Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

13 czerwca 2022

1 Zadanie 3

Rozważ dwuwymiarowy gaz złożony z N nieoddziałujących ze sobą nierelatywistycznych fermionów o spinie $\frac{1}{2}$ w temperaturze $T = 0$. Gaz wypełnia powierzchnię o polu A.

a) Znajdź energię Fermiego E_F dla tego gazu

b) Znajdź energię wewnętrzną na cząstkę $u = \frac{U}{N}$ dla tego gazu jako funkcję E_F

2 Rozwiązanie

Z definicji wszystkie rozpatrywane cząstki będą miały energię mniejszą niż Energia Fermiego. Skoro o powierzchni którą zajmuje gaz nie wiemy nic więcej, więc możemy bez straty ogólności utożsamić ją z kwadratem o boku L i powierzchni A. Jak wiemy energia n-tego stanu to:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

Zdefiniujmy sobie zero energetyczne na energii stanu podstawowego. Takie działanie upraszcza nam rachunki, bo wtedy liczba stanów o energii mniejszej od Energii Fermiego E_F to liczba stanów mających $|\mathbf{n}|$ mniejsze niż $|\mathbf{n_F}|$, które odpowiada E_F, a w tym przypadku i jednocześnie oznacza nam wszystkie możliwe stany.
Szukana liczba stanów będzie odpowiadać wycinkowi koła dla którego oby dwie współrzędne są dodatnie, z uwzględnieniem dwóch możliwości spinu cząstki. Stanowi on $\frac{1}{4}$ całego koła, czyli ta liczba stanów i jednocześnie liczba wszystkich cząstek to będzie:

$$N = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi n_F^2 \implies n_F = \left(\frac{2N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Da nam to Energię Fermiego równą:

$$E_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\frac{2N}{\pi}$$

Dzięki temu, że patrząc na tę powierzchnię zobaczyliśmy kwadrat o boku L, więc $L^2 = A$, co pozwala nam zapisać Energię Fermiego jako:

$$E_F = \frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{A}$$

Daje nam to odpowiedź na punkt a).
Teraz policzmy sobie energię wewnętrzną na cząstkę tego gazu. Uznajemy, że stanów jest dużo, więc BSO sumocałka wchodzi tu w postaci całki.

Pomocniczo sobie jeszcze zdefiniujmy n_E czyli liczbę stanów o energii mniejszej od E i jest ona dana wzorem:

$$n_E = \frac{mEA}{\pi\hbar^2} \tag{1}$$

Czyli finalnie liczymy całkę:

$$U = \int_0^N E \, \mathrm{d}n_E = E_F N - \int_0^{E_F} n_E \, \mathrm{d}E$$

Co po wstawieniu równania (1) daje nam równanie:

$$U = E_F N - \int_0^{E_F} \frac{mEA}{\pi\hbar^2} \, \mathrm{d}E = E_F N - \frac{N}{2E_F} E_F^2 = \frac{1}{2} N E_F$$

Ale jako, że szukamy energii wewnętrznej na cząstkę, to szukany wzór to:

$$u = \frac{1}{2} E_F$$

Co daje nam odpowiedź na pytanie b)