Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 6 – Applicazioni lineari

Esercizio 1. *Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari*

1.1 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $T(x,y) = (x-y, x+y+1, 0)$

1.2 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $T(x,y) = (2x, x+y)$

1.3 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che* $T(x,y) = \sin(x-y)$

Per le applicazioni lineari, trovare $\operatorname{Ker} T$ *e* $\operatorname{Im} T$ *.*

Esercizio 2. *Stabilire per quali valori di* $t \in \mathbb{R}$ *la seguente applicazione*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (x+ty, tyx) \end{aligned}$$

è lineare. Per tali valori determinare $\operatorname{Ker} T$ *e* $\operatorname{Im} T$ *.*

Esercizio 3. *È data la seguente applicazione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$T(x,y,z) = (x+y-2z,\ -x-y+2z)$$

3.1 Determinare una base di $\operatorname{Ker} T$ *e* $\operatorname{Im} T$ *.*

3.2 Stabilire se il vettore $(1,0)$ *appartiene all'immagine di* T *oppure no.*

Esercizio 4. *Sia* T *l'applicazione lineare da* $\mathbb{R}^4$ *a* $\mathbb{R}^3$ *definita da:*

$$T(x,y,z,w) = (x+2y+z-3w,\ -y+z+2w,\ 2x+y+5z)$$

4.1 Trovare una base di $\operatorname{Ker} T$ *e una base di* $\operatorname{Im} T$ *.*

4.2 Stabilire se $(7,-1,11) \in \operatorname{Im} T$ *.*

4.3 Trovare, se possibile, un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *tale che* $\mathbf{v} \notin \operatorname{Im} T$*.*

Esercizio 5. *Sia* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *, e si consideri l'unica applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che:*

$$T(\mathbf{e}_1) = (1,0), \quad T(\mathbf{e}_2) = (2,-1) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_3) = (1,1).$$

5.1 Determinare $T(1,2,0)$ *e* $T(3,-1,-1)$ *.*

5.2 Determinare $T(x,y,z)$ *per ogni* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *.*

Esercizio 6. *Determinare l'unica applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T(1,0) = (2,1) \quad \text{e} \quad (1,1) \in \operatorname{Ker} T.$$

Esercizio 7. *Siano* $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ *,* $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ *e* $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$ *vettori di* $\mathbb{R}^3$ *.*

7.1 *Determinare l'unica applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che:*

$$T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = (2,1,1) \quad , \quad T(\mathbf{v}_3) = (4,4,2).$$

7.2 *Determinare la dimensione e una base di* $\operatorname{Ker} T$ *.*

7.3 *Determinare la dimensione e una base di* $\operatorname{Im} T$*.*

Esercizio 8. *(DA ESAME) Sia* $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$T_a(x,y,z) = (x + ay, (1-a)y + z, ax + y + 2z)$$

con $a \in \mathbb{R}$ *.*

8.1 *Determinare per quali valori del parametro* $a \in \mathbb{R}$ *l'omomorfismo* T_a *non è suriettivo.*

8.2 *Per tali valori di* a *determinare una base di* $\operatorname{Ker} T_a$ *e di* $\operatorname{Im} T_a$ *e la loro dimensione.*

8.3 *Per tali valori di* a *è vero che* $\operatorname{Ker} T_a \bigoplus \operatorname{Im} T_a = \mathbb{R}^3$ *?*

Esercizio 9. *(DIFFICILE) In* $\mathbb{R}^4$ *si consideri il sottospazio* U *,*

$$U \ : \ \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y - z + w = 0 \end{cases}$$

9.1 *Stabilire per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *esiste una applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$\begin{gathered} \operatorname{Ker} T = U \\ T(1,-1,1,-1) = (0,-2) \\ T(1,0,-1,0) = (-2,-k) \\ T(0,0,1,1) = (1,k) \end{gathered}$$

Quante ne esistono?

9.2 *Determinare una base di* $\operatorname{Im} T$ *.*

9.3 *Calcolare* $T^{-1}(1,2)$ *.*

Esercizi di riepilogo

Esercizio 10. *Sia* T *l'applicazione lineare da* $\mathbb{R}^2$ *a* $\mathbb{R}^3$ *definita da:*

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \quad , \quad T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

10.1 *Stabilire se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*

10.2 *Trovare una base di* $KerT$ *e* ImT *.*

Esercizio 11. *Sia* V *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}_2[x]$ *tale che:*

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V \iff q(0) = 0 \text{ e } q(1) = 0$$

Sia W *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}_2[x]$ *tale che:*

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in W \iff \int_0^1 q(x) = 0$$

Dimostrare che V *e* W *sono sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}_2[x]$ *e determinarne le basi.*

Esercizio 12. *(DA ESAME) Sia* $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$T_a(x, y, z) = (-x + (2 - a)y + z\ ,\ x - y + z\ ,\ x - y + (4 - a)z)$$

con $a \in \mathbb{R}$ *.*

12.1 Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ *l'omomorfismo* T_a *è suriettivo.*

12.2 Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ *l'omomorfismo* T_a *è iniettivo.*

12.3 Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ *il vettore* $\mathbf{w} = (1, 1, 1) \in ImT_a$ *.*

12.4 Determinare $KerT_1$ *(ossia per* $a = 1$ *).*