G. Santin 05.09.2024

Esame del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Corso di Laurea in Informatica

Tema A

Cognome	Nome	Matricola	Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.

Esercizio 1 (Studio di funzione) . . . . **14 punti**

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))},$$

dove $\log = \log_e$.

(a) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi e studiarne il segno.

(b) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.

(c) Discutere la continuità e derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

(d) Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di concavità e convessità di f determinando, se esistono, i punti di flesso.

(e) Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Soluzione . . . .

Conviene scrivere la funzione come

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\log(2) + \log(x+1)}.$$

(a) Dividiamo per punti:

- Dobbiamo richiedere che l'argomento dei logaritmi sia positivo, quindi $x+1 > 0$, cioè $x > -1$. Inoltre vogliamo che $\log(2(x+1)) \neq 0$, quindi $2(x+1) \neq 1$, cioè $x \neq -\frac{1}{2}$. Quindi il dominio è $D =]-1, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
- La funzione non è ne' pari ne' dispari perchè il dominio non è simmetrico.
- Abbiamo $f(0) = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0$, e quindi il grafico di f interseca l'asse y in $(0,0)$.
- Per l'asse x abbiamo $f(x) = 0$ se e solo se $\log(x+1) = 0$, quindi per $x = 0$. Quindi abbiamo solo un'intersezione in $(0,0)$.
- Per lo studio del segno abbiamo $\log(x+1) > 0$ se e solo se $x+1 > 1$, cioè se $x > 0$, mentre $\log(2(x+1)) > 0$ se e solo se $2(x+1) > 1$, cioè se $x > -1/2$. Quindi abbiamo lo studio del segno come in Tabella 2.

(b) Gli estremi del dominio sono -1^+, $-\frac{1}{2}^{\pm}$, $+\infty$.

Raccogliendo il termine $\log(x+1)$ abbiamo

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\log(x+1)}{\log(2)+\log(x+1)} = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(x+1)}+1} = 1,$$

		$-1/2$		0	
$\log(x+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\log(2(x+1))$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Tabella 2: Studio del segno di f.

e quindi non ci sono asintoti verticali per $x \to -1^+$.

Per $-1/2$, visto che $\log(-1/2+1) = \log(1/2) < 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = \lim_{x\to -1/2^-} \frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \lim_{x\to -1/2^+} \frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))} = -\infty,$$

e quindi c'è un asintoto verticale $x = -1/2$, sia a destra che a sinistra.

Per $+\infty$, raccogliendo il termine $\log(x+1)$ otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(2)+\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(x+1)}+1} = 1,$$

e quindi c'e' un asintoto orizzontale $y = 1$ a $+\infty$. Questo implica anche che non ci sono asintoti obliqui.

(c) La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio perchè è data da somme, rapporti e composizioni di funzioni continue e derivabili.

Per $x \in D$ possiamo calcolare la derivata con la regola di derivazione di un rapporto, cioè

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))}\right)' \\ &= \frac{(\log(x+1))'\log(2(x+1)) - \log(x+1)(\log(2(x+1)))'}{(\log(2(x+1)))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1}\log(2(x+1)) - \log(x+1)\frac{2}{2(x+1)}}{(\log(2(x+1)))^2} \\ &= \frac{\log(2)}{(x+1)(\log(2(x+1)))^2}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $f'(x) \neq 0$, visto che il numeratore non è mai nullo. Per studiare il segno osserviamo che $(\log(2(x+1)))^2 \geq 0$ per ogni x, e che $\log(2) > 0$. Quindi il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $(x+1)$, e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x+1 > 0$, cioé se $x > -1$, cioè in ogni punto del dominio.

Ne segue che f è sempre crescente e non ha punti di massimo o minimo relativi, e quindi nemmeno assoluti.

(d) Nel dominio di f calcoliamo la derivata seconda usando la regola di derivazione del reciproco, del prodotto e della funzione composta, e otteniamo

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\log(2)}{(x+1)(\log(2(x+1)))^2}\right)' = \log(2)\left(\frac{1}{(x+1)(\log(2(x+1)))^2}\right)' \\
&= -\log(2)\frac{((x+1)(\log(2(x+1)))^2)'}{(x+1)^2\log(2(x+1))^4} \\
&= -\log(2)\frac{(x+1)'\log(2(x+1))^2 + (x+1)\left(\log(2(x+1))^2\right)'}{(x+1)^2\log(2(x+1))^4} \\
&= -\log(2)\frac{\log(2(x+1))^2 + (x+1)\left(2\log(2(x+1))\dfrac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2\log(2(x+1))^4} \\
&= -\log(2)\frac{\log(2(x+1))+2}{(x+1)^2(\log(2(x+1)))^3}.
\end{aligned}
$$

Per lo studio del segno di f'' abbiamo che

- Il termine $-\log(2)/(x+1)^2$ è sempre negativo nel dominio.
- Vale $\log(2(x+1)) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log(2(x+1)) \geq -2 \Leftrightarrow 2(x+1) \geq e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2e^2} - 1 \approx -0.93$.
- Vale $(\log(2(x+1)))^3 > 0$ se e solo se $\log(2(x+1)) > 0$, e abbiamo già visto che questo vale per $x > -1/2$.

Quindi abbiamo lo studio del segno di f'', e gli intervalli di convessità e concavità e punti di flesso di f come in Tabella 3.

		$1/(2e^2)-1$		$-1/2$	
$-\log(2)/(x+1)^2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\log(2(x+1))+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(\log(2(x+1)))^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\cap$	flesso	$\cup$	$\nexists$	$\cap$

Tabella 3: Studio del segno di f'' e intervalli di convessità e concavità di f.

Ne segue che il punto $x = 1/(2e^2) - 1$ è di flesso, e

$$
f\left(\frac{1}{2e^2} - 1\right) = \frac{\log\left(\dfrac{1}{2e^2}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{e^2}\right)} = \frac{2+\log(2)}{2} \approx 1.35.
$$

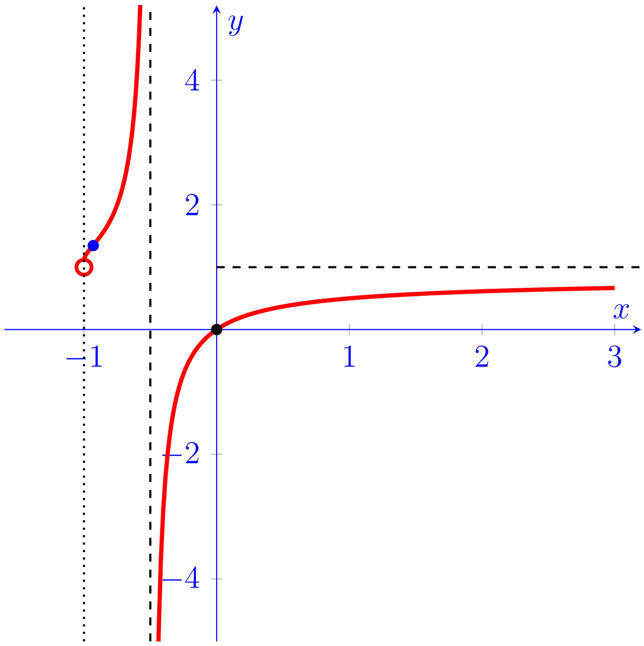

Figura 1: Grafico della funzione f.

(e) Il grafico di f è abbozzato in Figura 1. L'immagine di f è $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, visto che $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ e che non esiste nessun $x \in D$ per cui $f(x) = 1$.

Esercizio 2 (Continuità e derivabilità) . . . . **6 punti**

Dato $p \in \mathbb{R}$, considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)\log(2-x) & \text{se } x < 2 \\ x^2 + 2px + p^2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

dove $\log = \log_e$.
Discutere per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ la funzione f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Soluzione . . . .

Analizziamo prima le due parti separatamente:

- La funzione $(2-x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e la funzione $\log(2-x)$ è continua e derivabile nel suo dominio, cioè per $2-x>0$, ovvero per $x<2$. Quindi la funzione $(2-x)\log(2-x)$ è continua e derivabile per $x<2$ perchè prodotto di due funzioni continue e derivabili.

- La funzione $x^2+2px+p^2$ è continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e quindi anche per ogni $x \geq 2$) e per ogni $p \in \mathbb{R}$.

Ci resta da controllare il punto di giunzione $x = 2$:

- Per la continuità abbiamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2-x)\log(2-x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 4 + 4p + p^2 = (p+2)^2,$$

  quindi la funzione è continua in 2 (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $(p+2)^2 = 0$, cioè per $p = -2$.

- La funzione è derivabile solo se e' continua, quindi possiamo assumere d'ora in poi $p = -2$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} x<2: \quad f'(x) &= ((2-x)\log(2-x))' = (2-x)'\log(2-x) + (2-x)(\log(2-x))' \\ &= -\log(2-x) + (2-x)\frac{1}{2-x}(-1) = -\log(2-x) - 1, \\ x>2: \quad f'(x) &= \left(x^2 - 4x + 4\right)' = 2x - 4. \end{aligned}$$

  Calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (-\log(2-x) - 1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-4) = 0.$$

  Quindi la funzione non ha derivata continua in $x = 2$.

Esercizio 3 (Polinomio di Taylor) .... **7 punti**

Considerare la funzione $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)\sin(2x)$.

(a) Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in tal caso, determinarne il periodo.

(b) Calcolare il polinomio di Taylor di g di grado $n = 2$ centrato in $x_0 = 0$.

Soluzione ....

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $g(x) = 0$ se e solo se $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ oppure $\sin(2x) = 0$. Nel primo caso otteniamo $x/2 = \pi/2 + k\pi$, cioè $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nel secondo caso abbiamo $2x = 0 + k\pi$, ovvero $x = \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per verificare la simmetria calcoliamo

$$g(-x) = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin(-2x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\sin(2x) = -g(x),$$

e quindi la funzione è dispari.

La funzione $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ è periodica di periodo 4π, mentre la funzione $\sin(2x)$ è periodica di periodo π. Quindi g è periodica di periodo 4π.

(b) Il polinomio di Taylor di secondo grado ha equazione

$$T_{2,x_0}(x) = g(x_0) + g'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)\,(x - x_0)^2 .$$

Usando la formula di derivazione del prodotto, otteniamo

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)(\sin(2x))' = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x),\\
g''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x)\right)'\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x)\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)\right)\\
&= -\frac{17}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x).
\end{aligned}$$

Quindi per $x_0 = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= \cos(0)\sin(0) = 0,\\
g'(x_0) &= -\frac{1}{2}\sin(0)\sin(0) + 2\cos(0)\cos(0) = 2,\\
g''(x) &= -\frac{17}{4}\cos(0)\sin(0) - 2\sin(0)\cos(0) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_{2,x_0}(x) = 2x.$$

Esercizio 4 (Integrali) .... **6 punti**

Considerare la funzione

$$h(x) = x + \sin(x).$$

Determinare l'area del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione delimitata da $y = h(x)$, $x = 3\pi$, $y = 0$, $x = 0$.

Soluzione ....

Il grafico dell'area da ruotare (non richiesto) è abbozzato in Figura 2.

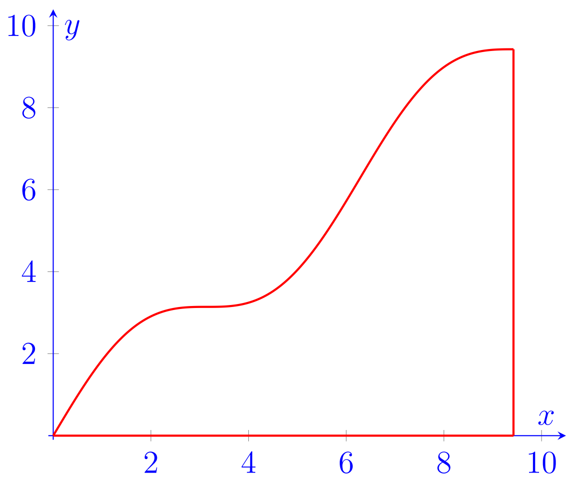

Figura 2: Il grafico dell'area da ruotare.

Il volume del solido è dato dalla formula

$$V = \int_0^{3\pi} \pi h(x)^2 dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{3\pi} (x + \sin(x))^2 dx = \pi \int_0^{3\pi} (x^2 + 2x\sin(x) + \sin^2(x)) dx \\ &= \pi \left(\int_0^{3\pi} x^2 dx + 2 \int_0^{3\pi} x \sin(x) dx + \int_0^{3\pi} \sin^2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo prima gli integrali indefiniti. Abbiamo $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, e per gli altri integrali usiamo la regola di integrazione per parti per calcolare

$$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x),$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx = \int \sin(x)\cdot\sin(x)dx &= \sin(x)(-\cos(x)) - \int \cos(x)(-\cos(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx,\end{aligned}$$

e quindi

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x \Rightarrow \int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(-\sin(x)\cos(x) + x\right).$$

Gli integrali definiti hanno quindi i valori

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi} x^2dx &= \frac{(3\pi)^3}{3} - 0 = 9\pi^3, \\ \int_0^{3\pi} x\sin(x)dx &= -3\pi\cos(3\pi) + \sin(3\pi) - (-0\cos(0) + \sin(0)) = 3\pi, \\ \int_0^{3\pi} \sin^2(x)dx &= \frac{1}{2}\left(-\sin(3\pi)\cos(3\pi) + 3\pi\right) - \frac{1}{2}\left(-\sin(0)\cos(0) + 0\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Quindi

$$V = \pi\left(9\pi^3 + 6\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = 3\pi^2\left(3\pi^2 + \frac{5}{2}\right).$$