Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2021/22

Isadora Antoniano Villalobos

Esame **Soluzioni**, 4 febbraio 2022

Cognome: ______________________ Nome: ______________________

Matricola: ______________________ Firma: ______________________

ISTRUZIONI: DA LEGGERE CON ATTENZIONE!

Questo compito è composto di **6 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.
Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	5	5	5	5	6	4	30
Score:							

Domanda 1 (5 punti)

Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

(a) Quale delle seguenti funzioni non è una funzione di probabilità?

i) Sono tutte funzioni di probabilità.

ii) $p(x) = \frac{5!}{x!(5-x)!}0.3^x 0.7^{5-x}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

iii) $f(x) = e^{-6}\frac{6^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

iv) $p(x) = 0.7^{x-1}0.3, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

v) $p(x) = \frac{1}{6}, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soluzione: *v)*

(b) Sia $W = 2X + 3Y + 1$, con $\mathbb{E}[X] = 1$, $\mathbb{E}[Y] = -1$, $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y] = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera

i) Le informazioni fornite sono insufficienti per calcolare sia $\mathbb{E}[Z]$ che $\text{Var}[Z]$

ii) $\mathbb{E}[Z] = 0$ ma le informazioni fornite sono insufficienti per calcolare $\text{Var}[Z]$

iii) $\text{Var}[Z] = 13$ ma le informazioni fornite sono insufficienti per calcolare $\mathbb{E}[Z]$

iv) $\mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z] = 13$

v) Nessuna delle precedenti opzioni è vera

Soluzione: *ii)*

(c) Se A e B sono due eventi con $\mathbb{P}[A] > 1/2$ e $\mathbb{P}[B] > 1/2$ quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $A \cap B \neq \emptyset$

ii) $\mathbb{P}[A \cap B] = 0$

iii) $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B]$

iv) $\mathbb{P}[A \cup B] > 1$

v) A e B sono indipendenti

Soluzione: *i)*

(d) Se X e Y sono due variabili casuali con media pari a 0, quale delle seguenti espressioni è vera?

i) $\mathbb{E}[aX + bY + c] = 0$ per qualsiasi valore di $a, b, c \in \mathbb{R}$

ii) $\mathbb{E}[X + Y - 1] = 1$

iii) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$.

iv) $\mathbb{E}[XY] = 0$

v) $\mathbb{E}[XY] = \text{Cov}(X, Y)$

Soluzione: *v)*

(e) Un'urna contiene 23 palline tra cui 7 bianche e 12 nere. Si estraggono, in modo sequenziale e con reinserimento, 4 palline dall'urna. Qual è la probabilità che fra le palline estratte ve ne siano al massimo 2 bianche?

i) `phyper(2,7,16,4)`
ii) `pbinom(2,4,7/23)`
iii) `ppois(2,4*7/23)`
iv) `dbinom(2,4,7/23)`
v) `dhyper(2,7,16,4)`

Soluzione: *ii)*

Domanda 2 (5 punti)
Il tempo di assemblaggio di un nuovo modello di telefono cellulare è in media 400 secondi. Si supponga inoltre che il tempo di assemblaggio sia ben descritto da una variabile casuale esponenziale.

(a) Qual è la probabilità che il tempo di assemblaggio del prossimo telefono cellulare sia superiore a 460 secondi?

Soluzione: Sia $X \sim$Exp(1/400) il tempo di assamblaggio. La probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}[X > 460] = e^{-460/400} = 0.3166$$

(b) Un operaio assembla 50 cellulari al giorno. Quanti di questi ci si aspetta abbiano un tempo di assemblaggio superiore a 460 secondi?

Soluzione: Sia $Y \sim Bin(50, 0.3166)$ il numero di cellulari assemblati dal operaio in più di 460 secondi, allora $E(Y) = 50 \cdot 0.3166 = 15.83 \approx 16$. Circa 16 sono i cellulari con tempo di assemblaggio superiore a 460 secondi.

(c) Si calcoli la probabilità che il tempo totale di assemblaggio di 50 cellulari sia più di 5 ore (è possibile sostituire il calcolo con un opportuno comando di R).

Soluzione: Il tempo totale (in secondi) di assemblaggio di 50 cellulari è $\sum_{i=1}^{50} X_i \sim Gamma(\alpha = 50, \theta = 1/400)$. Perciò la probabilità richiesta è

```
1-pgamma(60*60*5,50,1/400)
```

Domanda 3 (5 punti)
Le slot machine moderne sono dei video giochi in cui le vincite vengono determinate da generatori di numeri casuali. Nel passato, le slot machine funzionavano tirando una leva che faceva girare in modo indipendente tre ruote, ognuna con 20 simboli tutti egualmente probabili. Si assuma che la ruota centrale abbia 9 campane fra i suoi simboli e che le altre due ruote abbiano solo una campana ciascuna.

(a) Ottenendo un tris di campane si vince l'intero jackpot. Qual è la probabilità che ciò avvenga?

Soluzione: Definiamo i tre eventi $A_i =$"campana nella ruota i-esima", $i = 1, 2, 3$. La probabilità di vincere il jackpot è, usando l'indipendenza dei risultati nelle tre ruote,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{20}\frac{9}{20}\frac{1}{20} = 0.001125.$$

(b) Determinare la probabilità di ottenere due campane nelle ruote laterali e un simbolo diverso da campana in quella centrale.

Soluzione: La probabilità richiesta è

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{20}\frac{11}{20}\frac{1}{20} = 0.001375.$$

(c) Determinare la probabilità di non vincere il jackpot, sapendo che nella prima ruota è uscita una campana.

Soluzione: Sapere che nella prima ruota è uscita una campana, non cambia la probabilità che esca campana nelle altre due. La probabilità richiesta è perciò

$$1 - P(A_2 \cap A_3) = 1 - P(A_2) \cdot P(A_3) = 1 - \frac{9}{20}\frac{1}{20} = 0.9775.$$

Domanda 4 (5 punti)

Siano (X, Y) le coordinate di un punto scelto a caso (cioè in modo uniforme) nel triangolo D di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$. Poiché l'area del dominio è pari a $1/2$, allora la densità congiunta di X e Y è:

$$f(x, y) = 2I_D(x, y),$$

dove $I_D(x, y)$ è la funzione indicatrice del dominio D.

(a) Si scrivano le funzioni di densità marginali di X e Y.

Soluzione:

$$f_X(x) = \int_0^{-x+2} 2dy = 2(2 - x), \ \ x \in (1, 2)$$

$$f_Y(y) = \int_1^{-y+2} 2dx = 2(1 - y), \ \ y \in (0, 1)$$

(b) E' vero che X e Y sono indipendenti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione: No, X e Y non possono essere indipendenti perché il dominio D è un triangolo e perciò i valori che assume una variabile dipendono dai valori dell'altra.

(c) Sia A l'area (casuale) del rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, Y)$, (X, Y) e $(X, 0)$. Si calcoli il valore atteso di A.

Soluzione: L'area del rettangolo non è altro che il prodotto $X \cdot Y$. Perciò il valore atteso richiesto è:

$$E(A) = E(X \cdot Y) = \int\int_D 2xy\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{-x+2} 2xy\,dy\,dx = ... = 5/12$$

Domanda 5 (6 punti)

Un'urna contiene inizialmente 2 palline rosse e 1 pallina nera. Due giocatori, A e B, effettuano delle estrazioni successive con le seguenti regole. Se la pallina estratta è nera, essa viene messa da parte. Se la pallina estratta è rossa essa viene rimessa nell'urna insieme ad una nuova pallina nera. A vince non appena nell'urna ci sono 3 palline nere, B vince non appena nell'urna non ci sono più palline nere. Sia X_n il numero di palline nere presenti nell'urna dopo n giocate (il numero di palline rosse rimane sempre 2).

(a) Si scriva la matrice di transizione associata alla catena di Markov $\{X_n\}_n$.

Soluzione: Lo spazio degli stati è $\{0, 1, 2, 3\}$, dato che il numero possibile di palline nere nell'urna in ogni istante è compreso fra 0 e 3. La matrice di transizione è dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Si calcoli la matrice di transizione a due passi.

Soluzione: La matrice di transizione a due passi è

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Si calcoli la probabilità che dopo 2 estrazioni vi siano 2 palline nere nell'urna.

Soluzione: Il vettore delle probabilità iniziali è $p^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$, poiché all'inizio del gioco c'è una sola pallina nera nell'urna, $X_0 = 1$. La distribuzione marginale a due passi è $p^{(2)} = p^{(0)}P^2 = (1/3, 1/3, 0, 1/3)$. Dunque, $P(X_2 = 2) = 0$.

Domanda 6 (4 punti)

(a) Spiegare brevemente il metodo di Monte Carlo.

Soluzione: La risposta corretta non è unica...

(b) Siano X e Y due variabili casuali indipendenti normalmente distribuite, con medie pari a 1 e 0 rispettivamente, e con la stessa varianza, pari a 2.5. Si definisca la probabilità

$$p = \mathbb{P}[(X-1)^2 + Y^2 < 4]$$

e si scriva il codice di `R` necessario per stimare il valore di p per il metodo di Monte Carlo.

Soluzione: Il codice R per la stima è:

```
x <- rnorm(1000,1,sqrt(2.5))
y <- rnorm(1000,0,sqrt(2.5))
p <- mean(((x-1)^2 + y^2) < 4)
```