Praca Domowa Termodynamika i Fizyka Statystyczna R 2021/2022

Kacper Cybiński

13 czerwca 2022

1 Zadanie 1

Pokaż, że entropia kwantowego gazu doskonałego wyraża się wzorem:

$$S = -k_B \sum_k \left[\langle n_k\rangle \log \langle n_k\rangle \mp (1 \pm \langle n_k\rangle) \log (1 \pm \langle n_k\rangle)\right]$$

Gdzie górny znak to Bozony a dolny to Fermiony.

2 Rozwiązanie

Pierwsze, co nam się przyda do pokazania tego, to wyznaczenie średniej liczby cząstek obsadzajacej stan o energii ϵ_k. Do tego potrzebujemy wielkokanonicznego potencjału Ω_k, czyli również sumy wielkokanonicznej Z_k. Są one równe odpowiednio:

$$Z_k = (1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_k - \mu)))^{\pm 1}, \quad \Omega_k = \mp kT \log (1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_k - \mu)))$$

Czyli teraz wiedząc, że $\langle n_k\rangle = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu}$:

$$\langle n_k\rangle = \frac{\exp(-\beta(\epsilon_k - \mu))}{1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_k - \mu))} = \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon_k - \mu)) \pm 1}$$

Mamy już potencjal wielkokanoniczny jednego stanu energetycznego, więc potencjał wielkokanoniczny całego układu Ω to będzie suma po potencjałach wszystkich dostępnych k stanów, tj. $\Omega = \sum_k \Omega_k$.
Chcemy z tego dostać entropię, więc stosujemy tutaj wiedzę, że dostaniemy ją po zróżniczkowaniu po T, tj. $S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}$:

$$S = \sum_j \pm k \log (1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_k - \mu))) + \frac{kT}{kT^2}(\epsilon_j - \mu)\frac{1}{\exp(\beta(\epsilon_k - \mu)) \pm 1}$$

We wzorze który chcemy udowodnić Entropia jest wyrażona w jęzku $\langle n_k\rangle$, więc szukamy sposobów na przejście na ten język. Pierwsza taka tożsamość, jaką tu zastosujemy, to:

$$\log(1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_j - \mu))) = -\log(1 \mp \langle n_k\rangle)$$

Da nam to wtedy:

$$S = \sum_j \mp k \log(1 \mp \langle n_k\rangle) - \log(\exp(-\beta(\epsilon_j - \mu)))\langle n_k\rangle$$

Czyli po małym przearanżowaniu dostajemy:

$$S = -k \sum_j \langle n_k\rangle \log(\langle n_k\rangle) \mp (1 \pm \langle n_k\rangle) \log(1 \pm \langle n_k\rangle)$$

Co należało dowieść.