Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 4 – Basi e dimensione di sottospazi vettoriali

Esercizio 1. *Siano* U *e* W *due sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^3$ *tali che*

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si determinino una base di U *,* W *e* $U \cap W$ *.*

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *sono dati:*

a) Il sottospazio E *delle soluzioni dell'equazione* $x + y - z = 0$ *.*

b) Il sottospazio F *generato dai vettori* $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *.*

2.1 Determinare una base e la dimensione di E *.*

2.2 Trovare una base e la dimensione di $E \cap F$ *.*

2.3 Trovare una base e la dimensione di $E + F$ *.*

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$v_1 = (0, 1, -2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2, -1) \quad v_3 = (3, 2, 2, -1), \quad v_4 = (0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_5 = (0, 0, 0, 1).$$

3.1 Trovare una base e la dimensione di $U = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{Span}\{v_2, v_3, v_4\}$

3.2 Lo spazio $W = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\} + \operatorname{Span}\{v_2, v_3, v_4\}$ *può coincidere con* $\mathbb{R}^4$ *?*

3.3 Calcolare una base e la dimensione di W *.*

Esercizio 4. *Calcolare somma e intersezione dei seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

a)
$$V = \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\} \qquad \text{e} \qquad W = \operatorname{Span}\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$$

b)
$$V = \operatorname{Span}\{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\} \qquad \text{e} \qquad W = \operatorname{Span}\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

Esercizio 5. *Considerati in* $\mathbb{R}^4$ *i sottoinsiemi*

$$S = \{(x, y, z, w) \, : \, x + z = 0, 3y - w = 0\} \qquad \text{e} \qquad T = \{(x, y, z, w) \, : \, x + z = 0, y + 2w = 0\},$$

verificare che sono sottospazi e determinare una base di $S \cap T$ *e* $S + T$ *.*

Esercizio 6. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$S = \{(x, y, z) \,:\, 2x + 3y - z = 0\} \qquad \text{e} \qquad T = \{(x, y, z) \,:\, x + 2y - z = 0\}.$$

6.1 Mostrare che S *e* T *sono sottospazi vettoriali, trovare una loro base e la dimensione.*

6.2 Mostrare che $S \cap T$ *ha dimensione* 1 *e trovare una sua base.*

6.3 Trovare una base e la dimensione di $T + S$ *.*

Esercizio 7. *Determinare una base e la dimensione dei sottospazi di* $\mathbb{R}^4$ *dati da* W_1 *,* W_2 *,* $W_1 \cap W_2$ *e* $W_1 + W_2$ *per le seguenti scelte di* W_1 *e* W_2 *.*

7.1 $W_1 = \{(x, y, z, w) \,:\, 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z, w) \,:\, 2x + y = 0, y = 0\}$ *;*

7.2 $W_1 = \{(x, y, z, w) \,:\, x + y = 0, z + w = 0\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z, w) \,:\, x + z = 0, y = 0\}$ *;*

7.3 $W_1 = \{(x, y, z, w) \,:\, 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ *e* $W_2 = \mathrm{Span}\{(1, 1, 1, 1)\}$ *;*

7.4 $W_1 = \{(x, y, z, w) \,:\, 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ *e* $W_2 = \mathrm{Span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ *;*

7.5 $W_1 = \{(x, y, z, w) \,:\, x + 2y + z - w = 0\}$ *e* $W_2 = \mathrm{Span}\{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 0, 1, 0)\}$ *;*

7.6 $W_1 = \mathrm{Span}\{(1, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 2), \}$ *e* $W_2 = \mathrm{Span}\{(2, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ *;*