Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 3: Basi e dimensioni

Esercizio 1 (Generatori e basi) ....

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di $\mathbb{R}^3$, completarlo ad una base o estrarre una base.

(a) $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$;

(b) $T = \{(1,0,0),(0,1,1),(5,1,1)\}$;

(c) $U = \{(1,0,0),(5,1,1)\}$;

(d) $V = \{(1,1,0),(0,1,1),(5,1,1),(1,2,1)\}$;

Esercizio 2 (Generatori e basi) ....

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di $\mathbb{R}^4$, completarlo ad una base o estrarre una base.

(a) $S = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(b) $T = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(c) $U = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(d) $V = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1),(0,3,0,0)\}$;

Esercizio 3 (Generatori e basi) ....

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}_2[x]$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di $\mathbb{R}_2[x]$, completarlo ad una base o estrarre una base.

(a) $S = \{1, x, x^2\}$;

(b) $S = \{1, x\}$;

(c) $S = \{x, x^2\}$;

(d) $S = \{1+x, x, x^2\}$;

(e) $S = \{1, x, x^2, 1+x\}$;

(f) $S = \{1, x, 2+x\}$;

(g) $S = \{1, x, x^2, 2-x\}$;

(h) $S = \{2-x, x, x^2\}$;

(i) $S = \{1, x+x^2, 1+x+x^2\}$;

(j) $S = \{1, x+x^2, 1+x-x^2\}$;

(k) $S = \{x + x^2, 1 + x + x^2\}$;

Esercizio 4 (Basi) . . . .

(a) Stabilire se i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 0, 2, -2), \quad v_2 = (2, 0, 2, 1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 0, 1)$$

sono linearmente indipendenti.

(b) Stabilire se $S = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(c) È possibile trovare un vettore v_4 che completi S a una base di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 5 (Sottospazi vettoriali) . . . .

Sono dati i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2), \quad v_3 = (1, k, -1).$$

(a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$?

(b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio $E = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(c) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio $F = \mathrm{Span}\{v_2, v_3\}$.

Esercizio 6 (Soluzioni di sistemi lineari) . . . .

Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x, y e z:

$$S_1 \,:\, x - y + 2z = 0 \qquad S_2 \,:\, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad S_3 \,:\, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determinare in ciascun caso una base (e quindi la dimensione) del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 7 (Soluzioni di sistemi lineari) . . . .

Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x, y, z e w:

$$S_1 \,:\, x - 2y + w = 0 \qquad S_2 \,:\, \begin{cases} x - 2y + w = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare in ciascun caso una base (e quindi la dimensione) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 8 (Sottospazi vettoriali) . . . .

(a) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $u = (2, t, 0, 1)$ appartiene al sottospazio W generato da $v = (1, 0, 0, 1)$ e $w = (0, 1, 0, 1)$.

(b) Calcolare poi la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da u, v e w al variare di $t \in \mathbb{R}$.