Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Soluzioni Foglio di Esercizi 1 – Numeri complessi

Esercizio 1. Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

1.1 Iniziamo portando $z = \frac{i-4}{2i-3}$ in forma algebrica:

$$z = \frac{(i-4)(2i+3)}{(2i-3)(2i+3)} = \frac{2i^2+3i-8i-12}{4i^2+6i-6i-9} = \frac{2i^2-5i-12}{4i^2-9} = \frac{2(-1)-5i-12}{4(-1)-9}$$
$$= \frac{-2-5i-12}{-4-9} = \frac{-14-5i}{-13} = \frac{14+5i}{13}$$

Dunque $\mathrm{Re}(z) = \frac{14}{13}$ e $\mathrm{Im}(z) = \frac{5}{13}$

1.2 Portiamo $z = \frac{3+2i}{i-2}$ in forma algebrica:

$$z = \frac{3+2i}{i-2} = \frac{(3+2i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} = \frac{3i+6+2i^2+4i}{i^2-2i+2i-4} = \frac{3i+6+2(-1)+4i}{i^2-4} =$$
$$= \frac{3i+6-2+4i}{-1-4} = -\frac{4+7i}{5}$$

Dunque $\mathrm{Re}(z) = -\frac{4}{5}$ e $\mathrm{Im}(z) = -\frac{7}{5}$

1.3 Di nuovo, scriviamo $z = \frac{i+1}{i-1}$ in forma algebrica:

$$z = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{i^2+2i+1}{i^2-1} = \frac{-1+2i+1}{-1-1} = \frac{2i}{-2} = -i$$

E quindi $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -1$

Esercizio 2. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

2.1

$$z = \frac{(2+1)(1-i)}{3-2i} = \frac{3(1-i)}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = 3\,\frac{3+2i-3i-2i^2}{9-6i+6i-4i^2} = 3\,\frac{3-i+2}{9+4}$$
$$= 3\,\frac{5-i}{13} = \frac{15}{13} - \frac{3i}{13}$$

2.2

$$z = \frac{1}{i(3+2i)} = \frac{1}{i(3+2i)} \cdot \frac{i(3-2i)}{i(3-2i)} = -\frac{3i-2}{9-4i^2} = \frac{2-3i}{13}$$

2.3

$$z = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i} = i(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2 =$$
$$= i(3+2\sqrt{6}i+4i^2) = -2\sqrt{6}-i$$

2.4

$$z = (\sqrt{2}-1) - i(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1-i+i^1\sqrt{2} = -1-i$$

2.5

$$z = (3+i)(3-i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i) = 10(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i) = 2+i$$

2.6

$$z = \frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+1)(2+1)(3+1)} = \frac{(2+i+2i+i^2)(3+i)}{24} = \frac{(1+3i)(3+i)}{24} =$$
$$= \frac{3+i+9i+3i^2}{24} = \frac{10i}{24} = \frac{5i}{12}$$

2.7

$$z = \overline{(1-i)^3} = \overline{(1-2i+i^2)(1-i)} = \overline{-2-2i} = -2+2i$$

Esercizio 3. Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

3.1

$$z = -3i \quad \Longrightarrow \quad |z| = 3,\ \theta = -\frac{\pi}{2}$$
$$z = -5 \quad \Longrightarrow \quad |z| = 5,\ \theta = \pi$$
$$z = -\sqrt{3}+i, \quad \Longrightarrow, \quad |z| = \sqrt{3+1} = 4,\ \theta = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

3.2

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{2}$$
$$|z| = \sqrt{2},\ \theta = \arctan\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \pi \approx 1.833$$

3.3

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

3.4

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{4}$$
$$z = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta = \arctan\frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} \approx 1.309$$

Esercizio 4. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

4.1 $z = -1 + \sqrt{3}i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$
$z = 3 + 3i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{9+9} = 18,\ \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
$z = 2i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = 2,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

4.2 $z = \sqrt{3} + i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$
$z = \sqrt{3} - i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \theta = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$
$z = -8 = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = 8,\ \theta = -\pi$

4.3 $z = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2},\ \theta = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$

4.4 $z = -\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{\frac{25\cdot 3}{4} + \frac{25}{4}} = 5,\ \theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$

4.5 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1,\ \theta = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$

4.6 $z = \frac{1}{3+3i} = \frac{3-3i}{18} = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = \frac{\sqrt{2}}{6},\ \theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

4.7 $z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4i(\sqrt{3}-i)}{4} = 1 + \sqrt{3}i = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = 2,\ \theta = \frac{\pi}{6}$

4.8 $z = (1+i)(2-2i) = 4 = |z|e^{i\theta}$ con $|z| = 4,\ \theta = 0$

Esercizio 5. Calcolare:

5.1

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

5.2

$$(1-i)^{11} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{11} = 2^{\frac{11}{2}}e^{\frac{11\pi}{4}i}$$

Esercizio 6. Calcolare z^2, z^6 e z^{22} per i seguenti numeri complessi

6.1

$$z = -\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{i} = -\frac{3}{\sqrt{3}} - i = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

Dunque $z^2 = 4e^{\frac{7\pi}{3}i}$, $z^6 = 64e^{7\pi i} = -64$ e $z^{22} = 2^{22}e^{\frac{77\pi}{3}i}$

6.2

$$z = \frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2}i$$

Quindi $z^2 = -\frac{1}{4}$, $z^6 = \frac{1}{64}i^6 = -\frac{1}{64}$ e $z^{22} = -\frac{1}{2^{22}}$

Esercizio 7. Calcolare le sequenti radici e rappresentarle sul piano complesso:

7.1 $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$, $\implies$ il numero complesso di cui dobbiamo fare la radice è ha modulo 2 e argomento $-\frac{\pi}{3}$. Applicando

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

otteniamo $z_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$ e $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6})$

7.2 $\sqrt[4]{2}=(2e^{-\pi i})^{\frac{1}{4}}$ $\implies$ le radici sono:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

7.3 $z=\sqrt[5]{-i}=(e^{-\frac{3\pi}{2}i})^{\frac{1}{4}}$ $\implies$ le radici sono:

$$z_0=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$$
$$z_1=\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}$$
$$z_2=\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}$$
$$z_3=\cos\frac{15\pi}{10}+i\sin\frac{15\pi}{10}$$
$$z_4=\cos\frac{19\pi}{10}+i\sin\frac{19\pi}{10}$$

7.4 $\sqrt[3]{1+i}=(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{3}}$ $\implies$ le radici sono:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

7.5 $\left(\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^{\frac{1}{4}} \implies$ le radici sono:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$z_1 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$z_2 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$
$$z_2 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

7.6 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}} = (e^{\frac{\pi}{2}i})^{\frac{1}{4}} \implies$ le radici sono:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$
$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$$
$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$$
$$z_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$$

7.7 $\sqrt[3]{-1} = (e^{\pi i})^{\frac{1}{4}} \implies$ le radici sono:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}$$
$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni:

8.1 $z^2 + 1 = 0 \implies z_1 = i,\ z_2 = -i$

8.2 $z^2 + z + 1 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8.3 $z^2 - (4+i)z + 4 + 2i = 0 \implies z_{1,2} = \frac{4+i\pm\sqrt{(4+i)^2-16-8i}}{2} \implies z_1 = 2+i,\ z_2 = 2$

8.4 $z^2 = 3 - 4i \implies z_{1,2} = \sqrt{3-4i} = 5e^{-0.93i}$

$$\implies z_1 = \sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46)),\ z_2 = \sqrt{5}(\cos(2.68) + i\sin(2.68))$$

8.5 $(z-2)^3 = -i \implies z = \sqrt[3]{-i} + 2$ dunque possiamo considerare le radici dell'esercizio 7.7 e sommare 2.

8.6 $z^6 - 8z^3 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow$ sostituiamo $w = z^3$ così da ottenere $w^2 - 8w + 9 = 0$ e $w_{1,2} = 4 \pm \sqrt{7}$.

Risostituendo z e considerando la prima soluzione w_1 abbiamo

$$z = \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} = \left((4+\sqrt{7})e^0\right)^{\frac{1}{3}}$$

quindi avremo tre soluzioni:

$$z_0 = (4+\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) \approx 1.8801$$
$$z_1 = (4+\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$z_2 = (4+\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$$

Invece per la seconda soluzione w_2 abbiamo

$$z = \sqrt[3]{4-\sqrt{7}} = \left((4-\sqrt{7})e^0\right)^{\frac{1}{3}}$$

quindi avremo tre soluzioni:

$$z_3 = (4-\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) \approx 1.1064$$
$$z_4 = (4-\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$z_5 = (4-\sqrt{7})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$$

8.7 $z\overline{z} - z + i = 0 \quad \Longrightarrow$ scrivendo $z = x + iy$ otteniamo

$$(x+iy)(x-iy) - (x+iy) + i = x^2 + y^2 - x - iy + i = 0$$

Devono valere contemporaneamente $x^2 + y^2 - x = 0$ e $(1-y) = 0$ ma questo sistema non ammette soluzioni (x e y sono numeri reali).

8.8

$$(z+i)^2 = z^2 + 2zi - 1, \;\; (\sqrt{3}+i)^3 = (2e^{\frac{\pi}{6}i})^3 = 8i$$

Sostituendo $z = x + iy$ si ottiene $z_1 = -2 - 3i, \;\; z_2 = 2 + i$

8.9 $(z-2i)^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Iniziamo calcolando $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{\frac{1}{4}}$:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}$$

$$z_1 = \cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}$$
$$z_2 = \cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}$$
$$z_3 = \cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}$$

e a questo punto non dobbiamo fare altro che aggiungere $2i$ alle soluzioni appena calcolate.

8.10 $z^5 + (1+i)z = 0 \implies z(z^4+1+i) = 0$ possiamo già vedere come una soluzione sia data da $z = 0$. Le altre quattro saranno date dalla soluzione dell'equazione $z^4+i+1 = 0$ quindi calcolando $(-i-1)^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})^{\frac{1}{4}}$:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right)$$
$$z_1 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$
$$z_2 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right)$$
$$z_3 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}\right)$$

Esercizio 9. Sfruttiamo la conoscenza della radice $z_1 = i$ per ridurre il polinomio dato nella forma seguente (usando la regola di Ruffini o la divisione tra polinomi):

$$(z-i)(z^2-2iz-1) = 0$$

Possiamo riconoscere nella seconda parentesi la formula per il quadrato di un binomio, quindi arriviamo a $(z-i)(z-i)^2 = (z-i)^3 = 0$

Per quanto riguarda la seconda equazione, sostituendo $w = z^2$ abbiamo

$$w^3 - iw + w - i = 0$$

Riconoscendo che i è una radice possiamo ridurci, come al punto precedente, all'equazione

$$(w-i)(w^2+i) = (w-i)(w-i)(w+i) = (w-i)^2(w+i) = 0$$

Ci sono quindi due radici coincidenti in $w = i$ e una in $w = -i$. Esprimendo in funzione di z:

$$w = z^2 = i, \implies z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i},\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i}$$
$$w = z^2 = -i, \implies z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i},\ z_2 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$