Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

08/06/2023; Tema A

Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) - |x-2| + x + 1$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni reali.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (3 punti)

Discutere continuità e derivabilità della seguente funzione. f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ o nessuna delle precedenti?

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \log\left(\sin^2(3x)\right)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{5\pi}{12}$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1}{\tan(3x)g(x)}\, dx$

Problema 4 (5 punti)

Considerare le funzioni

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1, \quad l(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{con} \quad x \in \,]0,1[$$

4.1 Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in $]0,1[$ (lo studio di funzione non è richiesto);

4.2 Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$ è finita e quindi calcolarla.

Soluzioni

Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) - |x-2| + x + 1$$

4.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto). (2 punti)

Dominio: bisogna imporre $\frac{x-2}{2x-6} > 0$ e quindi il dominio è:

$$D =]-\infty, 2[\ \cup\ ]3, +\infty[$$

Tenendo conto del dominio e del fatto che l'argomento del valore assoluto si annulla per $x = 2$, la funzione si può riscrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) + 2x - 1 & \text{per } x \in]-\infty, 2[\\ f_2(x) = \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) + 3 & \text{per } x \in]3, +\infty[\end{cases}$$

f non è né pari né dispari.

L'intersezione con l'asse y vale $f(0) = -\log(3) - 1$

4.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (4 punti)

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) + 2x - 1 = -\infty$$

(l'argomento del logaritmo tende a 1/2, il termine dominante è $2x$

$$\lim_{x\to 2^-} \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) + 2x - 1 = -\infty$$

dove si è usato il fatto che il logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a 0. Quindi $x = 2$ è asintoto verticale.

Verifichiamo la presenza di un eventuale asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$$m: \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right)}{x} + 2 - \frac{1}{x} = 2$$

$$q: \quad \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right) - 1 = -\log(2) - 1$$

Asintoto obliquo: $y = 2x - log(2) - 1$.

$$\lim_{x\to 3^+} \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right)+3=+\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $+\infty$ quando l'argomento tende a $+\infty$. Quindi $x=3$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right)+3=-\log(2)+3$$

dove si è usato il fatto che l'argomento del logaritmo tende a $1/2$.

La funzione è continua perché composizione e somma di funzioni continue.

4.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x)=0$ ha esattamente due soluzioni reali. (5 punti)

Derivabilità: La funzione è derivabile perché composizione e somma di funzione derivabili. Inoltre due tratti in cui la funzione è definita sono disgiunti. Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero (quindi per $x=2$) ma tale punto non appartiene al dominio

Derivata per $x<2$

$$f_1'(x)=D[\log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right)+2x-1]=\frac{2x-6}{x-2}\cdot\frac{(2x-6)-(x-2)(2)}{(2x-6)^2}+2=$$
$$=\frac{-1}{(x-2)(x-3)}+2=\frac{-1+2(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x^2-10x+11}{(x-2)(x-3)},\quad x<2$$

Studio del segno

$$N\geq 0 \iff 2x^2-10x+11\geq 0 \implies x<\frac{5-\sqrt{3}}{2} \vee x>\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$
$$D>0 \iff (x-2)(x-3)\geq 0 \implies x<2\vee x>3$$

Tenendo conto del dominio di f_1 $(x<2)$ si ha

$$N/D\geq 0 \iff x<\frac{5-\sqrt{3}}{2}$$
$$N/D<0 \iff \frac{5-\sqrt{3}}{2}<x<2$$

Derivata per $x>3$

$$f_2'(x)=D[\log\left(\frac{x-2}{2x-6}\right)+3]=\frac{-1}{(x-2)(x-3)},\quad x>3$$

Studio del segno: $f_2'(x)<0 \quad \forall x>3$

Unendo i due studi del segno si ha

- f cresce in $]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[$
- f decresce in $]\frac{5-\sqrt{3}}{2}, 2[\cup]3, +\infty[$

In $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ la funzione è derivabile ed ha un massimo relativo, $P_1 = (\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \log(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2})-1) \approx (1.634, 0.2578)$.

Zeri di $f(x)$:

- In $]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[$ la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri (la funzione è continua, funzione tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e $f(\frac{5-\sqrt{3}}{2}) > 0$). Lo zero è unico in quanto f è strettamente crescente in questo intervallo.
- In $]\frac{5-\sqrt{3}}{2}, 2[$ la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri (la funzione è continua, $f(\frac{5-\sqrt{3}}{2}) > 0$ e $f < 0$ per $x \to 2^-$). Lo zero è unico in quanto f è strettamente decrescente in questo intervallo.
- In $]3, +\infty[$ la funzione non ha zeri, in quanto strettamente decrescente e la funzione tende ad un numero positivo per $x \to +\infty$

4.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f. (2 punti)

La derivata seconda è la stessa per f_1 e f_2:

$$f_1''(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

Per $x > 5/2$, il numeratore è positivo, quindi $f''(x) > 0$ per $x > 3$: f è convessa per $x > 3$

Per $x < 5/2$, il numeratore è negativo, quindi $f''(x) < 0$ in $x < 2$: f è concava per $x > 2$

Non ci sono punti di flesso in quanto in $x = 5/2$ la funzione non è definita.

4.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f. (2 punti)

Problema 2 (3 punti)

Discutere continuità e derivabilità della seguente funzione. f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ o nessuna delle precedenti?

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

L'unico punto in cui la funzione potrebbe non essere continua è $x = 1$. In questo punto possiamo verificare che f è continua tramite la definizione: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Infatti:

$$\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 = f(1)$$

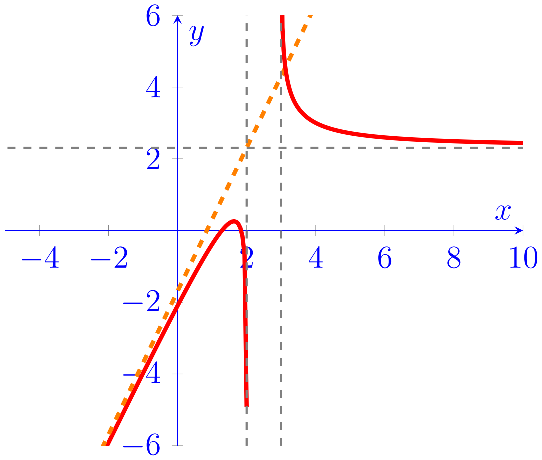

Figura 1: Grafico di $f(x)$; L'immagine è $]-\infty, \log(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}) - 1] \cup]3 - \log(2), +\infty[$.

Il risultato del limite si ottiene in quanto l'argomento dell'esponenziale va a $-\infty$

Per verificare se la funzione è derivabile in $x_0 = 1$ possiamo verificare che derivata destra e sinistra coincidano in quel punto. La derivata destra vale $f'_-(x) = 3x^2 - 4x + 1$ che in 1 vale 0. La derivata sinistra vale

$$f'_+ = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$$

Il cui limite in 1^- vale 0 (si può ottenere per confronto di infinito o applicando il teorema di de l'Hospital):

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \overset{t=(x-1)^{-1}}{=} \lim_{t\to-\infty} -t^2 e^t = \lim_{t\to-\infty} -\frac{t^2}{e^{-t}} = \overset{(H)}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{2t}{e^{-t}} \overset{(H)}{=} \lim_{t\to-\infty} -\frac{2}{e^{-t}} = 0$$

Quindi f è derivabile in $x = 1$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \log\left(\sin^2(3x)\right)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo. (2 punti)

Il dominio è dato da $3x \neq k\pi$, quindi:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Gli zeri sono: $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

La funzione è pari, infatti

$$g(-x) = \log(\sin^2(-3x)) = g(x)$$

La funzione è periodica con periodo $\tau = \frac{\pi}{3}$.Per determinare il periodo bisogna notare che:

$$\sin^2(3x) = \frac{1-\cos(6x)}{2}$$

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{5\pi}{12}$. (3 punti)

$$g(x_0) = \log(1/2) = -\log(2)$$
$$g'(x) = \frac{1}{\sin^2(3x)} 6\sin(3x)\cos(3x) = 6\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$$
$$g'(x_0) = 6$$

Retta tangente in x_0: $y = 6(x - \frac{5\pi}{12}) - \log(2)$

3.3 Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1}{\tan(3x)g(x)}\, dx$ (2 punti)

$$\int \frac{1}{\tan(3x))g(x)}\, dx = \int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)g(x)}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \frac{1}{6}\log(g(x)) = \frac{1}{6}\log(\log(\sin^2(3x)))$$

Problema 4 (5 punti)

1. Considerare le funzioni
$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1, \quad l(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ , \quad \text{con} \quad x \in]0,1[$$
Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in $]0,1[$ (lo studio di funzione non è richiesto);

2. Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$ è finita e quindi calcolarla.

   Sia h che l sono funzioni integrabili nel dominio in quanto $1/x^p$ è integrabile in 0 per $0 < p < 1$.

   L'area si ottiene dall'integrale di:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 |h(x) - l(x)|\, dx = \\
&= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\, dx - \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \\
&= \lim_{t\to 1^-} [-2\sqrt{1-x} - x]_0^t + \lim_{t\to 0^+} [\frac{3}{2}(x)^{2/3}]_t^1 = \\
&= -1 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

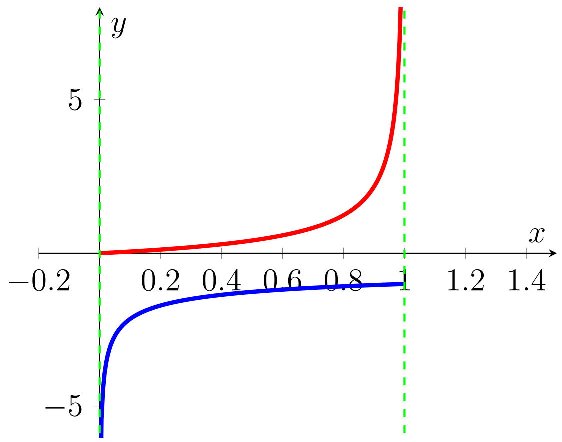

Figura 2: Grafico di $h(x)$ (rosso) e $l(x)$ (blu). Sono entrambe funzioni elementari.