Funzioni continue

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A$

- se x_0 è di accumulazione per A diremo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- se x_0 è punto isolato di A diciamo che $f(x)$ è continua in x_0

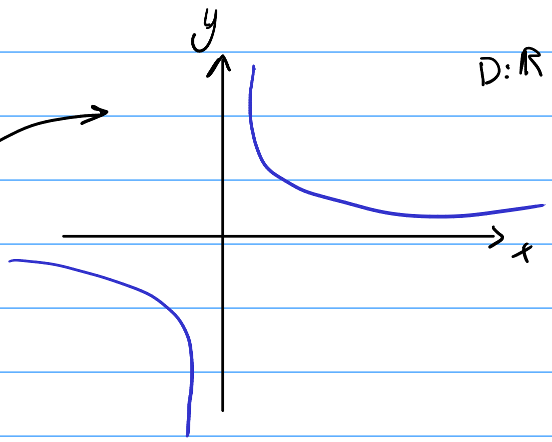
- $f(x)$ è continua se è continua in tutti i punti del dominio

esempio 1

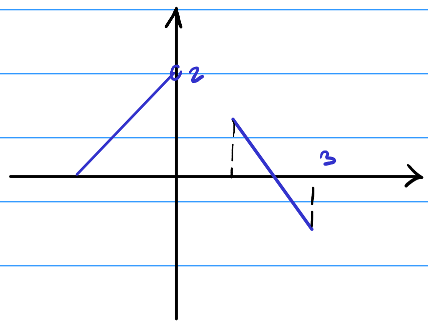
$f(x) = \frac{1}{x}$

$D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

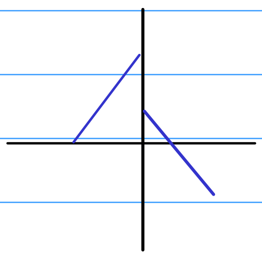
è continua



esempio 2



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -x+2 & \text{se } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

non è continua

Come capire se é continua o no?

calcolo limite x_0^- x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = r$$

Allora $f(x)$ é continua x_0 se e solo se $l = r = f(x_0)$ $x_0 \in D$

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, allora

$f + g$ é continua

$f \cdot g$ "

f / g "

$|f|$ "

dimostrazione dalla definizione di limite

$f : A \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f : B \to \mathbb{R}$ continue

$f \circ g$, $g \circ f$ risul.: continuo

permette lo scambio di variabili

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $f : A \to \mathbb{R}$ e di accum. per A (f continua)

$\lim_{x \to x_0} f(\overset{\ell}{\overbrace{g(x)}}) = \lim_{t \to \ell} f(t)$ ⇝ what?

example

$$\lim_{x \to 0^+} \log\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to +\infty}\Big) = \lim_{t \to +\infty} \log(t) = +\infty$$

f continua, strett. monotona, definita su un intervallo, allora f^{-1} é continua.

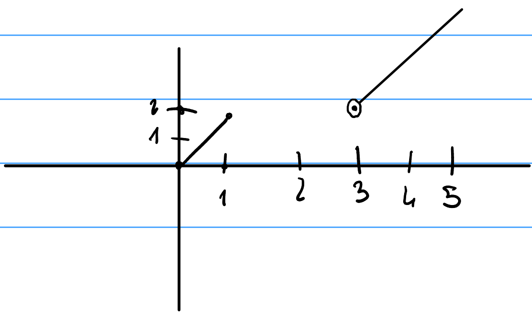
solo cres. o decr.

? cosa vuol dire

esempio

f continua, strett. monotona ma f^{-1} non continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & 3 < x \le 5 \end{cases}$$



guarda le y!

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

non é continua

$\lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x) = 3$!

$y = \text{sgn}$ é una funzione non continua

funzioni definite a tratti possono non essere continue,
bisogna controllare i punti di giunta!

$f(x) = \log_a(x)$ é continua

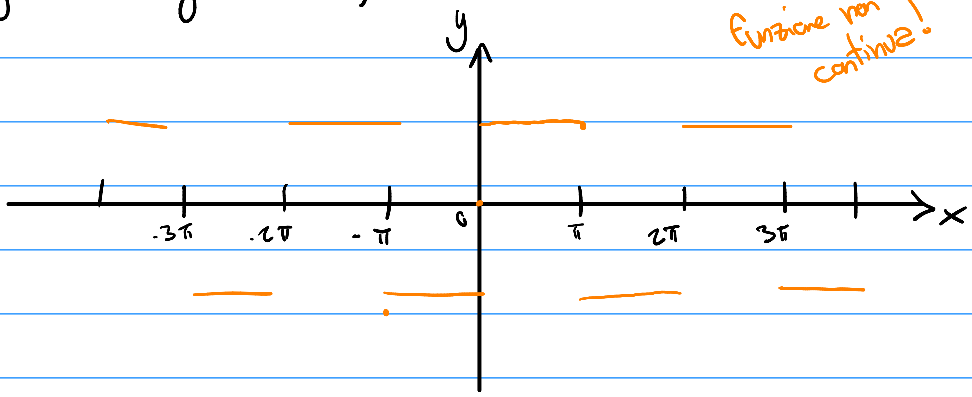
i limiti sono solo per gli estremi!

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{se } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

non continua perché

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \; ; \; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

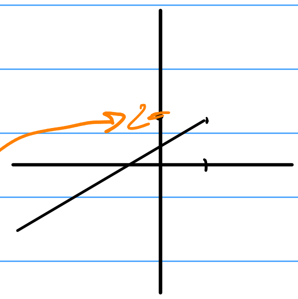
$f(x) = \text{sng}(\sin(x))$



funzione non continua!

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 3-2ax^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

per quali $a \in \mathbb{R}$ $f(x)$ é continua?



$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3-2a$

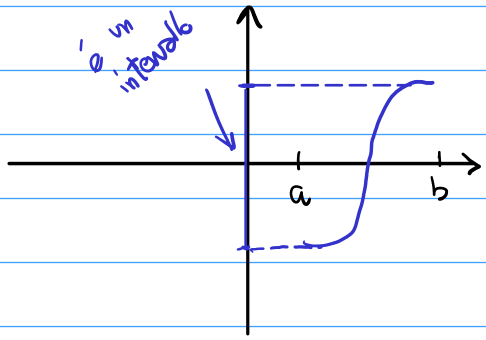
$\hookrightarrow$ per essere continua deve essere che $3-2a = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}$

that's why

$f(x)$ é continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in D_f$

Teorema valori intermedi (di Weierstrass)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $Im(f)$ é un intervallo



dimostrazione

Siano $y_1, y_2 \in Im(f)$ con $y_1 < y_2$

dobbiamo dimostrare che y_0 é compreso in $[y_1, y_2]$
allora y_0 appartiene ad $Im(f)$.

$$y_1 < y_0 < y_2 \Longrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$$

supponiamo che $x_1 < x_2$.

Chiamiamo $g(x) = f(x) - y_0$ continua (f continua)

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 = y_1 - y_0 < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - y_0 = y_2 - y_0 > 0$$

Teorema di Bolzano

quindi $\exists\, c \in [x_1, x_2] \; : \; g(c) = 0 \rightarrow f(c) - y_0 = 0$

$f(c) = y_0$

quindi $y_0 \in \operatorname{Im}(f)$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$; $\quad A =$ chiuso e limitato,

f continua, allora f assume massimo e minimo in A,

cioé:

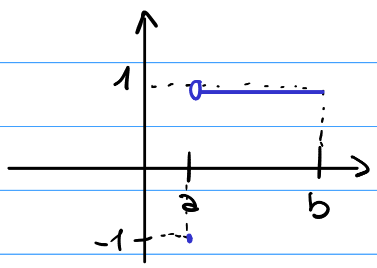
$$\exists\, c, d \in A : f(c) = \max f(x) \text{ con } x \in A$$

$$\wedge \; f(d) = \min f(x) \text{ con } x \in A$$

esercizio

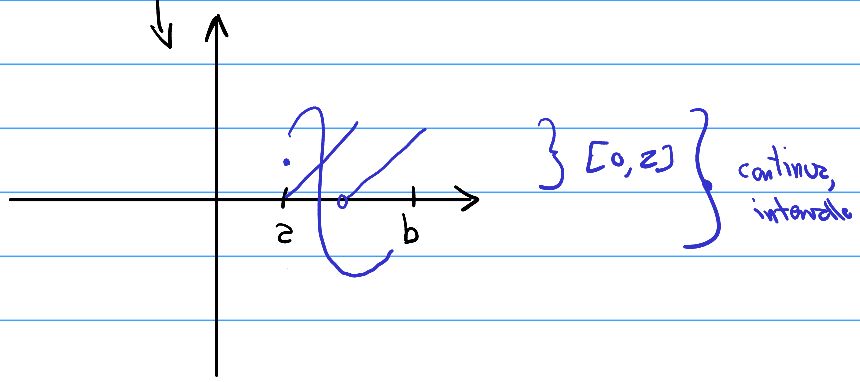
1) Esempio funzione $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \text{ma } f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = a \\ 1 & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$

2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non continua, ma l'immagine è un intervallo



3) $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ ha una soluzione? almeno 1?

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ è continua; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(1) = 5 > 0$; $f(-2) = -1 < 0$

per il teorema degli $\emptyset$, $\exists\, c \in [-2, 1] : f(c) = 0$

4) $x + \ln(x) = 0$ ha almeno una soluzione?

$f(x) = x + \ln(x)$ $\mathbb{D} : [0, +\infty[$ continua

$f(1) = 1 + 0 = 1 > 0$ $f(e^{-3}) = e^{-3} + \ln(e^{-3}) = e^{-3} - 3 < 0$

$\Rightarrow$ sempre per Bolzano (Th degli $\emptyset$)

$\exists\, c \in [e^{-3} \cdot 3, 1] : f(c) = 0$!!