Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2023/24

Isadora Antoniano Villalobos

Esame A **Soluzioni**, 12 gennaio 2024

Cognome: ______________________ Nome: ______________________

Matricola: ______________________ Firma: ______________________

Istruzioni: Da leggere con attenzione!

Questo compito è composto di **5 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.
Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	5	4	6	6	9	30
Score:						

Domanda 1 (5 punti)

Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

(a) Se $X \sim$Exp(4) e $Y \sim$Exp(5), si può affermare che:

i) $E[Y] = 1/5$
ii) $E[X - Y] = 1/4 - 1/5$
iii) $\mathrm{Var}[Y] < \mathrm{Var}[X]$
iv) Tutte le precedenti.
v) Nessuna delle precedenti.

Soluzione: *iv)*

(b) Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i)
$$\sum_{x=0}^{100} \binom{100}{x} x\, 0.2^x\, 0.8^{(100-x)} = 20.$$

ii)
$$\int_0^{\infty} e^{-8} \frac{8^x}{x!} dx = 1.$$

iii)
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

iv) Tutte le precedenti.
v) Nessuna delle precedenti.

Soluzione: *i)*

(c) Se $X_1, \ldots, X_{30}$ sono variabili casuali indipendenti con distribuzione Normale di media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 9$, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $E[\bar{X}] < E[X_1]$
ii) $E[\bar{X}] = 30$
iii) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = 9$
iv) $P(\bar{X} = 2) = 0.5$
v) $P(\bar{X} > 2) = 0.5$

Soluzione: *v)*

(d) Se A e B sono due eventi indipendenti, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) Nessuna delle sucessive.

ii) $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A]$

iii) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$

iv) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[B]$

v) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

Soluzione: *iii)*

(e) Secondo un sondaggio, in un certo paese, il 80% delle persone di almeno 28 anni di età ha completato 3 anni di università. Si scelgono a caso 6 individui di almeno 28 anni di età. La probabilità che esattamente 2 di loro **non** abbiano completato 3 anni di università è:

i) 0.0154

ii) 0.2458

iii) 0.04

iv) 0.64

v) Nessuna delle precedenti.

Soluzione: *ii)*

Domanda 2 (4 punti)

Si spieghi il concetto di mediana, e si fornisca un esempio della sua utilità.

Soluzione: La risposta corretta non è unica.

Si deve menzionare la definizione di mediana come punto che divide la distribuzione in due parti con la stessa probabilità, pari a 1/2, a destra e a sinistra, e l'importanza della mediana per indicare il centro della distribuzione, in particolar in casi di assimetria della stessa.

Domanda 3 (6 punti)

Il movimento dei clienti tra i tre principali fornitori di servizi di telefonia cellulare cinesi, (1) China Telecom, (2) China Unicom e (3) China Mobile può essere analizzato attraverso una catena di Markov. Una "transizione" in questo contesto si riferisce a un'opportunità per un cliente, alla scadenza del contratto, di rinnovare con l'attuale fornitore oppure passare a uno degli altri due fornitori, secondo la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.25 & 0.3 & 0.45 \end{pmatrix}$$

(a) Se un cliente firma un contratto con China Telecom, qual è la probabilità che al primo rinnovo rimanga con lo stesso fornitore?

Soluzione: Sia $X(t)$ la catena di Markov usata per modellare questo fenomeno. La la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}[X(1) = 1 | X(0) = 1] = p_{1,1} = 0.1$$

(b) Se un cliente sceglie a caso il suo primo fornitore, qual è la probabilità che al secondo rinnovo scelga China Telecom?

Soluzione: La distribuzione iniziale in questo caso è $\pi^{(0)} = [1/3, 1/3, 1/3]$ e a matrice di transizione a due passi è

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.6200 & 0.1650 & 0.2150 \\ 0.1575 & 0.6075 & 0.2350 \\ 0.3775 & 0.3250 & 0.2975 \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = [0.385, 0.3658, 0.2492],$$

la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}[X(2) = 1] = \pi_1^{(2)} = 0.385$$

(c) Se un cliente sceglie a caso il suo primo fornitore, qual è la probabilità che dopo il primo rinnovo rimanga con lo stesso?

Soluzione: La distribuzione iniziale in questo caso è di nuovo $\pi^{(0)} = [1/3, 1/3, 1/3]$ e la probabilità richiesta è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X(1) = X(0)] &= \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}[X(1) = x | X(0) = x] \mathbb{P}[X(0 = x)] \\ &= \sum_{x=1}^{3} P_{x,x} \pi_x^{(0)} = \frac{0.1 + 0.05 + 0.45}{3} = \frac{0.6}{3} = 0.2 \end{aligned}$$

Domanda 4 (6 punti)

La lunghezza, X dei cavi caricabatteria prodotti da una ditta seguono una distribuzione normale con media 300 cm e varianza ignota. Si sa, inoltre, che ogni cavo risulta difettoso con probabilità 0.09.

(a) Si consideri una variabile casuale Z con distribuzione normale standard e si trovi il valore di z per il quale $\mathbb{P}[Z < z] = 0.9495$

Soluzione: z è uguale al quantile di livello $\alpha = 0.9495$ della normale standard. Dalla tavola della normale, si trova che $z = 1.64$.

(b) Quanto vale la varianza di X se con una probabilità pari a 0.9495 la lunghezza di un cavo scelto a caso è minore di 301.64 cm?

Soluzione: Si sa che $X \sim \mathrm{N}(300, \sigma^2)$. Inoltre, $0.9495 = \mathbb{P}[X < 301.64] = \mathbb{P}[Z < (301.64 - 300)/\sigma]$. Allora $(301.64 - 300)/\sigma = z = 1.64$. Quindi, $\sigma = 1$. La varianza richiesta è dunque uguale a $\sigma^2 = 1$.

(c) Qual è la probabilità che in una scattola con 20 cavi, almeno 5 di essi siano difettosi? È possibile sostituire la risposta numerica con un opportuno commando di R.

Soluzione: Sia Y il numero di cavi difettosi nella scattola. Allora $Y \sim \mathrm{Bin}(20, 0.09)$. La probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}[Y \geq 5] = 1 - \mathrm{pbinom}(5 - 1, 20, 0.09) = 0.029$$

Domanda 5 (9 punti)

La seguente tabella corrisponde alla distribuzione di probabilità congiunta del numero di automobili (X) e del numero di autobus (Y) che svoltano a sinistra, in una intersezione, ad ogni ciclo del semaforo.

		Y		
		0	1	2
X	0	0.150	0.100	0.065
	1	0.125	0.095	0.060
	2	0.150	0.060	0.045
	3	0.075	0.045	0.030

(a) Qual è la probabilità che esattamente due automobili e un autobus svoltino a sinistra durante un ciclo del semaforo?

Soluzione: $\mathbb{P}[X = 2, Y = 1] = P_{X,Y}(2, 1) = 0.06$

(b) Si calcoli la probabilità che durante un ciclo del semaforo svoltino a sinistra lo stesso numero di autobus e di automobili.

Soluzione:

$$\mathbb{P}[X = Y] = P_{X,Y}(0, 0) + P_{X,Y}(1, 1) + P_{X,Y}(2, 2) = 0.15 + 0.095 + 0.045 = 0.29$$

(c) Qual è la probabilità che esattamente due automobili svoltino a sinistra durante un ciclo del semaforo? E la probabilità che svolti a sinistra esattamente un autobus?

Soluzione: La probabilità che esattamente tre automobili svoltino a sinistra è

$$\mathbb{P}[X = 2] = P_X(2) = P_{X,Y}(2, 0)+P_{X,Y}(2, 1)+P_{X,Y}(2, 2) = 0.15+0.06+0.045 = 0.255$$

La probabilità che esattamente due autobus svoltino a sinistra è

$$\mathbb{P}[Y = 1] = P_Y(1) = P_{X,Y}(0, 1) + P_{X,Y}(1, 1) + P_{X,Y}(2, 1) + P_{X,Y}(3, 1) = 0.3$$

(d) Le due variabili sono indipendenti? Giustificare adeguatamente la risposta.

Soluzione: X e Y sono indipendenti se $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ per ogni possibile coppia (x, y). Siccome

$$P_{X,Y}(2, 1) = 0.06 \neq P_X(x)P_Y(y) = 0.255 \cdot 0.3 = 0.0765,$$

le due variabili **non** sono indipendenti.

(e) Sapendo che durante un certo ciclo di semaforo svoltano a sinistra due automobili, qual è la probabilità che svolti anche un autobus (durante lo stesso ciclo)?

Soluzione:

$$\mathbb{P}[Y = 1|X = 2] = \frac{P_{X,Y}(2, 1)}{P_X(2)} = \frac{0.06}{0.255} = 0.2353$$

(f) Sapendo che durante un certo ciclo di semaforo svoltano a sinistra due automobili, qual è il numero atteso di autobus che svoltano a sinistra (durante lo stesso ciclo)?

Soluzione: Dalla domanda precedente, si sa che $\mathbb{P}[Y = 1|X = 2]0.2353$. Inoltre,

$$\mathbb{P}[Y = 0|X = 2] = \frac{P_{X,Y}(2,0)}{P_X(2)} = \frac{0.15}{0.255} = 0.5882$$

$$\mathbb{P}[Y = 2|X = 2] = \frac{P_{X,Y}(2,2)}{P_X(2)} = \frac{0.045}{0.255} = 0.1765,$$

quindi

$$\mathbb{E}[Y|X = 3] = 0 \cdot 0.5882 + 1 \cdot 0.2353 + 2 \cdot 0.1765 = 0.5883$$