ALGEBRA LINEARE AAAA

17 GENNAIO 2018

Cognome: ______________________ **Nome:**_______________ **Matricola:** ________

Tempo: 2h30

La valutazione tiene conto di ordine e chiarezza nello svolgimento. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

$\boxed{1}$ Determinare le equazioni parametriche e lineari delle rette del piano passanti

(a) Per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$.

(b) Per il punto $C = (2, 3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OP} = (-1, 2)$.

Soluzione: (a) Equazione parametrica $x = 1 - 2t$; $y = 2 + t$.
(a) Equazione lineare: $x + 2y - 5 = 0$
(b) Equazione parametrica $x = 2 - t$; $y = 3 + 2t$.
(b) Equazione lineare: $2x + y - 7 = 0$

$\boxed{2}$ Risolvere il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 4x + 2y + (k+2)z &= 2 \\ 2x + 3y + (1+2k)z &= 1 + 2k \end{aligned}$$

Soluzione: Denotiamo con $a = [1{,}2{,}1 + 2k]^t$ il vettore dei termini noti ed A la matrice dei coefficienti. La matrice completa del sistema è:

$$A|a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & k+2 & 2 \\ 2 & 3 & 1+2k & 1+2k \end{bmatrix}$$

Sottraiamo alla seconda riga due volte la prima:

$$B|b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 2 & 3 & 1+2k & 1+2k \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice A dei coefficienti coincide con il determinante di B. Calcoliamo il determinante rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = \det(B) = -4k.$$

Il determinante è $\neq 0$ per $k \neq 0$. Quindi il sistema ammette un'unica soluzione per $k \neq 0$, che calcoliamo facilmente sottraendo la prima riga alla terza e scambiando poi la seconda e la terza riga:

$$C|c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2k & 2k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene $z = 0$ (perché $k \neq 0$!!!!), $y = k$ e $x = (1-k)/2$.

Se $k = 0$, la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui $x = t$, $y = 0$ e $z = (1-2t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Provare che esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1{,}2) = (3{,}0); \qquad f(2{,}4) = (6{,}0); \qquad f(0{,}1) = (1{,}1).$$

Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione: Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare se $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$ per ogni scalare λ. Da $2f(1{,}2) = 2(3{,}0) = (6{,}0) = f(2{,}4)$ si ricava che il valore di f su $(2{,}4)$ è coerente con l'eventuale linearità di f. Dobbiamo cercare di definire f in generale utilizzando la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ricavano le equazioni lineari $a + 2b = 3$ e $c + 2d = 0$. Da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ricavano le equazioni $b = 1$ e $d = 1$. Da $a + 2b = 3$ e $c + 2d = 0$ si ottiene $a = 1$ e $c = -2$. In conclusione esiste una unica trasformazione lineare di matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che coincide con f sui vettori $(0{,}1)$ e $(1{,}2)$.

$\boxed{4}$ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x{,}y{,}z) = (x, y + 3z, x + y - z).$$

(a) Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1 = (0{,}3{,}1)$, $\mathbf{v}_2 = (0{,}-1{,}1)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1{,}1{,}0)$ sono autovettori di f e determinare i rispettivi autovalori.

(b) Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Determinare la matrice (diagonale) D associata a f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Soluzione: (a) Da $f(0{,}3{,}1) = (0, 3+3, 0+3-1) = (0{,}6{,}2) = 2(0{,}3{,}1)$, $f(0{,}-1{,}1) = (0, -1+3, 0+-1-1) = (0{,}2{,}-2) = -2(0{,}-1{,}1)$ e da $f(-1{,}1{,}0) = (-1, 1+3\cdot 0, -1+1-0) = (-1{,}1{,}0)$, si ricava che i tre vettori sono autovettori di autovalori rispettivamente $2, -2{,}1$.

(b) Tre autovettori di tre autovalori distinti sono linearmente indipendenti dalla Proposizione 10.2.1 degli appunti.

(c) f è diagonalizzabile perché la molteplicità algebrica 3 coincide con la dimensione di $\mathbb{R}^3$, e la somma delle dimensioni degli autospazi $1+1+1=3$ coincide con la molteplicità algebrica 3 degli autovalori. La matrice diagonale D associata ad f si ottiene prendendo come base i tre autovettori ed ha gli autovalori nella diagonale principale:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
