bierzemy sobie wektory  $|a_i\rangle \in \mathcal{H}$ , tworzące bazę ortonormalną w  $\mathcal{H}$ . Będzie to zespół rozróżnialnych stanów różniących się pewną obserwowalną wielkością fizyczną  $A$ . Czyli przyjmujemy:

$|a_i\rangle$  - mają dobrze określoną wartość wielkości fizycznej  $A$ . Zawsze jak je mierzymy to dostajemy  $a_i$ . Innymi słowy, jak mamy kilka wielkości fizycznych  $A, B, C, \dots$ , to w ogólności **nie będziemy mogli znaleźć jednej bazy ortonormalnej**  $|a_i, b_i, c_i, \dots\rangle$ . Jest to esencja mechaniki kwantowej, że różne wielkości fizyczne związane są z różnymi, niekompatybilnymi wobec siebie bazami, które opisują każdą z osobna.<sup>5</sup>

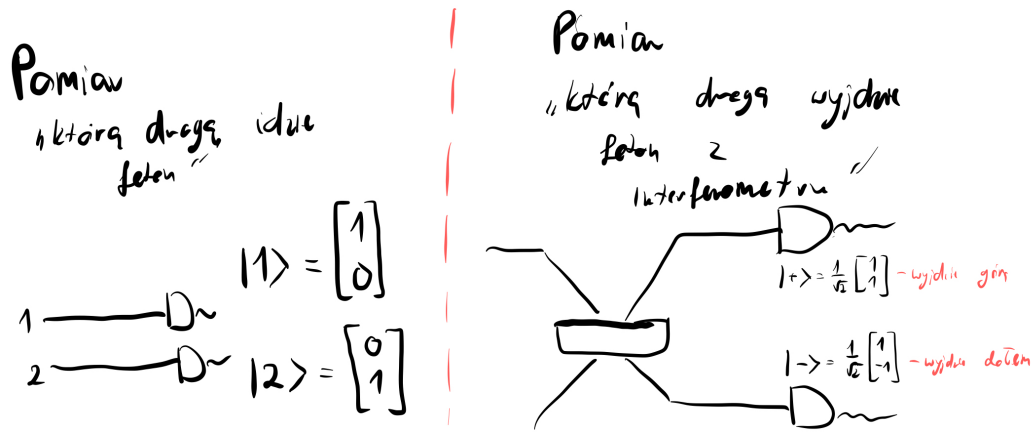
---

<sup>2</sup>wektor reprezentuje stan

<sup>3</sup>każdy ciąg Cauchy zbiega do elementu  $\mathcal{H}$

<sup>4</sup>Symbol  $\stackrel{F}{\equiv}$  oznacza 'w interpretacji fizycznej ...'

<sup>5</sup>Czyli pomiar  $\neq$  zagłębienie do garnka /sprawdzanie stanu który jest zdeteminowany/



Rysunek 2.1: Porównanie podejść myślenia o kwantu - deterministyczny i indeterministyczny

### Postulat pomiarowy

Jeśli  $|\Psi\rangle$  jest dowolnym stanem, na którym chcemy zmierzyć wielkość fizyczną  $A$ , z którą stowarzyszona jest baza  $\{|a_i\rangle\}$ . Możemy napisać:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$$

Wtedy uzyskany wynik  $a_i$  z prawdopodobieństwem  $p_i = |\alpha_i|^2 = |\langle a_i | \Psi \rangle|^2$ . Tym samym stan po pomiarze ma dobrze określone wielkości  $a_i$ , tj. jest  $|\Psi\rangle = |a_i\rangle$ .

Czyli też jak już raz dokonamy pomiaru na stanie kwantowym to on już nie wróci do możliwości interferencji, i za każdym kolejnym pomiarem już będziemy obserwować ten sam stan, tj. zacznie się zachowywać jakby był klasyczny.

**Obserwacja:** Z pomiarem wielkości  $A$  ( $\{|a_i\rangle\}$ ) stowarzyszymy operator

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$$

gdzie  $\hat{A}$  jest operatorem Hermitowskim<sup>6</sup> czyli w szczególności mając  $\hat{A}$  możemy też znaleźć  $\{|a_i\rangle\}$  robiąc rozkład własny.

*Crash course z notacji Diraca:*

**ket:**

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

**bra:**

$$\langle a| = |a\rangle^\dagger = [a_1, a_2, \dots, a_n]^* = \mathbf{v}^\dagger$$

<sup>6</sup>Operator hermitowski -  $A^\dagger = A$

Czyli jak je połączymy dostajemy **braket**:

$$\langle a|b\rangle = [a_1, a_2, \dots, a_n]^* \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = \text{liczba}^7$$

Zaś z kolei jak pomnożymy w odwrotnej kolejności mamy **ketbra**:

$$|a\rangle\langle b| = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot [a_1, a_2, \dots, a_n]^* = M \in M(\mathcal{C})_n^n$$

co rozumiemy też jako operator rzutowy.

Obserwable jest wygodniej liczyć jako wartości oczekiwane z jakichś rozkładów prawdopodobieństw:

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i a_i = \sum_i |\langle a_i | \Psi \rangle|^2 \cdot a_i$$

Gdzie wiemy, że człon  $|\langle a_i | \Psi \rangle|^2$  możemy rozpisać jako:

$$|\langle a_i | \Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi | a_i \rangle|^2 = \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | \quad |a_i\rangle\langle a_i| \quad | \Psi \rangle$$

W związku z tym możemy dalej rozpisać  $\langle A \rangle$  jako:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| \quad | \Psi \rangle = {}^8 \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

Further reading:

- [Notatki Demko do wykładu](#)
- [Zadania na ćwiczenia 2](#)
- [Rozwiązania z ćwiczeń 2](#)

<sup>7</sup>Iloczyn skalarny

<sup>8</sup> $\sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| = \hat{A}$

# Lecture 3

## Ewolucja stanów kwantowych i Hamiltonian

### 3.1 Ewolucja stanów kwantowych

Będziemy brać teraz pod uwagę tylko **układy izolowane**! Tutaj rozumiemy, że **Układ izolowany** - układ który nie oddziałuje z otoczeniem i brak pomiarów.

Formalnie napiszemy, że (póki co bez żadnych założeń)  $|\Psi(0)\rangle$  - stan w chwili początkowej,  $|\Psi(t)\rangle$  - stan po czasie. Teraz chcemy wiedzieć, jaki będzie  $|\Psi(t)\rangle$ ? Otóż:

$$|\Psi(t)\rangle = (U(t)) [|\Psi(0)\rangle]$$

Tj. tak jak w mechanice klasycznej - założymy, że nasza ewolucja w czasie jest odwracalna. Wynika z tego, że

- **stany rozróżnialne<sup>1</sup> muszą pozostać rozróżnialne.** Możemy na to patrzeć jako na **zachowanie informacji**.

$$\langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle = 1, \quad \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1$$

- Stopień rozróżnialności tych stanów zależeć będzie od ich iloczynu skalarnego. Chcemy, żeby pozostał on stały

$$\implies \langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle$$

**Fakt:**  $U(t)$  jest liniowe.

Sprawdźmy go. Także rozważmy

$$|\xi\rangle = U(t)[a|\Psi(0)\rangle + b|\Phi(0)\rangle] - aU(t)[|\Psi(0)\rangle] - bU(t)[|\Phi(0)\rangle]$$

Teraz obliczmy:

$$\begin{aligned} \langle \xi | \xi \rangle &= (U(t)[a|\Psi(0)\rangle + b|\Phi(0)\rangle])^\dagger (U(t)[a|\Psi(0)\rangle + b|\Phi(0)\rangle] - aU(t)[|\Psi(0)\rangle]^\dagger - bU(t)[|\Phi(0)\rangle]^\dagger \\ &\quad - (aU(t)[|\Psi(0)\rangle])^\dagger (-||-) \\ &\quad - (bU(t)[|\Phi(0)\rangle])^\dagger (-||-) \end{aligned}$$

Czyli  $(U(t)|\Psi\rangle)^\dagger (U(t)|\Psi\rangle) = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ , bo można 'usunąć' wszystkie  $U(t)$ . Wynika z tego, że  $U(t)$  **jest liniowe**.

**Wnioski:**  $U(t)$  jest liniowa (w skończone wymiarowych przestrzeniach reprezentowanych przez macierz<sup>2</sup>) i zachowuje iloczyn skalarny.

$$\implies |\Psi(t)\rangle = U(t) \cdot |\Psi(0)\rangle$$

---

<sup>1</sup>Ortogonalne

<sup>2</sup>Bo  $(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger$

Teraz ciągnąc to rozumowanie dalej:

$$\forall_{|\Psi(0)\rangle, |\varphi(0)\rangle} = \langle \Psi(0) | \varphi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | U^\dagger(t) U(t) | \varphi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | \varphi(0) \rangle$$

Wynikać z tego będzie, że  $U(t)^\dagger U(t) = 1$ . Wiedząc, że pracujemy w skończonej wymiarowej przestrzeni wnioskujemy, że  $U(t)$  jest **Unitarne**. Oznacza to też, że  $U^{-1}(t) = U(t)^\dagger$ . Teraz fizycznym argumentem, że  $U^{-1}(t)$  istnieje będzie to, że powinno być  $U^{-1}(t) = U(-t)$ .

Idziemy dalej. Wiemy, że  $U(t=0) = 1$ . Rozważmy pierwsze (liniowe) rozwinięcie  $U(t)$  w czasie:

$$U(dt) = 1 + \left( -\frac{i}{\hbar} H dt + O(dt^2) \right)$$

$$1 = U(dt)^\dagger U(dt) = \left( 1 + \frac{i}{\hbar} H^\dagger dt + O(dt^2) \right) \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H dt + O(dt^2) \right) = 1 + \frac{i}{\hbar} (H^\dagger - H) dt + O(dt^2)$$

Czyli widzimy, że  $H^\dagger = H$  - jest Hermitowskie.

$$|\Psi(dt)\rangle = U(dt) |\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} H dt |\Psi(0)\rangle + O(dt^2) = |\Psi(0)\rangle + \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} \Big|_{t=0} dt + O(dt^2)$$

$$\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi(0)\rangle \implies i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} \Big|_{t=0} = H |\Psi(0)\rangle$$

Ale zamiast pisać  $|\Psi(dt)\rangle = U(dt) |\Psi(0)\rangle$  można ogólniej powiedzieć:  $|\Psi(t+dt)\rangle = U(dt) |\Psi(t)\rangle$ . Dostajemy krypto [Równanie Schrödingera](#):

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H |\Psi(t)\rangle \quad (3.1)$$

(Krypto, bo nie znamy natury  $H$ )

## 3.2 Argument za naturą fizyczną $H$

Rozważmy obserwabłę  $A$  i jej wartość oczekiwaną na stanie  $|\Psi(t)\rangle$ . Wtedy:

$$\langle A \rangle_t = \langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle_t}{dt} &= \frac{d\langle \Psi(t) |}{dt} A | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | A \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | H \cdot A - A \cdot H | \Psi(t) \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | [H, A] | \Psi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | [A, H] | \Psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy  $A = H \implies \frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0$  czyli  $H$  jest związany z wielkością fizyczną zachowaną w czasie ewolucji  $\implies$  w pierwsza myśl, że ma coś wspólnego z energią.

## Analogia z Mechaniką Klasyczną

$$A(q, p), \quad \frac{dA}{dt} = \{A, H\} = \sum_i \frac{dA}{dq_i} \frac{dH}{dp_i} - \frac{dA}{dp_i} \frac{dH}{dq_i}$$

Formalna recepta wiążąca mechanikę klasyczną z kwantową:

$$\{\cdot, \cdot\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\cdot, \cdot]$$

Jest to dodatkowy argument na to, że  $H$  ma coś wspólnego z energią.

To teraz dochodzimy do równań:

$$\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi(t)\rangle \implies |\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle$$

Gdzie  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H \cdot t}$  Gdzie wreszcie piszemy, że  $H$  - Hamiltonian.

### 3.3 Wyznaczenie ewolucji stanu w praktyce

Mamy  $H$ , robimy jego rozkład własny, tj.  $H = \sum_k E_k |E_k\rangle\langle E_k|$ .  $H |E_k\rangle = E_k |E_k\rangle$

Jeśli:

$|\Psi(0)\rangle = |E_k\rangle$ , stan o dobrze określonej energii

$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H \cdot t} |E_k\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_k \cdot t} |E_k\rangle$

Czyli energia stanu o dobrze określonej energii zmienia tylko globalną fazę, czyli fizycznie stan się nie zmienia.

Ogólnie jeśli mamy dowolny stan początkowy  $|\Psi(0)\rangle$ , to możemy go rozłożyć w bazie  $\{|E_k\rangle\}$ . W takim razie widzimy, że zajdzie:

$|\Psi(0)\rangle = \sum_k c_k |E_k\rangle$ , z liniowości  $|\Psi(t)\rangle = \sum_k c_k U(t) |E_k\rangle = \sum_k c_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k \cdot t} |E_k\rangle$

**Uogólnienie** W modelach gdy  $H$  zależy jawnie od czasu (czyli de facto bierzemy układ izolowany) możemy te układy wciąż opisywać jakby były izolowane, ale musimy dopuścić  $H = H(t)$ . Wtedy jedyna zmiana jaka się pojawia, to:

$$\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H(t) |\Psi(t)\rangle \implies U(t) \approx e^{-\frac{i}{\hbar}(t-\Delta t)\Delta t} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}(\Delta t)\Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar}(0)\Delta t}$$

$$U(t) \approx \begin{cases} U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t) dt}, & \text{jeśli } H(t) \text{ komutują ze sobą w różnych chwilach czasu} \\ U(t) = \tau^5 \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t) dt} \right] \end{cases}$$

<sup>3</sup>Wartości własne (energie)

<sup>4</sup> $c_k = \langle E_k | \Psi(0) \rangle$

## Lecture 4

# Równanie Schrodingera (na koszulkach)

### 4.1 Schizofreniczna Ewolucja

Schizofreniczna ewolucja stanów kwantowych	
<p>Układ izolowany</p> $ \Psi(t)\rangle = U(t)  \Psi(0)\rangle$ <p>Ciągły</p> <p>Deterministyczny</p> <p>Odwracalny</p>	<p>W efekcie pomiaru</p> $ \Psi(t)\rangle \xrightarrow{p(i) =  \langle a_i   \Psi(0) \rangle ^2}  a_i\rangle$ <p>Skokowa</p> <p>Probabilistyczna</p> <p>Niedwracalna</p>

Rysunek 4.1: Schizofreniczna Ewolucja

### 4.2 Kwantowy Efekt Zenona (z Elei)

Formułował wiele paradoksów - miał dobrą intuicję. Jeden z bardziej znanych - **paradoks strzały**  
*Paradoks strzały* - Skoro strzała w każdej chwili spoczywa, to ruch jest niemożliwy.  
Rozważmy układ kwantowy, którego ewolucja jest opisana Hamiltonianem  $\mathcal{H}$ .

- Stan początkowy  $|\Psi(0)\rangle$  nie będzie stanem własnym  $\mathcal{H}$  (żeby ewoluował nietrywialnie).
- Wtedy ewolucja po czasie  $t$ :  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle$  i sprawdzamy, czy układ wciąż jest w stanie  $|\Psi(0)\rangle$  <sup>1</sup>
- Prawdopodobieństwo, że stan pozostał niezmienny:  
 $p(t) = |\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2 = \langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle \langle\Psi(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Psi(0)|e^{-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}}|\Psi(0)\rangle = \langle\Psi(0)|e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}}|\Psi(0)\rangle$   
Wtedy po rozwinięciu dla małych  $t$  <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 + t \cdot \left[ \langle\Psi(0)|-\frac{i\mathcal{H}}{\hbar}|\Psi(0)\rangle \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle + \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle \langle\Psi(0)|\frac{i\mathcal{H}}{\hbar}|\Psi(0)\rangle \right] + \\ &\quad - t^2 \cdot \left[ \langle\Psi(0)|\frac{\mathcal{H}^2}{\hbar^2}|\Psi(0)\rangle \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle + \frac{1}{2} \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle \langle\Psi(0)|\frac{\mathcal{H}^2}{\hbar^2}|\Psi(0)\rangle - \langle\Psi(0)|\frac{\mathcal{H}}{\hbar}|\Psi(0)\rangle \langle\Psi(0)|\frac{\mathcal{H}}{\hbar}|\Psi(0)\rangle \right] + \\ &= 1 + \frac{t^2}{\hbar^2} \underbrace{(\langle\Psi(0)|\mathcal{H}^2|\Psi(0)\rangle - \langle\Psi(0)|\mathcal{H}|\Psi(0)\rangle^2)}_{\Delta^2\mathcal{H}^3} + \mathcal{O}(t^3) \end{aligned}$$

Czyli wyobrażamy sobie, że mierzymy stan coraz częściej, czyli  $n$  razy co czas  $\frac{t}{n}$ , pytamy jakie jest prawdopodobieństwo, że we wszystkich  $n$  pomiarach okaże się, że stan pozostaje  $|\Psi(0)\rangle$

- Czyli finalnie to prawdopodobieństwo, to:  $p_n = (|\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2)^n = \left[1 - \frac{\Delta^2\mathcal{H}}{\hbar^2}(\frac{t}{n})^2 + \mathcal{O}(t^3)\right]^n$   
 $p_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} 1 - \frac{\Delta^2\mathcal{H}t^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} 1$
- Rozumiemy to tak, że bardzo częsty pomiar 'zamraża' ewolucję stanu.

## 4.3 Równanie Schrodingera (na koszulkach)

Nierelatywistyczna, punktowa cząstka kwantowa mogąca się poruszać w przestrzeni. Dla uproszczenia myślimy na razie o 1D.

Jeśli przestrzeń byłaby fundamentalnie zdyskretyzowana, tj.  $x_i^4 \in \{\dots, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \dots\}$ ,  $|x_i\rangle$  - stany położeniowe (rozdzielalne) reprezentujące, że cząstka znajduje się w punkcie  $x_i$ .

Ogólny stan:  $|\Psi\rangle = \sum_i \Psi_i |x_i\rangle$ ,  $\sum_i |\Psi_i|^2 = 1$ ,  $\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$

Wygodnie jest rozważyć granicę **ciągłą**:

$$|\Psi\rangle = \int dx \Psi(x) |x\rangle$$

Gdzie  $|\Psi(x)|^2$  - gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $x$ .

Skoro chcemy, żeby  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1^{(i)} \implies \int dx |\Psi(x)|^2 = 1^{(ii)}$ . Czyli:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int dx \Psi^*(x) \langle x | \int dx' \Psi(x') |x'\rangle \implies \int dx dx' \Psi^*(x) \Psi(x') \langle x | x' \rangle \stackrel{(i),(ii)}{\implies} \langle x | x' \rangle = \delta(x - x')^5.$$

**Funkcja falowa** - funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $\Psi(x)$  o amplitudzie  $|\Psi(x)|^2$ . Jest ona reprezentacją położeniową stanu  $|\Psi\rangle$

Zauważmy:  $|Psi\rangle = \int dx \Psi |x\rangle$ ,  $|\varphi\rangle = \int dx' \varphi(x') |x'\rangle$

$$\langle\Psi|\varphi\rangle = \int dx dx' \Psi^*(x) \varphi(x') \underbrace{\langle x | x' \rangle}_{\delta(x-x')} = \int dx \Psi^*(x) \varphi(x)$$

<sup>1</sup> Czyli wykonujemy pomiar w bazie ortonormalnej, której jednym z wektorów jest  $|\Psi(0)\rangle$

<sup>2</sup>  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

<sup>3</sup> Stan ewoluje 'tym szybciej' im ma większą ma wariancję  $\mathcal{H}$

<sup>4</sup> Dopuszczalne położenia

<sup>5</sup> Czyli o  $|x\rangle$  można myśleć jako o pewnej bazie ortogonalnej, ale nie unormowanej, bo  $\langle x | x \rangle = \infty$



Możemy teraz zdefiniować operator ([Obserwable Położenia](#)):

$$\hat{x} = \int dx \, x |x\rangle\langle x|, \quad \hat{x} |x\rangle = \int dx' \, x' |x'\rangle\langle x'| |x\rangle = x |x\rangle$$

Teraz zauważmy, że warunkiem zupełności bazy będą: [\(Fakt\)](#)  $\underbrace{\int_C dx \, |x\rangle\langle x|}_{C} = \mathbb{1}$

[\(Dowód\)](#) Weźmy dwa dowolne  $|x'\rangle, |x''\rangle$

$$\langle x' | C | x'' \rangle = \int dx \, \langle x' | x \rangle \underbrace{\langle x | x'' \rangle}_{\delta(x-x'')} = \langle x' | x'' \rangle = \langle x' | \mathbb{1} | x'' \rangle \implies C = \mathbb{1} \quad \square$$

Czyli:

$$|\Psi\rangle = \int dx' \, \Psi(x') |x'\rangle \implies \Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$$

Pamiętamy, że  $i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H} |\Psi(t)\rangle$ . Teraz żeby napisać  $\mathcal{H}$  kwantowo potrzebujemy  $\hat{p}$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \text{kwantowo} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

### Operator Pędu:

Intuicja falowa (świetlna), fale płaskie (stany o dobrze określonej energii i pędzie)

$$\Psi(x, t) \sim e^{i(kx - \omega t)}$$

Hipoteza Plancka/ De Broigle'a  $E = \hbar\omega$ ,  $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \cdot k$   
 żeby  $\hat{p}\Psi(x, t) = p\Psi(x, t) = \hbar k\Psi(x, t)$  trzeba wziąć  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$

Further reading:

- [Notatki Demko do wykładu](#)
- [Zadania na ćwiczenia 3](#)
- [Rozwiązania z ćwiczeń 3](#)

## Lecture 5

# Równanie Schrödingera, propagator i całki po trajektoriach et al.

## 5.1 Powtórka z poprzedniego wykładu

### 5.1.1 Reprezentacja położeniowa a pędowa

W reprezentacji położeniowej:

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad \hat{x} |\Psi\rangle = \hat{x} \int dx \Psi(x) |x\rangle = \int dx \Psi(x) \hat{x} |x\rangle = \int dx \underbrace{\Psi(x)x}_1 |x\rangle$$

Czyli widzimy, że zachodzi  $|\Psi\rangle \xrightarrow{\hat{x}} \hat{x} |\Psi\rangle \equiv \Psi(x) \rightarrow x \cdot |\Psi\rangle$

Zachodzi również:

- $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\cdot, \cdot]$
- $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \cdot \mathbb{1}$
- $[\hat{x}, \hat{p}] |\Psi\rangle = i\hbar |\Psi\rangle$  w reprezentacji położeniowej.
- $(x \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot x) \Psi(x) = i\hbar \Psi(x)$   
 $\underbrace{x \hat{p}[\Psi(x)] - \hat{p}[x \cdot \Psi(x)]}_2 = i\hbar \Psi(x)$

## 5.2 Równanie Schrödingera

### Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) + V(x) \Psi(x, t) \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>Efektywne działanie  $\hat{x}$  w reprezentacji położeniowej

<sup>2</sup>Działanie  $\hat{p}$  w reprezentacji położeniowej

Wiemy, że ogólnie ewolucję liczymy:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_k \langle E_k | \Psi(0) \rangle e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} |E_k\rangle \\ \langle x | \Psi(x) \rangle &= \sum_k e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \langle E_k | \Psi(0) \rangle \langle x | E_k \rangle \\ \Psi(x) &= \sum_k \langle E_k | \Psi(0) \rangle e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \underbrace{\phi_{E_k}(x)}_3 \end{aligned}$$

Czyli wystarczy zmienić  $\phi_{E_k}(x)$  i  $E_k$ , żeby znaleźć ewolucję  $\hat{\mathcal{H}}[\phi_{E_k}(x)] = E_k \phi_{E_k}(x)$  co daje nam:

### Równanie Schrödingera bez czasu

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \phi_{E_k}(x) = E_k \phi_{E_k}(x) \quad (5.2)$$

Ta niezależna od czasu reprezentacja równania schrödingera de facto jest problemem szukania stanów własnych Hamiltonianu. Czyli rozwiązując ewolucję Hamiltonianu w czasie najpierw rozwiązujemy problem znajdowania stanów, a dopiero potem szukamy jego ewolucji czasowej, tj zgodnie z równaniem (5.1).

#### 5.2.1 Cząstka swobodna

Gdzie dla cząstki swobodnej wygląda to tak, że  $V(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) &= E \Psi(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) \end{aligned}$$

Gdzie rozwiązania to kombinacje liniowe  $e^{\pm i \frac{2mE}{\hbar^2} x}$  tj. Fale płaskie będące jednocześnie stanami własnymi  $\hat{p}$

$$\Rightarrow \hat{p} e^{ipx/\hbar} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{ipx/\hbar} = p \cdot e^{ipx/\hbar}$$

Czyli będziemy rozkładać na stany własne w reprezentacji pędowej:

$$\Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}, \quad p = \pm \sqrt{2mE}$$

Wtedy widzimy, że ewolucja prosta:

$$\Psi_p(x, t) = \Psi_p(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \Psi_p(x) e^{-\frac{ip^2 t}{2m\hbar}}$$

Czyli ewolucja ogólnego stanu:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \underbrace{\langle p | \Psi(0) \rangle}_4 \cdot e^{-\frac{ipx}{\hbar} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar}}$$

<sup>3</sup>Funkcja falowa stanu własnego  $\hat{\mathcal{H}}$  (stan stacjonarny)

<sup>4</sup>Rozkład na stany własne pędu =  $\tilde{\Psi}(p, 0)$  - reprezentacja pędowa

## 5.3 Historia rozwoju Mechaniki Kwantowej

Były dwie szkoły ~~Falenieka i Otwoeka~~ Heisenberga i Schrödingera:

- Schrödinger - Mechanika falowa opis poprzez funkcje falowe.
- Heisenberg - Mechanika Macierzowa, opis poprzez obserwable

## 5.4 Obraz Schrödingera i obraz Heisenberga

**Obraz Schrödingera:**

$|\Psi\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$ ,  $U(t) = e^{-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}}$ . Jeśli liczymy wartość oczekiwaną obserwabli w czasie  $t$ :  $\langle A \rangle_t = \langle \Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle = \langle \Psi(0)|U^\dagger(t)\hat{A}U(t)|\Psi(0)\rangle$

Możemy jednak spojrzeć na to jak na sytuację, gdzie stan układu nam się nie zmienia, a zmieniają się obserwable. Daje nam to:

**Obraz Heisenberga:**

$|\Psi^{(H)}(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle$ ,  $\hat{A}^{(H)} := U^\dagger(t)\hat{A}U(t)$ ,  $\langle A \rangle_t = \langle \Psi(0)|\hat{A}^{(H)}(t)|\Psi(0)\rangle$

Ewolucja obserwabli jest opisana przez równanie Heisenberga:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}^{(H)}(t) = \left(\frac{d}{dt}U^\dagger(t)\right)\hat{A}U(t) + U^\dagger(t)\hat{A}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right) = \frac{i}{\hbar}\left[U^\dagger(t)\hat{\mathcal{H}}\hat{A}U(t) - U^\dagger\hat{A}\hat{\mathcal{H}}U(t)\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}\hat{A}^{(H)} - \hat{A}^{(H)}\hat{\mathcal{H}}\right]$$

Czyli finalnie dostajemy:

### Równanie Heisenberga

$$\frac{d\hat{A}^{(H)}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}^{(H)}(t)\right] \quad (5.3)$$

Further reading:

- [Notatki Demko do wykładu](#)
- [Zadania na ćwiczenia 4](#)
- Tu będą Rozwiązania z ćwiczeń 4

## 5.5 Propagator i całki po trajektoriach

Ewolucja w reprezentacji położeniowej:

$$\overbrace{\langle x|\Psi(t)\rangle}^{\Psi(x,t)} = \sum_k e^{-\frac{iE_k(t-t_0)}{\hbar}} \langle E_k| \underbrace{\mathbb{1}}_{\int dx_0 |x_0\rangle\langle x_0|} |\Psi(t_0)\rangle \langle x|E_k\rangle = \int dx_0 \sum_k e^{-\frac{iE_k(t-t_0)}{\hbar}} \underbrace{\langle E_k|x_0\rangle}_{\phi_k^*(x_0)} \overbrace{\langle x_0|\Psi(t_0)\rangle}^{\Psi(x_0,t_0)} \underbrace{\langle x|E_k\rangle}_{\phi_k(x)}$$

$$\Psi(x,t) = \int dx_0 \left( \sum_k \phi_k(x) \phi_k^*(x_0) e^{-\frac{iE_k(t-t_0)}{\hbar}} \right) \Psi(x_0, t_0)$$

## Propagator

Możemy powiedzieć, że  $K(x, t, x_0, t_0)$  to **Propagator**

$$K(x, t, x_0, t_0) = \sum_k \phi_k(x) \phi_k^*(x_0) e^{-\frac{iE_k(t-t_0)}{\hbar}} \quad (5.4)$$

Jak można łatwo zauważyć, propagator kwacze jak kaczką, chodzi jak kaczką, wygląda jak kaczką, więc jest to szukana **Funkcja Greena**<sup>5</sup>.

Ważna własność propagatora:

$$K(x, t_0, x_0, t_0) = \sum_k \phi_k(x) \phi_k^*(x_0) = \delta(x - x_0)$$

**Przykład:** Propagator cząstki swobodnej

$$K(x, t, x_0, t_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ipx}{\hbar} - \frac{i(t-t_0)}{2m\hbar} p^2}$$

Co mając w głowie **bardzo przyjemną własność matematyczną**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad \text{co działa nawet dla liczb zespolonych, gdy} \quad \text{Re}(a) \geq 0$$

Dostajemy:

$$K(x, t, x_0, t_0) \stackrel{\text{Re}(a)=0}{=} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar|t-t_0|}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(x-x_0)^2}{2|t-t_0|}}$$

---

<sup>5</sup>Oh no... PTSD activated

<sup>6</sup>Pamiętamy, że  $\sum_k \phi_k(x) \phi_k^*(x) = \sum_k \langle x|E_k\rangle \langle E_k|x\rangle = \langle x|\delta(x-x_0)|x_0\rangle$

<sup>7</sup>W sensie dystrybucyjnym

# Lecture 6

## Propagator et al.

### 6.1 Ad Propagator

Kolejna ciekawa obserwacja:

$$U^1(t - t_0) = U(t - t_1)U(t_1 - t_0)$$

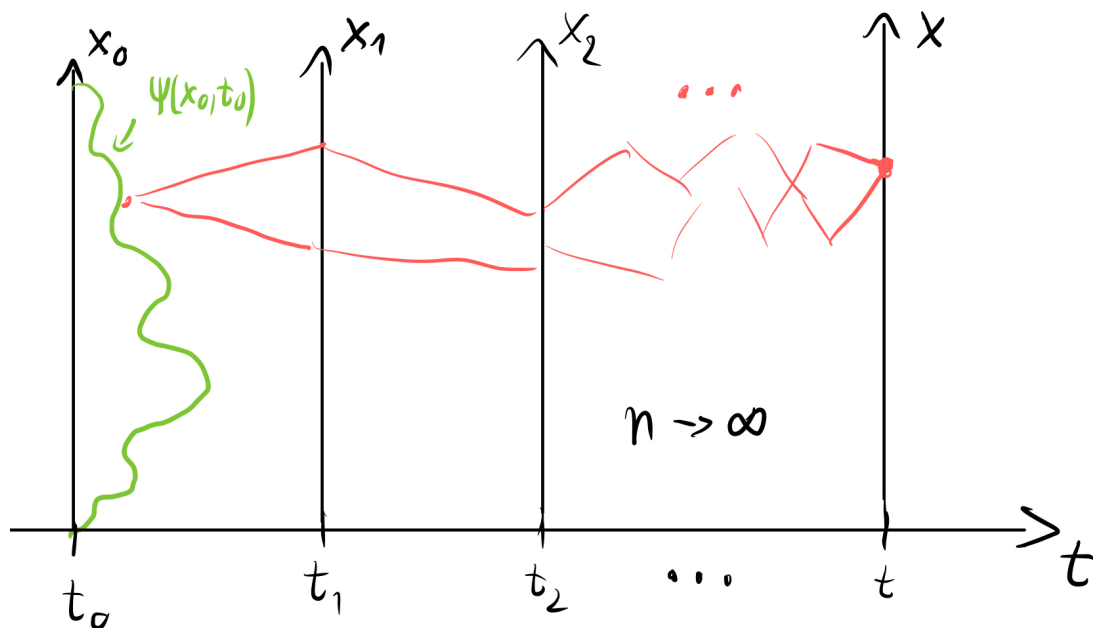
Teraz zapisując to na propagatorach dostajemy:

$$\Psi(x, t) = \int dx_0 dx_1 K(x, t, x_0, t_0) K(x_1, t_1, x_0, t_0) \Psi(x, t)$$

To teraz możemy zagęścić atmosferę ( $t_k$ ):

$$\Psi(x, t) = \int dx_0 dx_1 dx_2 \dots K(x, t, x_n, t_n) K(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}) \dots K(x_1, t_1, x_0, t_0)$$

Teraz przechodzimy do granicy z  $n \rightarrow \infty$  mamy de facto sumowanie po wszystkich drogach jakimi porusza się cząstka, trochę jak Zasada Huygensa dla optyki. Twochę jak przechodzenie z reprezentacji położeniowej na pędową.



Rysunek 6.1: Sumowanie po drogach dla cząstki kwantowej, liczona na propagatorach. Wyraża to też Feynmannowska [Całka po trajektoriach](#)

<sup>1</sup> $U(t)$  jak w Sekcji 5.4

## 6.2 Całka po trajektoriach

Wprowadzone do Mechaniki Kwantowej przez Feynmana, jest to inny sposób na wyprowadzenie propagatora.

Zauważamy:

$$K(x, t, x_0, t_0) = \sum_{x(\tau)^2, x(t_0)=x_0, x(t)=t}^f f[x(\tau)]$$

Intuicja: wiemy, że klasyczna trajektoria  $\bar{x}(\tau)$  ekstremalizuje działanie:

$$S[x(\tau)] = \int_{t_0}^t d\tau L(\dot{x}(\tau), x(\tau)), \quad L(\dot{x}, x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

Gdzie  $L$  - Lagrangian. Weźmy więc

$$f[x(\tau)] = e^{\frac{iS[x(\tau)]}{\hbar}}$$

Dzięki temu w pobliżu trajektorii klasycznej będzie konstruktywna interferencja tych amplitud które sumujemy. Chcemy uzyskać taki efekt, żeby to się zgadzało z obserwowanym światem - zachowującym się klasycznie na skali makro.

**Wniosek:** Wynika z tego fakt, że możemy wyprowadzić Mechanikę Kwantową wyprowadzić z Mechaniki Klasycznej!

Chcemy pokazać, że tak skonstruowany propagator daje nam  $\Psi(x, t)$  spełniającą równanie Schrödingera. Rozważamy teraz infintezymalny czas  $t = t_0 + \epsilon$ ,  $K(x, t_0 + \epsilon, x_0, t_0) \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} \text{const.}$ ,

$$e^{1/\hbar \epsilon L(\frac{x-x_0}{\epsilon}, \frac{x+x_0}{2})}$$

Wtedy przeewoluowana funkcja falowa:

$$\Psi(x, t_0 + \epsilon) = \text{const.} \int dx_0 \Psi(x_0, t_0) e^{\frac{1}{\hbar} \left( \frac{m(x-x_0)^2}{2\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right)}$$

Niech  $\eta = x - x_0$ , które jest małe i będziemy chcieli je rozwijać w  $\epsilon$  i  $\eta$ , przy czym wkład do wyrażenia dadzą tylko  $\eta \sim \sqrt{\epsilon}$ . Wtedy:

$$\Psi(x, t_0) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \Big|_{t=t_0} \approx -\text{const} \int d\eta e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}} \left[ \Psi(x, t_0) - \eta \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t_0) \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right] \left[ 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V\left(x - \frac{\eta}{2}\right) \right]$$

Pamiętajac o takiej przyjemnej własności:

$$\int dx x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla nieparzystych} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}} \cdot \frac{(n-1)!!}{a^{(n+1)/2}} & \text{dla parzystych} \end{cases}$$

$$\Psi(x, t_0) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \Big|_{t=t_0} \approx -\text{const} \left[ \Psi(x, t_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{-im}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t_0) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{-2\hbar\epsilon}{im} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \left[ 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x) \right]$$

W najniższym rzędzie w  $\epsilon$ :

$$\Psi(x, t_0) = -\text{const} \Psi(x, t_0) \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}}$$

Co pozwala nam wyznaczyć stałą  $\text{const.}$  Będzie ona miała interpretację miary przy całkach po trajektoriach.

$\implies$

Zmierzamy do równania Schrödingera. **Dopisz potem z ostatnich paru minut wykładu**

---

<sup>2</sup>Trajektoria

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Krótką historia fizyki i wstęp do kwantów</b>	<b>2</b>
1.1	Krótką historia fizyki . . . . .	2
1.2	Hipoteza Kwantu . . . . .	2
1.2.1	Ciało Doskonale Czarne . . . . .	2
1.2.2	Efekt Fotoelektryczny . . . . .	2
1.2.3	Analiza pól EM . . . . .	2
1.3	Skutki skwantowania energii . . . . .	3
1.4	Superpozycja . . . . .	5
1.5	Hipoteza De Broigle’a . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Stany i pomiary kwantowe</b>	<b>8</b>
2.1	Stany i pomiary kwantowe . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ewolucja stanów kwantowych i Hamiltonian</b>	<b>11</b>
3.1	Ewolucja stanów kwantowych . . . . .	11
3.2	Argument za naturą fizyczną $H$ . . . . .	12
3.3	Wyznaczenie ewolucji stanu w praktyce . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Równanie Schrodingera (na koszulkach)</b>	<b>14</b>
4.1	Schizofreniczna Ewolucja . . . . .	14
4.2	Kwantowy Efekt Zenona (z Elei) . . . . .	14
4.3	Równanie Schrodingera (na koszulkach) . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Równanie Schrödingera, propagator i całki po trajektoriach et al.</b>	<b>17</b>
5.1	Powtórka z poprzedniego wykładu . . . . .	17
5.1.1	Reprezentacja położeniowa a pędowa . . . . .	17
5.2	Równanie Schrödingera . . . . .	17
5.2.1	Cząstka swobodna . . . . .	18
5.3	Historia rozwoju Mechaniki Kwantowej . . . . .	19
5.4	Obraz Schrödingera i obraz Heisenberga . . . . .	19
5.5	Propagator i całki po trajektoriach . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Propagator et al.</b>	<b>21</b>
6.1	Ad Propagator . . . . .	21
6.2	<a href="#">Całka po trajektoriach</a> . . . . .	22
<b>A</b>	<b>Długaśne wyprowadzenia wzorów</b>	<b>28</b>
A.1	Lecture 6 . . . . .	28



# Spis rysunków

1.1	Wykres promieniowania ciała doskonale czarnego . . . . .	3
1.2	Porównanie hipotezy Plancka z prawem Rayleigha-Jeansa i rozkładem Wiena. Further reading o 'Katastrofie w nadfiolecie' na <a href="#">Wikipedii o ciele doskonale czarnym</a> . . .	4
1.3	Demonstracja działania płytki półprzepuszczalnej. . . . .	4
1.4	Demonstracja działania płytki światłodzieliącej ( <i>Beam Splitter</i> ). . . . .	5
1.5	Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa . . . . .	6
1.6	Schemat konstrukcji Interferometru Macha-Zehndera wraz z podpisem macierzami Jonesa w przypadku zerowej zmiany fazy, tj. w szczególności dla jednego fotonu . . .	6
2.1	Porównanie podejść myślenia o kwantu - deterministyczny i niedeterministyczny . . .	9
4.1	Schizofreniczna Ewolucja . . . . .	14
6.1	Sumowanie po drogach dla cząstki kwantowej, liczona na propagatorach. Wyraża to też Feynmannowska <a href="#">Całka po trajektoriach</a> . . . . .	21
A.1	Uzasadnienie dla unitarnego operatora . . . . .	28

# Indeks

Całka po trajektoriach, 21, 22

Funkcja

falowa, 15

Greena, 20

Hipoteza De Broigle'a, 7

indeterminizm, 3

Interferometr Macha-Zehndera, 5

Kwant Energii, 2

Obserwablą, 9

Położenia, 16

Pomiary kwantowe, 8

Postulat pomiarowy, 9

Propagator, 20

Rozkład Boltzmann'a, 3

Równanie

Heisenberga, 19

Schrödingera, 12, 17

bez czasu, 18

Stan

fotonu, 5

kwantowy, 8

Stała

Plancka, 2

Superpozycja, 6

Teoria parametrów ukrytych, 3

Układ izolowany, 11

Zasada

superpozycji, 8



# Załączniki

## Dodatek A

### Długaśne wyprowadzenia wzorów

#### A.1 Lecture 6

The image shows a chalkboard with a handwritten derivation. At the top, the expression  $K(x, t, x_0, t_0)$  is written. Below it, a large curly brace groups three equations. The first equation is  $\langle x | U(t - t_0) | x_0 \rangle = \int dx_n \langle x | x_n \rangle \langle x_n |$ . The second equation is  $= \langle x | U(t - t_n) U(t_n - t_0) | x_0 \rangle$ . The third equation is  $= \int dx_n \langle x | U(t - t_n) | x_n \rangle \langle x_n | U(t_n - t_0) | x_0 \rangle$ . A checkmark is placed above the second equation.

$$\begin{aligned} & K(x, t, x_0, t_0) \\ & \left\{ \begin{aligned} & \langle x | U(t - t_0) | x_0 \rangle = \int dx_n \langle x | x_n \rangle \langle x_n | \\ & = \langle x | U(t - t_n) U(t_n - t_0) | x_0 \rangle \\ & = \int dx_n \langle x | U(t - t_n) | x_n \rangle \langle x_n | U(t_n - t_0) | x_0 \rangle \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Załącznik A.1: Uzasadnienie dla unitarnego operatora