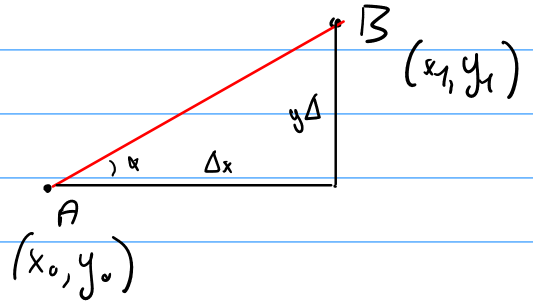
Derivate



Eq: $y = mx + q$ → coeffic. angolare

q = intercetta

troviamo la retta

1) Passa per A $\qquad y - y_0 = m(x - x_0)$

(tutte le rette per un punto tranne la verticale $x = x_0$)

retta passante per A e B: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)} = tg(\alpha)$

↓

$$\underline{\underline{\text{eq. } y = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0) + y_0}}$$

↓ eq. finale

punto A

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{array}\right\} \text{verifica: passaggio per A e B}$$

punto B

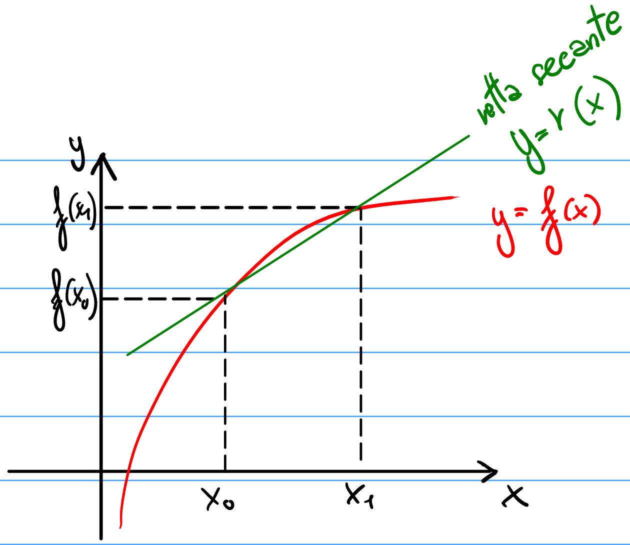
↓

passaggio per due punti,

tranne quando $x_0 = x_1$

↓

punti allineati verticalmente, retta $x = x_0$



$$y = r(x) = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m}(x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{q}$$

cosa succede se $f(x_1)$ si avvicina ad $f(x_0)$?

la retta secante diventa pian piano la retta tangente

quando $x_1 \to x_0$ la retta secante tende alla tg( )

al grafico di f nel punto x_0!!

eq. retta tangente: $y = \bar{m}(x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad \bar{m} \neq m$

$$\bar{m} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{rapporto incrementale}} = f'(x_0)$$

Definizione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ($A$ = unione di intervalli)

$x_0 \in A$; se il limite per $x \to x_0$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito

allora diremo che f é derivabile (o differenziabile) in x_0 e la derivata di f in x_0 vale

(definizione di derivata da sapere)

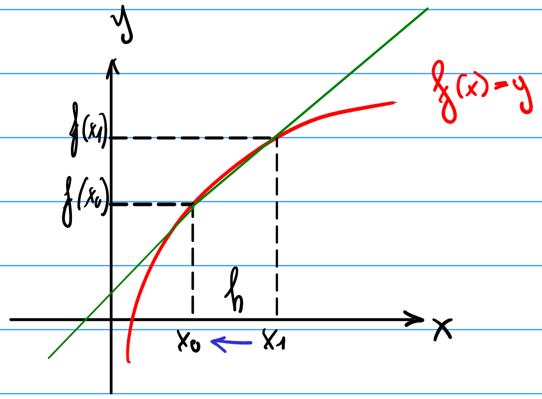
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

note: 1) f derivabile in x_0 allora la retta tg() al $G(f)$ in x_0 é $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

2) notazione $f'(x_0)$; $D[f(x)](x_0)$; $\dfrac{df}{dx} x_0$

3) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

altro modo di scrivere il rapporto incrementale



$h = x - x_0$ $\qquad$ $x = x_0 + h$

1) $f(x) = c \in \mathbb{R}$ funz. costante

$D = \mathbb{R}$; $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

quindi la derivata di una funzione costante da 0 per $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x$ Dominio $= \mathbb{R}$ $x_0 \in$ Dominio

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

quindi $D[x](x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = [\tfrac{0}{0}]$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} \quad \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

$$D[x^2](x_0) = 2x_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad D: [0, +\infty[$

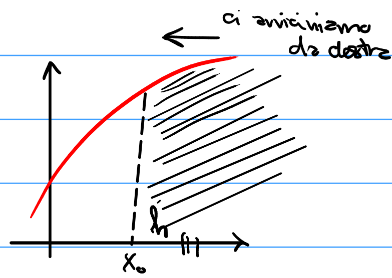
$x_0 \in D$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \to \frac{x - x_0}{x - x_0 (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

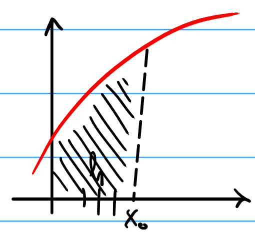
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{se } x_0 \neq 0 \quad \underline{\underline{x_0 > 0}}$$

$$D[\sqrt{x}](x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{se } x_0 > 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Teorema

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A$

se la derivata sinistra assume valore $\underline{s}$ e la dx $\underline{d}$ $\in \mathbb{R}$

allora f é derivabile in x_0 se e solo se $s = d$.

In questo caso abbiamo che: $f'(x_0) = s$

esempio $f(x) = |x|$; $D = \mathbb{R}$

$x_0 > 0$: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

$\left(x \to x_0\right)$
$\Rightarrow x > 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

$x_0 < 0$: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

$\begin{pmatrix} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{pmatrix} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1$

$$D[|x|](x_0) = \pm 1 \begin{cases} \text{se } x > 0 & +1 \\ \text{se } x < 0 & -1 \end{cases}$$

$\boxed{x_0 = 0}$ $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h + 0}{h} = -1$

per il teorema, $f(x) = |x|$ non é derivabile in $x_0 = 0$

Teorema

se f é derivabile in x_0 allora f é continua in x_0
(non vale viceversa)