G. Santin 03.06.2024

Esame del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Corso di Laurea in Informatica

Tema A

Cognome	Nome	Matricola	Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.

Esercizio 1 (Studio di funzione) .... **14 punti**

Considerare la funzione

$$f(x) = x + 1 + 10e^{-|x-1|} .$$

(a) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse y (l'intersezione con l'asse x e lo studio del segno non sono richiesti) .

(b) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.

(c) Discutere la continuità e derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

(d) Utilizzare i punti precedenti per mostrare che il grafico di $f(x)$ ha una sola intersezione con l'asse x.

(e) Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Soluzione ....

Conviene scrivere la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + 10e^{x-1}, & x < 1 \\ x + 1 + 10e^{-(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Dividiamo per punti:

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}$.
- Calcoliamo
$$f(-x) = x + 1 + 10e^{-|-x-1|} = x + 1 + 10e^{-|x+1|},$$
e siccome $f(x) \neq f(x)$, $f(x) \neq -f(x)$ la funzione non è ne' pari ne' dispari. Non è neanche periodica.
- Abbiamo $f(0) = 1 + 10e^{-1} \approx 4.68$, e quindi il grafico di f interseca l'asse y in $(0, 1 + 10e^{-1})$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$. Per sostituzione otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 1 + 10e^{x-1} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + 10e^{-(x-1)} = +\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Dobbiamo ora verificare la presenza di asintoti obliqui (visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$). Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} + 10\frac{e^{x-1}}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} + 10\frac{e^{-x+1}}{x} = 1,$$

e quindi gli eventuali asintoti obliqui hanno $m = 1$ a $\pm\infty$. Procediamo e calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x + 1 + 10e^{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} 1 + 10e^{x-1} = 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + 10e^{-(x-1)} - x = \lim_{x\to+\infty} 1 + 10e^{-(x-1)} = 1.$$

Abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y = x + 1$ a $\pm\infty$.

(c) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ perchè è data da somme, rapporti e composizioni di funzioni continue.

Calcoliamo la derivata prima nei due intervalli $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 10e^{x-1}, & x < 1 \\ 1 - 10e^{-(x-1)}, & x > 1, \end{cases}$$

e verifichiamo i limiti per $x \to 1^{\pm}$:

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1} 1 + 10e^{x-1} = 11$$
$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1} 1 - 10e^{-(x-1)} = -9,$$

da cui segue che f non è derivabile in $x = 1$.

Studiamo il segno di f' nei due intervalli:

- $x < 1$: $f'(x) = 1 + 10e^{x-1} > 0$ per ogni x (somma di due funzioni positive)
- $x > 1$: $f'(x) = 1 - 10e^{-(x-1)} \geq 0$ se e solo se

$$e^{-(x-1)} \leq 1/10 \Leftrightarrow -x + 1 \leq \log(1/10) \Leftrightarrow x \geq 1 - \log(1/10) = 1 + \log(10) \approx 3.30.$$

Riassumendo, otteniamo lo studio del segno di f', e quindi i rispettivi intevalli di crescita e descrescita di f, come in Tabella 2.

		1		$1 + \log(10)$	
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	?	$\searrow$	min	$\nearrow$

Tabella 2: Studio del segno di f' e intervalli di crescenza e descrescenza di f.

Resta da discutere il punto $x = 1$, dove f non è derivabile. Osservando lo studio del segno, e visto che f è continua in tutto $\mathbb{R}$, vediamo che il punto $x = 1$ è un massimo relativo.

Il valore che f assume nei due max/min locali è

$$f(1) = 2 + 10 = 12,$$
$$f(1 + \log(10)) = 2 + \log(10) + 10e^{-\log(10)} = 3 + \log(10) \approx 5.30.$$

Nessuno di questi punti è di minimo o massimo assoluti, perchè f non è limitata superiormente ne' inferiormente.

(d) Sappiamo che f è continua in tutto $\mathbb{R}$, tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi deve esistere almeno un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ per cui $f(\bar{x}) = 0$. D'altra parte sappiamo che in $[1, \infty[$ il valore di f è sempre più grande del valore che assume nel suo minimo relativo, cioè $3 + \log(10)$. Visto che questo valore è positivo, la funzione è sempre strettamente positiva in $[1, \infty[$. Quindi dobbiamo per forza avere $\bar{x} \in]-\infty, 1[$. Infine, f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1[$, e quindi il punto $\bar{x}$ in cui $f(\bar{x}) = 0$ è unico.

(e) Il grafico di f è abbozzato in Figura 1. L'immagine di f è $[-\infty, +\infty[$, visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

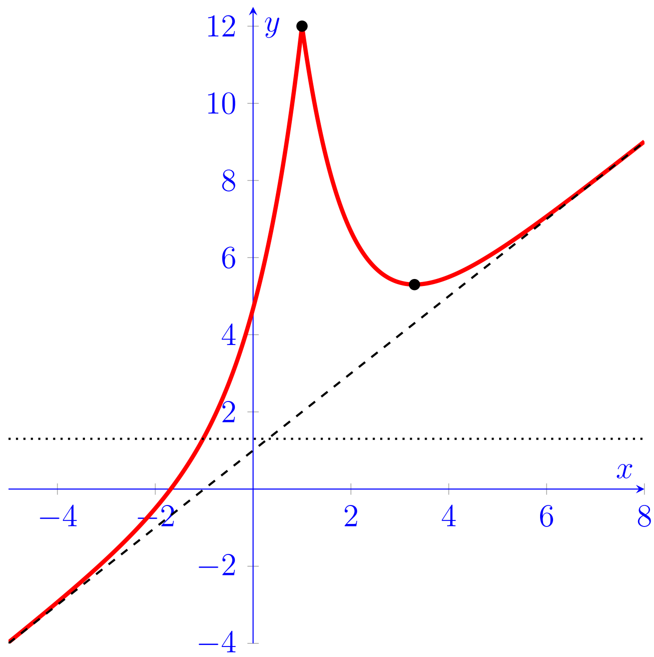

Figura 1: Grafico della funzione f.

Esercizio 2 (Continuità e derivabilità) .... **5 punti**

Dato $p \in \mathbb{R}$, considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{se } x \le 0 \\ x^p \log(x) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $\log = \log_e$.
Discutere per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ la funzione f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Soluzione ....

Analizziamo prima le due parti separatamente:

- La funzione $e^{-x} - 1$ è continua e derivabile per ogni $x \le 0$.
- La funzione $x^p \log(x)$ è continua e derivabile per ogni $x > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

Ci resta da controllare il punto di giunzione $x = 0$:

- Per la continuità abbiamo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^p \log(x) = \begin{cases} -\infty, & p \le 0 \\ 0, & p > 0. \end{cases}$$

  Quindi la funzione è continua in 0 (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $p > 0$.

- Abbiamo che f è derivabile per $x \neq 0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} (e^{-x} - 1)' & = -e^{-x}, \quad x < 0, \\ (x^p \log(x))' & = p x^{p-1} \log(x) + x^p \cdot \frac{1}{x} = x^{p-1} \left(p \log(x) + 1 \right), \quad x > 0. \end{cases}$$

  Per verificare la derivabilità in $x = 0$ calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^{-x} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{p-1} \left(p \log(x) + 1 \right) = p \lim_{x \to 0^+} x^{p-1} \log(x) = \begin{cases} -\infty, & p \le 1 \\ 0, & p > 1. \end{cases}$$

  Quindi la funzione non ha mai derivata continua in $x = 0$.

Esercizio 3 (Derivate e retta tangente) .... **7 punti**

Considerare la funzione $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x) - 1}$.

(a) Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in tal caso, determinarne il periodo.

(b) Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione . . . .

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(3x) \neq 1$, cioè per $3x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo $g(x) = 0$ per $\sin(2x) = 0$, ovvero $2x = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per verificare la simmetria calcoliamo

$$g(-x) = \frac{\sin(-2x)}{\sin(-3x) - 1} = \frac{-\sin(2x)}{-\sin(3x) - 1}$$

e quindi la funzione non è ne' pari ne' dispari.

Il numeratore è periodico di periodo π, mentre il denominatore di periodo $\frac{2}{3}\pi$. La funzione è quindi periodica di periodo $\tau = 2\pi$, che è il minimo multiplo intero dei due periodi.

(b) L'equazione della retta tangente in x_0 è data dal polinomio di Taylor di grado $n = 1$ centrato in x_0, che ha equazione [1]

$$T_{1,x_0}(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = g(x_0) + g'(x_0)\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Usando la formula di derivazione del rapporto, otteniamo che

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x) - 1}\right)' \\ &= \frac{(\sin(2x))'(\sin(3x) - 1) - \sin(2x)(\sin(3x) - 1)'}{(\sin(3x) - 1)^2} \\ &= \frac{2\cos(2x)(\sin(3x) - 1) - \sin(2x)3\cos(3x)}{(\sin(3x) - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ora abbiamo $x_0 = \pi/4$ e quindi

$$\begin{aligned} \sin(2x_0) &= \sin(\pi/2) = 1, \\ \sin(3x_0) &= \sin(3/4\pi) = \sqrt{2}/2, \\ \cos(2x_0) &= \cos(\pi/2) = 0, \\ \cos(3x_0) &= \cos(3/4\pi) = -\sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare i valori

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{\sin(2x_0)}{\sin(3x_0) - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}/2 - 1} = -(2 + \sqrt{2}) \\ g'(x_0) &= \frac{2\cos(2x_0)(\sin(3x_0) - 1) - \sin(2x_0)3\cos(3x_0)}{(\sin(3x_0) - 1)^2} = \frac{3\sqrt{2}/2}{(\sqrt{2}/2 - 1)^2} = 3(3\sqrt{2} + 4). \end{aligned}$$

Quindi l'equazione della retta tangente è

$$T_{1,x_0}(x) = -(2 + \sqrt{2}) + 3(3\sqrt{2} + 4)\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

[1] Si può anche usare direttamente questa formula, senza scriverla come polinomio di Taylor

Esercizio 4 (Integrali) . . . . **7 punti**

Considerare la funzione

$$h(x) = 1 - \log(x).$$

Determinare l'area del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione delimitata da $y = h(x)$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Soluzione . . . .

Il grafico dell'area da ruotare e (non richiesto) è abbozzato in Figura 2.

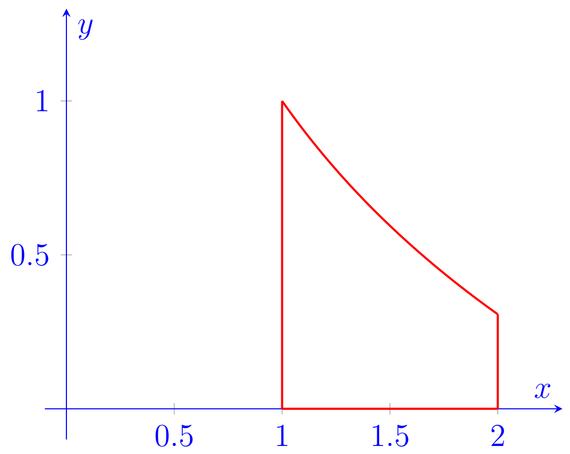

Figura 2: Il grafico dell'area da ruotare.

Il volume del solido è dato dalla formula

$$V = \int_0^2 \pi h(x)^2 dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (1 - \log(x))^2 dx = \pi \int_1^2 (1 - 2\log(x) + \log^2(x))dx \\ &= \pi \left(\int_1^2 1dx - 2 \int_1^2 \log(x)dx + \int_1^2 \log^2(x)dx \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo prima gli integrali indefiniti. Abbiamo $\int 1dx = x$, e per gli altri integrali usiamo la regola di integrazione per parti per calcolare

$$\int \log(x)dx = \int 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\log(x) - \int 1dx = x(\log x - 1),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \log^2(x)dx &= \int 1 \cdot \log^2(x)dx = x\log^2(x) - 2\int x\log(x)\frac{1}{x}dx \\ &= x\log^2(x) - 2\int \log(x)dx = x\log^2(x) - 2x(\log x - 1). \end{aligned}$$

Gli integrali definiti hanno quindi i valori

$$\int_1^2 1dx = 2 - 1 = 1,$$
$$\int_1^2 \log(x)dx = 2(\log 2 - 1) - 1(\log 1 - 1) = 2\log(2) - 2 + 1 = 2\log(2) - 1$$
$$\int_1^2 \log^2(x)dx = 2\log^2(2) - 4(\log 2 - 1) - (\log^2(1) - 2(\log 1 - 1)) = 2\log^2(2) - 4\log 2 + 2.$$

Quindi

$$V = \pi\left(1 - 2(2\log(2) - 1) + 2\log^2(2) - 4\log 2 + 2\right) = \pi\left(2\log^2(2) - 8\log 2 + 5\right).$$