Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 3 – Basi e dimensione di sottospazi vettoriali

Esercizio 1. *Nello spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]$ *dei polinomi in* x *a coefficienti reali, si determini la dimensione dei seguenti sottospazi:*

1.1 $W_1 = \operatorname{Span}\left\{1 + x, (1 + x)^2\right\}$.

1.2 $W_2 = \operatorname{Span}\left\{1, x + x^2, x^3, (1 + x)^3\right\}$.

1.3 $W_3 = \operatorname{Span}\left\{x, x^2, x - x^2, x + x^2\right\}$.

Esercizio 2. *Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$ *è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di* $\mathbb{R}^3$ *, completarlo ad una base o estrarre una base.*

2.1 $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ *;*

2.2 $T = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (5, 1, 1)\}$ *;*

2.3 $U = \{(1, 0, 0), (5, 1, 1)\}$ *;*

2.4 $V = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (5, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ *;*

Esercizio 3. *Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$ *è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di* $\mathbb{R}^4$ *, completarlo ad una base o estrarre una base.*

3.1 $S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

3.2 $T = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

3.3 $U = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

3.4 $V = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 3, 0, 0)\}$ *;*

Esercizio 4. *Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}_2[x]$ *è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Se il sottoinsieme non costituisce una base di* $\mathbb{R}_2[x]$ *, completarlo ad una base o estrarre una base.*

4.1 $S = \{1, x, x^2\}$ *;*

4.2 $S = \{1, x\}$ *;*

4.3 $S = \{x, x^2\}$ *;*

4.4 $S = \{1 + x, x, x^2\}$ *;*

4.5 $S = \{1, x, x^2, 1 + x\}$ *;*

4.6 $S = \{1, x, 2 + x\}$ *;*

4.7 $S = \{1, x, x^2, 2 - x\}$;

4.8 $S = \{2 - x, x, x^2\}$;

4.9 $S = \{1, x + x^2, 1 + x + x^2\}$;

4.10 $S = \{1, x + x^2, 1 + x - x^2\}$;

4.11 $S = \{x + x^2, 1 + x + x^2\}$;

Esercizio 5. *Stabilire se i vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 0, 2, -2), \quad v_2 = (2, 0, 2, 1) \quad e \quad v_3 = (1, 1, 0, 1)$$

sono linearmente indipendenti. Stabilire se $S = (v_1, v_2, v_3)$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$ *. È possibile trovare un vettore* v_4 *che completi* S *a una base di* $\mathbb{R}^4$ *?*

Esercizio 6. *Sono dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2), \quad v_3 = (1, k, -1).$$

6.1 *Per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *i tre vettori formano una base di* $\mathbb{R}^3$ *?*

6.2 *Calcolare, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *, la dimensione del sottospazio* $E = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

6.3 *Calcolare, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *, la dimensione del sottospazio* $F = \mathrm{Span}\{v_2, v_3\}$.

Esercizio 7. *Stabilire per quali valori di* $t \in \mathbb{R}$ *il vettore* $u = (2, t, 0, 1)$ *appartiene al sottospazio* W *generato da* $v = (1, 0, 0, 1)$ *e* $w = (0, 1, 0, 1)$ *. Calcolare poi la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato da* u, v *e* w *al variare di* $t \in \mathbb{R}$ *.*

Esercizio 8. *Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite* x, y *e* z *:*

$$S_1 \,:\, x - y + 2z = 0 \qquad S_2 \,:\, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad S_3 \,:\, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determinare in ciascun caso una base (e quindi la dimensione) del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 9. *Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite* x, y, z *e* w *:*

$$S_1 \,:\, x - 2y + w = 0 \qquad S_2 \,:\, \begin{cases} x - 2y + w = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare in ciascun caso una base (e quindi la dimensione) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ *formato dalle soluzioni del sistema.*

Esercizio 10. *Sia* E *il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *formato dalle soluzioni dell'equazione* $x + y + z + w = 0$ *, e sia*

$$F = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

10.1 *Determinare una base e la dimensione di* E *e di* F *.*

10.2 *È vero che* $F \subset E$ *?*

10.3 *È vero che* $F = E$ *?*