Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 10 – Determinanti; matrici inverse; regola di Cramer

Esercizio 1. *Calcolare il determinante delle matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

utilizzando lo sviluppo di Laplace e l'eliminazione di Gauss, verificando che il risultato è lo stesso. Calcolare, infine, se possibile, il determinante di A^{-1} *e di* B^{-1} .

Esercizio 2. *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, A^{-1} *e verificare che* $AA^{-1} = I$.

Sol: A *è non singolare perché* $det(A) = 8$; $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. *Calcolare le inverse delle seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Risolvere usando Cramer il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 7y + 3z = 6 \\ -x + 2z = -7 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$$

Sol: $(1, 2, -3)$

Esercizio 5. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcolare $(AB)^{-1}$ *e* $(BA)^{-1}$.

Esercizio 6. *Si considerino le due equazioni* $3x - y + z = 0$ *e* $x - 2y - 3z = 0$.

- *Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con la sola soluzione nulla.*

- *Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con una unica soluzione non nulla. Trovare poi la soluzione.*
- *Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con infinite soluzioni. É possibile ottenere* ∞^2 *soluzioni? Motivare la risposta.*

Esercizio 7. *Determinare, al variare di* $a \in \mathbb{R}$ *, il numero di soluzioni del seguente sistema:*

$$\begin{cases} x + (a-1)y + (2-a)z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \\ x + (a-2)y + (2-2a^2)z = 0 \end{cases}$$

Trovare poi la (o le infinite) soluzioni. Ripetere l'esercizio considerando questa volta il vettore di termini noti $b = (a+5, 4, 6)$.

Esercizio 8. *Dopo aver verificato che il seguente sistema è di Cramer, risolverlo usando la regola di Cramer:*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x - y + z = -5 \\ y - x + 2z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 9. *Studiare il numero di soluzioni del seguente sistema (senza risolverlo)*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y = -2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$