Przybliżenie WKB

Rozw. równania Schr. w granicy półklasycznej (w dowolnym potencjale).

Zapiszmy:

$$\psi(x,t)=\sqrt{\rho(x,t)}\,e^{iS(x,t)/\hbar}$$

↑ gęstość prawdopodobieństwa ↖ faza

wstawiamy do $i\hbar\partial_t\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi$

$$i\hbar(\partial_t\sqrt{\rho})\cancel{e^{iS/\hbar}}-\sqrt{\rho}(\partial_t S)\cancel{e^{iS/\hbar}}=-\frac{1}{2m}\left[\hbar^2(\partial_x^2\sqrt{\rho})+2i\hbar(\partial_x\sqrt{\rho})(\partial_x S)-\sqrt{\rho}(\partial_x S)^2+i\hbar\sqrt{\rho}(\partial_x^2 S)\right]\cancel{e^{iS/\hbar}}+V\sqrt{\rho}\,\cancel{e^{\frac{iS}{\hbar}}}$$

Patrzymy na kolejne rzędy $\hbar$:

0wy: $-\sqrt{\rho}\,\partial_t S=\sqrt{\rho}\frac{(\partial_x S)^2}{2m}+V\sqrt{\rho}$, $-\partial_t S=\frac{(\partial_x S)^2}{2m}+V$ równanie Hamiltona-Jacobiego

Będziemy szukać stanów stacjonarnych (o określonej energii): $(\partial_t\rho=0)$

$$\psi_E(x,t)=\sqrt{\rho(x)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\underbrace{[S(x)-Et]}_{S(x,t)}} \qquad -\partial_t S(x,t)=E$$

$$E-V(x)=\frac{(\partial_x S)^2}{2m}$$

$$\partial_x S=\pm\sqrt{2m(E-V(x))}$$

$$S(x)=\pm\int dx'\sqrt{2m(E-V(x'))}$$

1szy rząd: $0=-\frac{1}{2m}\left[2i\hbar\,\partial_x\sqrt{\rho}\,\partial_x S+i\hbar\sqrt{\rho}\,\partial_x^2 S\right]$

$$0=2\cdot\partial_x\sqrt{\rho}\cdot\partial_x S+\sqrt{\rho}\,\partial_x^2 S$$

$$\equiv\ \partial_x(\rho\cdot\partial_x S)=0 \ \rightarrow\ \rho\,\partial_x S=\text{const}$$

$$\rho=\frac{\text{const}}{\sqrt{2m(E-V(x))}}$$

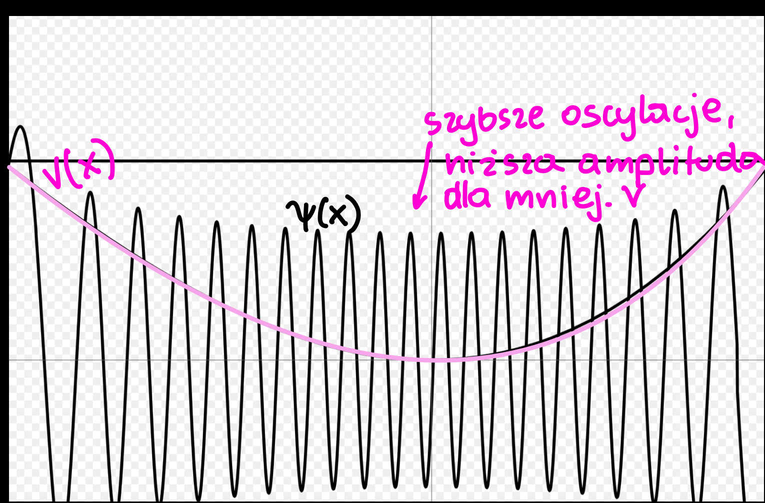
bierzemy tylko plus, bo ρ to moduł

Oznaczmy $p(x)=\sqrt{2m(E-V(x))}$.

↑ klasyczny pęd cząstki

Czyli f. falowa:

$$\boxed{\psi(x,t)=\frac{\text{const}}{\sqrt{p(x)}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\left[\pm\int^x dx\,p(x)-E\cdot t\right]}}$$



Warunek uzasadniający przybliżenie WKB

W równaniu pojawiały się wyrazy:

$$\hbar^2\partial_x^2\sqrt{\rho}+2i\hbar\partial_x\sqrt{\rho}\,\partial_x S+\underline{i\hbar\sqrt{\rho}\,\partial_x^2 S}-\underline{\sqrt{\rho}(\partial_x S)^2}$$

chcielibyśmy, żeby: $|\cancel{\sqrt{\rho}}(\partial_x S)^2|\gg|i\hbar\cancel{\sqrt{\rho}}\,\partial_x^2 S|$

$$p(x)^2\gg\hbar\frac{dp(x)}{dx}$$

to mówi nam o skalach, na jakich widzimy zmianę pędu → $\left|\frac{p(x)}{\frac{dp(x)}{dx}}\right|\gg\left|\frac{\hbar}{p(x)}\right|=\lambda(x)$ dł. fali de Broglie'a (*)