Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

09/06/2022; Tema A

Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) - |x+1| - x$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{2x+3} = -\frac{3}{2}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2(3x)}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\tan(3x)g(x)}{\cos^2(3x)}\,dx$

Problema 4 (5 punti)

Considerare le funzioni

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \quad l(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + 1\ , \qquad \text{con} \qquad x \in\ ]0,1[$$

4.1 Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in $]0,1[$ (lo studio di funzione non è richiesto);

4.2 Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$ è finita e quindi calcolarla.

Soluzioni

Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) - |x+1| - x$$

4.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto). (2 punti)

Dominio: bisogna imporre $\frac{-x-4}{2x-4} > 0$ e quindi il dominio è:

$$D =]-4, 2[$$

Tenendo conto del dominio e del fatto che l'argomento del valore assoluto si annulla per $x = -1$, la funzione si può riscrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) - 2x - 1 & \text{per } x \in [-1, 2[\\ f_2(x) = \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) + 1 & \text{per } x \in]-4, -1[\end{cases}$$

quindi f non è né pari né dispari.

L'intersezione con l'asse y vale $f(0) = -1$

4.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (3 punti)

$$\lim_{x\to-4^+} \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) + 1 = -\infty$$

dove si è usato il fatto che il logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a 0. Quindi $x = -4$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to2^-} \log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) - 2x - 1 = +\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $+\infty$ quando l'argomento tende a $+\infty$. Quindi $x = 2$ è asintoto verticale.

Il dominio è limitato, quindi non esistono asintoti orizzontali o obliqui.

La funzione è continua perché composizione e somma di funzioni continue.

4.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali. (6 punti)

Derivabilità: La funzione è derivabile in $]-4,-1[$ e $]-1,2[$ perché composizione e somma di funzioni derivabili. Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero (quindi per $x=-1$) e la derivabilità in tale punto è discussa successivamente.

Derivata per $-1 < x < 2$

$$f_1'(x) = D[\log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) - 2x - 1] = \frac{2x-4}{-x-4} \cdot \frac{-(2x-4)+(x+4)(2)}{(2x-4)^2} - 2 =$$
$$= \frac{12}{-(2x-4)(x+4)} - 2 = \frac{2x^2+4x-10}{-(x-2)(x+4)}, \quad -1 < x < 2$$

Studio del segno

$$\begin{aligned} &N \geq 0 \iff 2x^2+4x-10 \geq 0 \implies x < -1-\sqrt{6} \ \vee \ x > -1+\sqrt{6} \\ &D > 0 \iff -(x-2)(x+4) \geq 0 \implies \ -4 < x < 2 \end{aligned}$$

Tenendo conto del dominio e di $= -1 < x < 2$ si ha

$$\begin{aligned} N/D \geq 0 &\iff -1+\sqrt{6} \leq x < 2 \\ N/D < 0 &\iff -1 < x < -1+\sqrt{6} \end{aligned}$$

Derivata per $-4 < x < -1$

$$f_2'(x) = D[\log\left(\frac{-x-4}{2x-4}\right) + 1] = \frac{6}{-(x-2)(x+4)}, \quad -4 < x < -1$$

Studio del segno: $f_2'(x) > 0 \quad \forall -4 < x < -1$

Unendo i due studi del segno si ha

- f cresce in $]-4,-1[\ \cup\ ]-1+\sqrt{6},2[$
- f decresce in $]-1,-1+\sqrt{6}[$

In $x = -1+\sqrt{6}$ la funzione è derivabile ed ha un minimo relativo, $P_1 = (-1+\sqrt{6}, \log(4-4\sqrt{2}+2) - 2\sqrt{2}) \approx (1.449, -2.299)$.

In $x=-1$ la funzione non è derivabile ($f_2'(-1) = -4/3$; $f_1'(-1) = 2/3$); questo punto la funzione ha una cuspide (massimo relativo): $(-1, -\log(2)+1) \approx (-1, 0.306)$

Zeri di $f(x)$:

- In $]-4,-1[$ la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri (la funzione è continua e a $x=-4$ la funzione tende a $-\infty$ e in $f(-1) > 0$). Lo zero è unico in quanto f è strettamente crescente in questo intervallo.

- In $]-1, -1+\sqrt{6}[$ la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri (la funzione è continua, $f(-1) > 0$ e $f(-1+\sqrt{6}) < 0$). Lo zero è unico in quanto f è strettamente decrescente in questo intervallo.
- In $]-1+\sqrt{6}.[$ la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri (la funzione è continua, $f(-1+\sqrt{6}) < 0$ e a $x = 2$ la funzione tende a $+\infty$. Lo zero è unico in quanto f è strettamente crescente in questo intervallo.

4.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f. (2 punti)

La derivata seconda è la stessa per f_1 e f_2:

$$f_1''(x) = \frac{6(2x+2)}{(x-2)^2(x+4)^2}$$

Per $x > -1$, il numeratore e denominatore sono positivi, quindi $f''(x) > 0$ per ogni $-1 < x < 2$: f è concava per $-4 < x < -2$

Non ci sono punti di flesso in quanto in $x = -1$ la funzione non è derivabile.

4.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f. (2 punti)

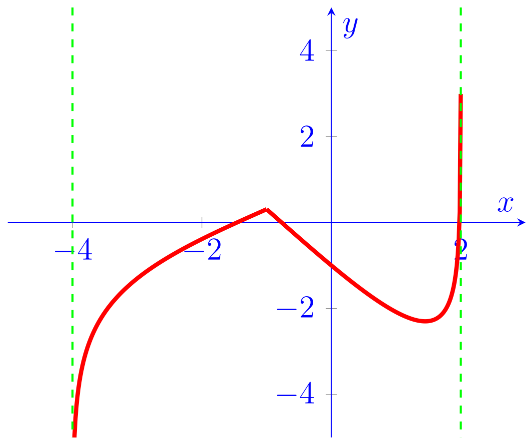

Figura 1: Grafico di $f(x)$; L'immagine è $]-\infty, +\infty[$.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{2x+3} = -\frac{3}{2}$$

Bisogna mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$x < -M \implies \left|\frac{-3x+1}{(2x+3)} + \frac{3}{2}\right| < \epsilon$$

Cerchiamo M partendo dall'ultima equazione e assumendo $x << 0$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-3x+1}{2x+3} + \frac{3}{2}\right| < \epsilon \implies \\
&\left|\frac{-6x+2+6x+9}{(4x+6)}\right| < \epsilon \implies \\
&-\frac{11}{(4x+6)} < \epsilon \implies \\
&-\frac{11}{4\epsilon} - \frac{3}{2} > x
\end{aligned}$$

Basta porre $M = \frac{11}{4\epsilon} + \frac{3}{2}$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2(3x)}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo. (2 punti)

Il dominio è dato da $3x \neq \pi/2 + k\pi$, quindi:

La funzione non ha zeri

La funzione è pari, infatti

La funzione è periodica con periodo $\tau = \frac{\pi}{3}$.Per determinare il periodo bisogna notare che:

$$\cos^2(3x) = \frac{2\cos(6x)+1}{2}$$

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$. (3 punti)

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= 2 \\
g'(x) &= \frac{6\sin(3x)}{\cos^3(3x)} \\
g'(x_0) &= -12
\end{aligned}$$

Retta tangente in x_0: $y = -12(x - \frac{\pi}{4}) + 2$

3.3 Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\tan(3x)g(x)}{\cos^2(3x)}\,dx$ (2 punti)

$$\int \frac{\sin(3x)}{\cos^3(3x))}g(x)\,dx = \int \frac{1}{6}g'(x)g(x)\,dx = \frac{1}{12}g^2(x) = \frac{1}{12\cos^4(3x)}$$

Problema 4 (5 punti)

1. Considerare le funzioni

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \quad l(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + 1\,, \qquad \text{con} \qquad x \in\,]0,1[$$

Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in $]0,1[$ (lo studio di funzione non è richiesto);

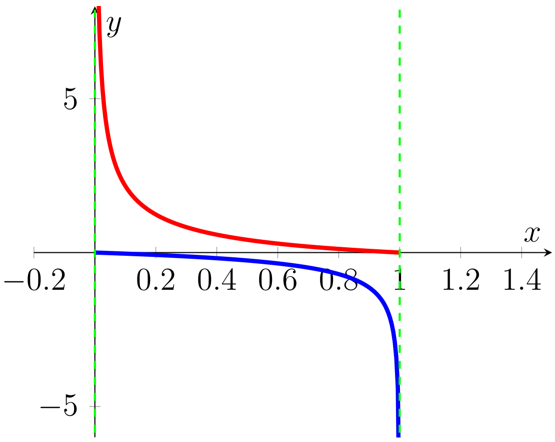

Figura 2: Grafico di $h(x)$ e $l(x)$. Sono entrambe funzioni elementari, per cui il grafico si può ottenere senza studio del segno.

2. Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$ è finita e quindi calcolarla. Sia h che l sono funzioni integrabili nel dominio in quanto $1/x^p$ è integrabile in 0 per $0 < p < 1$.L'area si ottiene dall'integrale di:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 |h(x) - l(x)|\,dx = \\
&= \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\,dx - \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + 1\,dx = \\
&= \lim_{t\to 0+} [2\sqrt{x} - x]_t^1 - \lim_{t\to 1^-} [\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}1 + x]_0^t = \\
&= 2 - 1 - 1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$