Algebra Lineare A.A. 2020-2021

Esame 30/06/2021

Il tempo di risoluzione del compito è di **90 minuti**. Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso. Risposte prive di giustificazione non verranno considerate.

Esercizio 1. Si individui quale tra le seguenti è un'equazione del piano π passante per il punto $P_0 = (1, 1, -1)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $2x + z - 3 = 0$.
b) $x + y - z - 3 = 0$.
c) $2x + z - 1 = 0$.
d) $2x + y + z = 0$.

Soluzione: La risposta esatta è la c). Data l'equazione cartesiana $ax + by + cy + d = 0$ di un piano nello spazio, i coefficienti a, b, c sono le componenti di un vettore ortogonale al piano. Cerchiamo quindi un'equazione in cui il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\mathbf{n}$. La nostra scelta si restringe dunque alle opzioni a) e c). Imponendo il passaggio per P_0 si ottiene che l'equazione di π è quella al punto c).

Esercizio 2. Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare definita da $T_t(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si determini la matrice associata all'applicazione lineare T_t rispetto alla base canonica.

Soluzione: La matrice A associata all'applicazione lineare T_t è la matrice tI, dove I è la matrice identità di dimensione n. In altre parole $A = (a_{ij})$ con $a_{ii} = t$ e $a_{ij} = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$ e $j \neq i$.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare

$$\Sigma_k = \begin{cases} x + y + (2k-1)z = 3 \\ (k-2)x - 2y + 2z = -6 \\ (k-1)x - y + z = k - 3 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$, determinare:

i) i valori di k per cui il sistema è compatibile;

ii) i valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione;

iii) i valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni. Solo per tali valori di k si esplicitino le soluzioni del sistema.

Soluzione: La matrice dei coefficienti A_k e la matrice completa A'_k del sistema Σ_k sono:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k-1 \\ k-2 & -2 & 2 \\ k-1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A'_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k-1 & 3 \\ k-2 & -2 & 2 & -6 \\ k-1 & -1 & 1 & k-3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\det A_k = 2(k-1)-(k-2)+(2k-1)(2-k+2(k-1)) = k+k(2k-1) = 2k^2 = 0$ se e solo se $k = 0$. Ne segue che per $k \neq 0$, $\mathrm{rg}(A_k) = \mathrm{rg}(A'_k) = 3$ quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette una e una sola soluzione.

Se $k = 0$ le matrici dei coefficienti e completa del sistema diventano:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Una volta ridotte a scala tramite l'algoritmo di Gauss:

$$A_0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A'_0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\mathrm{rg}(A_0) = \mathrm{rg}(A'_0) = 1$. Ne segue che il sistema è ancora compatibile e (poiché $1 < 3$) ammette infinite soluzioni. Per descrivere l'insieme S delle soluzioni consideriamo l'equazione $x + y - z = 3$ (ottenuta dalla riduzione a scala della matrice completa del sistema). Da essa ricaviamo che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = x + y - 3;\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y - 3 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ricapitolando: Σ_k è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. Per $k \neq 0$ esso ammette una e una sola soluzione mentre per $k = 0$ ne ammette infinite. L'insieme delle soluzioni di Σ_k per $k = 0$ è l'insieme S descritto sopra.

Esercizio 4. Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale e si mostri che i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione: Sia V uno spazio vettoriale. Un insieme $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di vettori di V è una **base** di V se:

- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono **linearmente indipendenti**;
- $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$, ovvero $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ **generano lo spazio** V (o costituiscono un **sistema di generatori** di V).

Per mostrare che i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$ dobbiamo far vedere che sono linearmente indipendenti e che generano tutto $\mathbb{R}^2$.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$. Ma allora

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies a = b = 0,$$

quindi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. Sia ora $\mathbf{x}$ un generico vettore di $\mathbb{R}^2$. Per provare che $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbb{R}^2$ devo mostrare che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{x}$. Posto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, è immediato verificare che per $\alpha := x_2$ e $\beta := (2x_2 - x_1)$, $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{x}$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3,$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Si studino nucleo e immagine di T.
2. Si trovi il polinomio caratteristico di T.
3. Si trovino autovalori e relativi autospazi di T.
4. Si dica se T è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base di autovettori che diagonalizza T.

Soluzione: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice associata a T rispetto alla base canonica.

1. Per trovare $\ker T$ risolviamo il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - z = 0 \\ -x - 5z = 0 \\ y = -3z \end{cases} \to \begin{cases} x = z \\ -6z = 0 \\ y = -3z \end{cases} \implies x = y = z = 0.$$

   Ne segue che $\ker T = \{0\}$ e quindi $\mathrm{Im}T = \mathbb{R}^3$.

2. $p_T(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda-3)-1)+2+\lambda-3 =$ $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

3. Gli autovalori di T sono gli zeri del suo polinomio caratteristico, dunque $\mathrm{Spec}T = \{1, 2, 3\}$. Troviamone i relativi autospazi.

   Per trovare V_1 risolviamo il sistema omogeneo $(I - A)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}.$$

   Ne segue che $V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Per trovare V_2 risolviamo il sistema omogeneo $(2I - A)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}.$$

Ne segue che $V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Per trovare V_3 risolviamo il sistema omogeneo $(3I - A)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ne segue che $V_3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. T ha 3 autovalori distinti quindi è diagonalizzabile. Una base di autovettori che diagonalizza T è $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.