Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

13 czerwca 2022

1 Zadanie 2

Wyznaczyć stosunek temperatur Fermiego gazu doskonałego elektronów i protonów wewnątrz gwiazdy składającej się całkowicie ze zjonizowanego wodoru.

2 Rozwiązanie

Mamy powiedziane, że gwiazda z treści zadania jest w pełni zjonizowana, więc przyjmujemy populacje elektronów i protonów za równe. Jedne i drugie są fermionami, więc patrzymy na problem gazu(ów) fotonów w 3D. Dla uproszczenia przybliżmy gwiazdę jako sześcian o boku długości L. Jest to bez straty ogólności, bo aplikując periodyczne warunki brzegowe moglibyśmy rozszerzyć nasze rozumowanie na dowolną bryłę. Mówimy sobie, że w tym pudełku mamy zarówno N elektronów jak i N protonów.// Teraz już po ustaleniu założeń, które tu przyjmujemy możemy sobie przypomnieć, że energia jednego stanu kwantowego to będzie:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}|\mathbf{n}|^2$$

Zaznaczmy, że $\mathbf{n}$ to skrótowy zapis na $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, bo takie rozbicie jest niezbędne z racji pracy w 3 wymiarach.
Zdefiniujmy sobie zero energetyczne na energii stanu podstawowego. Takie działanie upraszcza nam rachunki, bo wtedy liczba stanów o energii mniejszej od Energii Fermiego E_F to liczba stanów mających $|\mathbf{n}|$ mniejsze niż $|\mathbf{n_F}|$, które odpowiada E_F.
Szukana liczba stanów będzie odpowiadać wycinkowi kuli dla którego wszystkie trzy współrzędne są dodatnie, z uwzględnieniem dwóch możliwości spinu cząstki. Stanowi on $\frac{1}{8}$ całej kuli, czyli ta liczba stanów to będzie:

$$N = 2 \cdot \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi|\mathbf{n_F}|^3 = \frac{1}{3}n_F^3 \implies n_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Wyrażenie n_F w języku całkowitej liczby cząstek przyda nam się do policzenia Energii Fermiego, gdyż jak już wcześniej wspomniane, n_F odpowiada Energii Fermiego E_F, więc:

$$E_F = \frac{2\pi^2\hbar^2}{L^2}n_F^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

A jako, że Temperatura Fermiego to $T_F = \frac{E_F}{k}$, więc:

$$T_F = \frac{1}{k}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi^2 N}{V^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Doceolowo jednak chcemy porównać temperatury Fermiego dla obu gazów, więc po zapisaniu ich stosunku dostajemy:

$$\frac{T_F^{(prot.)}}{T_F^{(elektr.)}} = \frac{\frac{1}{m_p}\cancel{\frac{\hbar^2}{2k}\left(\frac{2\pi^2 N}{V^2}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{m_e}\cancel{\frac{\hbar^2}{2k}\left(\frac{2\pi^2 N}{V^2}\right)^{\frac{2}{3}}}} = \frac{m_e}{m_p}$$

Mogliśmy tu skrócić objętości obu gazów ze sobą, ponieważ mają równą liczbę cząstek N i tą samą gęstosć (oby dwa są idealne i pochodzą ze zjonizowania wodoru), więc mają równe objętości.