

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**Escola Politécnica**

**Engenharia Elétrica**

## Sistema de localização por trilateração

Relatório elaborado por:

Rafael Lazar 14604416

Lucas Sposo Cavalari 14591733

Vitor Layme Izzo 14611727

Pedro Paulo Schmidt Coelho 14657861

Turma: 04

Grupo: 04

Docentes:

Renato Machado Monaro

Ronaldo Domingues Mansano

Setembro de 2023



# Sistema de localização por trilateração

Relatório elaborado por:

Rafael Lazar 14604416

Lucas Sposo Cavalari 14591733

Vitor Layme Izzo 14611727

Pedro Paulo Schmidt Coelho 14657861

O projeto está relacionado com a discussão dos causadores da deficiência na mobilidade urbana terrestre e com o levantamento de soluções para esse problema, correlacionando com o tópico de cidades inteligentes.

Docentes:

Renato Machado Monaro

Ronaldo Domingues Mansano

São Paulo

Setembro de 2023

# Resumo

## Sistema de localização por trilateração

Mobilidade Urbana é um dos temas mais relevantes e complexos da evolução das cidades modernas. Nesse viés, buscar soluções eficazes é um trabalho árduo ao se considerar fatores financeiros, técnicos, sociais e ambientais. Dessa forma, propõe-se a elucidar e mitigar uma das principais causas da imprecisão que usuários de ônibus experimentam ao tentar obter informações acerca da sua localização em tempo real. Nesse sentido, nota-se que o fator mais relevante que corrobora com este problema é a inexatidão com que os sistemas de GPS fornecem a localização de objetos na terra que pode atingir até 15m de erro. Isso se deve, não só a características atmosféricas, por exemplo, a presença da Ionosfera, como a fatores intrínsecos a um método de posicionamento que opera do espaço. Portanto, o desenvolvimento de uma ferramenta que possibilite a geolocalização terrestre se faz extremamente necessária. Desse modo, a tecnologia dos sistemas de localização por trilateração mostra-se bastante interessante, já que apresenta, não apenas uma melhora significativa na margem de erro posicional, como uma maior facilidade de manutenção. Dessa maneira, essa ferramenta funcionaria, basicamente, com a intercomunicação entre torres de sinal que mediriam a distância de um ponto até cada uma delas, e com isso, definiria sua posição. Assim, aprimorando as informações de tráfego do transporte público e aumentando a capacidade dos cidadãos de programação e previsão dos trajetos, além de eficiência na locomoção, contribuindo com a sociedade e o meio-ambiente.

**Palavras-chave:** TRILATERAÇÃO - GPS - SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO - ONDAS - DISTÂNCIA

Universidade de São Paulo

# Abstract

## **Terrestrial localization system using trilateration**

Urban Mobility is one of the most relevant and complex themes in the evolution of modern cities. In this sense, looking for effective solutions is hard work when considering financial, technical, social and environmental factors. In this way, it is proposed to elucidate and mitigate one of the main causes of the inaccuracy that bus users experience when trying to obtain information about their location in real time. In this sense, it is noted that the most relevant factor that corroborates this problem is the inaccuracy with which GPS systems provide the location of objects on earth, which can reach up to 15m of error. This is due not only to atmospheric characteristics, for example, the presence of the Ionosphere, but also to factors intrinsic to a positioning method that operates from space. Therefore, the development of a tool that enables terrestrial geolocation is extremely necessary. With that in mind, the technology of trilateration localization systems proves to be quite interesting, as it presents not only a significant improvement in the margin of positional error, but also greater ease of maintenance. In this way, this tool would basically work with intercommunication between signal towers that would measure the distance from a point to each of them, and thus define its position. Thus, improving public transport traffic information and increasing citizens' ability to plan and predict routes, as well as efficient transportation, contributing to society and the environment.

**Keywords:** TRILATERATION - GPS - LOCALIZATION SYSTEM - WAVES - DISTANCE



# Lista de Figuras

2.1	Trilateração em um exemplo com 3 dimensões a esquerda e um exemplo com 2 dimensões a direita . . . . .	6
2.2	Refração da ionosfera . . . . .	7
6.1	Torres de transmissão . . . . .	19
6.2	Receptor . . . . .	20
6.3	Emissores com ondas eletromagnéticas . . . . .	21
6.4	Sistema de localização com ultrassom . . . . .	22
7.1	Diagrama de conexões . . . . .	24
8.1	Protótipo ainda sem as distâncias bem definidas . . . . .	30
8.2	Protótipo em teste . . . . .	30
8.3	Protótipo finalizado . . . . .	31
10.1	Memorial de cálculo . . . . .	38





# Lista de Tabelas



---

**USP** UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**IEE** Introdução a Engenharia Elétrica



# Símbolos

t	Tempo	s
m	Massa	kg
Símbolo	Nome	Unidade



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>Sumário</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definição do projeto . . . . .	1
1.2 Breve histórico . . . . .	2
1.3 Mobilidade urbana . . . . .	2
1.4 Cidades inteligentes . . . . .	3
1.5 Considerações finais . . . . .	3
<b>2 Levantamento dos dados e pesquisa bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Sistemas de localização . . . . .	5
2.2 Problemas com o sistema atual de localização . . . . .	6
2.3 Imprecisão do GPS . . . . .	6
2.4 Dependência do Brasil sobre o GPS . . . . .	8
<b>3 Análise e definição do problema, objetivo e restrições</b>	<b>9</b>
3.1 Definição do problema . . . . .	9
3.2 Análise do problema . . . . .	9
3.2.1 Má organização dos ônibus . . . . .	9
3.2.2 Problemas relacionados com a imprecisão do GPS . . . . .	11
3.3 Objetivos . . . . .	12
3.4 Restrições . . . . .	12
<b>4 Alternativas para solução do problema</b>	<b>13</b>

---

4.0.1	Sensor de localização embarcado . . . . .	13
4.0.2	Aplicativo para informações de tráfego . . . . .	14
4.0.3	Localização via trilateração de torres de sinal . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Escopo do projeto</b>	<b>17</b>
5.1	Análise de implementação real . . . . .	17
5.2	Capacidades do trabalho . . . . .	18
<b>6</b>	<b>O Protótipo</b>	<b>19</b>
6.1	Sistema de localização . . . . .	19
6.2	Possíveis componentes do protótipo . . . . .	20
6.2.1	Escolha entre ondas eletromagnéticas e ultrassom . . . . .	20
6.2.2	Problemas com a escolha do emissor de ultrassom . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Decisões efetivas e realização do protótipo</b>	<b>23</b>
7.1	Escolha oficial dos componentes . . . . .	23
7.2	Funcionamento . . . . .	25
7.2.1	Posição e comunicação entre os componentes . . . . .	25
7.2.2	Realização dos cálculos e detalhamento . . . . .	26
7.2.3	Código . . . . .	27
7.3	Tecnologias descartadas . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Resultados</b>	<b>29</b>
8.1	Valores e dados obtidos . . . . .	29
8.2	Extrapolação dos dados . . . . .	31
8.3	Resultados de uma possível implementação real. . . . .	31
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>33</b>
<b>10</b>	<b>Anexos</b>	<b>37</b>



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Definição do projeto

A disciplina de introdução a engenharia elétrica, com o patrocínio da NEWSTEC, propôs aos alunos escolher um problema relacionado à mobilidade urbana terrestre e apresentar uma solução capaz de reduzir ou até mesmo eliminar tal inconveniência. Buscou-se escolher um problema que pode ser resolvido pela aplicação de métodos de engenharia, especialmente elétrica, e que proporcione o avanço das cidades inteligentes. Com isso em mente, um integrante do grupo propôs o melhoramento do sistema de localização atual, o Sistema de Posicionamento Global (GPS), visto a falta de precisão proporcionada pela tecnologia aos cidadãos, que possui uma imprecisão de aproximadamente 10 a 15 metros em boas condições, o que causa dificuldades para a localização do usuário em pequenas distâncias, além de ser responsável por imprecisões nas estimativas de chegada e de percurso dos transportes públicos.

Um exemplo das dificuldades dessa imprecisão é a dificuldade que esse integrante sofreu ao tentar se localizar com uso do GPS nas primeiras semanas de aula, quando este não conhecia a Universidade de São Paulo. Devida a imprecisão o integrante necessitava percorrer distâncias consideráveis para que o seu representante no mapa virtual se locomovesse para a direção correta.

Assim, considerando-se as limitações impostas no projeto, pesquisou-se alternativas para atingir um sistema de localização mais preciso que pode ser implementado nas cidades brasileiras: a localização por trilatação com uso de ondas eletromagnéticas, interligadas por torres de sinais

terrestres. Decidiu-se utilizar essa tecnologia principalmente por causa de um paper divulgado na Nature [6], Koelemeij et al. (2022), que explicitava um estudo que alcançou precisões de valor decimétricos, utilizando a sincronização dos relógios internos das torres. Porém, com as limitações do projeto a realização dessa tecnologia não é possível, por isso essa pesquisa serviu apenas como inspiração.

## 1.2 Breve histórico

Para produzir um sistema de localização de maior efetividade é necessário compreender as limitações do sistema atual para contorná-las. O GPS, atualmente utilizado como principal tecnologia de localização do planeta, é propriedade dos Estados Unidos; porém, a versão menos precisa da tecnologia é disponibilizado gratuitamente para todos que queiram utilizar o sistema.

Esta ferramenta foi consolidada em 1993 com a intenção de localizar veículos contendo cargas militares [7]-**NASA (2017)**, assim seu avanço técnico é voltado a motivos militares e científicos, não proporcionando uma eficiência precisa a usuários médios. Essa menor efetividade é influenciada por diversos fatores, como a incapacidade do sinal de atravessar objetos sólidos, a ionosfera, que afeta a propagação das ondas magnéticas [9]-**UFRGS (2008)**, reduzindo a precisão do sistema, e as grandes distancias que necessitam ser percorridas pelas ondas de sinais.

## 1.3 Mobilidade urbana

Com o avanço da urbanização e da centralização dos comércios e serviços, as cidades estão cada vez mais superlotadas; desse modo, há mais indivíduos circulando pelos centros urbanos do que estes suportam, principalmente visto que a maior parte das cidades brasileiras, incluindo São Paulo, não foram planejadas, o que causa o saturamento das ruas e meios de transportes públicos.

Por essa concentração ser inevitável, a busca por melhorias no sistema de mobilidade urbana é enfoque de diversas pesquisas. Problemas como ônibus lotados, congestionamento, possíveis acidentes e sinalizações ineficientes são apenas alguns exemplos das diversas complicações que impedem a circulação eficiente pela cidade. Assim, busca-se soluções e métodos

para contornar essas problemáticas, sendo um grande desafio a ser resolvido e cuja solução trará benefícios à toda população.

## 1.4 Cidades inteligentes

Cidades inteligentes são cidades que buscam o desenvolvimento econômico e sociocultural de maneira ambientalmente sustentável e com aplicação de tecnologias modernas [4]-**GOV (2010)**.

Com o avanço da urbanização, a aplicação e a busca por melhorias nesse conceito são intensamente exploradas por todos os setores da sociedade. Dessa forma, o aprimoramento das tecnologias já existentes é essencial para a consagração desse novo tipo de cidade, visto que as tecnologias já existentes dependem uma da outra para seu aproveitamento pleno.

Por exemplo, para o simples funcionamento de um semáforo é necessário receber energia, que é produzida em outra área, com os mais diversos geradores, que são transportados por cabos de energia, que também precisam ser produzidos em outras regiões e com tecnologias completamente diferentes.

Logo, em uma cidade inteligente tudo é interligado e o avanço em qualquer tecnologia pode resultar em um avanço para diversas outras. Com isso em mente, o aprimoramento do sistema de localização da cidade é essencial para esta poder ser classificada como inteligente, visto que esse avanço permite uma maior eficiência em diversos tópicos urbanos além dos que serão tratados nessa pesquisa, como a possibilidade de uso de drones para transporte de mercadorias e de chips que possam ser implantados em carros para multa-los caso a velocidade da pista seja excedida.

## 1.5 Considerações finais

Os tópicos e ideias abordados esclarecem a necessidade da busca por métodos de superar os problemas de mobilidade urbana, além de proporcionar o avanço na consolidação das cidades inteligentes.

---

Visto a abrangência de possibilidades e a imprecisão do GPS civil, decidiu-se focar os esforços na busca por métodos de localização mais precisos. Assim, estimativas mais precisas sobre a localização dos transportes públicos podem ser realizadas, permitindo aos usuários realizar uma melhor organização de seu tempo e da lotação dos ônibus, visto que ônibus próximos podem utilizar da tecnologia para pular pontos que serão atendidos pelo veículo de trás.

## Capítulo 2

# Levantamento dos dados e pesquisa bibliográfica

Apartir de uma pesquisa com enfoque nos sistemas atuais de localização, percebeu-se problemas evidentes com o uso do sistema GPS nas cidades.

Baseado nisso decidiu-se separar a pesquisa do problema em três partes: **sistemas de localização, imprecisão do GPS e dependência do Brasil ao sistema GPS**

### 2.1 Sistemas de localização

Pesquisou-se sobre os sistemas de localização global mais atuais , tais como o **GPS**[7][2]-NASA (2017), Corporation (2018), que é o sistema de posicionamento criado pelo sistema militar estadounidense, o sistema **Galileo**[1]-Centre (2011), o sistema de posicionamento europeu, e o **BeiDou**[10]-Wikipedia (2006) sistema de posicionamento chinês, e também sobre as suas origens.

Além disso, pesquisou-se formas de localização terrestre que podem ser alternativas ao sistema de localização extraterrestre[6]-Koelemeij et al. (2022). A partir dessa pesquisa, vislumbrou-se dois métodos diferentes que seriam práticos para a implementação de um novo sistema de localização: o método de localização apartir de **trilateração**, que é o método utilizado

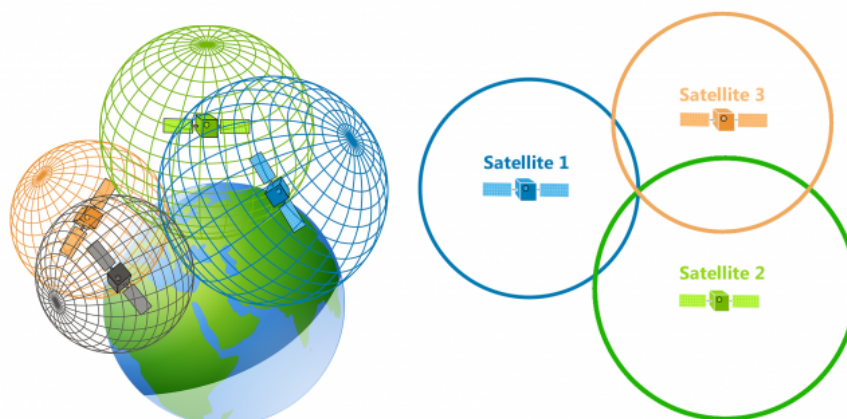


FIGURA 2.1: Trilateração em um exemplo com 3 dimensões a esquerda e um exemplo com 2 dimensões a direita

pelos sistemas de localização extraterrestre atuais, e o método de **triangulação**, que um método usado principalmente pela marinha para determinar a posição e distância estimada de um objeto dentro do campo de vista.

## 2.2 Problemas com o sistema atual de localização

## 2.3 Imprecisão do GPS

O sistema do **GPS** funciona por um modelo de localização chamado de **trilateração**. Nesse modelo, pelo menos 4 satélites do Navstar, satélites de GPS, tem uma linha de visão direta com o usuário de **GPS**, e enviam informações sobre a posição do satélite e do horário do envio da mensagem com alta precisão. A partir disso, o dispositivo do usuário calcula a distância do usuário até cada um dos satélites e gera uma região onde pode estar localizado em relação a cada satélite, que tem formato de uma superfície esferica com a origem localizada na posição do satélite. Após esse cálculo, o dispositivo infere a posição do usuário a partir da intersecção de todas as regiões dos 4 satélites.

O processo de determinar a distância do usuário até o satélite é extremamente dependente da diferença de tempo do relógio interno do satélite que mandou a informação com o do relógio

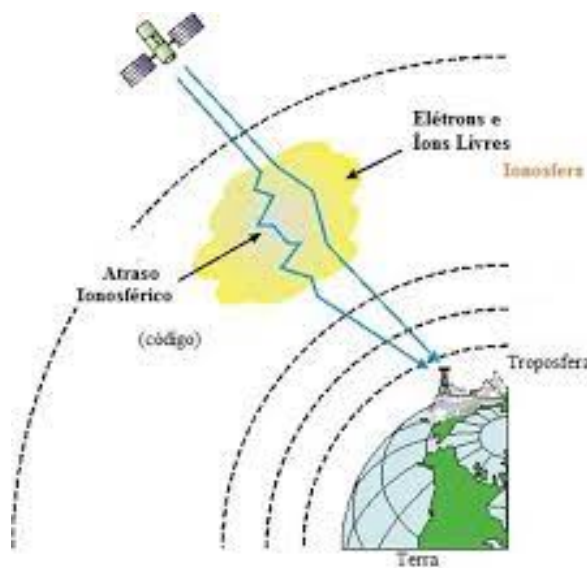


FIGURA 2.2: Refração da ionosfera

do dispositivo do usuário. Portanto, qualquer processo que interfira com o relógio interno do satélite ou que aumente a demora da transmissão da mensagem, aumenta consideravelmente a imprecisão do **GPS**.

Infelizmente, diversos processos interferem com o **GPS**, um exemplo que mais afeta essa tecnologia é a camada da atmosfera chamada ionosfera, na qual grande parte do espectro eletromagnético é refletido ou absorvido. Mas a parcela que atravessa a ionosfera passa a se propagar com uma velocidade menor do que a da luz, o que aumenta o tempo entre transmissão e recepção da mensagem, aumentando a imprecisão da tecnologia. Esse efeito é mais perceptível quanto maior for o ângulo entre a normal de onde o usuário está e a posição do satélite.

Um outro problema que surge por causa da distância do satélite com a Terra, é o fato que não se pode ignorar os efeitos de dilatação de tempo causados pelo campo gravitacional da Terra. Com isso em mente, os relógios internos dos satélites normalmente são configurados para mitigar grande parte da dilatação temporal. No entanto, em qualquer caso de dessincronia ou qualquer outro problema que aconteça com satélite, é muito caro a manutenção, pois implica em uma missão espacial.

Esses e outros fatores se acumulam, podendo gerar divergências máximas bem significativas de 15 metros de distância da posição real do usuário.

## 2.4 Dependência do Brasil sobre o GPS

O sistema de transporte brasileiro consiste em sua maioria de veículos motorizados para uso rodoviário, mais de 115 milhões de automóveis de acordo com dados de 2022 do IBGE[5]-**IBGE (2023)**, desses, cerca de 1.5 milhões de automóveis são rastreados[8]-**TechinBrazil (2015)**, em sua maioria, usando o sistema de **GPS**. Sendo que muitos desses automóveis rastreados estão vinculados a empresas, que prestam seus serviços com uso de ferramentas que usam o sistema **GPS** para localização, tais como Uber, Ifood, Mercado Livre, além das empresas públicas como os Correios. Esses são alguns exemplos das empresas que mais sofrem perdas relacionadas a imprecisão dos sistemas de localização, pois são extremamente dependentes dele.

Além das empresas que são extremamente dependentes do atual sistema de localização, a população brasileira em sua grande maioria, além de usarem indiretamente os serviços do **GPS** por meio das empresas que dependem do sistema, também usam aplicativos de localização diretamente, tais como Google Maps e Moovit. Assim, também sendo sujeitas a eventuais inconveniências causadas pela imprecisão do sistema.

Quando esse sistema é usado para aplicativos que prevem rotas do sistema de transporte público rodoviário, percebe-se uma alta incerteza sobre o tempo de espera e a disponibilidade dos ônibus. Além disso, nesses diversos aplicativos, como várias das linhas de ônibus não tem os seus veículos rastreados, usa-se uma estimativa de tempo de espera baseada apenas nas demoras previstas pelo comprimento entre pontos das rotas, o que resulta em uma incerteza no tempo de espera e da disponibilidade dos ônibus.



## Capítulo 3

# Análise e definição do problema, objetivo e restrições

### 3.1 Definição do problema

Tendo em mente que várias cidades do mundo contemporâneo apresentam elevado contingente populacional e com a necessidade dessa grande massa se deslocar no território, o grupo destacou deficiência na mobilidade urbana, predominantemente em grandes metrópoles como recorte geral do problema a ser atacado. Visto que essa problemática, além de apresentar ineficiências as quais poderiam ser melhoradas, impactam negativamente na qualidade de vida da população.

### 3.2 Análise do problema

#### 3.2.1 Má organização dos ônibus

Um ponto fundamental para garantir uma boa qualidade na mobilidade da população é o gerenciamento adequado da frota de ônibus. Porém, na prática, em grandes centros urbanos, como São Paulo, vemos o inverso disso: uma desorganização da massa de ônibus, alinhado com uma falta de informação destes para os cidadãos.

A título de exemplo, pode-se relatar uma experiência vivenciada por um membro deste grupo, ao tentar se deslocar na cidade de São Paulo por meio do ônibus. O participante, se deslocou para o ponto de ônibus e aguardou para a chegada do veículo no horário usual de chegada deste e esta informação era reiterada por um aplicativo que auxilia os usuários a terem mais informações sobre o trajeto e tempo de chegada dos ônibus ao ponto, a partir da localização do usuário e de informações a respeito da posição dos veículos. Essas referências são obtidas, principalmente com linhas de transporte público que apresentam o Sistema de Posicionamento Global (GPS) integrado e com a permissão do usuário do aplicativo de sua localização em tempo real, novamente usando o GPS. Porém, o ônibus nunca chegava em seu destino e o programa atualizava o tempo de chegada do veículo ao seu objetivo e após perceber a elevada quantidade de tempo esperada, concluiu-se que as informações não eram precisas.

Esse relato demonstra, a má organização das frotas de ônibus e a falta de informações precisas para os cidadãos. Pontos que geram atrasos, perda de tempo e frustração para os passageiros devidos a essa falta de precisão. No caso relatado, a linha de ônibus que o participante do grupo utilizava estava em greve e ele, como as outras pessoas que usam desse mesmo veículo, não tiveram conhecimento sobre isso e então, não puderam ter o tempo necessário para buscar outras alternativas de transporte nesta ocasião.

Essa circunstância não é exclusiva a um número restrito de pessoas, e sim de cerca de 2,15 milhões de pessoas que se locomovem de ônibus com uma frota de 11.312 desses veículos circulando diariamente na cidade de São Paulo. Vale ressaltar que esses dados são próximos do período de recuperação da pandemia, ou seja, deve-se ter uma circulação ainda maior de pessoas e de ônibus, atualmente. Devido a esses enormes fluxos de cidadãos, há grande dificuldade de apresentar uma organização coerente e informar corretamente a população da disponibilidade do transporte público, em especial de veículos tipo ônibus, os quais são foco de nosso estudo. Com isso, parte considerável de pessoas já passaram por uma situação similar à relatada.

Esses temas abordados evidenciam a ineficiência de parte do transporte público, impactando negativamente os gastos de recursos com os ônibus, além da agilidade dos mesmos e com isso sua eficiência. Algo que influencia de maneira desfavorável o bem-estar da população e a saúde da mobilidade urbana terrestre.

Concluindo, a má organização da frota de ônibus em grandes metrópoles, exemplificada pelo caso de São Paulo, apresenta desafios significativos para a mobilidade urbana e o bem-estar dos cidadãos. A falta de informações precisas sobre horários e a falta de comunicação eficaz sobre eventos como greves criam um ambiente de incerteza para os passageiros, resultando em atrasos, perda de tempo e frustração. Portanto, uma solução nessa área, significaria a otimização de recursos, além de contribuir para uma mobilidade urbana mais eficiente e sustentável.

### **3.2.2 Problemas relacionados com a imprecisão do GPS**

A imprecisão do GPS afeta a mobilidade urbana, na medida em que grande parte das ferramentas as quais auxiliam a localização dos ônibus para o usuário, apresentam certos erros que afetam na clareza da localização de quem está usando essa ferramenta. Muitos desses problemas estão relacionados com a interferência de sinais. Edifícios altos, árvores densas e túneis podem obstruir os sinais do GPS, levando a erros de localização. Isso é especialmente problemático em áreas urbanas densamente povoadas, onde essas obstruções são comuns. Como resultado, os motoristas muitas vezes recebem direções imprecisas, o que pode levar a atrasos, congestionamentos e até mesmo acidentes.

Correlacionando isso com o transporte público, podemos pontuar que a imprecisão do GPS dificulta a exatidão dos horários de ônibus, trens e metrô. Os veículos equipados com sistemas de GPS dependem desses dispositivos para determinar as paradas e os horários. Quando a localização é imprecisa, as estimativas podem se tornar inconsistentes, deixando os passageiros em situações incertas e resultando em longos períodos de espera nas paradas. Além disso, esses veículos, utilizam o GPS com o intuito de otimizar rotas, porém a imprecisão desse equipamento pode levar a desvios de rota, atrasos e ineficiências na operação dos serviços de transporte público.

Outra análise importante é a de que os passageiros estão dependendo cada vez mais de aplicativos e informações em tempo real para planejar suas viagens no transporte público. Quando o GPS não fornece informações precisas de localização, os aplicativos e serviços de informação em tempo real podem se tornar ineficazes. Isso pode levar a situações em que os passageiros não sabem quando o próximo ônibus ou trem irá chegar.

Portanto, esses aspectos evidenciam o quão problemático pode ser o transporte urbano terrestre em situações em que o GPS não está de acordo com o necessário. Isso não apenas aumenta os custos operacionais, mas também afeta a experiência dos passageiros, tornando o transporte público menos atraente como opção de deslocamento.

### 3.3 Objetivos

Com base no diagnóstico das implicações da imprecisão do GPS no sistema de transporte público, o grupo tem como principais objetivos aprimorar significativamente o sistema de localização e a organização dos ônibus. Essas metas são fundamentais para garantir que o transporte público seja mais eficiente, confiável e seguro para os cidadãos.

### 3.4 Restrições

Levando em consideração o que foi exposto, deve-se expor que o trabalho está limitado devido algumas restrições, como as ditas a seguir:

- Implementar tecnologias avançadas de posicionamento requer investimentos. O grupo pode enfrentar restrições orçamentárias que limitam sua capacidade de adotar rapidamente essas melhorias.
- O setor de transporte público está sujeito a regulamentações e normas rigorosas que podem impor restrições à implementação de novas tecnologias e processos.
- Mudanças significativas no sistema de transporte público podem afetar a vida das pessoas e as comunidades locais. O grupo deve buscar a aceitação e o envolvimento ativo da comunidade, ouvindo as preocupações e necessidades dos moradores locais.
- Dependendo da geografia e da infraestrutura urbana da cidade, pode haver desafios adicionais, essas condições podem exigir soluções específicas.
- A coleta de dados em tempo real para melhorar o sistema de transporte público levanta preocupações com a privacidade dos passageiros e a segurança dos dados.

## Capítulo 4

# Alternativas para solução do problema

Apresentada a problemática, passou-se a discutir soluções possíveis para a mobilidade urbana, com enfoque para a Cidade Universitária. Nesse sentido, foi pensado principalmente em alternativas que lidassem tanto com a questão da imprecisão na geolocalização, quanto com a lotação ou lentidão do transporte público. Assim, foram propostas três alternativas para resolver tais inconveniências.

### 4.0.1 Sensor de localização embarcado

A primeira solução pensada foi a instalação de sensores de alta precisão, embarcados nos próprios ônibus. Dessa forma, tais dispositivos se comunicariam com uma central via ondas eletromagnéticas, e esta enviaria um sinal para os sensores, e pela diferença de tempo de resposta, calcularia a localização dos veículos. Contudo, múltiplos problemas foram notados logo após a

formulação da ideia. Se por um lado, a proposta resolveria peremptoriamente o problema, por outro esta seria extremamente custosa. Além da necessidade de instalação de um sensor em cada veículo, seria preciso construir a torre da central num local em que se tivesse o maior aproveitamento possível do sistema. Logo, vê-se a inconveniência de tal proposta e a razão de ter sido abandonada.

#### 4.0.2 Aplicativo para informações de tráfego

A segunda ideia considerada seria a criação de um aplicativo de informações a respeito das condições do tráfego local. Desse modo, os usuários poderiam consultar os dados de trânsito, eventuais acidentes na via, lotação dos ônibus ou pontos desejados e melhor caminho a se tomar, de forma que, esclarecidos possam escolher o trajeto mais adequado para atingir seus objetivos. Ademais, tais informações seriam fornecidas pelos próprios passageiros, tratadas segundo uma ordem de prioridade pré-estabelecida e de probabilidade, e também seriam armazenadas num banco de dados próprio. No entanto, tal proposta exigiria, além da criação do aplicativo e de um banco de dados, a manutenção constante dele, voluntários para fornecer as informações, engajamento dos usuários e ainda precisaria de um estudo detalhado das LGPDs envolvidas. Assim, considerou-se que tais complicações fugiriam um pouco do escopo da disciplina e decidiu desistir da ideia.

#### 4.0.3 Localização via trilateração de torres de sinal

Finalmente, discutiu-se a implementação de um sistema de localização por trilateração utilizando torres de sinal. Dessa forma, os usuários do transporte público teriam uma noção mais exata da posição dos ônibus com um erro máximo de 5cm, muito menor do que aquele

---

fornecido pelo GPS. Portanto, a equipe decidiu elaborar um protótipo desse sistema que será detalhado mais a frente.





## Capítulo 5

# Escopo do projeto

### 5.1 Análise de implementação real

Decidido o uso da tecnologia de trilateração, é necessário observar a despesa de uma torre de sinal de alta precisão. De acordo com uma pesquisa da Associação Brasileira de Infraestrutura de Telecomunicações (Abrintel) o preço médio avaliado é de 700 mil reais por torre. Esse valor é definido para torres de GSM, o que não é exatamente a tecnologia que será usada para as torres dos projetos, porém visto que ambas possuem mesma função e tecnologias de alto nível o preço das torres do trabalho vai estar entre esses 700 mil reais e 1 milhão de reais.

Pode parecer um preço extremamente elevado, em primeira instância, porém com base em uma notícia do G1 sobre as arrecadações de dinheiro voltadas para o trânsito, só nesse primeiro semestre de 2023 foram arrecadados 850 milhões de reais apenas com multas como excesso de velocidade, desrespeitar o rodízio e avançar em sinal vermelho. E mesmo com parte desse dinheiro já possuindo um uso final definido, ainda restam 387 milhões de reais disponíveis que estão apenas guardados nos cofres, sem uma efetiva aplicação. Com essa quantia disponível em mente o investimento em um sistema de trilateração não inferiria em um custo inalcançável. Principalmente se essa tecnologia for implantada apenas em áreas de maior trânsito e circulação desorganizada de veículos públicos.

## 5.2 Capacidades do trabalho

Porém, apesar de a implementação ser possível para os poderes públicos, como essa ciência é consideravelmente custosa, não é possível para o grupo proporcionar uma implementação efetiva na cidade de São Paulo, pelo menos não sem investimentos. Visto que a frequência proporcionada por arduinos é consideravelmente menor que a frequência enviada por torres de sinal.

Assim, decidiu-se criar um protótipo utilizando os recursos propostos pela disciplina e extrapolar os dados desse protótipo para os utilizar como base na pesquisa e no trabalho da criação do modelo real.

## Capítulo 6

# O Protótipo

Como detalhado anteriormente, dado a natureza da proposta, não é possível realizar todo o escopo do projeto com as limitações impostas pela disciplina de Introdução a Engenharia elétrica. Portanto, o grupo fará uso de um protótipo e extraporalá dados apartir dele.

### 6.1 Sistema de localização

O protótipo usará de um sistema com três torres de transmissão e um receptor, seguindo os seguintes diagramas:

Esse sistema calcula a posição do receptor apartir das distâncias do receptor e cada uma das torres. Usando o mesmo princípio que o sistema **GPS** utiliza, **trilateração**.

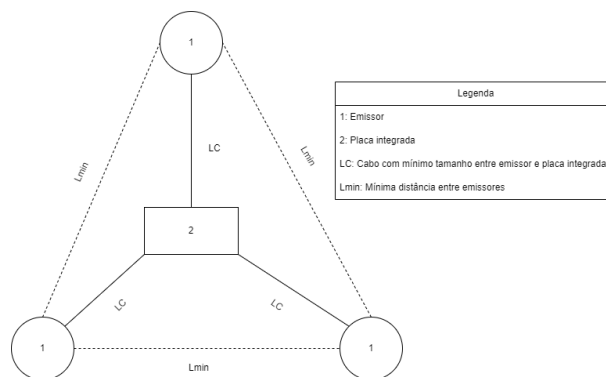


FIGURA 6.1: Torres de transmissão

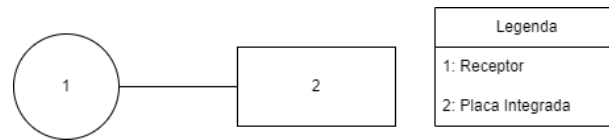


FIGURA 6.2: Receptor

## 6.2 Possíveis componentes do protótipo

Para o protótipo, o grupo fará uso de dois microcontroladores(a princípio), com frequências do processador a serem definidas nas próximas seções do relatório, três emissores de ondas eletromagnéticas ou medidores de distância com ultrassom, a ser definido em seção própria, e um receptor de ondas eletromagnéticas se forem usados emissores de ondas eletromagnéticas.

### 6.2.1 Escolha entre ondas eletromagnéticas e ultrassom

Para a escolha entre ondas eletromagnéticas e ultrassom, um dos fatores mais importantes é a frequência dos processadores da torre de transmissão e do receptor. Com base nisso, determinou-se que existe uma "zona de distância zero" ao redor das torres de transmissão, isto é, uma zona aonde o cálculo de distância entre o receptor e a torre falha lamentavelmente e resulta em 0 para qualquer ponto dentro dessa área.

Sabendo que a placa integrada com a maior frequência disponibilizada pela disciplina é a ESP32, com frequência máxima de 240MHz, foi determinado que a zona de distância zero para esse dispositivo usando um emissor de ondas eletromagnéticas é de uma circunferência de raio de aproximadamente 1,25 metros centrada na posição do emissor. A partir disso, foi criado o diagrama para esse caso:

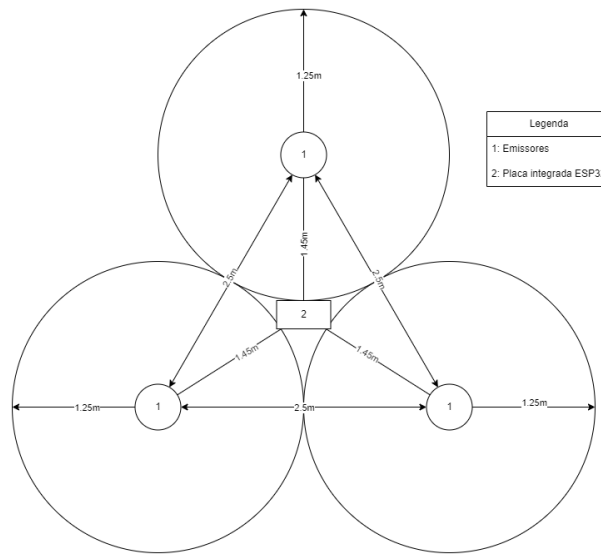


FIGURA 6.3: Emissores com ondas eletromagnéticas

Para o caso do uso de ultrassom (usando a mesma configuração de placa integrada), a distância mínima é de  $2.858\,333\,3 \times 10^{-6}$  metros, que é menor que 1 cm, e portanto é essencialmente desprezível quando comparado as dimensões dos dispositivos. Nesse caso, a distância máxima de funcionamento depende da distância máxima intrínseca dos medidores de distância e da interferência mecânica do ambiente.

Além disso, nesse protótipo, a imprecisão do sistema é causada principalmente pelo nível de ruído mecânico no meio e a imprecisão dos medidores de distância de ultrassom.

Com esse sistema não é necessário o uso de um receptor, que seria idealmente seria um objeto bem pequeno e pontual, dessa maneira, a geometria do objeto causa a mínima interferência no cálculo da posição do objeto.

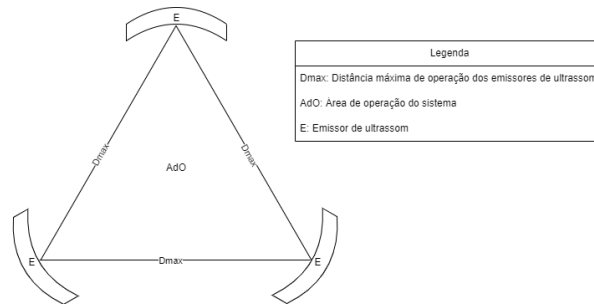


FIGURA 6.4: Sistema de localização com ultrassom

### 6.2.2 Problemas com a escolha do emissor de ultrassom

Inicialmente, escolheu-se usar o medidor de ultrassom disponibilizado pela disciplina, que é **HC-SR04**, que é um dos sensores de ultrassom mais populares do mercado.

Para esse sensor, infelizmente o ângulo de emissão do ultrassom é de  $15^\circ$ . Portanto, para ser possível criar o sistema de localização, visto que ele se baseia em triângulos equiláteros, seria necessário colocar 4 sensores HC-SR04 em cada um dos três pontos, sem que os ângulos de medida se interceptassem, desta maneira, chegando em um ângulo efetivo de  $60^\circ$  e totalizando 12 sensores no circuito.

## Capítulo 7

# Decisões efetivas e realização do protótipo

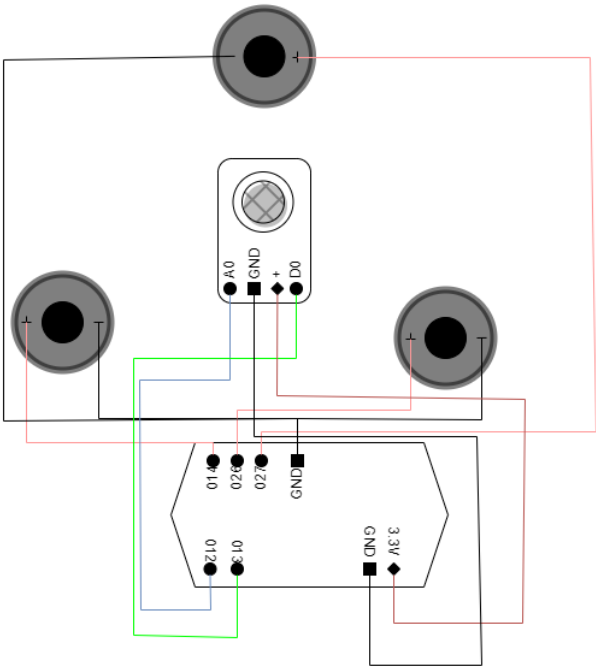
Infelizmente, os emissores de ultrassom possuem um ângulo de emissão muito estreito (menor que  $15^\circ$ ) e um ângulo de recepção significativamente menor do que o necessário (por volta de  $30^\circ$ ). Estes foram os principais fatores que inviabilizaram a utilização dos sensores de distância ultrassônicos **HC-S04**.

Com todos esses dados coletados quanto ao protótipo e as tecnologias a serem utilizadas, somadas à colaboração dos professores da disciplina, decidiu-se realizar o protótipo utilizando os buzzers piezoelétricos oferecidos pela disciplina (modelo HXD), e um microfone próprio para Arduino, o **KY-037**.

### 7.1 Escolha oficial dos componentes

Para a efetiva realização do protótipo utilizou-se três buzzers piezoelétricos, como emissores das ondas sonoras, um ESP8266, para a realização dos cálculos e gerência dos componentes, e um microfone KY-037, que atua como receptor das ondas emitidas pelos buzzers.

Além desses itens, também foi necessário utilizar componentes elétricos básicos, como jumpers.






Legenda	
	Buzzer Piezoelétrico
	Esp32
	Microfone KY-037

FIGURA 7.1: Diagrama de conexões



## 7.2 Funcionamento

Com cada componente especificado é preciso entender como cada um exerce sua função e colabora para o funcionamento do protótipo como um todo.

### 7.2.1 Posição e comunicação entre os componentes

Primeiramente, detalhando a construção do sistema. Utiliza-se três piezos que são posicionados em forma de um triângulo equilátero com lado de tamanho 20 centímetros, essa distância pode ser variada caso se deseje, no entanto, para o funcionamento ideal do protótipo utilizando esses componentes essa é a distância máxima entre os piezos que ainda garante um bom funcionamento do sistema dada a interferência mecânica do ambiente. Além disso, apesar da posição no protótipo estar em forma de um triângulo equilátero, é possível utilizar qualquer tipo de triângulo para fazer o sistema funcionar, só é necessário configurar adequadamente a posição das torres na programação do ESP para garantir o funcionamento correto; mas a programação será melhor detalhada nas próximas seções.

Quanto ao microfone ele é conectado com jumpers para permitir sua movimentação sobre o protótipo, para assim ser possível calcular a distância quanto a qualquer local na maquete.

Por fim, o ESP32 é essencial para o controle e funcionamento desses componentes. Esta peça realiza os cálculos da posição e controla a ativação e recebimento de dados das outras partes do protótipo.

Com o sistema de posicionamento esclarecido, agora é possível explicar o funcionamento do sistema de captação de áudio. Inicialmente, o microfone passa por um processo de calibração, no qual este recebe sinais do ambiente aonde está localizado durante um período de 10 segundos. Durante essa fase, os sons captados entram em uma base aonde será feita a média móvel do ruído do ambiente. Além disso, durante o período é guardada a maior variação(em módulo) de dois sinais consecutivos, sendo esta uma derivada discreta, onde é tratada como uma variação padrão do ruído do ambiente.

A captação de um sinal vindo do ambiente é tratada verificando se este sinal está acima da linha da média móvel mais a variação padrão, ou, se está abaixo da linha da média móvel

menos a variação padrão. Caso afirmativo, é um sinal relevante que deverá ser considerado. Portanto, se mostra claro que durante o período, é necessário do máximo silêncio possível, pois pode interferir no funcionamento do protótipo.

Esse processo de calibração é realizado para garantir o bom funcionamento do protótipo, pois ele descarta ruídos que poderiam interferir na captação do onda emitida pelo piezo.

Após essa calibração é possível realizar os cálculos da posição. Essencialmente, o ESP32 ativa um timer no momento que ativa o primeiro piezo, funcionando como uma espécie de crômetro, e o deixa ativado até que o microfone capte o som emitido pelo piezo; após o recebimento do sinal, tanto o buzzer, quanto o timer são desativados. Com esses passos, é possível verificar a variação de tempo, desde o início da ativação do piezo até a captação da onda pelo microfone, por meio do timer, essa estando armazenada em microsegundos, dada a alta frequência de operação dos timers do ESP32. Assim, sabendo essa variação temporal e sabendo a velocidade do som em **1 atm**, é possível calcular a distância do piezo até o microfone.

Esse processo de descoberta da distância é então repetido algumas vezes para o mesmo piezo, com intuito de se obter uma média das distâncias, assim resultando em uma maior precisão de medida. Esse processo é então realizado para os piezos subsequentes.

Infelizmente, mesmo que seja desejável agilizar esse processo, não é possível realizá-lo, por meio de cálculos da distância de dois piezos paralelamente, pois o sinal de um piezo interfere com o cálculo da distância do outro.

### **7.2.2 Realização dos cálculos e detalhamento**

Com essa ordem realizada é possível usar o tempo e a velocidade do som para realizar o cálculo da distância até um dos buzzers, já que a distância é equivalente à velocidade vezes o tempo; e com a distância para as três torres realizada é possível determinar uma estimativa da posição atual do receptor. Os cálculos na íntegra estão disponíveis no memorial de cálculo, presente na seção "Anexos" (Capítulo 10), e seu funcionamento consiste de uma trilateração tendo com base as distâncias descobertas na etapa anterior e as posições configuradas no código.

Essencialmente, em cada uma das torres, dadas posições especificadas no código, é fixada uma esfera de raio igual à distância calculada na etapa anterior, resultando em três esferas com raios variando de acordo com a posição do receptor. Com essas três esferas, é possível inferir então a posição do receptor como a interseção das três. No entanto, o receptor não está contido no mesmo plano dos piezos, que estão todos em uma altitude fixa em relação ao receptor. Existem dois pontos de interseção, mas esses só variam em relação a sua altura, logo em relação ao plano XY a posição do receptor é a mesma. Assim, dada a natureza geométrica intrínseca dos cálculos, é essencial que a posição de cada torre seja especificada corretamente no início do código.

O cálculo dessas distâncias é a base do sistema de trilateração, e a distância muito menor que a torre de sinal possui em relação ao receptor, comparada à distância que um sinal provindo de um satélite precisa percorrer, é o que permite a precisão maior do que o GPS, tanto no protótipo, quanto em uma implementação real na cidade de São Paulo.

### 7.2.3 Código

Visto a utilização do ESP32, o código foi implementado através do arduinoIDE. Assim, com a utilização dessa plataforma foi possível utilizar a biblioteca de timer, que utiliza um RTC interno do ESP32 para medir o tempo em microssegundos que leva para os sinais dos piezos alcançarem o microfone. Essa tecnologia foi essencial para o funcionamento ideal do protótipo, pois garantiu uma precisão consideravelmente alta para componentes tão simples.

O código é Open Source, e pode ser acessado no repositório do GitHub de um integrante do grupo [C]Grupo-4 (2023). Nota-se importante detalhar que, apesar de a matemática e o código funcionarem para qualquer triângulo e até mesmo para fora da área interna do triângulo, o programa não irá funcionar sem a implementação correta das posições das torres, já que o funcionamento é baseado em um sistema de coordenadas definido pelo usuário, e que, no caso desse protótipo, adere a torre um como origem do sistema. Assim, sem a demarcação correta das posições das torres os cálculos não serão realizados corretamente, e será impossível descobrir a posição.

### 7.3 Tecnologias descartadas

Devido à necessidade de uma precisão elevada no protótipo, algumas ideias precisaram ser descartadas; a principal delas é que mais consumiu tempo para ser implementada foi uma comunicação serial bluetooth entre dois ESP's<sup>32</sup>. O objetivo era separar entre um ESP escravo, que comandaria as torres, e um ESP mestre, que realizaria os cálculos, além de ligar o microfone e comandar o ESP escravo a ativar cada torre.

Para concretizar a comunicação dos ESPs e a consequente ligação entre todos os componentes havia-se decidido utilizar comunicação bluetooth entre os microcontroladores, que é possível graças aos módulos de bluetooth integrados nos ESPs<sup>32</sup>. Desse modo, programou-se os ESPs para realizar uma comunicação serial de bluetooth entre escravo e mestre. Sendo o mestre responsável por todos os cálculos e por ordenar ao escravo que controle corretamente o funcionamento dos piezozs.

Mais detalhadamente, o mestre envia ao escravo um sinal, para que ele ative um piezo específico. Após ativar esse piezo o escravo entra em um modo de espera, e permanece nesse modo até que o mestre envie um sinal para que ele desligue o buzzer. Essa espera é realizada para que o receptor possa receber a onda sonora, e para que o ESP<sup>32</sup> mestre tenha tempo necessário para realizar as contas da distância. E assim a sequência se repetiria para cada torre, com o funcionamento bem semelhante ao do protótipo finalizado.

Porém, a comunicação bluetooth causava imprecisões na obtenção de dados, que não podiam ser ignorados, assim viu-se obrigado a remover essa tecnologia do protótipo e utilizar apenas um ESP<sup>32</sup> na realização do sistema de trilateração.

Realizando-se testes, acredita-se que a imprecisão causada é devido ao tempo de demora de envio de informações entre os ESP's. Infelizmente, esse tempo não apresentava valores constantes, então não era possível remover esse atraso apenas com filtros na programação, o que obrigou a remoção da comunicação serial bluetooth.

## Capítulo 8

# Resultados

Após diversas dificuldades e impasses causados pelas limitações dos componentes, concluiu-se o protótipo do sistema de trilateração. Aqui encontram-se fotos e registros do projeto concluído, além dos resultados numéricos proporcionados pelo aparelho:

### 8.1 Valores e dados obtidos

Finalmente, o protótipo conseguiu proporcionar uma precisão consideravelmente alta, com um erro máximo de apenas dois centímetros, valor que acredita-se ser bem impressionante para os componentes que foram utilizados no protótipo. Dessa forma, entende-se que mesmo com bastantes dificuldades e impasses para se obter uma precisão decente, os esforços não foram em vão, e acredita-se que o seu funcionamento é um sucesso.

Aqui encontram-se alguns registros fotográficos do protótipo montado e em processo de montagem: Nota-se a utilização e descarte da comunicação bluetooth, além do posicionamento correto dos buzzers em posições ideais para cálculos e para a propagação das ondas mecânicas no protótipo finalizado, enquanto que no período de testes essas distâncias eram definidas com base no melhor funcionamento do que estava tentando entender-se.

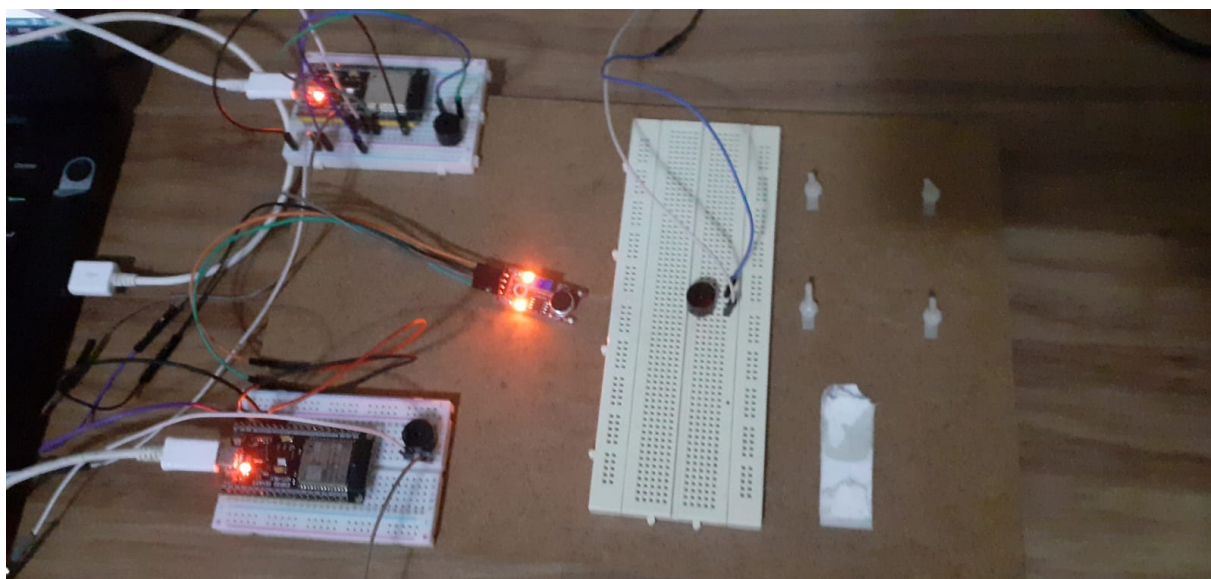


FIGURA 8.1: Protótipo ainda sem as distâncias bem definidas

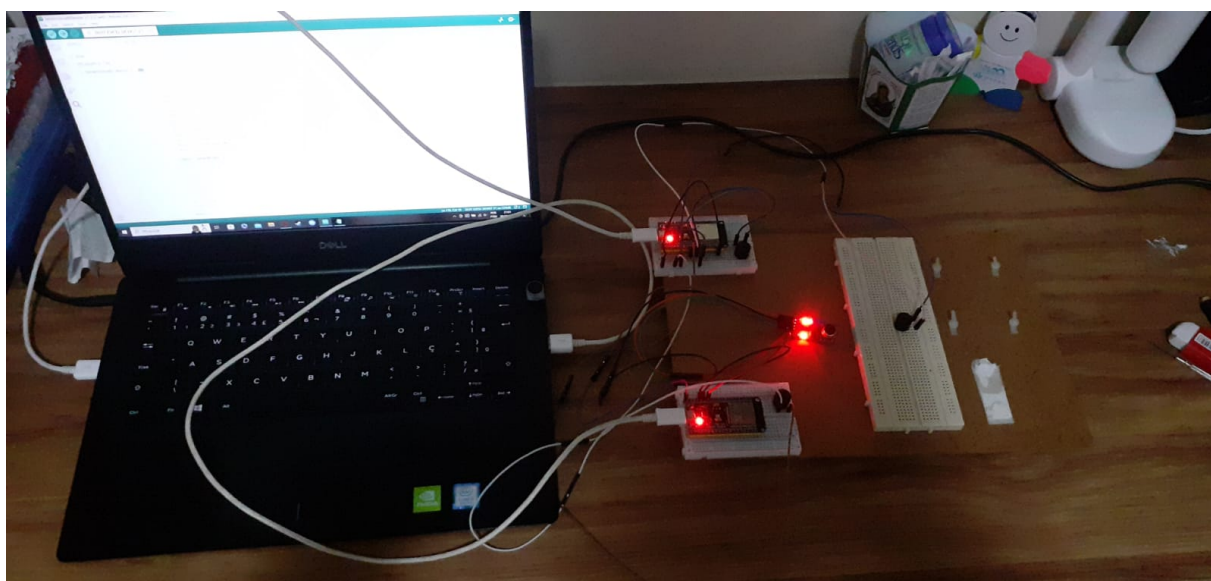


FIGURA 8.2: Protótipo em teste

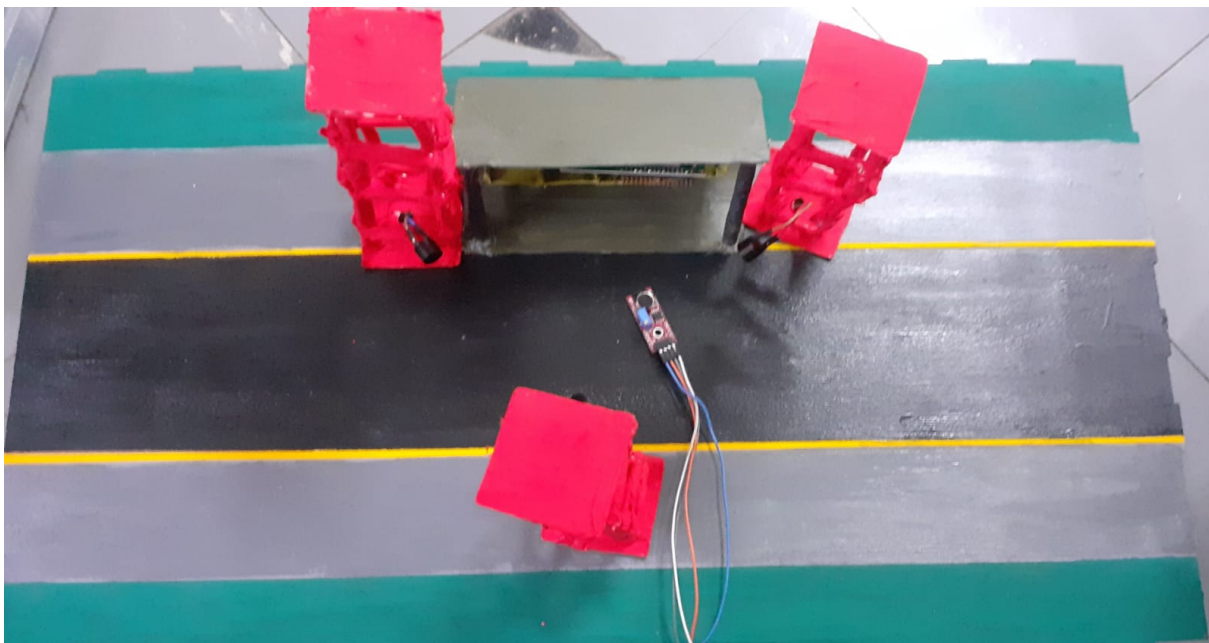


FIGURA 8.3: Protótipo finalizado

## 8.2 Extrapolação dos dados

Com esses resultados é possível realizar a extrapolação dos dados para analisar a implementação real nas cidades desse sistema.

É necessário ressaltar que o protótipo funciona em condições mais idealizadas, que não são totalmente correspondentes as condições reais de uma cidade, porém, também é essencial ter em mente a simplicidade dos componentes utilizados. Na realização do protótipo não é necessário gastar mais do que cem reais na compra dos componentes, ou seja, é de extrema relevância considerar a eficiência do protótipo mesmo com condições tão simples. Assim, com o uso de tecnologias mais caras e avançadas, disponíveis em um projeto do Governo, é plenamente possível realizar a implementação do sistema de trilateração com uma precisão consideravelmente superior à do GPS.

## 8.3 Resultados de uma possível implementação real.

Finalmente, com a observação dos resultados proporcionados pelo protótipo é possível perceber que a instalação real de torres de sinal não só é realizável, como desejável, visto a

---

quantia arrecadada diariamente por multas em São Paulo [11] Globo (2023), e os benefícios proporcionados pela tecnologia.

Desse modo, essa tecnologia proporcionará a implementação de estimativas mais precisas do tempo de espera de veículos públicos, uma maior facilidade para a compreensão da própria localização para pedestres, além de poder colaborar na implementação de veículos autônomos. Logo, colaborando na tentativa de melhorar a mobilidade urbana de São Paulo.



## Capítulo 9

# Conclusão

Portanto, analisou-se as opções propostas pelos integrantes e devido a funcionalidade e a dificuldade das ideias decidiu-se descartar a criação do aplicativo e a implementação de sensores nos veículos públicos e focar os esforços para produzir um protótipo de uma tecnologia capaz de melhorar o sistema de localização. Desse modo, contribuindo com as tecnologias já existentes das ideias abandonadas.

Como introduzido anteriormente o objetivo do trabalho foi proporcionar um sistema de localização mais preciso que o GPS. Assim, analisou-se as tecnologias voltadas para essa função e decidiu-se utilizar da ciência de trilateração com uso de torres de sinal para proporcionar resultados mais precisos e que possa ser instalado nas cidades brasileiras, precisamente, a cidade de São Paulo.

Ressalta-se que o uso dessa tecnologia produz diversos benefícios no contexto do avanço das cidades inteligentes, visto que seu uso garante uma exploração eficiente do sistema de localização para pedestres e motoristas, proporciona o avanço dos drones e carros autônomos de forma segura, além de permitir a implementação de chips nos carros que os multem caso a velocidade da pista seja excedida, mesmo sem uso de radares.

Os benefícios do uso da trilateração por torre de sinal também são evidenciados pelas complicações que o GPS enfrenta, como as grandes distâncias, a ionosfera e os efeitos de dilatação do tempo. Além do alto custo de manutenção dos satélites. Essas dificuldades não seriam problema para o sistema proposto no projeto.

Com isso em mente juntou-se esforços para criar um sistema de trilateração utilizando componentes simples existentes em um kit ARDUINO. Para assim extrapolar dados e comprovar que a implementação desse sistema na cidade de São Paulo pode ser realizada. Além dessa implementação também foi provada a melhor precisão do sistema, que obteve resultados com erros máximos de apenas 2 centímetros, consideravelmente melhor que o GPS, que possui 10 metros de erro médio, devido a problemáticas que sistemas de trilateração terrestres não possuem.

Enfim, o grupo salienta que essa medida não será benéfica para todas as cidades brasileiras, pois possui um custo elevado, porém, para o caso de São Paulo, que possui grandes problemas de mobilidade urbana, essa tecnologia pode proporcionar dados consideravelmente mais precisos, o que melhora as estimativas e permite uma organização melhor das frotas. Assim, mesmo com um custo alto a trilateração pode auxiliar a combater uma problemática que afeta todos os cidadãos da cidade: a precária mobilidade urbana.

# Referências Bibliográficas

Centre, G. S. S. (2011). [1] Galileo General Introduction. [https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Galileo\\_General\\_Introduction](https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Galileo_General_Introduction). [acessado 16 de setembro de 2023].

Corporation, T. A. (2018). [2] A BRIEF HISTORY OF GPS. <https://aerospace.org/article/brief-history-gps>. [acessado 16 de setembro de 2023].

Globo (2023). [11] Prefeitura de São Paulo arrecadou 4,7 milhões de reais por dia em multas de trânsito no 1º semestre de 2023. <https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2023/08/11/prefeitura-de-sao-paulo-arrecadou-r-47-milhoes-por-dia-em-multas-de-transito-no-1o-sem-gh.html>. [acessado 13 de dezembro de 2023].

GOV (2010). [4] Carta Brasileira para Cidades Inteligentes. <https://www.gov.br/mdr/pt-br/assuntos/desenvolvimento-urbano/carta-brasileira-para-cidades-inteligentes#:~:text=No%20Brasil%2C%20%C3%A9%20a%20gest%C3%A3o%20colaborativas%20e>. [acessado 16 de setembro de 2023].

Grupo-4 (2023). [C] Programação do ESP32 criada pelo grupo 4. <https://github.com/izzovitor/IEE2023.git>. [Criado em 2023].

IBGE (2023). [5] Frota de veículos. <https://cidades.ibge.gov.br>. [acessado 16 de setembro de 2023].

Koelemeij, J. C., Dun, H., Diouf, C. E., Dierikx, E. F., Janssen, G. J., and Tiberius, C. C. (2022). [6] a hybrid optical–wireless network for decimetre-level terrestrial positioning. *Nature*, 611(7936):473–478.

- NASA (2017). [7] GPS History. [https://www.nasa.gov/directorates/heo/scan/communications/policy/GPS\\_History.html](https://www.nasa.gov/directorates/heo/scan/communications/policy/GPS_History.html). [Acessado 16 de setembro de 2023].
- TechinBrazil (2015). [8] Vehicle Tracking in Brazil. <https://techinbrazil.com/vehicle-tracking-in-brazil>. [acessado 16 de setembro de 2023].
- UFRGS (2008). [9] GPS e ionosfera: estudo do comportamento do TEC e de sua influência no posicionamento com GPS na região brasileira em períodos de alta e baixa atividade solar. <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/15752#:~:text=The%20ionosphere%20is%20one%20of,sattelites%20go%20through%2C%20respectively%2C%20delay>. [Acessado 16 de setembro de 2023].
- Wikipedia (2006). [10] BeiDou Navigation Satellite System. <https://en.wikipedia.org/wiki/BeiDou>. [acessado 16 de setembro de 2023].

## Capítulo 10

## Anexos

ANEXO 1 - Memorial de cálculo

Sejam  $(x_1, y_1, h)$ ,  $(x_2, y_2, h)$  e  $(x_3, y_3, h)$  a posição das 3 torres,  
 $(x, y, 0)$  a posição do receptor e  $d_1, d_2$  e  $d_3$  as distâncias da torre 1, 2 e 3  
 até o receptor.

$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + h^2 = d_1^2 & [1] \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + h^2 = d_2^2 & [2] \\ (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + h^2 = d_3^2 & [3] \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Fazendo } (2) = (2) - (1) \text{ e } (2) = (2) - (3) \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 = d_2^2 - d_1^2 \\ x_2^2 - 2xx_2 + y_2^2 - 2yy_2 - x_1^2 + 2xx_1 - y_1^2 + 2yy_1 = d_2^2 - d_1^2 \\ x(2(x_1 - x_2)) + y(2(y_1 - y_2)) = d_2^2 - d_1^2 + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 \\ A = 2(x_1 - x_2), \quad B = 2(y_1 - y_2) \text{ e } P = d_2^2 - d_1^2 + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 - (x_3 - x)^2 - (y_3 - y)^2 = d_2^2 - d_3^2 \Leftrightarrow x_2^2 - 2xx_2 + y_2^2 - 2yy_2 - x_3^2 + 2xx_3 - y_3^2 + 2yy_3 = d_2^2 - d_3^2 \Leftrightarrow \\ & x(2(x_3 - x_2)) + y(2(y_3 - y_2)) = d_2^2 - d_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ & C = 2(x_3 - x_2), \quad D = 2(y_3 - y_2) \text{ e } Q = d_2^2 - d_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{cases} Ax + By = P \\ Cx + Dy = Q \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Caso } A \neq 0 \text{ e} \\ X = \frac{P - By}{A} \\ \Leftrightarrow Y = \frac{Q - Ax}{D - CB} \end{array} \right. \quad \frac{C(P - By) + Dy = Q \Leftrightarrow C(P - By) + ADy = QA$$

Caso  $C \neq 0$

$$\begin{aligned} X = \frac{Q - Dy}{C} & \Rightarrow \frac{A(Q - Dy)}{C} + By = P \Leftrightarrow A(Q - Dy) + BCy = PC \\ & \Rightarrow Y = \frac{PC - AQ}{BC - AD} \end{aligned}$$

FIGURA 10.1: Memorial de cálculo