APPELLO DI ALGEBRA LINEARE AAAAAAA

28 GENNAIO 2016

Cognome: ________________ **Nome:**______________ **Matricola:** ________

Tempo: 2h30

La valutazione tiene conto di ordine e chiarezza nello svolgimento. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

$\boxed{1}$ Siano $P = (3,2,1)$, $Q = (-1,2,-3)$ ed $R = (1,1,1)$ tre punti nello spazio $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare se i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ sono perpendicolari e in caso negativo determinare il coseno dell'angolo da essi formato.

(b) Determinare se i punti P, Q ed R sono allineati. In caso contrario determinare l'equazione del piano passante per i tre punti.

Soluzione: (a) Siano $v = \vec{OP}$ e $w = \vec{OQ}$ i due vettori. I vettori v e w sono perpendicolari se il loro prodotto interno è nullo: $v \cdot w = -3 + 4 - 3 = -2$. Quindi non sono perpendicolari. Il coseno dell'angolo θ formato dai due vettori è uguale a $\frac{v \cdot w}{||v||\ ||w||} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{7}$.

(b) Se P e Q fossero allineati il coseno dell'angolo sarebbe 1 oppure -1. Quindi i tre vettori non sono allineati. L'equazione parametrica del piano passante per i tre punti è:

$$P + t(Q - P) + r(R - P)$$

da cui si ricava:

$$x = 3 - 4t - 2r; \qquad y = 2 - r; \qquad z = 1 - 4t.$$

$\boxed{2}$ Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, -3, 7); \qquad v_2 = (2, -1, -1); \qquad v_3 = (-4, 2, 2).$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 come combinazione lineare di v_2 e v_3;
- v_2 come combinazione lineare di v_1 e v_3;
- v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_3.

Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1,v_2,v_3 e se il sistema lineare

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ammette soluzione.

Soluzione: I tre vettori sono linearmente indipendenti sse il determinante della seguente matrice è diverso da zero:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è zero perché la terza colonna è un multiplo della seconda colonna (si veda Proposizione 9.0.1(v) degli appunti): $v_3 = -2v_2$ e quindi anche $v_2 = -\frac{1}{2}v_3$. Il vettore v_1 non è combinazione lineare di v_2 e v_3, perché altrimenti, essendo $v_3 = -2v_2$, sarebbe un multiplo scalare di v_2.

Il sottospazio generato dai tre vettori ha dimensione 2, perché v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Il sistema lineare ammette soluzione se il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si trova nel sottospazio generato dai vettori v_1 e v_2. Impossibile: $-3x - y = 1$ e $7x - y = 1$ implicano $4x = 0$.

$\boxed{3}$ Mostrare che l'insieme W delle matrici 2×2

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali 2×2.

$\boxed{4}$ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x,y,z) = (2x + y, x + y, y + z).$$

(a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^3$.
