Formulario Probabilità e Statistica

UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA
Dipartimento di scienze ambientali, informatica e statistica

[CT0111] PROBABILITA' E STATISTICA
Anno Accademico 2023 - 2024

Tutor Zuliani Riccardo
Contatti 875532@stud.unive.it

Indice

Capitolo 1

Probabilità Elementare

- **Principio fondamentale del calcolo combinatorio:** $m_1 \times m_2$
- **Principio fondamentale generalizzato:**

$$\prod_{i+1}^{r} m_i = m_1 \times ... \times m_r$$

- **Disposizioni con ripetizione:**

$$\prod_{i=1}^{r} n = n^r$$

- **Disposizioni semplici:** $n \times (n-1) \times ... \times (n-r+1)$
- **Permutazioni:** $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 =: n!$
- **Combinazioni:**

$$\frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-r+1)}{r!} =: \binom{n}{r}$$

- **Operazioni sugli eventi e Diagrammi di Venn:**
  - Complemento $A^c = 1 - A$
  - Intersezione $A \cap B$
  - Unione $A \cup B$
  - Inclusione $A \subset B$
  - Incopatibilita' $A \cap B = \emptyset$
- **Assiomi di probabilità:**
  - Positivita' $0 \leq \mathbb{P}[A] \leq 1$
  - Normalizzazione $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
  - Additivita': se $A_i \cap A_j = \emptyset$ allora

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

- **Alcune proprietà della probabilità:**
  - *Complementare:* $\mathbb{P}[\bar{A}] = 1 - \mathbb{P}[A]$
  - *Evento impossibile:* $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\bar{\Omega}] = 1 - \mathbb{P}[\Omega] = 0$
  - *Unione:* $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$
  - *Partizione:* se $C_1, C_2, ...$ sono una partizione

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} C_i\right] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$$

- **Legge della probabilità totale:**

$$\mathbb{P}[A] = \sum_i \mathbb{P}[A \cap C_i]$$

- **Eventi elementari equiprobabil:**

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ possibili casi}}$$

- **Popolazioni e sottopopolazioni**
  - *Soluzione con reinserimento:*

$$\#\Omega = N^n \quad \#A_k = \binom{n}{k} m^k (N-m)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_k] &= \binom{n}{k} m^k (N-m)^{n-k} \frac{1}{N^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(\frac{N-m}{N}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

  - *Soluzione senza reinserimento:*

$$\#\Omega = \binom{N}{n} \quad \#A_k = \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$$

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Capitolo 2

Probabilità Condizionata

- **Probabilità condizionata:**

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad \mathbb{P}[B] > 0$$

$$\mathbb{P}[\bar{A}|B] = \frac{\mathbb{P}[\bar{A} \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = 1 - \mathbb{P}[A|B]$$

- **Formula delle probabilità composte:**

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2|A_1]\mathbb{P}[A_3|A_1 \cap A_2]...\mathbb{P}[A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}]$$

- **Eventi indipendent:** $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
- n **eventi (reciprocamente) indipendenti:**

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}]...\mathbb{P}[A_{i_k}]$$

- **Sistema in serie:**

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] = \prod_{i=1}^{n} (a - p_i)$$

- **Sistema in parallelo:**

$$\mathbb{P}[B] = 1 - \mathbb{P}[\bar{B}] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[\bar{A}_i] = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$$

- **La legge della probabilità totale:**

$$\mathbb{P}[A] = \sum_i \mathbb{P}[A \cap C_i] = \sum_i \mathbb{P}[C_i]\mathbb{P}[A|C_i]$$

- **La formula di Bayes:**

$$\mathbb{P}[C_m|A] = \frac{\mathbb{P}[A|C_m]\mathbb{P}[C_m]}{\sum_i \mathbb{P}[A|C_i]\mathbb{P}[C_i]}$$

Capitolo 3

Variabili Casuali

Variabili Casuali

Una **variabile aleatoria** o **casuale** X è una funzione che assume valori numerici determinati dall'esito di un certo fenomeno aleatorio. Formalmente, se Ω è lo spazio campionario relativo al fenomeno di interesse, X è una particolare funzionw

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Funzione di Ripartizione

Si dice **funzione di ripartizione** (o di distribuzione cumulativa) di una variabile aleatoria X la funzione $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ così definita:

$$F(x) = \mathbb{P}[P \leq x], \quad \forall i \in \mathbb{R}$$

La funzione di ripartizione F ha le seguenti proprietà:

- F è non decrescente
- F è continua a destra
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3.0.1 Proprietà del Valore Atteso

- $\mathbb{E}[a] = a$, dove a è una costante
- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$, dove a e b sono costanti

3.0.2 Proprietà della Varianza

- $Var[a] = 0$, dove a è una costante
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$, dove a e b sono costanti

3.1 Variabili Aleatorie Discrete

Variabile Aleatoria Discreta

Una **varaibile aleatoria discreta** X assume valori in un insieme numerabile (o finito) di punti, $x_1, x_2, ..., x_i, ...)$.
Proprieta':

- $0 \leq p_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, ...$
- $\sum_i p_i = 1$
- $\mathbb{P}[X \in A] = \sum_{i: x_i \in A} p_i$

Funzione di Probabilità

Un'assegnazione di probabilità per X, $P(x) = \mathbb{P}[X = x]$ viene chiamata funzione di probabilità e può essere rappresentata graficamente tramite un diagramma a bastoncini

Funzione di Ripartizione

$$F(X) = \sum_{i: x_i \leq x} \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$$

Valore Atteso $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ...$$

Varianza

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 p_i \rightarrow \sum_i x_i^2 p_i - [\mathbb{E}[X]]^2$$

3.2 Variabili Aleatorie Continue

Variabile aleatoria continua

Una **variabile aleatoria continua** X assume valori in un insieme continuo di punti (un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non numerabile).
La curva è il grafico di una funzione $f(x)$ tale che::

- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$, cioè l'area totale sotto il grafico di $f(x)$ è 1.

Densità di Probabilità

Una funzione $f(x)$ con le proprietà precedenti viene chiamata densità di probabilità.

Una volta assegnata una densità di probabilità alla variabile X, si può scrivere, per ogni evento A di R:

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f(x)\,dx$$

Funzione di Ripartizione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Valore Atteso $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$$

Varianza

$$Var[X] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - [\mathbb{E}[X]]^2$$

3.3 Moda, Mediana e Quantili

Moda

La **moda** di una va X è il punto (o i punti) in cui la funzione di probabilità (o di densità) assume il valore massimo.

Mediana

La **Mediana** di una va X è il minino valore m per cui

$$F(m) = \mathbb{P}[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

Quantili

Fissato un valore $\alpha \in (0,1)$, il **quantili di livello** α di una va x è il minimo valore q_α) per cui

$$F(q_\alpha) = \mathbb{P}[X \leq q_\alpha] \geq \alpha$$

Capitolo 4

VA Discrete

4.1 Distribuzione di Bernoulli

Utilizzato ogni volta che abbiamo un risultato 0/1, quindi quando potremmo avere solo due possibili risultati nel nostro esperimento.

p	probabilità di successo
$P[X]$	$p^x(1-p)^{1-x} = \begin{cases} 1-p & \text{if } x=0 \\ p & \text{if } x=1 \end{cases}$
$\mathbf{E}[X]$	p
$\text{VAR}[X]$	$p(1-p)$

4.2 Distribuzione Binomiale

Utilizzato ogni volta che consideriamo una sequenza di prove Bernoulliane indipendenti e contiamo il numero di successi in essa contenuti.

n	numero di osservazioni
p	probabilità di successo
$P[x]$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
$F[x]$	$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
$\mathbf{E}[X]$	np
$\text{VAR}[X]$	$np(1-p)$

$P[X=x]$	**dbinom**(#success , size , prob_success)
$P[X \leq x]$	**pbinom**(#success , size , prob_success)

4.3 Distribuzione Geometrica

Considera una sequenza di prove Bernoulliane indipendenti, ciascuna prova si traduce in un "successo" o un "fallimento". Il numero di prove Bernoulliane necessarie per ottenere il primo successo ha distribuzione geometrica.

p	probabilità di successo
$P[x]$	$(1-p)^{x-1}p, x = 1, 2, ...$
$F[x]$	$p\sum_{i=0}^{x}(1-p)^i$
$\mathbf{E}[X]$	$\frac{1}{p}$
VAR$[X]$	$\frac{1-p}{p^2}$
$P[X = x]$	**dgeom**(#failures , prob_success)
$P[X \leq x]$	**pgeom**(#failures , prob_success)

4.3.1 Memory Less Propriety

Se $X \sim Geo(p)$ allora

$$\mathbb{P}[X > m + n | X > m] \frac{\mathbb{P}[X > m + n]}{\mathbb{P}[X > n]}$$

Questa proprietà si dimostra tenendo conto che

$$\mathbb{P}[X > k] = (1-p)^k \quad k = 0, 1, 2, ...$$

4.4 Distribuzione IperGeometrica

Descrive la probabilità di k successi (estrazioni casuali per le quali l'oggetto disegnato ha una caratteristica specificata) in n estrazioni, senza reinserimento, da una popolazione finita di dimensione N che contiene esattamente K oggetti con quella caratteristica, in cui ogni pareggio è un successo o un fallimento.

N	Dimensione della popolazione
K	Numero di successi nella popolazione
n	Numero di campionamenti
k	Numero di successi osservati
$P[x]$	$\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$\mathbf{E}[X]$	$n \cdot \frac{K}{N}$
$\text{VAR}[X]$	$n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$
$P[X = x]$	**dhyper**(*#succ , #succ_samp , #pop_dim , #samp_dim*)
$P[X \leq x]$	**phyper**(*#succ , #succ_samp , #pop_dim , #samp_dim*)

4.5 Distribuzione Multinomiale

NOTA

Il seguente paragrafo è opzionale, non è richiesto per l'esame!

Mentre la distribuzione binomiale descrive il numero di successi in un processo di Bernoulli, per il quale ogni singolo test può fornire solo due risultati, la distribuzione multinomiale descrive il caso più generale in cui ogni test può fornire un numero finito di risultati, ciascuno con la propria probabilità.

$$P[X_1, X_2, ..., X_k] = \frac{n!}{x_1!...x_k!} p_1^{x_1}...p_k^{x_k} \quad \text{dove} \quad \sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$$

4.6 Distribuzione Binomiale Negativa

NOTA

Il seguente paragrafo è opzionale, non è richiesto per l'esame!

In una sequenza di prove Bernoulliane indipendenti, il numero di prove necessarie per ottenere k successi ha distribuzione binomiale negativa.
In altre parole conta il numero di fallimenti prima di ottenere un numero target di successi (k).

k	Numero di successi
p	Probabilità di successo
$P[x]$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k \quad x = k, k+1, ...$
$\mathbf{E}[X]$	$\frac{k}{p}$
$\text{VAR}[X]$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$

$P[X = x]$	**dnbinom**(#failures , #successes , prob_success) **dnbinom**(#trial −#successes , #successes , prob_success)
$P[X \leq x]$	**pnbinom**(#failures , #successes , prob_success) **pnbinom**(#trial −#successes , #successes , prob_success)

4.7 Distribuzione di Poisson

Poisson è legata agli **eventi rari**. Ciò significa che è estremamente improbabile che due eventi si verifichino contemporaneamente o in un periodo di tempo molto breve.
Il numero di eventi rari che si verificano in un determinato periodo di tempo ha una distribuzione di Poisson.

λ	Frequenza, numero medio di eventi
p	Probabilità di successo
$P[x]$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, ...$
$\mathbf{E}[X]$	λ
$\text{VAR}[X]$	λ
$P[X = x]$	`dpois(x, lambda)`
$P[X \leq x]$	`ppois(x, lambda)`

4.7.1 Approssimazione della Binomiale tramite Poisson

La distribuzione di Poisson può essere utilizzata efficacemente per approssimare le probabilità binomiali quando il *numero di prove* n è **grande** e la *probabilità di successo* p è **piccola**

$$n \geq 30 \quad p \leq 0.05$$

$$\text{Binomiale}(n, p) \approx \text{Poisson}(\lambda)$$
$$\text{dove } n \geq 30 \quad p \leq 0.05 \quad np = \lambda$$

4.7.2 Proprietà Additiva

Se

$$X \sim Pois(\lambda) \quad \text{and} \quad Y \sim Pois(\mu)$$

e sono **indipendenti**, dopo possiamo dire che:

$$W = X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$$

4.7.3 Relazione tra Poisson e Distribuzione Multinomiale

NOTA

Il seguente paragrafo è opzionale, non è richiesto per l'esame!

Sia

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \quad \text{with} \quad X_i \overset{iid}{\sim} Pois(\lambda_i)$$

dato

$$(X_1, X_2, ..., X_n)|S_n \sim Mult\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, ..., \frac{\lambda_n}{\lambda}\Big) \quad \text{dove} \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Capitolo 5

VA Continue

5.1 Distribuzione uniforme

La distribuzione descrive un esperimento in cui esiste un risultato arbitrario compreso tra determinati limiti. I limiti sono definiti dai parametri a e b, che rappresentano i valori minimo e massimo.

(a, b)	range di valori
$f(x)$	$\frac{1}{b-a} \quad a < x < b$
$F_x(x)$	$\frac{x-a}{b-a} \quad a < x < b$
$\mathbf{E}[X]$	$\frac{a+b}{2}$
$\mathrm{VAR}[X]$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$P[X = x]$	**dunif**(x, **min**, **max**)
$P[X \leq x]$	**punif**(x, **min**, **max**)

5.2 Distribuzione Esponenziale

Distribuzione esponenziale utilizzata per modellare il **tempo**. In una sequenza di eventi rari, quando il numero di eventi è Poisson, il tempo tra gli eventi è Esponenziale

λ	parametro di frequenza, numero di eventi per unità
$f(x)$	$\lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$
$F_x(x)$	$1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$
$\mathbf{E}[X]$	$\frac{1}{\lambda}$
VAR$[X]$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$P[X = x]$	**dexp**(x, rate (^-1))
$P[X \leq x]$	**pexp**(x, rate (^-1))

Se nell'esercizio non è esplicitata l'unità di misura in $^{-1}$, dobbiamo inserire il parametro **rate**: $1/rate = rate^{-1}$. Come nel caso in cui conosciamo la media, dalla formula possiamo recuperare il valore esatto di λ.

5.2.1 I tempi tra eventi rari sono esponenziali

Evento: "il tempo T fino al prossimo evento è maggiore di t" può essere riformulato come: "zero eventi si verificano entro il tempo t".

$$P_X(0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Poi la CDF di T è:

$$F_T[t] = 1 - P[T > t] = 1 - P[T = t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

5.2.2 Proprietà Memory Less

Il fatto di aver aspettato per t minuti viene "dimenticato" e non influisce sul tempo di attesa futuro.

$$P[T > t + x | T > t] = P[T > x] \quad \forall t, x > 0$$

5.2.3 Minimizzazione

Consideriamo una collezione di $X_j \sim Exp(\lambda_i)$ con $j = 1, ..., n$ indipendenti tra loro affermiamo che esiste una nuova variabile casuale:

$$L_n = \min\{X_1, ..., X_n\} \sim Exp(\lambda) \quad \lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

Ha la stessa proprietà di una classica **Variabile casuale esponenziale**

5.2.4 Massimizzazione

$$\mathbb{P}[x \leq x] = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i x})$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

5.3 Distribuzione Gamma

Quando una certa procedura consiste di α *passi indipendenti*, e ogni passo richiede una quantità di tempo **Esponenziale(λ)**, allora il tempo totale ha una distribuzione **Gamma** con parametri α e λ.
In un processo di eventi rari, con tempi **Esponenziale** tra due eventi consecutivi qualsiasi, il tempo degli eventi α-esimi ha distribuzione **Gamma** perché consiste di α *indipendente* **Esponenziale** volte.

α	parametro di forma
λ	parametro di frequenza
$f(x)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\rho(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} \quad x > 0$
$\mathbf{E}[X]$	$\frac{\alpha}{\lambda}$
VAR$[X]$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
$P[X = x]$	**dgamma**(x, alpha, rate (ˆ−1))
$P[X \leq x]$	**pgamma**(x, alpha, rate (ˆ−1))

Se nell'esercizio non è esplicitata l'unità di misura in $^{-1}$, dobbiamo inserire il parametro **rate**: $1/rate = rate^{-1}$. Come nel caso in cui conosciamo la media, dalla formula possiamo recuperare il valore esatto di λ.

5.4 Distribuzione Normale

Oltre a somme, medie ed errori, la distribuzione normale si rivela spesso un buon modello per variabili fisiche come peso, altezza, temperatura, voltaggio, livello di inquinamento e, ad esempio, redditi familiari o voti degli studenti.

μ	media, parametro di posizione
σ	deviazione standard, parametro di scala
$f(x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\} \quad -\infty < x < \infty$
$F_x[X]$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\} dz \quad -\infty < x < \infty$
$\mathbf{E}[X]$	μ
$\mathrm{VAR}[X]$	σ^2

5.4.1 Distribuzione Normale Standard

La distribuzione normale con "parametri standard" $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ è chiamata **Distribuzione Normale Standard**.

μ	media, parametro di posizione
σ	deviazione standard, parametro di scala
Z	Variabile Aleatoria Nosmale Standard
$\phi(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ Normale Standard **pdf**
$\Phi(x)$	$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ Normale Standard **cdf**
$P[X = x]$	**dnorm**((X − **mean**) / **sd**)
$P[X \leq x]$	**pnorm**((X − **mean**) / **sd**)
$\Phi^{-1}(x)$	**qnorm**(x)

Una Normale Standard può essere ottenuta da una variabile casuale Normale(μ, σ) non standard X stramite **standardizzazione**, che significa *sottrarre* la **media** e *dividendo* per la **deviazione standard**:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Utilizzando la trasformazione, qualsiasi variabile casuale normale può essere ottenuta da una **Variabile Casuale Normale Standard Z:**

$$F_x[x] = P[X \leq x] = P\Big[\frac{X' - \mu'}{\sigma'} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\Big] = P\Big[Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\Big] = F_z\Big[\frac{x - \mu}{\sigma}\Big]$$

La Combinazion Lineare di VA Normali è Normale

$$X_1, X_2, ..., X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{e se} \quad a_i = \frac{1}{n} \quad \forall i \quad \text{o} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sim N\Big(\mu \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i\Big)$$

5.5 Teorema del limite centrale

Da utilizzare quando nell'esercizio si chiede di trovare un qualche tipo di probabilità data la quantità di elementi e relativa media e ds.

$$X_1, X_2, ... \quad \text{VA indipendenti} \quad \mu = \mathbf{E}[X_i] \quad \sigma = \text{Std}[X_i]$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + ... + X_n$$

As $n \to \infty$ the standardized sum is

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\text{Std}[S_n]} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge in distribuzione in una **Variabile Causale Normale Standard**

$$F_{Z_n}(z) = P\Big[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\Big] \to \Phi(z) \quad \forall z$$

Applicata quando $n \geq 30$

5.5.1 Approssimazione dalla Normale alla Binomiale

Variabili Binomiali rappresentano un caso speciale di $S_n = X_1 + ... + X_n$, dove tutti $X_i \sim Ber(p)$, inoltre nel caso in cui il nostro n sia **largo** e per valori moderati di $p : (0.05 \leq p \leq 0.95)$ abbiamo la seguente approssimazione

$$\text{Binomiale}(n, p) \approx Normal\Big(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\Big)$$

5.5.2 Correzione della Continuità

È necessario quando approssimiamo una distribuzione discreta (come Binomiale) con una distribuzione continua (Normale). Poiché nel caso discreto $P[X = x]$ potrebbe essere positivo, nel caso continuo è sempre 0. In questo modo introduciamo questa correzione.
Espandiamo l'intervallo di 0,5 unità in ciascuna direzione, quindi utilizziamo l'approssimazione Normale.

$$P_X[x] = P[X = x] = P[x - 0.5 < X < x + 0.5]$$

5.6 Processo di Poisson

Il processo di Poisson è una successione di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t\geq 0}$, con distribuzione di Poisson il cui parametro dipende dall'indice t:

$$X_t \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot t)$$

Si usa per contare il numero di manifestazioni di un fenomeno di interesse in un qualsiasi intervallo di tempo di ampiezza t.

Possiamo allora scrivere:

- $X_t =$"# eventi in un intervallo di tempo t"
- $\lambda =$"# medio di eventi nell'unità di tempo"

5.6.1 Relazione con la Distribuzione Esponenziale

Associata ad ogni processo di Poisson c'è una variabile aleatoria esponenziale che misura il tempo fra due manifestazioni successive del fenomeno in questione:

- $X_t =$ "# eventi in un intervallo di tempo t"

$$X_t \sim Po(\lambda t)$$

- $T =$ "tempo trascorso fra due eventi successivi"

$$T \sim Exp(\lambda)$$

Capitolo 6

Distribuzioni congiunte

Distribution	**Discrete**	**Continuous**
Definition	$P(x) = P\{X = x\}$ (pmf)	$f(x) = F'(x)$ (pdf)
Computing probabilities	$\boldsymbol{P}\{X \in A\} = \sum_{x \in A} P(x)$	$\boldsymbol{P}\{X \in A\} = \int_A f(x)dx$
Cumulative distribution function	$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leq x\} = \sum_{y \leq x} P(y)$	$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$
Total probability	$\sum_x P(x) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Distribution	**Discrete**	**Continuous**
Marginal distributions	$P(x) = \sum_y P(x,y)$ $P(y) = \sum_x P(x,y)$	$f_x(x) = \int f(x,y)dy$ $f_y(y) = \int f(x,y)dx$
Independence	$P(x,y) = P(x)P(y)$	$f(x,y) = f(x)f(y)$
Computing probabilities	$\boldsymbol{P}\{(X,Y) \in A\} = \sum\sum_{(x,y)\in A} P(x,y)$	$\boldsymbol{P}\{(X,Y) \in A\} = \iint_{(x,y)\in A} f(x,y)\,dx\,dy$

Probabilità Condizionata

- *Caso Discreto*

$$P_{y|x}(y|x) = \frac{P_{xy}(x,y)}{P_{xx}(x)}$$

$$P_{x|y}(x|y) = \frac{P_{xy}(x,y)}{P_{yy}(y)}$$

Se X e Y sono indipendenti, allora

$$P_{y|x}(y|x) = \frac{P_{xy}(x,y)}{P_{xx}(x)} = \frac{P_{xx}(x) \cdot P_{yy}(y)}{P_{xx}(x)} = P_{yy}(y)$$

- *Caso Continuo*

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_{xx}(x)}$$

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_{yy}(y)}$$

Se X e Y sono indipendenti, allora

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_{xx}(x)} = \frac{f_{xx}(x) \cdot f_{yy}(y)}{f_{xx}(x)} = f_{yy}(y)$$

Discrete	**Continuous**
$\mathbf{E}(X) = \sum_x xP(x)$	$\mathbf{E}(X) = \int xf(x)dx$
$\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X-\mu)^2$ $= \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$ $= \sum_x x^2 P(x) - \boxed{\mu}^2$	$\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X-\mu)^2$ $= \int (x-\mu)^2 f(x)dx$ $= \int x^2 f(x)dx - \boxed{\mu}^2$
$\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ $= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)P(x,y)$ $= \sum_x \sum_y (xy)P(x,y) - \mu_x\mu_y$	$\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ $= \iint (x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dx\,dy$ $= \iint (xy)f(x,y)\,dx\,dy - \mu_x\mu_y$