Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 5: Trasformazioni lineari

Esercizio 1 (Applicazioni lineari) . . . .

Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T(x, y) = (x - y, x + y + 1, 0)$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $T(x, y) = (2x, x + y)$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $T(x, y) = \sin(x - y)$

Per le applicazioni lineari, trovare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 2 (Applicazioni lineari) . . . .

Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x + ty, tyx) \end{aligned}$$

è lineare. Per tali valori determinare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 3 (Nucleo e immagine) . . . .

È data la seguente applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$:

$$T\left(x, y, z\right) = \left(x + y - 2z,\ -x - y + 2z\right).$$

(a) Determinare una base di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(b) Stabilire se il vettore $(1, 0)$ appartiene all'immagine di T oppure no.

Esercizio 4 (Nucleo e immagine) . . . .

Sia T l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ definita come

$$T\left(x, y, z, w\right) = \left(x + 2y + z - 3w,\ -y + z + 2w,\ 2x + y + 5z\right).$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} T$ e una base di $\operatorname{Im} T$.

(b) Stabilire se $(7, -1, 11) \in \operatorname{Im} T$.

(c) Trovare, se possibile, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \notin \operatorname{Im} T$.

Esercizio 5 (Immagine di vettori) . . . .

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e si consideri l'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (2, -1) \quad \text{e} \quad T(e_3) = (1, 1).$$

(a) Determinare $T(1, 2, 0)$ e $T(3, -1, -1)$.

(b) Determinare $T(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6 (Immagine di vettori) . . . .

Determinare l'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\,(1, 0) = (2, 1) \quad \text{e} \quad (1, 1) \in \operatorname{Ker} T.$$

Esercizio 7 (Immagine di vettori) . . . .

Siano $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare l'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$T(v_1) = T(v_2) = (2, 1, 1) \quad , \quad T(v_3) = (4, 4, 2).$$

(b) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} T$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 8 (Nucleo e immagine (da esame)) . . . .

Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $a \in \mathbb{R}$, tale che

$$T_a(x, y, z) = (x + ay, (1 - a)y + z, ax + y + 2z).$$

(a) Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo T_a non è suriettivo.

(b) Per tali valori di a determinare una base di $\operatorname{Ker} T_a$ e di $\operatorname{Im} T_a$, e la loro dimensione.

(c) Per tali valori di a è vero che $\operatorname{Ker} T_a \bigoplus \operatorname{Im} T_a = \mathbb{R}^3$?

Esercizio 9 (Applicazioni lineari, basi, immagine (difficile)) ....

In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U definito come segue:

$$U \, : \begin{cases} x+y+z+w & = 0 \\ 2x+3y-z+w & = 0. \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $T \, : \, \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= U \\ T(1,-1,1,-1) &= (0,-2) \\ T(1,0,-1,0) &= (-2,-k) \\ T(0,0,1,1) &= (1,k). \end{aligned}$$

Quante ne esistono?

(b) Determinare una base di $\operatorname{Im} T$.

(c) Calcolare $T^{-1}(1,2)$.