Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

9 czerwca 2022

1 Zadanie 1

Fotony w d-wymiarach. Oblicz energię wewnętrzną promieniowania we wnęce dla wnęki jedno- i dwu-wymiarowej

2 Rozwiązanie

Energia dla konkretnej częstości fotonu dana jest wzorem (fakt z ćwiczeń):

$$E(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

Jak chcemy znaleźć energię wewnętrzną, to musimy do tego mieć gęstość stanów uzależnioną od częstości. W najprostszym, $1D$ przypadku, liczba stanów o $n \leq m$, gdzie m i n to numer modu, jest równa:

$$N(m) = 2m$$

Wiadomo, że energię można powiązać z numerem modu $\epsilon = \frac{2\pi\hbar n}{L}$
gdzie L to wymiar wnęki. Dodatkowo wypada tu przejść na rozmowę w języku częstości poprzez zastosowanie związku $\epsilon = \frac{\hbar\omega}{c}$ Teraz dostaliśmy zależność:

$$n = \frac{\omega L}{2\pi c}$$

A stąd można wyznaczyć liczbę stanów $N(\omega)$ o częstości mniejszej niż ω i gęstość stanów $g(\omega)$uzyskaną poprzez różniczkowanie liczby stanów:

$$N(\omega) = \frac{\omega L}{\pi c}, \quad g(\omega) = \frac{L}{\pi c}$$

Stąd energia wewnętrzna fotonów jest równa:

$$E = \int_0^\infty g(\omega)\frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}d\omega$$
$$E = \frac{L}{\pi c}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}d\omega$$
$$E = \frac{Lk^2\pi}{6\hbar c}T^2$$

Przejdźmy do układu dwuwymiarowego. Liczba stanów o n mniejszym od jakiegoś m jest równa:

$$N(m) = 2\pi|\vec{n}|^2$$

Odpowiednio liczba stanów o częstości mniejszej od ω, oraz gęstość stanów:

$$N(\omega) = \frac{L^2\omega^2}{2\pi^2 c^2}, \quad g(\omega) = \frac{L^2}{\pi^2 c^2}\omega$$

Czyli energia wewnętrzna gazu fotonów:

$$E = \frac{L^2}{\pi^2 c^2}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^2}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} d\omega$$

Wycałkowanie tego wyrażenia da nam postać:

$$E = \frac{2L^2 k^3}{\hbar^2 c^2 \pi^2} T^3 \zeta(3)$$