Algoritmo (per numeri di fibonacci)

$$F_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 3 \end{cases}$$

formula di Binet

sezione aurea

$$x^2 = x + 1 \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \begin{cases} \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6\ldots \\ \hat{\Phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6\ldots \end{cases}$$

complemento della sezione aurea

$$\forall n \geq 1 : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \hat{\Phi}^n \right)$$

Dimostrazione tramite passo induttivo

$$n = 1 \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \checkmark$$

$$n = 2 \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{4\sqrt{5}}{4} \right) = 1 \ V$$

per $n \geq 3$ l'ipotesi dice che la proprietà vale fino ad $n-1$ quindi se:

$$F_n = 1/\sqrt{5}\left(\Phi^n - \hat{\Phi}^n\right) \quad e \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

per ipotesi induttiva allora

$$F_n = 1/\sqrt{5}\left(\Phi^{n-1} - \hat{\Phi}^{n-1}\right) + 1/\sqrt{5}\left(\Phi^{n-2} - \hat{\Phi}^{n-2}\right)$$

$$= 1/\sqrt{5}\left[\left(\Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}\right) - \left(\hat{\Phi}^{n-1} + \hat{\Phi}^{n-2}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$1/\sqrt{5}\left(\Phi^n - \hat{\Phi}^n\right)$$? come ci arrivo? dimostro se è possibile che

$$\begin{cases} \Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} \\ \hat{\Phi}^n = \hat{\Phi}^{n-1} + \hat{\Phi}^{n-2} \end{cases}$$

se sono entrambe vere la dimostrazione è finita

divido per Φ^{n-2} e $\hat{\Phi}^{n-2}$

$$\begin{cases} \Phi^2 = \Phi + 1 \\ \hat{\Phi}^2 = \hat{\Phi} + 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ per definizione di Φ, avendo $x^2 = x + 1$ la dimostrazione è verificata pseudocodice:

```
Fib(int n) -> int
    if n ≤ 2 then return 1;
    else return Fib(n-1) + Fib(n-2)
```

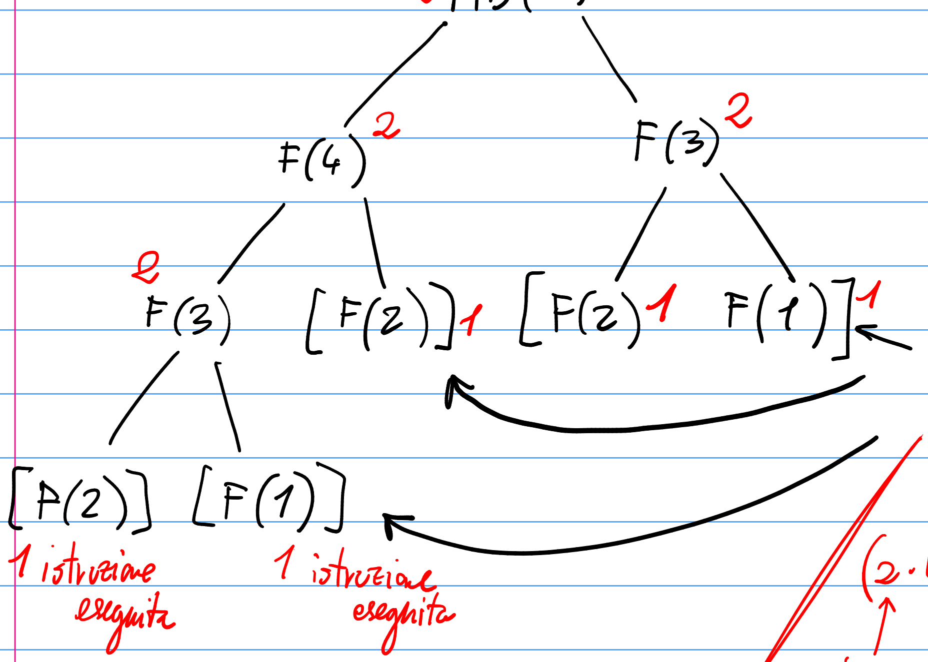
Complessità? Quante istruzioni sono eseguite?

n	$T(n)$
1	1
2	1
3	4
4	2+4+1=7

Albero delle ricorsioni (esempio pratico)

$n=5$

2 Fib(5) => ovvero $n=5$



2: entrano nell'else, che ha due chiamate = 2 istruzioni !!

foglie, nodi foglia

$$(2\cdot 4) + (1\cdot 5) = 13$$

nodi

istruzioni

istruzioni totali

L'albero ci permette di calcolare qualunque complessità

$T(5) = 13 \rightarrow 2 \cdot i(T_n) + f(T_n)$

non foglie

f = foglie

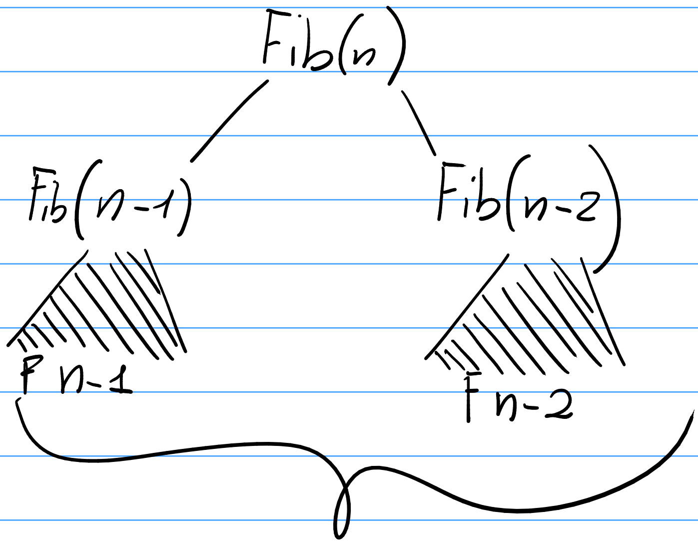
$\boxed{\text{Proprietà 1}}$ sia T_n l'albero delle ricorsioni relativo alla chiamata Fib(n).

Allora il numero di foglie di T_n è pari a F_n (ennesimo numero di Fibonacci

$$f(T_n) = F_n$$

Dim: induttiva su n (meglio con il disegno

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$



F_n = iesimo numero di Fibonacci

$\boxed{\text{Proprietà 2}}$ se ogni nodo ha esattamente due figli, allora $i(T) = f(T) - 1$