G. Santin 26.03.2025

Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 7: Applicazioni lineari e matrici, rango

Esercizio 1 (Applicazioni lineari e matrici) ....

È data la seguente applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-2z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}.$$

Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 (Applicazioni lineari e matrici) ....

Sono date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Per ciascun $i = 1, 2$, scrivere esplicitamente l'applicazione lineare $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rappresentata da A_i rispetto alle basi canoniche.

(b) Per ciascun $i = 1, 2$, trovare una base di $\operatorname{Ker} T_i$ e $\operatorname{Im} T_i$.

Esercizio 3 (Applicazioni lineari e matrici) ....

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{aligned} T(0,-2,1) &= (3,-1) \\ T(1,1,-2) &= (1,2) \\ T(2,0,-1) &= (11,1). \end{aligned}$$

Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 4 (Applicazioni lineari e matrici) ....

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e si consideri l'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(e_1) = (1,0), \quad T(e_2) = (2,-1) \quad \text{e} \quad T(e_3) = (1,1).$$

Determinare la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 5 (Rango e dipendenza lineare) ....

Considerare le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango delle matrici A, B, C.

(b) Trovare l'insieme di righe (o di colonne) di A, B, C che sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6 (Rango) ....

Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 2k & 1 \\ 2 & k+2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7 (Rango) ....

Sia $h \in \mathbb{R}$ e siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 1 & 2h \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 2h & h^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il rango delle matrici A, B al variare di $h \in R$.

(b) Trovare l'insieme di righe (o di colonne) di A, B che sono linearmente indipendenti in funzione di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8 (Rango) ....

Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9 (Rango) ....

Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice ha rango 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6h \\ 1 & 2h & -3 \end{pmatrix}.$$