Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 4: Basi, dimensione, e operazioni fra sottospazi vettoriali

Esercizio 1 (Basi e relazioni fra sottospazi) ....

Sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni dell'equazione $x+y+z+w=0$, e sia

$$F = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare una base e la dimensione di E e di F.

(b) È vero che $F \subset E$?

(c) È vero che $F = E$?

Esercizio 2 (Dimensione) ....

Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x a coefficienti reali, si determini la dimensione dei seguenti sottospazi:

(a) $W_1 = \operatorname{Span}\{1+x, (1+x)^2\}$.

(b) $W_2 = \operatorname{Span}\{1, x+x^2, x^3, (1+x)^3\}$.

(c) $W_3 = \operatorname{Span}\{x, x^2, x-x^2, x+x^2\}$.

Esercizio 3 (Basi) ....

Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si determinino una base di U, W e $U \cap W$.

Esercizio 4 (Basi e dimensioni) ....

In $\mathbb{R}^3$ sono dati:

- Il sottospazio E delle soluzioni dell'equazione $x + y - z = 0$.
- Il sottospazio F generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base e la dimensione di E.

(b) Trovare una base e la dimensione di $E \cap F$.

(c) Trovare una base e la dimensione di $E + F$.

Esercizio 5 (Basi e dimensioni) ....

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$ $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$.

(a) Trovare una base e la dimensione di $U = \text{span}\{v_1, v_2\} \cap \text{span}\{v_2, v_3, v_4\}$

(b) Lo spazio $W = \text{span}\{v_1, v_2\} + \text{span}\{v_2, v_3, v_4\}$ può coincidere con $\mathbb{R}^4$?

(c) Calcolare una base e la dimensione di W.

Esercizio 6 (Somma e intersezioni di sottospazi) ....

Calcolare somma e intersezione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

(a) $V = \text{span}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ e $W = \text{span}\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$.

(b) $V = \text{span}\{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ e $W = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$.

Esercizio 7 (Somma e intersezioni di sottospazi) ....

Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi

$S = \{(x, y, z, w) : x + z = 0, 3y - w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) : x + z = 0, y + 2w = 0\}$,

verificare che sono sottospazi e determinare una base di $S \cap T$ e $S + T$.

Esercizio 8 (Somma e intersezioni di sottospazi) ....

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 0\} \quad \text{e} \quad T = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}.$$

(a) Mostrare che S e T sono sottospazi vettoriali, trovare una loro base e la dimensione.

(b) Mostrare che $S \cap T$ ha dimensione 1 e trovare una sua base.

(c) Trovare una base e la dimensione di $T + S$.

Esercizio 9 (Somma e intersezioni di sottospazi) ....

Determinare una base e la dimensione dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ per le seguenti scelte di W_1 e W_2.

(a) $W_1 = \{(x, y, z, w) : 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, w) : 2x + y = 0, y = 0\}$.

(b) $W_1 = \{(x, y, z, w) : x + y = 0, z + w = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, w) : x + z = 0, y = 0\}$.

(c) $W_1 = \{(x, y, z, w) : 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ e $W_2 = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1)\}$.

(d) $W_1 = \{(x, y, z, w) : 2x + y + z = 0, y - z = 0\}$ e $W_2 = \operatorname{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$.

(e) $W_1 = \{(x, y, z, w) : x + 2y + z - w = 0\}$ e $W_2 = \operatorname{span}\{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 0, 1, 0)\}$.

(f) $W_1 = \operatorname{span}\{(1, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 2), \}$ e $W_2 = \operatorname{span}\{(2, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.