G. Santin 20.02.2025

Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 2: Vettori linearmente (in)dipendenti e sottospazi vettoriali

---

Esercizio 1 (Operazioni) ....

Dati i vettori nello spazio $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 2, 0)$, calcolare

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ (c) $-3\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$

Esercizio 2 (Dipendenza lineare) ....

Verificare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti

(a) $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{z} = (0, 2, 1)$

(b) $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{z} = (0, 3, -1)$

(c) $\mathbf{v_1} = (1, -1, -1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v_3} = (-2, 2, 0)$.

Esercizio 3 (Dipendenza lineare) ....

Verificare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti

$$\mathbf{v_1} = (1, 1, 2)\ ,\ \mathbf{v_2} = (0, 2, 2)\ ,\ \mathbf{v_3} = (-1, 3, 2)$$

In caso di dipendenza, trovare la relazione che permette di scrivere uno dei vettori come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 4 (Dipendenza lineare) ....

Dato il vettore $\mathbf{v_1} = (1, -1, 2)$, trovare altri due vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ in modo che i vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ siano linearmente indipendenti.

Esercizio 5 (Dipendenza lineare) ....

Sono dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v_1} = (3, 1, k), \quad \mathbf{v_2} = (-k, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v_3} = (2k, -2, k).$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente indipendenti.

(b) Per i valori di k per cui risultano linearmente dipendenti, stabilire quanti tra di loro sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6 (Dipendenza lineare) . . . .

Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti:

$$\mathbf{v_1} = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v_2} = (2, -3, 0, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v_3} = (0, 1, 0, k).$$

Per i valori di k trovati, esprimere $\mathbf{v_3}$ come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 7 (Spazio vettoriale) . . . .

Stabilire se il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è uno sottospazio vettoriale

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : x + y = 5\}.$$

Esercizio 8 (Spazio vettoriale) . . . .

Verificare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono sottospazi vettoriali.

(a) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x + z = 0, \; 3y - w = 0\}$.

(b) $T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x + z = 0, \; y + 2w = 0\}$.

Esplicitare le componenti (x, y, w, z) del generico elemento di S e T in funzione di due parametri liberi.

Esercizio 9 (Spazio vettoriale) . . . .

Verificare se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ (polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a tre) sono sottospazi vettoriali

(a) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \, : \, p(0) = 0\}$

(b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \, : \, p(x) \text{ ha grado al più } 1\}$

(c) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \, : \, p(x) = ax + bx^3, \text{ dove } a, b \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 10 (Spazio vettoriale) . . . .

È dato il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y = z, 2x = y\}$$

(a) Scrivere le componenti (x, y, z) del generico elemento di S in funzione di un parametro libero.

(b) Verificare che S è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 11 (Dipendenza lineare) . . . .

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ é formato da vettori linearmente indipendenti:

(a) $S = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(b) $T = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(c) $U = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

(d) $V = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1),(0,3,0,0)\}$;

Esercizio 12 (Dipendenza lineare) . . . .

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}_2[x]$ é formato da vettori linearmente indipendenti.

(a) $S = \{1, x, x^2\}$;

(b) $S = \{1, x\}$;

(c) $S = \{x, x^2\}$;

(d) $S = \{1 + x, x, x^2\}$;

(e) $S = \{1, x, x^2, 1 + x\}$;

(f) $S = \{1, x, 2 + x\}$;

(g) $S = \{1, x, x^2, 2 - x\}$;

(h) $S = \{2 - x, x, x^2\}$;

(i) $S = \{1, x + x^2, 1 + x + x^2\}$;

(j) $S = \{1, x + x^2, 1 + x - x^2\}$;

(k) $S = \{x + x^2, 1 + x + x^2\}$