

Esercizi del corso
Algebra Lineare
 Secondo semestre 2024/2025
Foglio 6: Applicazioni lineari, matrici

Esercizio 1 (Applicazioni lineari)

Sia T l'applicazione lineare da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 definita da

$$T(e_1) = e_1 + e_2 - e_3 \quad , \quad T(e_2) = 2e_1 - 2e_2 - e_3.$$

- (a) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
- (b) Trovare una base di $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

Esercizio 2 (Applicazioni lineari, basi, immagine (da esame))

Sia $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$T(e_1) = (5k, k+1, 3, 2k^2)$$

$$T(e_2) = (1, 0, k+5, 0)$$

$$T(e_3) = (3k+4, 0, 1, k)$$

$$T(e_4) = (0, 0, k+3, 0)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Studiare iniettività e suriettività di T al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- (b) Determinare la dimensione e una base di $\text{ker}(T_0)$ (cioè ponendo $k = 0$).
- (c) Determinare la dimensione e una base di $\text{Im}(T_0)$ (cioè ponendo $k = 0$).

Esercizio 3 (Applicazioni lineari, basi, immagine (da esame))

Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$T_a(x, y, z) = (-x + (2-a)y + z, \quad x - y + z, \quad x - y + (4-a)z)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo T_a è suriettivo.
- (b) Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo T_a è iniettivo.
- (c) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $w = (1, 1, 1) \in \text{Im}(T_a)$.
- (d) Determinare $\dim(\text{Ker } T_1)$ (ossia per $a = 1$).

Esercizio 4 (Applicazioni lineari, basi, immagine (difficile))

In \mathbb{R}^4 si consideri il sottospazio U definito come segue:

$$U : \begin{cases} x + y + z + w &= 0 \\ 2x + 3y - z + w &= 0. \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= U \\ T(1, -1, 1, -1) &= (2, 1) \\ T(1, 0, -1, 0) &= (-2, -k) \\ T(0, 0, 1, 1) &= (1, k). \end{aligned}$$

Quante ne esistono?

(b) Determinare una base di $\text{Im } T$.

(c) Calcolare $T^{-1}(1, 2)$.

Esercizio 5 (Somma e prodotto fra matrici)

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

calcolare, quando possibile, le somme e prodotti seguenti:

$$AC, \quad B + CA, \quad (BC)A, \quad BA, \quad BA^T, \quad A^T + BC.$$

Esercizio 6 (Somma tra matrici)

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ numeri reali e date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ c-2b & 3c-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -b-c & 0 \\ 4a+b & a+b \end{pmatrix},$$

trovare i valori di a, b, c tali che $A = -B$.