Progetto Programmazione calcolo scientifico 2025

Kameleddine Haj Mabrouk, Triscari Gabriele

Matematica per l'ingegneria, POLITO

Contenti

- Documentazione UML
- Triangolazione classe I
- Triangolazione classe II
- Duale poliedro
- Shortest Path

Documentazione UML

Polyheron model

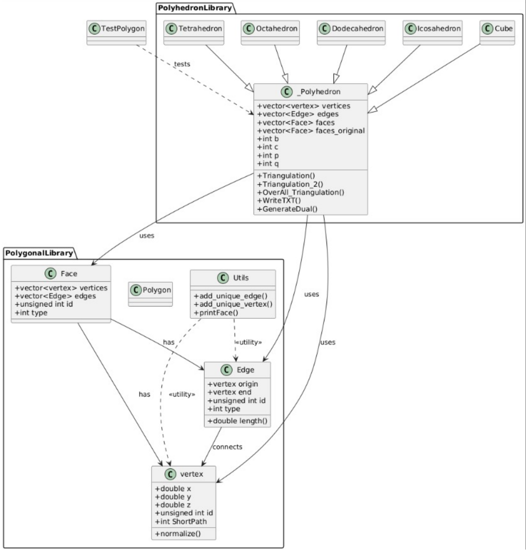
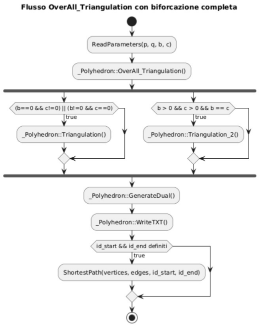


Diagramma di flusso



Triangolazione I

Funzione trianolazione classe I:
La logica alla base della funzione triangolazione classe I è data dalla generazione di tanti layers quanti sono necessari per il riempimento del numero di triangoli necessari per ricoprire ciascuna faccia. Ogni layer ha un numero di triangoli pari $k+1, k \geq 0$ 'upper' ($\triangle$) e $k, k \geq 0$ triangoli lower ($\triangledown$) . Ogni layer($l \geq 0$) ha un numero di vertici i pari $l+1$, equispaziati secondo la formula:

$$v_{jl} = v_{l,start} + (v_{l,end} - v_{l,start}) \frac{j}{l+1}, \quad ; 0 \leq j \leq l+1$$

Out[30]=

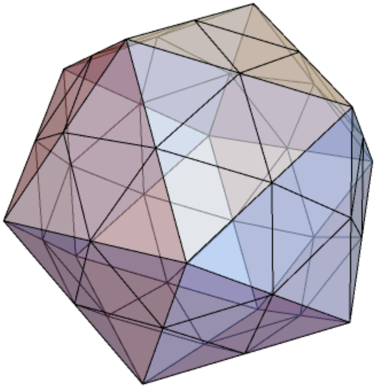


Figure: (p,q,b,c)=(3,5,2,0) (Wolfram Alpha)

Triangolazione I

Ogni arco e_j invece è data dalla semplice connessione di $v_{l,j} - v_{j+1,l}, \quad 0 \leq j \leq l$
L'analisi della complessità per quanto concerne la procedura complessiva della triangolazione classe I:

- In spazio $\mathcal{O}(F * b^2)$.
- In tempo $\mathcal{O}(F * b^2)$.

Una semplice verifica è che se aumentassi avrei al $b+1$-esimo layer $b+2$ vertici, cioè $b+2$ in più vertici rispetto al trangolazione al layer b-esimo, quindi $\Delta V_{b+1} = b+2 \rightarrow \sum_{0 \leq i \leq b} \Delta V_i = \sum_{i \in [0,b]} (i+2) = \frac{b(b+1)}{2} + 2b = V_b - V_0 \in \mathcal{O}(b^2)$.
Da notare che la tipologia del poliedro(icosaedro, ottaedro, tetraedro) interviene solo in funzione del numero delle facce. In modo simile si ragiona anche per la complessità in spazio, in effetti è necessario creare al $b+1$-layer b archi, quindi la complessità è $O(b^2)$ (a meno del numero di facce, poiché la triangolazione andrebbe effettuata tante quante sono le facce).

Triangolazione Classe II

Obiettivo: Generare un poliedro geodetico di Classe II con $b = c$.

Fasi iniziali:

- Triangolazione di classe I da effettuare sul poliedro.
- Inizializzazione contenitori: `ver_2`, `edges_2`, `faces_2`.
- Inserimento in `ver_2` dei vertici generati dopo la triangolazione di classe 1

Triangolazione Classe II, calcolo dei centroidi

Fase centrale

- Per ogni faccia della Triangolazione di classe I si calcola il centroide, che viene aggiunto come nuovo vertice nella Classe 2.

$$\text{centroid\_x} = \frac{v_1^x + v_2^x + v_3^x}{3}$$

- Per ogni faccia della triangolazione di Classe I, si creano tre spigoli che collegano il centroide ai vertici della faccia. Questi spigoli vengono aggiunti nella struttura Classe II.
- **Mappatura delle facce agli spigoli:** Si costruisce una mappa che associa ogni spigolo della triangolazione di Classe I alla/alle faccia/faccia a cui appartiene. Serve per distinguere spigoli interni da quelli di bordo.

.

Triangolazione Classe: fase finale

- **Trattamento dei bordi:** Se uno spigolo appartiene a una sola faccia (bordo), si calcola il punto medio dello spigolo, lo si aggiunge alla lista dei vertici e si costruiscono nuovi spigoli e triangoli con il baricentro della faccia. I nuovi spigoli generati vengono inseriti nella struttura Classe II.
- **Trattamento degli spigoli interni:** Se uno spigolo è condiviso da due facce, si costruisce un triangolo che unisce i due baricentri con uno dei vertici dello spigolo. Il triangolo viene aggiunto alla lista delle nuove facce.
- **Aggiornamento della struttura dati**

Triangolazione Classe II, Complessità computazionale

La funzione `Triangulation_2()` lavora su una mesh composta da n vertici, m spigoli e f facce. Le principali operazioni e i relativi costi sono:

- Inserimento dei vertici in una mappa: $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Calcolo dei baricentri e inserimento: $\mathcal{O}(f \log n)$.
- Creazione dei nuovi spigoli (3 per faccia): $\mathcal{O}(f)$.
- Mappatura spigolo-faccia (ricerca lineare su m spigoli): $\mathcal{O}(f \cdot m)$.
- Suddivisione degli spigoli e costruzione facce triangolari: $\mathcal{O}(m \log n)$.

Il costo totale è:

$$\mathcal{O}(n \log n + f \log n + f \cdot m + m \log n)$$

Costruzione del duale

Obiettivo: Generare il duale del poliedro.

Nel grafo duale:

- Ogni faccia del poliedro diventa un nodo.
- Due nodi sono collegati da un arco se le rispettive facce condividono un lato (cioè 2 vertici).
- Gli archi del duale vengono rappresentati come segmenti tra i centroidi normalizzati delle facce.

La funzione `GenerateDual()` costruisce il duale a partire dalla mesh triangolata. Ogni faccia viene rappresentata dal proprio centroide, proiettato sulla sfera, e per ogni coppia di facce adiacenti viene creato un arco che le collega. Il risultato è un grafo tridimensionale in cui la struttura viene conservata ma invertita: ciò che erano facce diventano nodi, e le adiacenze tra facce diventano archi.

Duale poliedro

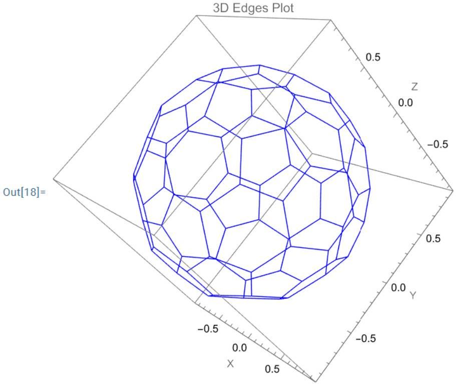


Figure: Duale di (p,q,b,c)=(3,5,2,0) (Wolfram Alpha)

Calcolo del cammino minimo: `ShortestPath`

Obiettivo: determinare il cammino più breve tra due vertici su un poliedro.

Algoritmo utilizzato: Dijkstra, adatto a grafi con pesi positivi.

Modello di grafo:

- Ogni vertice del poliedro è un nodo del grafo.
- Il grafo è non orientato e costruito dinamicamente a partire dalla lista di archi.

Costo utilizzato:

- Il peso associato a ciascun arco è la distanza euclidea in 3D tra i due vertici collegati.

Shortest Path

Struttura dell'algoritmo:

1. Verifica che gli ID forniti siano validi.
2. Costruisce la lista di adiacenza come `unordered_map<id, lista<(vicino, peso)>`.
3. Inizializza:
   - Vettore `dist[]` con `+inf`
   - Vettore `prev[]` con predecessori
   - Coda di priorità (heap min) per l'estrazione del nodo con distanza minima
4. Applica l'algoritmo di Dijkstra.
5. Ricostruisce il cammino minimo da `id2` a `id1`.
6. Marca i vertici e archi coinvolti con `ShortPath = 1`.
7. Calcola la lunghezza totale del cammino e la stampa.

Complessità computazionale: $\mathcal{O}((V+E)\log V)$ con (V = vertici, E = archi)

Test effettuati

1. **Test sulle triangolazioni:**
   verifica vertici, spigoli, facce e formula di Eulero.

2. **Test sul cammino minimo (`ShortestPath`):**
   - verifica percorso da vertice 0 a id2 impostato.
   - su grafo semplice.
   - controllo correttezza cammino.

3. **Test sulla validità di generazione del duale:**
   - duale del tetraedro.
   - duale dell'ottaedro.

4. **Test su triangolazione di Classe II:**
   - verifica formule teoriche con $b = c$.