Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2022/23

Isadora Antoniano Villalobos

6 giugno 2023

Cognome: ______________________ Nome: ______________________

Matricola: ______________________ Firma: ______________________

Istruzioni: Da leggere con attenzione!

Questo compito è composto di **5 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.
Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	5	8	7	6	4	30
Score:						

Domanda 1 (5 punti)

Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

(a) Quale delle seguenti è una funzione di ripartizione?

i) Tutte.

ii) Nessuna.

iii)
$$F(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

iv)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

v)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-6x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

(b) Supponiamo che solo il 25% di tutti i conducenti si fermi completamente a un incrocio quando non sono visibili altri veicoli. Qual è la probabilità che, su 20 conducenti scelti a caso che giungono a un incrocio in queste condizioni, esattamente 6 si fermino completamente?

i) `pbinom(6,20,0.25)`

ii) `dbinom(6,20, 25)`

iii)
$$\binom{20}{6} \frac{3^{14}}{4^{20}}$$

iv)
$$\binom{25}{6} 0.2^6 0.8^{25}$$

v)
$$\binom{20}{6} 0.25^{14} 0.8^6$$

(c) Sia X una variabile casuale e si definisca $Y = -X$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1$

ii) $\mathrm{Var}[Y] = -\mathrm{Var}[X]$

iii) $\mathrm{Cor}[X, Y] = 1$

iv) $\mathrm{Cov}[X, Y] = -1$

v) $\mathrm{Cor}[X, Y] = -1$

(d) Se A e B sono due eventi indipendenti, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
ii) $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A]$
iii) $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[B]$
iv) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
v) Nessuna delle precedenti.

(e) Supponiamo che solo il 70% di tutti i conducenti in una certa zona indossi regolarmente la cintura di sicurezza. Viene selezionato un campione casuale di 500 conducenti della zona. Qual è la probabilità che meno di 325 di loro indossino regolarmente la cintura di sicurezza?

i) `pnorm(324.5,350,10.247)`
ii) `1-pbinom(325,500,0.7)`
iii) `dbinom(325,500,0.7)`
iv) `pnorm(325.5,350,10.247)`
v) `pnorm(324.5,350,105)`

Domanda 2 (8 punti)

Una certa lampada ha due lampadine. Sia $X =$ *tempo di vita della prima lampadina* e sia $Y =$ *tempo di vita della seconda lampadina* (entrambe in migliaia di ore). Supponiamo che X e Y siano indipendenti, ciascuna abbia una distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1$ e definiamo $W = X + Y$ la durata totale delle due lampadine.

(a) Qual è la funzione di densità congiunta di (X, Y)?

(b) Qual è la probabilità che entrambe lampadine abbiano un tempo di vita di almeno 1000 ore?

(c) Qual è la probabilità che la durata totale delle due lampadine non superi le 2 migliaia di ore? *È possibile sostituire la risposta finale con un oportuno e ben giustificato commando di R.*

(d) Sapendo che la prima lampadina è già rismasta accessa per 2000 ore, trovare il valore ateso e la varianza del suo restante tempo di vita.

Domanda 3 (7 punti)

Sia data una variabile aleatoria X con funzione di densità $f(x) = Ce^{-|2x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si trovi il valore di C.

(b) Si calcoli la media e la varianza di X

(c) Si trovi la mediana di X

(d) Si trovi la media e la varianza della variabile $Y = 3X - 1$

Domanda 4 (6 punti)

Un certo canale di comunicazioni puo essere modellato attraverso una catena di Markov con tre possibili stati: (1) trasmissione riuscita, (2) collisione e (e) inattivo, e con la seguente matrice di transizioni:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che P è la matrice di transizione di una catena di Markov regolare.

(b) Si trovi la distribuzione stazionaria della catena.

(c) Si calcoli la percentuale di tempo che il canale risulta inattivo nel lungo periodo

Domanda 5 (4 punti)

Si spieghi la relazione tra la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson