Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Algebra Lineare

Prova d'esame - Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto

Tema A - xx/xx/2024

Tempo a disposizione: 2h

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- <u>Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame</u>.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Esercizio 1 (6 punti)

Risolvere l'equazione $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.

Esercizio 2 (9 punti)

Si consideri la matrice A_k, dipendente dal parametro reale k, data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Scegliere un parametro k_0 tale che A_{k_0} sia diagonalizzabile.

2.2 Determinare la matrice S di autovettori di A_{k_0} tale che $D = S^{-1} A_{k_0} S$, ove D è la matrice diagonale che contiene gli autovalori di A_{k_0}.

Esercizio 3 (5 punti)

Stabilire al variare del parametro reale t il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} tx + y + z = 1 \\ x + ty + z = 2 - t \\ x + y + tz = t \end{cases}$$

Esercizio 4 (9 punti)

Sia T il seguente endormorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2z \\ y + w \\ -x + z \\ y + w \end{pmatrix}.$$

4.1 Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica.

4.2 Determinare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ (basi e dimensioni).

4.3 Stabilire se $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ sono in somma diretta.

Esercizio 5 (3 punti)

Sia A una matrice quadrata di ordine tre tale che $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ sia lo spettro dei suoi autovalori, con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, e v_1, v_2, v_3 siano i corrispettivi autovettori.

5.1 Determinare lo spettro degli autovalori della matrice $A^2 = AA$.

5.2 Individuare una condizione sufficiente sugli autovalori di A tale che A^2 sia diagonalizzabile.

Soluzioni

Esercizio 1 (6 punti)

Risolvere l'equazione $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.

Attraverso la sostituzione $z^3 = t$, si ottiene l'equazione $t^2 + 7t - 8 = 0$, le cui soluzioni sono $t_1 = -8$ e $t_2 = 1$, poi si trovano le radici cubiche di -8 e 1. Le soluzioni finali in forma algebrica sono

$$z_1 = -2,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3},\ z_3 = 1 - i\sqrt{3},\ z_4 = 1,\ z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_6 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le corrispettive forme polari sono:

$$z_1 = (2, \pi),\ z_2 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right),\ z_3 = \left(2, \frac{5\pi}{3}\right),\ z_4 = (1, 0),\ z_5 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right),\ z_6 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Esercizio 2 (9 punti)

Si consideri la matrice A_k, dipendente dal parametro reale k, data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Scegliere un parametro k_0 tale che A_{k_0} sia diagonalizzabile.

(5p) L'equazione secolare $det(A_k - \lambda I) = 0$ diviene

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 + \lambda(4k - 105) + 216 - 36k = 0. \tag{1}$$

La situazione più facile in cui si abbia diagonalizzabilità è quando i tre autovalori sono distinti. Siccome l'eq. (1) è di terzo grado, non conviene procedere scegliendo un valore di k a caso e tentare di risolverla (in genere, tale compito non è agevole), ma agire in senso inverso, imponendo una soluzione λ_1 e andando poi a vedere quale k soddisfi tale imposizione: in tal modo, la risoluzione dell'eq. (1) diviene semplice, perché sappiamo già che il polinomio diventa un prodotto dei fattori $\lambda - \lambda_1$ e una certa equazione di secondo grado. Ad esempio, scegliamo noi arbitrariamente l'autovalore $\lambda_1 = 1$ (un'altra scelta semplice sarebbe $\lambda_1 = 0$) e inseriamolo nell'equazione secolare: si deve avere

$$-1 + 18 + 4k - 105 + 216 - 3k = 0,$$

ossia $128 - 32k = 0$, da cui $k_0 = 4$. D'ora in avanti, si lavora con la matrice A_4 e si va a vedere se gli autovalori sono distinti. Ora, riscriviamo l'equazione secolare come

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 89\lambda + 72 = 0$$

ed abbiamo il vantaggio di sapere (lo abbiamo imposto) che una soluzione è proprio $\lambda_1 = 1$, quindi possiamo fattorizzare il polinomio caratteristico con Ruffini ed ottenere

$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 17\lambda - 72) = 0.$$

L'equazione di secondo grado in λ ha soluzioni $\lambda_2 = 9$ e $\lambda_3 = 8$, quindi i tre autovalori sono appunto $Sp(A_4) = \{1, 9, 8\}$. Gli autovalori sono distinti, quindi A_4 è diagonalizzabile.

Attenzione: se si fosse cercato il valore di k per cui $\lambda = 0$ fosse radice dell'equazione secolare, si sarebbe ottenuto $k = 6$. In questo caso, $Sp(A_6) = \{0, 9\}$ e non è difficile vedere che $m_a(9) = 2$ ma $m_g(9) = 1$. Quindi A_6 non è diagonalizzabile.

2.2 Determinare la matrice S di autovettori di A_{k_0} tale che $D = S^{-1} A_{k_0} S$, ove D è la matrice diagonale che contiene gli autovalori di A_{k_0}.

(4p) Abbiamo già trovato gli autovalori per $k = 4$. Cerchiamo gli autovettori della matrice A_4. Calcoliamo gli autospazi con il solito metodo della risoluzione del sistema lineare omogeneo $A_4 - \lambda_i I = \mathbf{0}$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e si trova:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, 3x/2, -2x) : x \in \mathbb{R}\}, \\ V_9 &= \{(0, y, y) : y \in \mathbb{R}\}, \\ V_8 &= \{(x, -2x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

quindi una possibile base di autovettori è data da $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, ove

$$w_1 = (2, 3, -4) \ ; \ w_2 = (0, 1, 1) \ ; \ w_3 = (1, -2, -2).$$

Di conseguenza, come sappiamo, la matrice S di cambiamento di base che soddisfa $D = S^{-1} A_4 S$ ha le colonne coincidenti con i tre autovettori, ossia

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 (5 punti)

Stabilire al variare del parametro reale t il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} tx + y + z = 1 \\ x + ty + z = 2 - t \\ x + y + tz = t \end{cases}$$

Il determinante della matrice incompleta è $t^3 - 3t + 2$, dunque la matrice incompleta è singolare quando $t^3 - 3t + 2 = 0$; non è difficile vedere che si può applicare Ruffini con $t = 1$ e alla fine di qualche passaggio algebrico non trascendentale si trova

$$(t - 1)^2 \cdot (t + 2) = 0,$$

ossia la matrice incompleta è non singolare per $t \neq 1, -2$, dunque per tali valori il sistema è di Cramer ed ammette una sola soluzione. Per $t = 1$, si vede immediatamente che la matrice incompleta ha rango 1 (ha tre colonne uguali) e lo stesso accade per la matrice completa, visto che ha 4 colonne uguali, dunque, per il Teorema di Rouchè-Capelli, il siatema ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri liberi. Infine, per $t = -2$, attraverso un semplice calcolo di determinanti, si vede che il rango della incompleta è 2, mentre quello della completa è 3, quindi, come conseguenza del Teorema di Rouchè-Capelli, il sistema non ammette soluzioni.

Questo esercizio si poteva anche risolvere usando l'algoritmo di Gauss. In questo caso conviene partire sostituendo la prima riga con la terza. Ovviamente si ottengono le stesse conclusioni.

Esercizio 4 (9 punti)

Sia T il seguente endormorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2z \\ y + w \\ -x + z \\ y + w \end{pmatrix}.$$

4.1 Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica.

(1p) La matrice, denotata A, che rappresenta l'endomorfismo T è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Determinare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ (basi e dimensioni).

(5p) Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per triangolarizzare la matrice A: è sufficiente sostituire la terza riga con la terza riga sommata alla prima precedentemente moltiplicata per $1/4$ e si ottiene la nuova matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, sostituiamo la quarta riga con la quarta riga sommata alla seconda precedentemente moltiplicata per -1 e si ottiene la nuova matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A_2 è triangolare superiore, con tre pivot diversi da zero, quindi il rango di A è 3. Ciò significa che $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Una base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dell'immagine di T è data dai tre vettori coincidenti con le prime tre colonne di A_2, quindi $w_1 = (4, 0, 0, 0)$, $w_2 = e_2$ e $w_3 = (2, 0, 3/2, 0)$.

Una risoluzione alternativa si ottiene usando i determinanti: si osserva che $det(A) = 0$ ma

$$det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Quindi le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti e $rg(A) = 3$ e le prime tre colonne di A costituiscono una base di ImT.

Per il teorema della dimensione, $\dim \ker T = 1$. Una base di $\ker T$ è costituita da un unico vettore: per determinarlo, risolviamo il sistema lineare omogeneo $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, ove $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$, ossia, usufruendo della triangolarizzazione di A data da A_2, si trova

$$\begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ y + w = 0 \\ \frac{3}{2}z = 0. \end{cases}$$

Non è difficile vedere che la soluzione del suddetto sistema è $(0, y, 0, -y)$, quindi una base è data, ad esempio, dal vettore $w_4 = (0, 1, 0, -1)$.

4.3 Stabilire se $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ sono in somma diretta.

(3p)Per semplicità di notazione, sia $U = \ker T$ e $V = \operatorname{Im} T$. Sappiamo che U e V sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ e ora dimostriamo che la loro intersezione contiene il solo vettore nullo. Sia $u \in U \cap V$, allora $u = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$ per qualche α, β e γ non tutti nulli, e, allo stesso tempo, $u = \delta w_4$ per qualche $\delta \neq 0$. Pertanto,

$$\delta w_4 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3,$$

da cui, essendo $\delta \neq 0$, possiamo dividere ambo i membri della suddetta equazione per δ e concludere che w_4 è combinazione lineare di w_1, w_2, w_3. Ciò significa che w_1, w_2, w_3 e w_4 sono linearmente dipendenti. Tuttavia, un rapido calcolo (con Laplace) mostra che il determinante della matrice che ha per colonne i quattro vettori w_1, w_2, w_3, w_4, data da

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero, dunque tali vettori sono linearmente indipendenti, e quindi abbiamo dimostrato che $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Allora, per il teorema di Grassmann sappiamo che

$$\dim U \oplus V = \dim U + \dim V = 1 + 3 = 4,$$

quindi $U \oplus V = \mathbb{R}^4$, ossia i due spazi sono in somma diretta.

Esercizio 5 (3 punti)

Sia A una matrice quadrata di ordine tre tale che $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ sia lo spettro dei suoi autovalori, con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, e v_1, v_2, v_3 siano i corrispettivi autovettori.

5.1 Determinare lo spettro degli autovalori della matrice $A^2 = AA$.

(2p) Dimostriamo che v_i è un autovettore di A^2 con autovalore λ_i^2 per $i = 1, 2, 3$. Infatti, per la definizione di A^2 e il fatto che λ_i sia autovalore di A, si ha la seguente catena di uguaglianze:

$$A^2(v_i) = A(A(v_i)) = A(\lambda_i\, v_i) = \lambda_i \cdot A(v_i) = \lambda_i \cdot \lambda_i\, v_i = \lambda_i^2 v_i.$$

Dunque, abbiamo dimostrato che v_1, v_2 e v_3 sono autovettori di A^2 con corrispettivi autovalori dati rispettivamente da λ_1^2, λ_2^2 e λ_3^2. Siccome $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, non esistono altri autovettori, né quindi altri autovalori, di A^2. Lo spettro degli autovalori di A^2 è quindi $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}$.

5.2 Individuare una condizione sufficiente sugli autovalori di A tale che A^2 sia diagonalizzabile.

(1p) Una condizione sufficiente a garantire la diagonalizzabilità di A^2 è che $\lambda_1 \geq 0$. Infatti, in tal caso, $0 \leq \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2$, ossia gli autovalori di A^2 sono tutti distinti, il che assicura che A^2 sia diagonalizzabile.