Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 9: Distribuzioni Bivariate – **Soluzioni**

Domanda 1

Un provider di servizi Internet addebita ai propri clienti per l'utilizzo di Internet una cifra proporzionale al tempo in ore di utilizzo, arrotondandolo all'ora più vicina, e dipendente dalla fascia oraria. La distribuzione congiunta del tempo utilizzato X in ore e il prezzo Y di ogni ora in centesimi viene data nella tabella sottostante.

$p(x,y)$		X			
		1	2	3	4
Y	1	0	0.06	0.06	0.10
	2	0.10	0.10	0.04	0.04
	3	0.40	0.10	0	0

A ciascun cliente vengono addebitati $Z = X \cdot Y$ centesimi, cioè il numero di ore moltiplicato per il prezzo di ogni ora.

(a) Trovare la distribuzione di Z.

(b) Trovare il valor medio e la varianza di Z.

Soluzione: Media: 3.66, Varianza: 2.184

(c) Trovare la distribuzione marginale di X.

(d) Trovare il valor medio e la varianza di X.

Soluzione: Media: 1.88, Varianza: 1.146

(e) Trovare la distribuzione marginale di Y.

(f) Trovare il valor medio e la varianza di Y.

Soluzione: Media: 2.28, Varianza: 0.642

(g) Trovare la distribuzione del tempo di utilizzo nella fascia in cui il prezzo è uguale a 2.

Domanda 2

Siano X e Y il numero di guasti hardware in due laboratori informatici in un dato mese. La distribuzione congiunta di X and Y viene data nella tabella sottostante.

(a) Trovare la distribuzione marginale di X.

(b) Trovare il valor medio e la varianza di X.

$p(x,y)$		X		
		0	1	2
Y	0	0.52	0.20	0.04
	1	0.14	0.02	0.01
	2	0.06	0.01	0

Soluzione: Media: 0.33, Varianza: 0.321

(c) Trovare la distribuzione marginale di Y.

(d) Trovare il valor medio e la varianza di Y.

Soluzione: Media: 0.31, Varianza: 0.3541

(e) Calcolare la probabilità che si verifichi almeno un guasto hardware.

Soluzione: 0.48

(f) Le variabili X e Y sono indipendenti?

Domanda 3

In un piccolo laboratorio informatico il numero di guasti hardware X e il numero di errori software Y in un dato giorno hanno la seguente distribuzione congiunta $p(x, y)$: $p(0, 0) = 0.6$, $p(0, 1) = 0.1$, $p(1, 0) = 0.1$, $p(1, 1) = 0.2$.
Sulla base di queste informazioni:

(a) Trovare la distribuzione marginale di X.

(b) Trovare il valor medio di X.

Soluzione: 0.3

(c) Trovare la distribuzione marginale di Y.

(d) Trovare il valor medio di Y.

Soluzione: 0.3

(e) Le variabili X e Y sono indipendenti?

(f) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X e Y.

Soluzione: 0.5238

(g) Calcolare $E(X + Y)$, cioè il numero medio totale di errori durante un giorno.

Soluzione: 0.6

(h) Trovare la distribuzione di $X + Y$, cioè del numero totale di errori durante un giorno.

Domanda 4

Si consideri un'urna contenente 3 palline numerate da 1 a 3. L'esperimento consiste nell'estrarre 2 palline senza reinserimento. Sia X la variabile casuale associata al più grande dei numeri estratti e sia Y la variabile casuale somma dei due numeri estratti. Trovare:

(a) la funzione di probabilità congiunta di X e Y;

(b) la funzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 3$ e la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X = 3$;

(c) la covarianza e la correlazione di X e Y;

Soluzione: $\text{Cov}(X,Y) = 1/3$; $\text{Corr}(X,Y) = \sqrt{3}/2$

(d) valore atteso e varianza della variabile casuale $Z = 2X + 3Y$.

Soluzione: $\mathbf{E}[Z] = 52/3$; $\text{Var}[Z] = 98/9$

(e) X e Y sono indipendenti?

Domanda 5

Sia data la funzione $p_{X,Y}(x,y) = k(2y + x)$, con $x = 2, 4$ e $y = 0, 1, 2$.

(a) Determinare il valore k affinché $p_{X,Y}(x,y)$ sia una funzione di probabilità congiunta.

Soluzione: $1/30$

(b) Determinare $P(Y \geq X)$.

Soluzione: $6/30$

(c) Calcolare i valori della funzione di ripartizione $F_{X,Y}(2,1)$, $F_{X,Y}(4,1)$.

Soluzione: $F_{X,Y}(2,1) = 6/30$, $F_{X,Y}(4,1) = 16/30$

(d) Calcolare $p_{X|Y}(x|1)$.

(e) Valutare se X e Y sono indipendenti.

Domanda 6

Le due variabili casuali X e Y hanno funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = 12xy(1-y)$, con $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Trovare le funzioni di densità marginali di X e Y e verificare se le due variabili sono indipendenti.

Domanda 7

Siano X e Y due variabili casuali con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = k$, per $0 < x < 1$ e $0 < y < x$.

(a) Determinare la costante k affinché $f_{X,Y}(x,y)$ sia una funzione di densità.

Soluzione: 2

(b) Determinare la distribuzione marginale di X e la distribuzione condizionata di X dato $Y = y$.

(c) Verificare se X e Y sono indipendenti.

Domanda 8

Siano X e Y due variabili casuali con funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) I_{(0,2)}(x) I_{(2,4)}(y).$$

Trovare le distribuzioni marginali di X e Y e la funzione di densità condizionata di X dato $Y = y$, $y \in (2,4)$.

Domanda 9

Si consideri la seguente densità bivariata

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare la costante di normalizzazione k.

Soluzione: 1/8

(b) Qual è la probabilità che X sia maggiore di Y?

Soluzione: 1/2

(c) Le due v.a. sono indipendenti?

(d) Determinare la densità condizionata di X rispetto a $Y = y$.

Domanda 10

Siano X e Y due variabili casuali tali che $(X|Y = y) \sim Bin(y, 1/3)$ e Y è una variabile casuale discreta che assume i valori 1 e 2 con probabilità 1/4 e 3/4, rispettivamente.

(a) Si determini la funzione di probabilità congiunta di (X, Y).

(b) Si calcolino la distribuzione e il valore atteso di $Y|X = 1$.

Soluzione: Valore atteso: 9/5

(c) Si calcoli $\Pr(Y > X)$.

Soluzione: 5/6