Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

31/08/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Inserire anche una foto del vostro documento d'identità sovrapposto alla prima pagina del compito. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a poco dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

31/08/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (16 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = (3 + 6x - 2x^3)\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse y (NB: lo studio del segno non è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Utilizzare i limiti calcolati e la crescenza/decrescenza di f per mostrare che la funzione si annulla esattamente in 3 punti (NB: non è richiesto di trovare il valore degli zeri).

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f (NOTA BENE: il calcolo della derivata seconda NON è richiesto).

Problema 2 (14 punti)

2.1 Calcolare il dominio di g,

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}}}{(2x-1)^2}$$

2.2 Calcolare le primitive di g.

2.3 Calcolare gli integrali $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$, $\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$

e quindi dedurre il valore di $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$

2.4 Scrivere il dominio della seguente funzione h

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \mathrm{tg}(x) + \frac{1}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

2.5 Verificare se la funzione h è continua in $x = 0$.

2.6 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $x = -\frac{\pi}{6}$.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

28/08/2020 - Tema A;
Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (16 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = (3 + 6x - 2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f l'asse y (NB: lo studio del segno non è richiesto). (2 punti)

Bisogna imporre $x + 1 \neq 0$ e quindi il dominio è (1p):

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non ha simmetrie.

Intersezione asse y: $y = 3e^3$. (1p)

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (5 punti)

$$\lim_{x\to-1^-}(3 + 6x - 2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = -\exp\left(\lim_{x\to-1^-}\frac{x+3}{x+1}\right) = 0$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $-\infty$.(1p)

$$\lim_{x\to-1^+}(3 + 6x - 2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = -\exp\left(\lim_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x+1}\right) = -\infty$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $+\infty$. Quindi $x = 1$ è asintoto verticale da destra. (1p)

$$\lim_{x\to+\infty}(3 + 6x - 2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \left(\lim_{x\to+\infty}(3 + 6x - 2x^3)\right)\left(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = -\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$m: \lim_{x\to+\infty}(\frac{3}{x} + 6 - 2x^2)e^{\frac{x+3}{x+1}} = -\infty$$

Quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. (1p)

$$\lim_{x\to-\infty}(3 + 6x - 2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \left(\lim_{x\to-\infty}(3 + 6x - 2x^3)\right)\left(\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = +\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to -\infty$:

$$m: \lim_{x\to-\infty} (\frac{3}{x} + 6 - 2x^2)e^{\frac{x+3}{x+1}} = -\infty$$

Quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. (1p)

f è continua perché prodottto, e composizione di funzioni continue (1p).

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. (5 punti)

f è derivabile perché prodotto e composizione di funzioni derivabili (1p)

Derivata (2p):

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6-6x^2)e^{\frac{x+3}{x+1}} + (3+6x-2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}}\frac{-2}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{6x^2+12x+6-6x^4-12x^3-6x^2-6-12x+4x^3}{(x+1)^2}e^{\frac{x+3}{x+1}} = \\ &= \frac{-6x^4-8x^3}{(x+1)^2}e^{\frac{x+3}{x+1}} = \\ &= -2x^3\frac{3x+4}{(x+1)^2}e^{\frac{x+3}{x+1}} \end{aligned}$$

Studio del segno e punti di massimo/minimo (2p):

$$f'(x) \geq 0 \implies -\frac{4}{3} \leq x < -1 \text{ e } -1 < x \leq 0$$

Quindi f cresce in $[-\frac{4}{3}, -1[$ e in $]-1, 0]$; altrimenti f decresce. In $x = -\frac{4}{3}$ f ha un minimo relativo, $P_1 = (-\frac{4}{3}, \frac{-7}{27}e^{-5}) \approx (-1.3333, -0.0017)$.

In $x = 0$ f ha un massimo relativo, $P_2 = (0, 3e^3) \approx (0, 60.25)$.

1.4 Utilizzare i limiti calcolati e la crescenza/decrescenza di f per mostrare che la funzione si annulla esattamente in 3 punti (NB: non è richiesto di trovare il valore degli zeri). (1 punto)

f è strettamente decrescente (quindi iniettiva) in $]-\infty, -4/3[$. Inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ e $f(-4/3) < 0$. Per continuità sicuramente ci deve essere uno zero in $]-\infty, -4/3[$.

In maniera analoga, f è strettamente crescente in $]-1, 0[$ e strettamente decrescente in $]0, +\infty[$. Siccome il segno di f cambia agli estremi di entrambi questi intervalli e f è continua, ci deve essere uno zero in entrambi gli intervalli.

Notare inoltre che nell'intervallo $]-4/3, 0[$ la funzione è monotona crescente ma sempre negativa, quindi non ci possono essere zeri in questo intervallo. (1p)

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f (NOTA BENE: il calcolo della derivata seconda non è richiesto). (3 punti)

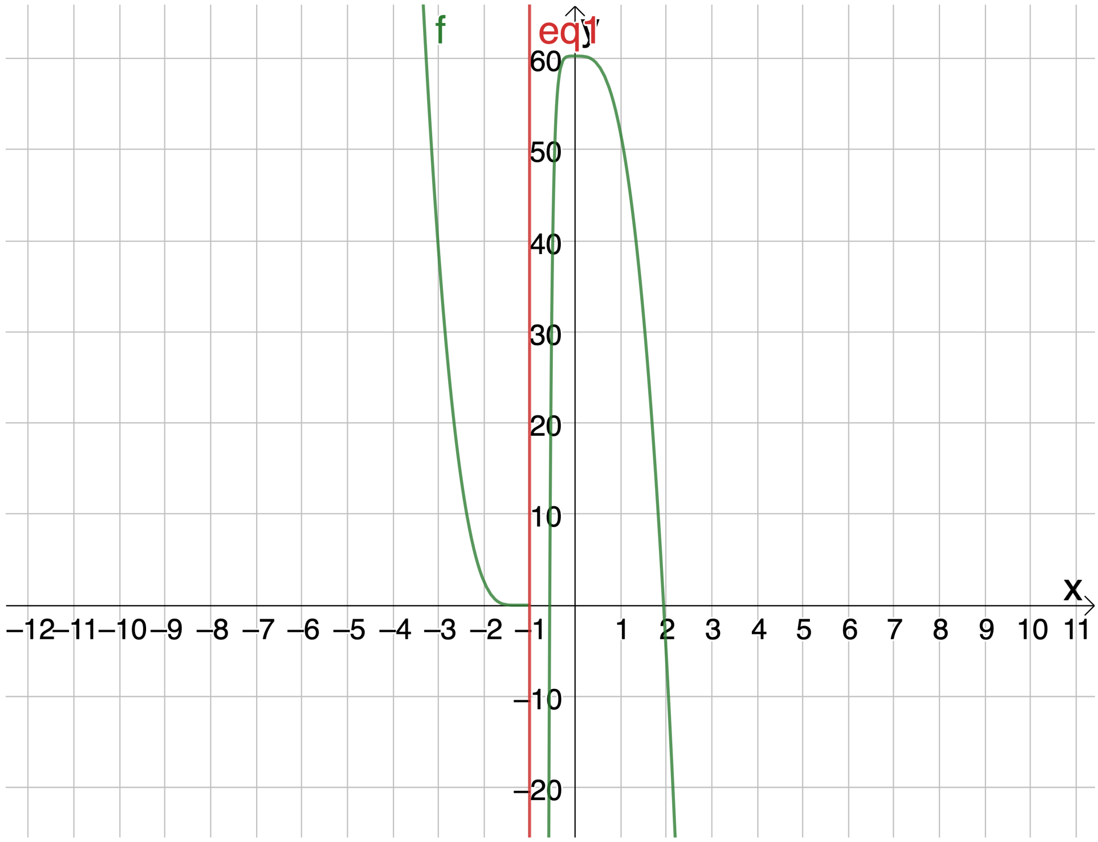

Figura 1: Grafico (2p); L'immagine è $]-\infty, +\infty[$ (1p).

Problema 2 (7 punti)

2.1 Calcolare il dominio di g,

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}}}{(2x-1)^2}$$

Il dominio è dato da $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ (1p).

2.2 Calcolare le primitive di g.

Per il calcolo delle primitive si nota che $(\frac{1}{2x-1})' = -2\frac{1}{(2x-1)^2}$, quindi (3p):

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}}}{(2x-1)^2}\, dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}} + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$.

2.3 Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\, dx \qquad , \qquad \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)\, dx$$

e quindi dedurre il valore di

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$

Si tratta di due integrali impropri. Essendo la funzione integranda positiva, i due integrali esistono e, in questo caso, entrambi convergono. Si ha (1p):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} g(x)\,dx = \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}}\right]_t^0 = \\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{2t-1}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Inoltre (1p)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx &= \lim_{t\to(1/2)^-}\int_{0}^{t} g(x)\,dx = \\ &= \lim_{t\to(1/2)^-}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x-1}}\right]_0^t = \\ &-\frac{1}{2}\lim_{t\to(\frac{1}{2})^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{2t-1}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Infine (1p)

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Problema 3 (7 punti)

3.1 Considerare la funzione

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \mathrm{tg}(x)+\frac{1}{2} & \text{se } x <= 0 \end{cases}$$

3.2 Scrivere il dominio di h e verificare se la funzione è continua in $x = 0$.

Il dominio di h è dato da $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -\pi/2 - k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$. (2p)

h è continua in $x = 0$ perché $h(0) = \frac{1}{2}$ e

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

dove si è usato un limite fondamentale (si può anche utilizzare il teorema di Hopital 2 volte) (2p).

3.3 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $x = -\frac{\pi}{6}$.

Per il calcolo della retta tangente si ha

$$h(-\frac{\pi}{6}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$$

inoltre per $x < 0$ si ha $h'(x) = 1/\cos^2(x)$ e $h'(-\frac{\pi}{6}) = \frac{4}{3}$. Quindi l'equazione della retta tangente è (3p): $y = \frac{4}{3}(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$