Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

12 maja 2022

1 Zadanie 3

N moli gazu doskonałego poddano przemianie ze stanu początkowego opisanego parametrami T_1, V_1 do stanu końcowego o objętości V_2, przy czym $V_2 > V_1$. Rozważyć dwie przemiany: a) $p(V) = \gamma - \alpha (V - V_1)$ b) $p(V) = \gamma - \beta (V - V_1)^2$ Współczynniki α, β, γ dobrano tak, aby ciśnienie końcowe w obydwu przemianach było jednakowe. Wyznacz zależność $T(V)$, temperaturę końcową T_2 oraz pracę wykonaną przez siły zewnętrzne w obydwu przypadkach. Wyznaczyć warunek aby było spełnione: $T_2 > T_1$.

2 Rozwiązanie

Rozważmy pierwszą przemianę, dla której $p(V)$ jest dane wzorem:

$$p(V) = \gamma - \alpha (V - V_1)$$

Jako że pracujemy z gazem doskonałym, to spełnione jest także równanie Clapeyrona:

$$pV = NRT$$

Przekształcając je i podstawiając zależność $p(V)$ dostaniemy zależność $T(V)$:

$$T(V) = \frac{V (\gamma - \alpha (V - V_1))}{NR}$$

A stąd temperatura końcowa jest równa:

$$T_2 = T(V_2) = \frac{V_2 (\gamma - \alpha (V_2 - V_1))}{NR}$$

Natomiast praca wykonana przez siły zewnętrzne jest równa:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -\int_{V_1}^{V_2} (\gamma - \alpha (V - V_1)) \, dV = -\gamma (V_2 - V_1) + \frac{\alpha}{2} (V_2 - V_1)^2$$

Wyznaczmy dla tej przemiany warunek na $T_2 > T_1$:

$$T(V_2) > T(V_1)$$
$$\frac{V_2 (\gamma - \alpha (V_2 - V_1))}{NR} > \frac{V_1 \gamma}{NR}$$
$$\gamma (V_2 - V_1) - \alpha V_2 (V_2 - V_1) > 0$$

Wiadomo, że $V_2 > V_1$, czyli wynika z tego, że warunek $T_2 > T_1$ będzie spelniony tylko wtedy, gdy $\frac{\gamma}{\alpha} > V_2$. Rozważmy drugą przemianę, gdzie $p(V)$ jest dane:

$$p(V) = \gamma - \beta \left(V - V_1\right)^2$$

Postępując analogicznie dostajemy, że $T(V)$ jest dane wzorem:

$$T(V) = \frac{V\left(\gamma - \beta\left(V - V_1\right)^2\right)}{NR}$$

A stąd T_2 :

$$T_2 = T\left(V_2\right) = \frac{V_2\left(\gamma - \beta\left(V_2 - V_1\right)^2\right)}{NR}$$

Natomiast praca wykonana przez siły zewnętrzne jest równa:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -\gamma\left(V_2 - V_1\right) + \frac{\beta}{3}\left(V_2 - V_1\right)^3$$

Sprawdźmy na koniec kiedy będzie spełniony warunek $T_2 > T_1$:

$$T\left(V_2\right) > T\left(V_1\right)$$
$$\frac{V_2\gamma - \beta V_2\left(V_2 - V_1\right)^2}{NR} > \frac{V_1\gamma}{NR}$$
$$\left(V_2 - V_1\right)\left(\gamma - \beta V_2\left(V_2 - V_1\right)\right) > 0$$

Czyli musi być spełnione:

$$\gamma - \beta V_2\left(V_2 - V_1\right) > 0$$

Zauważmy, że stałe α, β, γ dobrano tak, by ciśnienie końcowe w obu przemianach bylo takie samo, to znaczy, żeby zachodziła równość:

$$\gamma - \alpha\left(V_2 - V_1\right) = \gamma - \beta\left(V_2 - V_1\right)^2$$

A stąd mamy związek α z β :

$$\alpha = \beta\left(V_2 - V_1\right)$$

Czyli warunek dla drugiej przemiany ponownie redukuje się do nierówności $\frac{\gamma}{\alpha} > V_2$. Dodatkowo, zauważmy, że $p_1 = \gamma$ dla obu przemian. Czyli ostatecznie żeby $T_2 > T_1$ dla obu przemian, to stałe muszą spełniać warunki:

$$\alpha < \frac{p_1}{V_2}$$
$$\beta < \frac{p_1}{V_2\left(V_2 - V_1\right)}$$