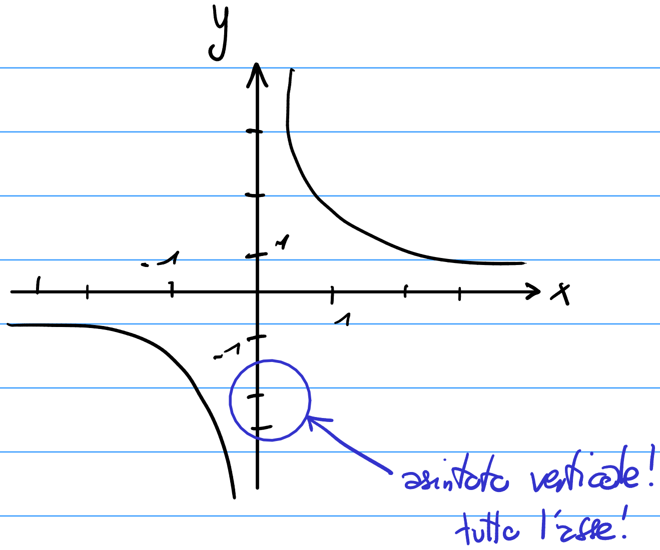
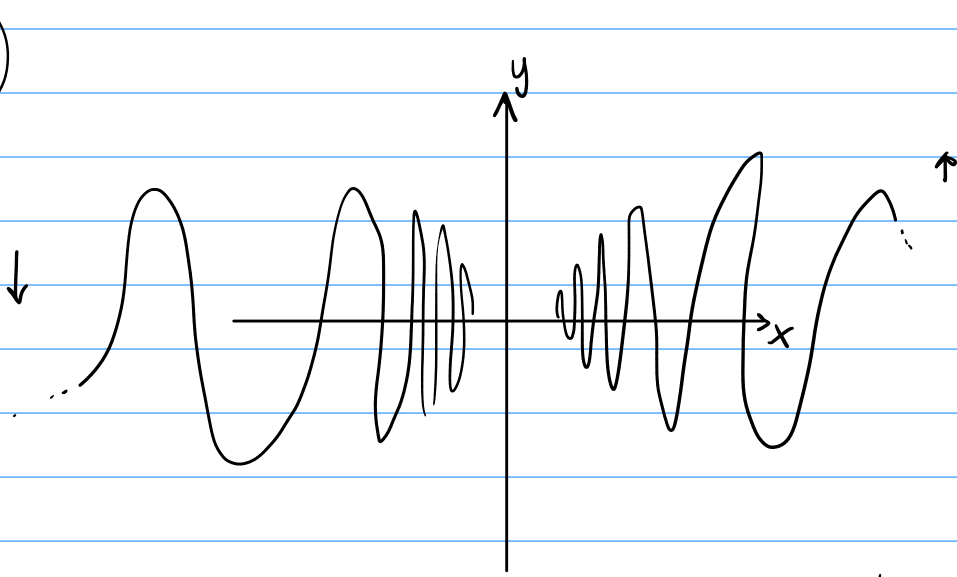
# Limiti:

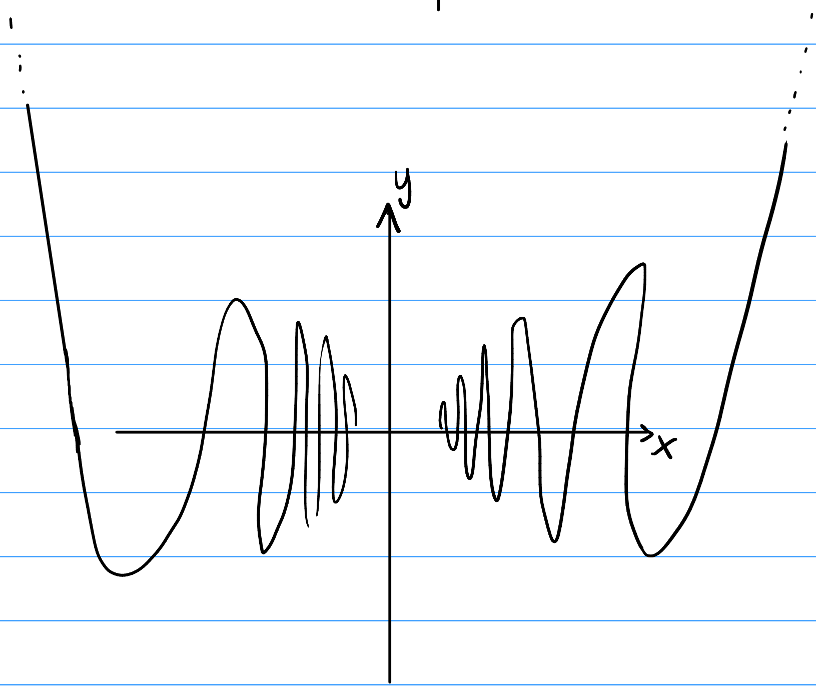
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



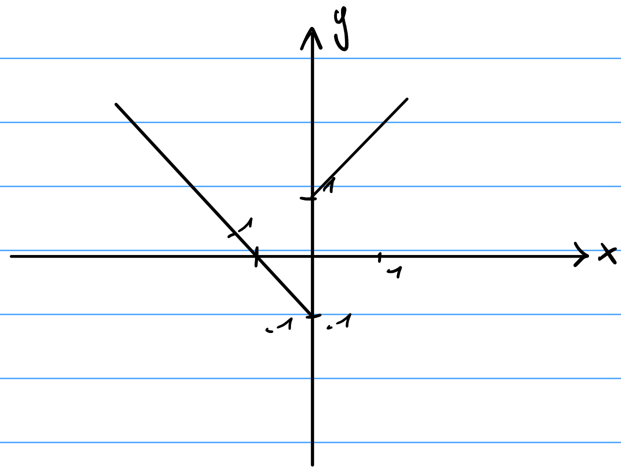

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$




$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

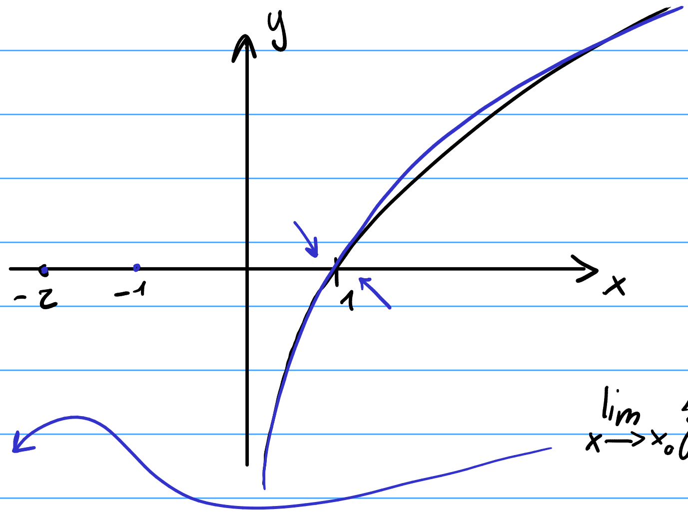


$$f(x) = \frac{x^2+x}{|x|}$$




$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = \{-1, -2\} \end{cases}$$

1. grafico



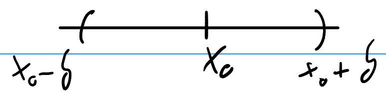

$\lim_{x \to x_0} f(x) = e$

possibili $x_0$ $\{x = 0,\ x = +\infty,\ x = 1\}$

$x_0 \in [0, +\infty[$ e limite a $+\infty$

↳ sono punti di accumulazione del $D$ di $f(x)$!

$-2, -1$ sono invece isolati: non c'é nulla da calcolare prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ; $\delta > 0$ raggio (intervallo circolare)



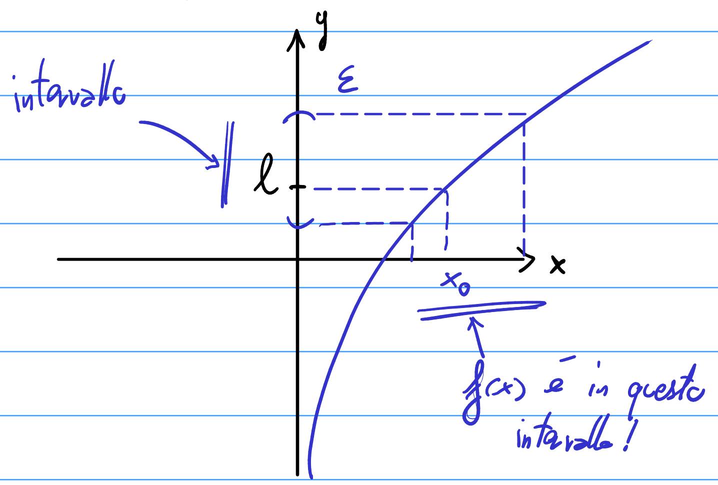

## definizione di limite $(\varepsilon - \delta)$

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x_0$ punto di accumulazione per $D_f$

diremo che $l$ è un limite di $f$ per $x$ tende a $x_0$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon[ \ \forall x \in B(x_0, \delta[ \cap D_f$

e scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$




$\forall \varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) \in B(l, \varepsilon[$

$\forall x \in B(l, \varepsilon[ \cap D_f$ questo vuol dire

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad\qquad |x - x_0| < \delta$$

inoltre $x \in D_f$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ; verifichiamo che $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

(so il risultato, ma mi dedico alla verifica!)

(Dominio = (denom) = $x-1 \neq 0$ ; $x \neq 1$)

$]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

dobbiamo mostrare che fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad x \in D_f$$

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x : |x-1| < \delta \; ; \; x \neq 1$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right) < \varepsilon \iff \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\iff |x+1-2| < \varepsilon \iff |x-1| < \varepsilon$$

poniamo $\delta = \varepsilon$

---

$g(x) = 4x + 5$ ; $\lim_{x \to 2} g(x) = 13$

$$|g(x) - 13| < \varepsilon \quad \forall x : |x-2| < \delta \quad \mathbb{R}$$

$$|4x+5-13| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|4x-8| < \varepsilon$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

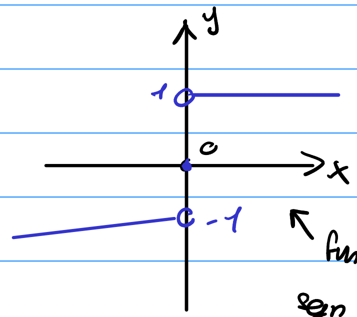
poniamo $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, allora va bene

---

esempio con limite che non esiste

$$\lim_{x \to 0} sgn(x) = \nexists$$

non esiste

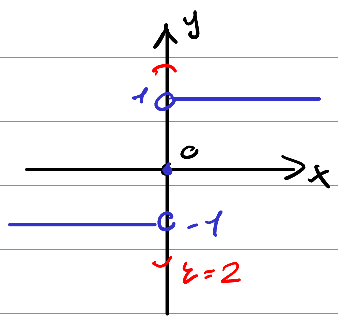


funzione sgn (segno)

**Dim** assumiamo che non può essere 0
(in maniera analoga, anche nessun altro numero)

basta trovare un $\varepsilon > 0$ per cui non esista un $\delta > 0$ che non rispetta la definizione di limite!

$$|x-0| < \delta \not\Rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$$



se $\varepsilon = 1/2$

$\forall \delta > 0$ si ha che in $B(0, \delta[$ ci sono $x > 0$, quindi $f(x) = 1 \in B(0, 1/2[$

that's why

# Teorema di unicità

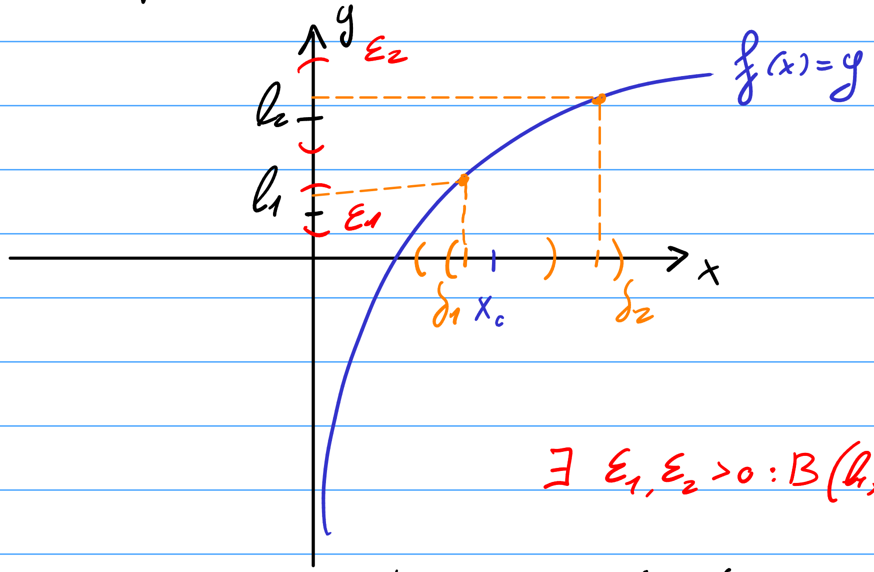
$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x_0$ di accum. in $D_f$

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

allora
$l_1 = l_2$

dimostriamo per assurdo, ponendo $l_1 \neq l_2$




$\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B(l_1, \varepsilon_1[ \cap B(l_2, \varepsilon_2[ = \emptyset$

dalla definizione di limite troviamo $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che

$$f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[ \ \forall\ x \in B(x_0, \delta_1[$$

$$\text{e } f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[ \ \forall\ x \in B(x_0, \delta_2[$$

chiamiamo $J = B(x_0, \delta_1[ \cap B(x_0, \delta_2[ \neq \emptyset$

allora sia $x \in J : f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[$
e $f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[$

disgiunte!

assurdo, prima abbiamo scelto $B(l_1, \varepsilon_1[ \cap B(l_2, \varepsilon_2[ = \emptyset$
mentre ora diciamo il contrario!

## Teorema di permanenza del segno

$f : D_f \to \mathbb{R}$ ; $x_0$ accumu. di $D_f$

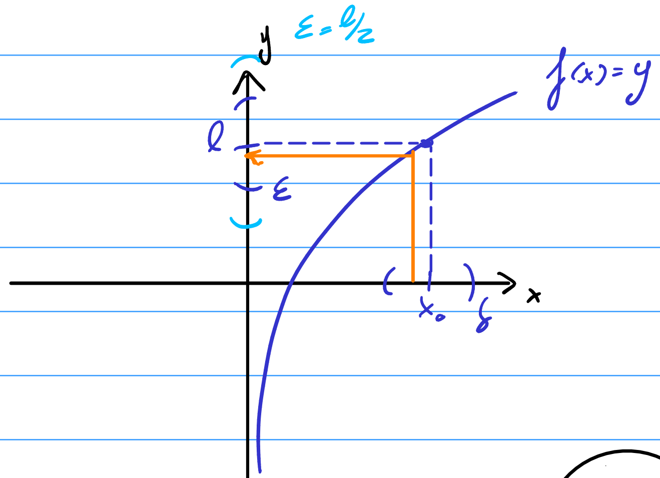
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[ \cap D_f$$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[ \cap D_f$$

Dim




ε < l allora sono sicuro sia positivo!

usiamo la definizione di limite prendendo $\varepsilon = l/2$

## Limiti ad infinito

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists m>0 \mid f(x)-\ell<\varepsilon \ \forall x \in ]m,+\infty[ \cap D_f$

$x>m$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists m>0 \mid f(x)-\ell<\varepsilon \ \forall x \in ]-\infty, m[ \cap D_f$

$x<m$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall L>0 \quad \exists \delta>0 : f(x) \in ]L,+\infty[ \ \forall x : |x-x_0|<\delta$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall L>0 \quad \exists \delta>0 : f(x) \in ]-\infty, L[ \ \forall x : |x-x_0|<\delta$

prossima volta cerca definizioni di:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (separate)