POSTO:

NOME e COGNOME (stampatello):

MATRICOLA:

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

23/01/2020 - Tema A

Tempo a disposizione: 100 min

Voto

Problema 1	Problema 2	Totale

Norme generali:

- Lasciare sugli attaccapanni borse e giacche. Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Consegnare sia il fascicolo stampato che i fogli di brutta. Solo il fascicolo stampato verrà corretto.
- NON è permesso utilizzare libri o appunti, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.

Problema 1 (18 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = x + \frac{15}{4} \log\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di $f(x)$ con l'asse delle y.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

1.5 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f. Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Problema 2 (12 punti)

Date la funzioni

$$f(x) = 1 + \sin(x)e^{\cos(x)} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

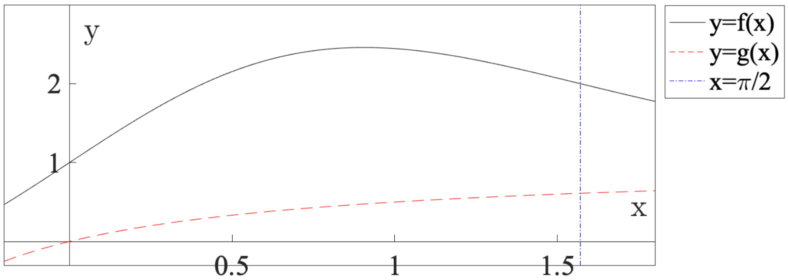
2.1 Calcolare il dominio di f e g.

2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente ad f nel punto $x = \frac{\pi}{3}$.

2.3 Calcolare:

$$\int f(x)\,dx \qquad ; \qquad \int g(x)\,dx$$

2.4 Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. (Suggerimento: una parte dei grafici di f e g è mostrata in figura)



POSTO:

NOME e COGNOME (stampatello):

MATRICOLA:

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

23/01/2020 - Tema B

Tempo a disposizione: 100 min

Voto

Problema 1	Problema 2	Totale

Norme generali:

- Lasciare sugli attaccapanni borse e giacche. Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Consegnare sia il fascicolo stampato che i fogli di brutta. Solo il fascicolo stampato verrà corretto.
- NON è permesso utilizzare libri o appunti, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.

Problema 1 (18 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = x - \frac{21}{8} \log\left(\frac{3x+3}{x+3}\right)$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di $f(x)$ con l'asse delle y.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

1.5 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f. Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Problema 2 (12 punti)

Date la funzioni

$$f(x) = 2 + \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{2x}{x+1}$$

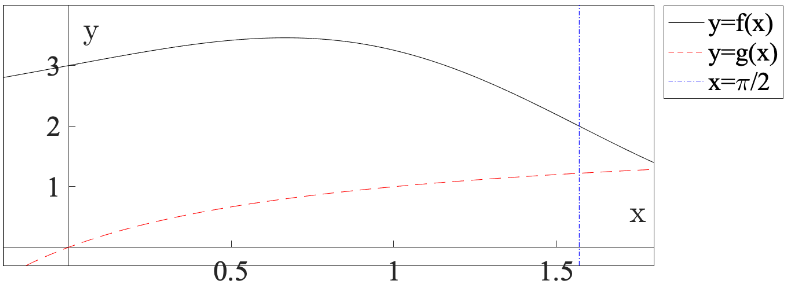
2.1 Calcolare il dominio di f e g.

2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente ad f nel punto $x = \frac{\pi}{6}$.

2.3 Calcolare:

$$\int f(x)\,dx \qquad ; \qquad \int g(x)\,dx$$

2.4 Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. (Suggerimento: una parte dei grafici di f e g è mostrata in figura)



Esame di Calcolo 1 (23/01/2019, Tema A)

Soluzioni - Problema 1 - Tema A

Considerare la funzione

$$f(x) = x + \frac{15}{4}\log\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di $f(x)$ con l'asse delle y.

Il dominio si ottiene imponendo che

$$\frac{2x-2}{x-2} > 0$$

Risolvendo si ottiene come dominio: $D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.
f non è pari ($f(x) \neq f(-x)$), non è dispari ($f(x) \neq -f(-x)$). L'intesezione con l'asse delle y è $f(0) = 0$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \underset{[\pm\infty+\frac{15}{4}\log(2)]}{=} \pm\infty$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali. Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$m: \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{15}{4}\frac{\log(2)}{x}\right) = 1;$

$q: \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{15}{4}\log(2) - x\right) = \frac{15}{4}\log(2);$

La retta $y = x + \frac{15}{4}\log(2)$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \underset{[1+\frac{15}{4}\log(0^+)]}{=} -\infty.$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{[1+\frac{15}{4}\log(+\infty)]}{=} +\infty.$ Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

$f(x)$ è continua perché è composizione e somma di funzioni continue.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{15}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{15}{4}\frac{1}{x-2} = \\
&= \frac{4(x-1)(x-2) + 15(x-2) - 15(x-1)}{4(x-1)(x-2)} = \\
&= \frac{4x^2 - 12x + 8 - 15}{4(x-1)(x-2)} = \\
&= \frac{4x^2 - 12x - 7}{4(x-1)(x-2)}
\end{aligned}
$$

Studio del segno: gli zeri del numeratore sono $-\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{2}$.
Numeratore, $N > 0$: $x < -\frac{1}{2}$ e $x > \frac{7}{2}$
Denominatore, $D > 0$: $x < 1$ e $x > 2$

Tenendo conto del dominio, il risultato dello studio del segno è:
$f(x)$ cresce in $]-\infty, -\frac{1}{2}[\, \cup \,]\frac{7}{2}, +\infty[$;
$f(x)$ decresce in $]-\frac{1}{2}, 1[\, \cup \,]2, \frac{7}{2}[$;
$x = -\frac{1}{2}$ è massimo relativo M, di ordinata $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{15}{4}\log(6/5) \approx 0.184$).
$x = \frac{7}{2}$ è minimo relativo, m, di ordinata $(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2} + \frac{15}{4}\log(10/3) \approx 8.015$.

1.4 Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(8x-12)(4x^2-12x+8) - (8x-12)(4x^2-12x-7)}{16(x-1)^2(x-2)^2} = \\
&= \frac{15(2x-3)}{4(x-1)^2(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

Studio del segno:
Numeratore: $N > 0$ per $x > 3/2$.
Denominatore: $D > 0$ per $x \neq 1$ e $x \neq 2$

Tenendo conto del dominio si ha che:
$f(x)$ è concava (concavità verso il basso) in $]-\infty, 1[$.
$f(x)$ è convessa (concavità verso l'alto) in $]2, +\infty[$.
$f(x)$ non ha punti di flesso ($x = 3/2$ non appartiene al dominio).

1.5 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f. Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

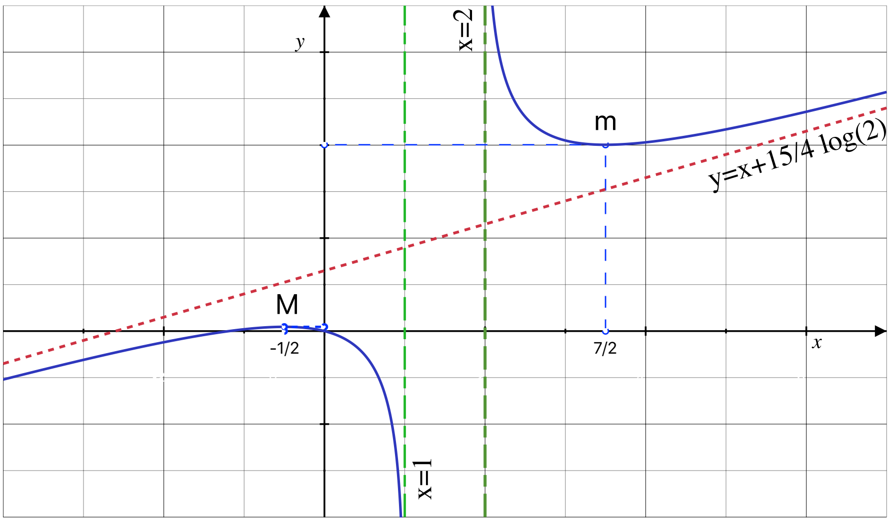


Figura 1: Grafico: Segnare bene le informazioni disponibili, in questo caso l'asintoto obliquo, gli asintoti orizzontali $x = 1$ e $x = 2$, le coordinate del punto di massimo locale M, e quelle del minimo locale m. Fare attenzione che la funzione deve passare per $f(0) = 0$.

L'immagine è data dall'insieme dei valori restituito dalla funzione e si deduce dal grafico. In questo caso:

Immagine: $]-\infty, f(-1/2)] \,\cup\, [f(7/2), +\infty[$

Soluzioni - Problema 2 - Tema A

Date la funzioni

$$f(x) = 1 + \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

2.1 Calcolare il dominio di f e g.

$D_f = \mathbb{R}$; $\qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente ad f nel punto $x = \frac{\pi}{3}$.

$f'(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\cos(x)} - \sin^2(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$
$f(x_0) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{1/2}$

$f'(x_0) = \frac{1}{2}e^{1/2} - \frac{3}{4}e^{1/2} = -\frac{1}{4}e^{1/2}$
Tangente: $y = -\frac{1}{4}e^{1/2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{1/2}$.

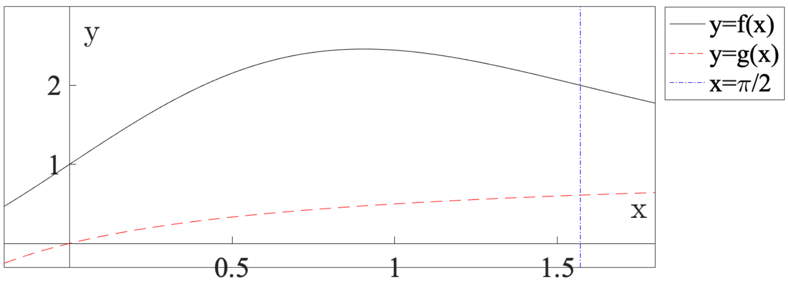
2.3 Calcolare:

$$\int f(x)\,dx \qquad ; \qquad \int g(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int 1 + \sin(x)e^{\cos(x)}\;dx = \tag{1}$$
$$= x - e^{\cos(x)} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \\ &= \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \\ &= x - \log|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2.4 Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. (Suggerimento: una parte dei grafici di f e g è mostrata in figura)



Dalla figura si nota che tra $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ si ha che $f > g$. Per cui l'area è data dall'integrale di $f - g$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) - g(x)\right)\,dx &= \left[x - e^{\cos(x)} - (x - \log|x+1|)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -1 + \log\left(\frac{\pi+2}{2}\right) + e\end{aligned}$$

Esame di Calcolo 1 (23/01/2019, Tema B)

Soluzioni - Problema 1 - Tema B

Considerare la funzione

$$f(x) = x - \frac{21}{8} \log\left(\frac{3x+3}{x+3}\right)$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di $f(x)$ con l'asse delle y.

Il dominio si ottiene imponendo che

$$\frac{3x+3}{x+3} > 0$$

Risolvendo si ottiene come dominio: $D =]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$.
f non è pari ($f(x) \neq f(-x)$), non è dispari ($f(x) \neq -f(-x)$). L'intersezione con l'asse delle y è $f(0) = 0$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \underset{[\pm\infty - \frac{21}{8}\log(3)]}{=} \pm\infty$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali. Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$m: \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{21}{8}\frac{\log(3)}{x}\right) = 1;$

$q: \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{21}{8}\log(3) - x\right) = -\frac{21}{8}\log(3);$

La retta $y = x - \frac{21}{8}\log(3)$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

$\lim_{x \to -3^-} f(x) \underset{[-3 - \frac{21}{8}\log(+\infty)]}{=} -\infty.$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) \underset{[-1 - \frac{21}{8}\log(0^+)]}{=} +\infty.$ Quindi $x = -3$ e $x = -1$ sono asintoti verticali.

$f(x)$ è continua perché è composizione e somma di funzioni continue.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{21}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{21}{8}\frac{1}{x+3} = \\
&= \frac{8(x+1)(x+3) - 21(x+3) + 21(x+1)}{8(x+1)(x+3)} = \\
&= \frac{8x^2 + 32x + 24 - 42}{8(x+1)(x+3)} = \\
&= \frac{4x^2 + 16x - 9}{4(x+1)(x+3)}
\end{aligned}
$$

Studio del segno: gli zeri del numeratore sono $-\frac{9}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
Numeratore, $N > 0$: $x < -\frac{9}{2}$ e $x > \frac{1}{2}$
Denominatore, $D > 0$: $x < -3$ e $x > -1$

Tenendo conto del dominio, il risultato dello studio del segno è:
$f(x)$ cresce in $]-\infty, -\frac{9}{2}[\, \cup \,]\frac{1}{2}, +\infty[$;
$f(x)$ decresce in $]-\frac{-9}{2}, -3[\, \cup \,]-1, \frac{1}{2}[$;
$x = -\frac{9}{2}$ è massimo relativo, M, di ordinata $f(-\frac{9}{2}) = -\frac{9}{2} - \frac{21}{8}\log(7) \approx -9.608$).
$x = \frac{1}{2}$ è minimo relativo, m, di ordinata $(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{21}{8}\log(9/7) \approx -0.1597$.

1.4 Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(8x+16)(4x^2+16x+12) - (8x+16)(4x^2+16x-9)}{16(x+1)^2(x+3)^2} = \\
&= \frac{21(x+2)}{2(x+1)^2(x+3)^2}
\end{aligned}
$$

Studio del segno:
Numeratore: $N > 0$ per $x > -2$.
Denominatore: $D > 0$ per $x \neq -1$ e $x \neq -3$

Tenendo conto del dominio si ha che:
$f(x)$ è concava (concavità verso il basso) in $]-\infty, -3[$.
$f(x)$ è convessa (concavità verso l'alto) in $]-1, +\infty[$.
$f(x)$ non ha punti di flesso ($x = -2$ non appartiene al dominio).

1.5 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f. Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

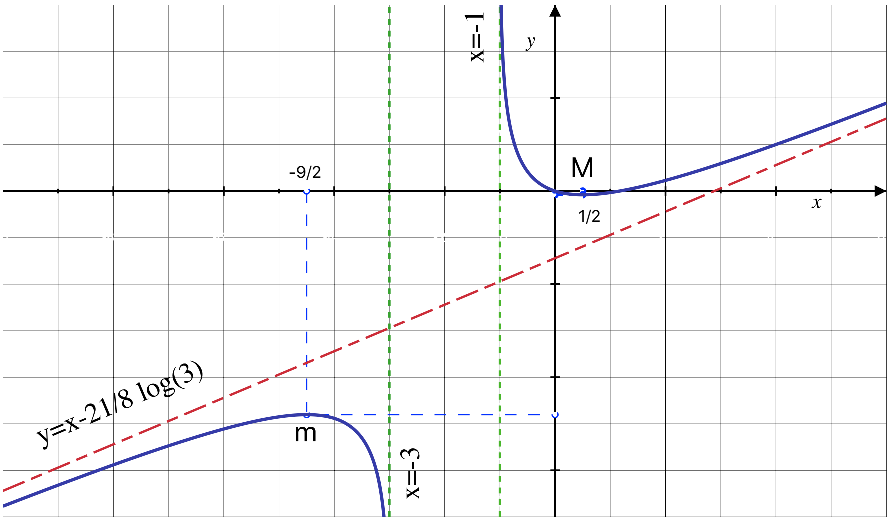


Figura 2: Grafico: Segnare bene le informazioni disponibili, in questo caso l'asintoto obliquo, gli asintoti orizzontali $x = -3$ e $x = -1$, le coordinate del punto di massimo locale M, e quelle del minimo locale m. Fare attenzione che la funzione deve passare per $f(0) = 0$.

L'immagine è data dall'insieme dei valori restituito dalla funzione e si deduce dal grafico. In questo caso:

Immagine: $]-\infty, f(-9/2)] \cup [f(1/2), +\infty[$

Soluzioni - Problema 2 - Tema B

Date la funzioni

$$f(x) = 2 + \cos(x)e^{\sin(x)} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{2x}{x+1}$$

2.1 Calcolare il dominio di f e g.

$D_f = \mathbb{R}; \qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente ad f nel punto $x = \frac{\pi}{6}$.

$f'(x) = -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos^2(x)e^{\sin(x)}$
$f(x_0) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{1/2}$

$f'(x_0) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{1/2} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{1/2}$
Tangente: $y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{1/2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{1/2}$

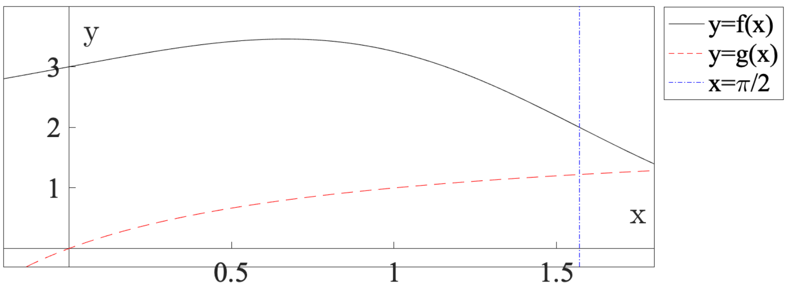
2.3 Calcolare:

$$\int f(x)\,dx \qquad ; \qquad \int g(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int 2 + \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx = \\ = 2x + \mathrm{e}^{\sin(x)} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int g(x)\,dx = \int 2\frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \\ = \int 2\,dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx = \\ = 2x - 2\log|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2.4 Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. (Suggerimento: una parte dei grafici di f e g è mostrata in figura)



Dalla figura si nota che tra $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ si ha che $f > g$. Per cui l'area è data dall'integrale di $f - g$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))\,dx = \left[2x + \mathrm{e}^{\sin(x)} - (2x - 2\log|x+1|)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = \mathrm{e} + 2\log(\frac{\pi+2}{2}) - 1$$