Prova_parziale 2013_01_28 soluzione

1. Dare la definizione di albero binario **completo**.
   Scrivere in C un programma **efficiente** per stabilire se un albero binario è **completo** e calcolarne la complessità al caso pessimo indicando, e risolvendo, la corrispondente relazione di ricorrenza.

Definizione di albero binario completo:

- Un albero binario completo consiste in un albero in cui ogni nodo ha al più due figli, ed ogni livello risulti riempito completamente, ad eccezione al massimo dell'ultimo. Tutti i nodi dell'ultimo livello inoltre devono essere posizionati più a sinistra possibile. Quest'ultima proprietà accerta che la struttura sia bilanciata

Bisogna ora definire prima la struct del nodo

```
struct Node {
        int key;
        Node* left;
        Node* right;
}

typedef Node* Pnode;
```

Immaginiamo ora di avere già la classe per l'albero da analizzare **tree**, e che la funziona **tree.getRoot()** ritorni il nodo radice. La funzione si chiama **tCheckComplete(Pnode u)** e ritorna 1 o 0 in base all'esito della funzione stessa.

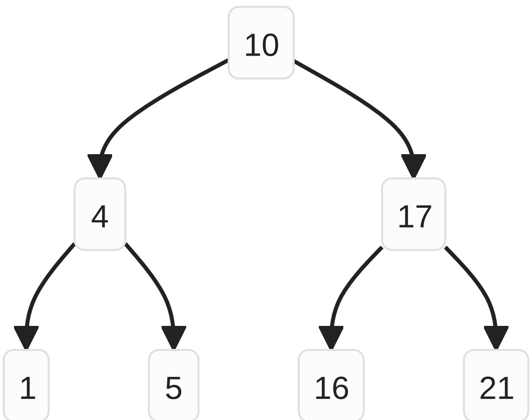
```
int numNodeCalculator(Pnode u){
        if(u == nullptr) return 0; // ho finito di scorrere

        // cerco sia a destra che a sinistra
        int left = heightCalculator(u->left);
        int right = heightCalculator(u->right);

        // ritorno la somma dei nodi sotto il nodo in cui mi trovo
        return 1 + left + right;
}

int tCheckCompleteAux(Pnode u, int index, int tot){
        if(u == nullptr) return true; // controllo se ho finito il ramo da
scorrere
        if(index >= tot) return false; // controllo se sono out-of-index

        return tCheckCompleteAux(u->left,2*index+1,tot) &&
tCheckCompleteAux(u->right, 2*index+2, tot);
```

```
}

int tCheckComplete(Pnode u){
        // caso base == albero vuoto
        if(u == nullptr){
                return 1;
        }

        // calcolo il numero di nodi totale
        int tot = numNodeCalculator(u);

        int index = 0; // we start from root with value 0

        // Il fulcro dell'algoritmo, si basa tutto sull'index!!
        return tCheckCompleteAux(u->left,2*index+1,tot) &&
tCheckCompleteAux(u->right, 2*index+2, tot);
}
```

Nel codice sopra riportato la complessità nel caso peggiore risulta essere **O(n)** per il semplice fatto che **devo scorrere tutti i nodi dell'albero**, cosa che faccio sempre per esempio nel caso in cui l'albero è effettivamente un albero binario completo.

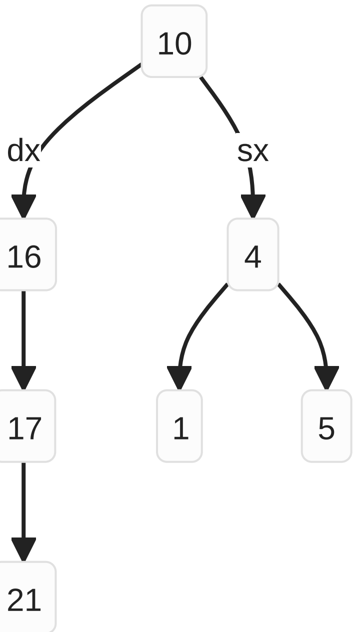
2. Dato l'insieme delle chiavi $\{1,4,5,10,16,17,21\}$, quale è l'altezza minima *hmin* di un albero binario di ricerca che contenga esattamente queste chiavi? E l'altezza massima *hmax*?
   Disegnare 3 alberi binari di ricerca con le chiavi dell'insieme specificato rispettivamente di altezza *hmin*, *hmax* e di un'altezza *h* tale che *hmin* < *h* < *hmax*.

L'albero può avere altezza minima *hmin* pari a 2



L'albero può avere altezza massima *hmax* pari a 6

L'albero può essere tra le due precedenti altezze in tre modi distinti



questo è un esempio

3. Si enunci e si dimostri il teorema fondamentale delle ricorrenze e lo si utilizzi per risolvere le seguenti ricorrenze (spiegando in quali casi del teorema ricade ciascuna di esse):

   - $T(n) = 4T(n/2) + n$
   - $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
   - $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

- Per la prima funzione $T(n) = 4T(n/2) + n$:
  - $T(n) = 4T(n/2) + n$ con $a = 4$ e $b = 2$ ed $f(n) = n$
  - $n^{log_b a} = n^{log_2 4} = n^2$
  - Vedendo che $f(n) < n^2$ e quindi $f(n)$ non influenza la complessità, $T(n) = \theta(n^2)$
- Per la seconda funzione $T(n) = 4T(n/2) + n^2$:
  - Basandoci sui calcoli del punto precedente, abbiamo che $f(n) = (n^2 lg^k n)$ e sostituendo a k il numero 0 la funzione risulta essere $f(n) = n^2$.
  - Vedendo che $f(n) = n^2$, allora $T(n) = \theta(n^2 lgn)$
- Per la terza funzione $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
  - Basandoci sui calcoli del primo punto abbiamo che $f(n) = (n^{2+1})$ dove $\epsilon = 1$, quindi siamo all'interno della terza casistica del master teorem dove troviamo la funzione funzione di $\omega(n^{log_b a + \epsilon}) = f(n)$ e la regular condition è rispettata perchè $4(n^3/2) \leq cn^3$ per $c = \frac{4}{2}$.
  - Essendo verificata la regular condition la soluzione è $T(n) = \theta(n^3)$