# Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

21 kwietnia 2022

## 1 Zadanie 2

W pudełku o objetości $V$ znajduje się ultrarelatywistyczny klasyczny gaz, dla którego $E = \sum_i c\,|\vec{p}_i|$. Oblicz $\Omega(\epsilon) = \frac{2V}{h^3}\int_{\epsilon_p<\epsilon} d^3p$ opisujące liczbę stanów o energii mniejszej lub równej $\epsilon$. Znajdź wielką sumę statystyczną układu, jego energię swobodną i ciśnienie. Wskazówka: sume po pędach mozna zastapić catka $\sum_p \longrightarrow \int_0^\infty d\epsilon\rho(\epsilon)$, gdzie $\rho = \Omega'$

## 2 Rozwiązanie

Energia ultrarelatywistycznego gazu jest dana wzorem:

$$E = \sum_i c\,|\vec{p}_i|$$

Policzmy najpierw liczbę stanów o energii mniejszej od $\epsilon$. Liczba stanów dana jest wzorem:

$$\Omega(\epsilon) = \frac{2V}{h^3}\int_{\epsilon_p<e} d^3p$$

W celu policzenia tej całki najłatwiej jest przejść do współrzędnych sferycznych gdzie $|\vec{p}| = r = \frac{\varepsilon_p}{c}$. Wówczas liczba stanów energii jest równa:

$$\Omega(\epsilon) = \frac{2V}{h^3}\int_0^{\frac{3}{2}} r^2\cos\theta dr d\phi d\theta = \frac{8\pi V\epsilon^3}{3h^3c^3}$$

Znajdźmy teraz wielką sumę statystyczną układu (kladziemy $\exp(\beta\mu) = z$) :

$$\Xi = \sum_N z^N \int d\Gamma_N = \sum_N z^N \frac{V^N}{h^{3N}N!}\int_0^\infty d^3p\exp(-\beta).$$

$$\Xi = \sum_N \frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi Vz}{h^3c^3\beta^3}\right)^N = \exp\left(\frac{8\pi Vz}{h^3c^3\beta^3}\right)$$

Stąd potencjał wielkokanoniczny jest równy:

$$\eta = -kT\log\Xi = -\frac{8\pi Vz}{h^3c^3\beta^4}$$

Z drugiej strony jednak:

$$F - \mu N = \eta$$

gdzie $F$ to szukana energia swobodna, a $N$ to średnia liczba cząstek. A zatem energia swobodna jest równa:

$$F = -\frac{8\pi V z}{h^3 c^3 \beta^4} + \mu N$$

Natomiast ciśnienie jest równe:

$$p = -\frac{\partial \eta}{\partial V} = \frac{8\pi z}{h^3 c^3 \beta^4}$$