Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

19 maja 2022

1 Zadanie 1

(*)**Mapy chaotyczne**. Mapę $T : [0,1] \to [0,1]$ nazywamy chaotyczną, jeśli posiada gęsty zbiór orbit periodycznych i jeśli istnieje orbita gęsta w $[0,1]$. Przypomnijmy, że zbiór Y jest gęsty w $[0,1]$ jeżeli nie istnieje odcinek $\subset [0,1]$ który nie miałby punktów wspólnych z Y (np. zbiór liczb niewymiernych i zbiór liczb wymiernych są gęste w $[0,1]$, a zbiór liczb $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ gęsty nie jest). Rozważ stałą Champernowne'a $x_0 = 0.123456789101112131415161718192021222324...$ oraz mapę $T(x) = 10x \bmod 1$. Pokaż, że orbita punktu x_0 pod działaniem mapy T jest gęsta w $[0,1]$. Pokaż następnie, że mapa ta jest chaotyczna

2 Rozwiązanie

Rozwiązanie jest poprzez machanie rękami, chętnie się dowiem jak poprawnie ściśle się to udowadnia. Niemniej, podzielmy sobie argumentację na dwie części, za gęstością orbity x_0 w $[0,1]$ i za gęstością orbit w $[0,1]$.

2.1 Uzasadnienie gęstości orbity x_0 w $[0,1]$

Zauważamy, że stała Champernowne'a $x_0 = 0,12345678910111\ldots$ jest skonstruowana poprzez zapisywania jako kolejnych liczb w rozwinięciu dziesiętnym poprzez kolejne liczby naturalne.
Jak działa mapa T? Możemy myśleć o kolejnych działaniach mapy jako "przesunięcie"przecinka o jedno miejsce w prawo oraz usunięcie liczby jedności. Rozważmy dowolny punkt $y \in [0,1]$ oraz epsilonową kulę w której siedzi, $d(x, \epsilon)$.
Orbita punktu x_0 jest gęsta w [0,1], jeśli dla dowolnego punktu $y \in [0,1]$, w jego najbliższym otoczeniu znajdzie się element orbity x_0.
Jako, że stałą Champernowne'a konstruuje się dostawiając kolejne liczy naturalne do rozwinięcia dziesiętnego, po pewnej iteracji $T^n(x_0)$ otrzymamy liczbę postaci

$$0, \mathrm{y}\,(0)_k\, a$$

gdzie a jest pewnym ciągiem liczby złożonym z kolejnych liczb naturalnych, tak jak wynika z konstrukcji liczby Champernowne'a.
Jako że stała ta jest konstruowana poprzez dodawanie nieskończonej ilości liczb naturalnych, dla dowolnego ϵ możemy wybrać takie k, że

$$T^n(x_0) - y < \epsilon$$

. Możemy również z drugiej strony, wybrać taką iterację mapy T, że $T^n(x_0)$ będzie postaci

$$0, (y-1)\,(9)_k\, a$$

gdzie a znów jest ciągiem liczb naturalnych. Jako że do konstrukcji liczby Champernowne'a używamy nieskończonej ilości liczb naturalnych znajdziemy takie k dla którego

$$y - T^n(x_0) < \epsilon$$

. Jako że dla każdej liczby z $[0, 1]$ możemy przeprowadzić takie rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że **orbita** x_0 **jest gęsta** w$[0, 1]$.

2.2 Uzasadnienie, że zbiór orbit periodycznych jest gęsty w $[0, 1]$

Jedyne punkty mające orbity periodyczne mapy T mają postać liczb okresowych np $0,(1234) = 0,123412341234\ldots$ Chcemy teraz pokazać, że dla dowolnego punktu $y \in [0, 1]$ nie potrafimy wybrać takiego otoczenia $d(y, \epsilon)$ do którego nie należałby punkt ze zbioru orbit mapy T.
Oznaczmy ilość cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby y jako m. skonstruujmy najpierw punkt x, który ma orbitę periodyczną, gdzie $x > y$ oraz $x - y < \epsilon$. Niech x ma postać

$$x = 0,(10^m y(0)_k 1)$$

czyli $x = 10^m y000..(k-$ razy ... $)001y00\ldots$ zapiszmy tą liczbę jako ułamek, oraz przejdźmy z k do nieskończoności.
Będziemy chcieli pokazać, że jesteśmy w stanie zbliżyć się dowolnie blisko od dołu i od góry do dowolnej liczby, co będzie oznaczało, że jesteśmy w stanie pokryć cały odcinek $[0, 1]$ tymi orbitami.

$$0,((10^m y)(0)_k 1) = x$$
$$(10^m y)(0)_k 1,((10^m y)(0)_k 1) = 10^{m+k+1}x$$
$$(10^m y)(0)_k 1 = x\left(10^{m+k+1} - 1\right)$$
$$x = \frac{(10^m y)(0)_k 1}{(10^{m+k+1} - 1)}$$
$$x = \frac{(10^m y) \cdot 10^{k+1} + 1}{10^{m+k+1} - 1}$$
$$\lim_{k\to\infty} x = \frac{(10^m y)}{10^m} = y$$

Możemy przeprowadzić podobne rozumowanie z liczbą $x < y$, która ma postać $x = 0,((10^m y - 1)(9)_k)$ czyli

$$x = 0,(10^m y - 1)\,99(k - razy)99\,(10^m y - 1)\,99\ldots$$
$$0,((10^m y - 1)(9)_k) = x$$
$$(10^m y - 1)(9)_k,((10^m y - 1)(9)_k) = 10^{m+k}x$$
$$(10^m y - 1)(9)_k = x\left(10^{m+k} - 1\right)$$
$$x = \frac{(10^m y - 1)(9)_k}{(10^{m+k} - 1)}$$
$$x = \frac{(10^m y) \cdot 10^k - 1}{10^{m+k} - 1}$$
$$\lim_{k\to\infty} x = \frac{(10^m y)}{10^m} = y$$

W związku z tym widzimy, że dla dowolnej liczby wymiernej należącej do zbioru $[0, 1]$, dla dowolnego jej otoczenia będziemy mieć punkty należące do zbioru orbit periodycznych, czyli jest to zbiór gęsty.
Pokazaliśmy więc że mapa ma gęsty zbiór orbit periodycznych oraz istnieje orbita gęsta w $[0, 1]$ czyli **mapa** T **jest chaotyczna**, co należało dowieść.