Numeri complessi

$i = \sqrt{-1}$

forma algebrica: $a+ib$ trig: $r[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]$ esp.: $re^{i\theta}$ potenza: $z^n = |z|^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$ radice: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

$$0<\theta<2\pi \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a=0, b>0 \\ \frac{3\pi}{2} & a=0, b<0 \\ \text{non definito} & a=0, b=0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a>0, b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi & a>0, b<0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & a<0, b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $m \times n$ dove m = righe, n = colonne

Si dice quadrata se $m=n$

Inoltre abbiamo

triangolare superiore triangolare inferiore

se entrambe é diagonale!

Sistema lin. arbitrario di m eq in n inc.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

matrice incompleta $m\times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice completa $m\times n$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = matrice nulla

$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica

Se esiste una B tale che $AB = BA = I$

$B = A^{-1}$ o inversa di A

$(A^{-1})^{-1} = A \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

A^T = matrice trasposta

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se $A = A^T$ si dice simmetrica

Moltiplicazione tra matrici

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Teorema del rango

$A \in M_{m,n} \quad rg(A) = rg(A^T)$

$rg(A) \leq \min\{m,n\}$

Teorema Rouché-Capelli

1. se $rk(A) < rk(A|b)$ sistema impossibile
2. " $rk(A) = rk(A|b) = n$ una soluzione
3. " $rk(A) = rk(A|b) < n$ infinite soluzioni

Algoritmo di Gauss

$(S)\begin{cases} \text{sistema di} \\ \text{incognite} \end{cases}$ = matrice superiore

tramite

1) somma tra righe
2) sottrazione tra righe
3) $\lambda r_x \pm r_y$
4) Spostamento delle righe

Se $A \in M_n$ e $rg(A) < n$ si dice singolare.

Calcolo del determinante

$2\times 2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$

- determinante cambia segno ad ogni cambio di linee.
- Se c'é una linea nulla, det = 0
- S se é ottenuta con Gauss, a $Det(S) = (-1)^k d(A)$ con k scambi
- se le righe sono linearmente dip. det = 0
- righe/colonne proporzionali
- righe/colonne comb. lin. di altre

Algoritmo di Sarrus

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ sommo sottraggo

$\begin{matrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{matrix}$

Laplace

considero matrice di ordine n

es.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ • seleziono la riga/colonna con + 0 • applico ricorsivamente laplace

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det(A_{ij})$

$det(A) = \underset{a_{ij}}{5} \cdot (-1)^{\overset{i+j}{1+3}} \cdot det(A_{13}) = 5\cdot(-4+7) = 5\cdot 3 = 15$

$A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Teorema di Binet

$A,B \in M_n$ allora $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$ perció se $A\in M_n$ e $A^{-1} \in M_n$ allora $det(A\cdot A^{-1}) = det(A)\cdot det(A^{-1}) = det(I)$. A = invertibile $\iff$ non singolare ($det \neq 0$) allora $det(A^{-1}) = \frac{1}{det A}$

Cramer $Ax=b$ se quadrato $\to A \in M_n \to A$ é non singolare. Per Rouché-Capelli se $rg(A) = rg(A|b)$ = n° incognite = 1 soluzione

quindi se $Ax=b$ di cramer allora l'unica soluzione $V = \{V_1, \dots, V_k\}$ si può trovare facendo: $V_i = \frac{det B_i}{det A}$ dove $B_i = \{A_i, \dots, A_{i+i}\}$ $i = 1, \dots, n$

Esempio

$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x+3y+z = 0 \\ x + 7z = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A \in M_3$ $det(A) = 15 \neq 0$ non singolare!

$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{15} = \frac{15}{15} = 1 = x \;\Big|\; V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = y \;\Big|\; V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{15} = \frac{0}{15} = 0 = z \;\Big|\; V = (1, 1/3, 0)$

Matrice Inversa: Usando Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ tramite Gauss diventa (cerchiamo la diagonale) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 8/15 & 1/3 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7/5 & 0 & -2/5 \\ 8/15 & 1/3 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

perché?

$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$

$Ix = A^{-1}b$

$x = A^{-1}b$

DEF. $T \in End(V)$ $\lambda \in \mathbb{K}$ (NOI SCEGLIAMO DI FISSARE $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ MA IN SEGUITO POTREMO ANCHE DECIDERE DI SCEGLIERE $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$\lambda \in \mathbb{R}$ SI DICE UN AUTOVALORE DI T SE ESISTE UN VETTORE NON NULLO $v \in V$ TALE CHE $\boxed{T(v) = \lambda \cdot v}$ IN TAL CASO, V VIENE DETTO AUTOVETTORE DI T RELATIVO ALL' AUTOVALORE λ.

TEOREMA DEGLI AUTOVETTORI

$T \in End(V)$. FISSATE UNA BASE $\mathcal{B} = \{V_1, \dots, V_n\}$ di V.

Sia A LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{B}$.

A È DIAGONALE $\iff$ $\mathcal{B}$ È COMPOSTA SOLO DA AUT. VETTORI DI T

DIM. $\Leftarrow$ $V_1, \dots, V_n$ SONO AUT. VETT. DI T

$T(V_i) = \lambda_i V_i$ DOVE λ_i è l'aut. val. di V_i $\forall i$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI T

$p_T(\lambda)$ È UN POLINOMIO NELL'INCOGNITA λ

$p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} TR(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A$

DOVE A È UNA QUALUNQUE MATRICE ASSOCIATA A T, MENTRE $TR(A)$ = TRACCIA DI A = SOMMA DI TUTTI GLI ELEMENTI DELLA DIAG. PRINCIPALE DI A

TEOREMA DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$T \in End(V)$ A, B ASSOCIATE A T RISPETTO A 2 BASI QUALUNQUE. ALLORA

$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

Si dice che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$$

per lo scalare $\alpha \neq 0$, si ottiene

$$\alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda_0\mathbf{v}) \iff A(\alpha\mathbf{v}) = \lambda_0(\alpha\mathbf{v})$$

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$$

da cui segue che

$$A\mathbf{v} - \lambda_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

vale a dire $(A - \lambda_0 \mathrm{Id}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Spazio vettoriale:

Def. uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ é un insieme non vuoto su cui sono definite operazione di somma e moltiplicazione $+ : V \times V \to V$, $(u,v) \to u+v$ (vettori) $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda v$ (scalare)

proprietà della somma: commutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso

proprietà della moltip.: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ||| $\lambda = 1$ elemento neutro ||| $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ ||| $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

$0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

Sottospazio vettoriale: Def. W é un sott. vett. di V se é chiuso rispetto alle due operazioni. Contiene sempre il vettore nullo + l'intersezione tra sott. é a sua volta un sott. vett.

Combinazione lineare: Def. vettore dato da $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_k v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$

i vettori di uno spazio vett. possono essere indipendenti o dipendenti. Si dicono indipendenti se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$. Se sono dipendente, sono C.C. di altri vettori

$Span\{v_1, \dots, v_k\}$ = l'insieme di tutte le possibili C.L. dei vettori $v_1, \dots, v_k$

Base canonica: es. $\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Base di uno spazio:** V sp. vett e $B = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ B si dice base di V se: 1) $V = \mathcal{L}(B) \to V$ é generato da B 2) B lin. indip.

Dimensione: $\dim V = n$ W s.s. vett. di V 1) $\dim W \leq n$ 2) $\dim W = n$ allora $W = V$ 3) $\dim W = 0$ $W = \{0\}$ ||| $U \cup W \to U + W \to \dim(U+W) \geq \max(\dim U, \dim W)$

$U \oplus W$ = somma diretta (solo se $U \cap W = \{0\}$, $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$ $U \cap W \to \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$

Teorema di Grassmann: $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

Trasformazioni lineari: $f: A \to B$ A, B = insiemi arbitrari non vuoti $f: A \to A$ = funzione identica

A = dominio, B = codominio ||| f é iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ||| f é suriettiva se $Im f = B$ ||| se f é sia iniettiva che suriettiva allora si dice che é biettiva (ed é di conseguenza invertibile)

Proprietà: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ ||| $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Teorema della dimensione: $T \in Hom(V, W)$ $\dim(V) = n$ allora $\dim Ker T + \dim Im T = n$

T é iniettiva $\iff \dim(V) = rg(T)$ T é suriettiva se $\dim(W) = rg(T)$ (sapendo che $T \in Hom(V, W)$)