Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

26/01/2022; Tema A
Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (13 punti)

Considerare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^3 - 6x - 3)\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Determinare, se possibile, l'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate (studio del segno non richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, punti di massimo e minimo relativi (NOTA BENE: il calcolo della derivata seconda NON è richiesto).

1.4 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f. Spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha esattamente 3 soluzioni.

Problema 2 (4 punti)

Determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(\log(2x))}{\cos(\log(2x))}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi}$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\frac{g(x)}{x}$

Problema 4 (6 punti)

Considerare la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + 1, \quad \text{con} \quad x \in I = [-32, 0[$$

Disegnare il grafico di h e spiegare perché h è integrabile in I. Calcolare:

4.1 l'area della regione del piano compresa tra il grafico di h, l'asse delle ascisse e le rette $x = -32$ e $x = 0$.

4.2 il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di h attorno all'asse y.

Soluzioni

Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^3 - 6x - 3)e^{\frac{x+3}{x+1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Determinare, se possibile, l'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate (studio del segno non richiesto). (1 punto)

Bisogna imporre $x + 1 \neq 0$ e quindi il dominio è

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non ha simmetrie.

Intersezione asse y: $y = -3e^3$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (4 punti)

$$\lim_{x\to-1^-}(-3-6x+2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \exp\left(\lim_{x\to-1^-}\frac{x+3}{x+1}\right) = 0$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-1^+}(-3-6x+2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \exp\left(\lim_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x+1}\right) = +\infty$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $+\infty$. Quindi $x = -1$ è asintoto verticale da destra.

$$\lim_{x\to+\infty}(-3-6x+2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \left(\lim_{x\to+\infty}(-3-6x+2x^3)\right)\left(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = +\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$m: \lim_{x\to+\infty}(-\frac{3}{x} - 6 + 2x^2)e^{\frac{x+3}{x+1}} = +\infty$$

Quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(-3-6x+2x^3)e^{\frac{x+3}{x+1}} = \left(\lim_{x\to-\infty}(-3-6x+2x^3))\right)\left(\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = -\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to -\infty$:

$$m: \lim_{x\to-\infty} (-\frac{3}{x} - 6 + 2x^2)\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}} = -\infty$$

Quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

f è continua perché prodotto, e composizione di funzioni continue

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, punti di massimo e minimo relativi (NOTA BENE: il calcolo della derivata seconda NON è richiesto). (5 punti)

f è derivabile perché prodotto e composizione di funzioni derivabili

Derivata

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-6 + 6x^2)\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}} + (-3 - 6x + 2x^3)\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}} \frac{-2}{(x+1)^2} = \\
&= \frac{-6x^2 - 12x - 6 + 6x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 6 + 12x - 4x^3}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}} = \\
&= \frac{6x^4 + 8x^3}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}} = \\
&= 2x^3 \frac{3x+4}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+1}}
\end{aligned}$$

Studio del segno e punti di massimo/minimo

$$f'(x) \geq 0 \implies x \leq< -4/3 \text{ e } x \geq 0$$

Quindi f decresce in $[-\frac{4}{3}, -1[$ e in $]-1, 0]$; altrimenti f cresce. In $x = -\frac{4}{3}$ f ha un massimo relativo, $P_1 = (-\frac{4}{3}, \frac{7}{27}\mathrm{e}^{-5}) \approx (-1.3333, 0.0017)$.

In $x = 0$ f ha un minimo relativo, $P_2 = (0, -3\mathrm{e}^3) \approx (0, -60.25)$.

1.4 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f. Spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha esattamente 3 soluzioni. (3 punti)

f è strettamente crescente (quindi iniettiva) in $]-\infty, -4/3[$. Inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ e $f(-4/3) > 0$. Per continuità sicuramente ci deve essere uno zero in $]-\infty, -4/3[$.

In maniera analoga, f è strettamente decrescente in $]-1, 0[$ e strettamente crescente in $]0, +\infty[$. Siccome il segno di f cambia agli estremi di entrambi questi intervalli e f è continua, ci deve essere uno zero in entrambi gli intervalli.

Notare inoltre che nell'intervallo $]-4/3, 0[$ la funzione è monotona decrescente ma sempre negativa, quindi non ci possono essere zeri in questo intervallo.

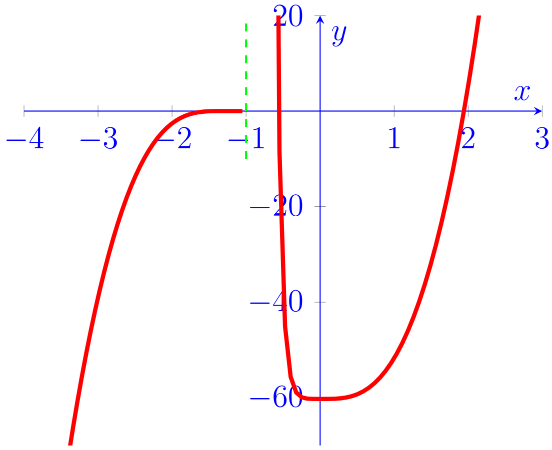

Figura 1: Grafico di $f(x)$; L'immagine è $]-\infty, +\infty[$.

Problema 2 (4 punti)

Determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione è continua infatti, $\lim_{x\to 0} \sin^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

in quanto prodotto di una funzione infinitesima per una limitata.

La funzione è derivabile, infatti il limite del rapporto incrementale esiste in 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$$

La derivata non prima è continua in 0, infatti:

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sin^2(x)}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$$

e $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x}) = \nexists$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(\log(2x))}{\cos(\log(2x))}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo. (2 punti)

Il dominio è dato da $x > 0$ e $\log(2x) \neq \pi/2 + k\pi \implies x \neq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2+k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

La funzione si annulla in $\log(2x) = k\pi \implies x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$

La funzione non è né pari né dispari

La funzione non è periodica.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi}$. (3 punti)

$$\begin{aligned} g(x_0) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{1}{x\cos^2(\log(2x))} \\ g'(x_0) &= -2\mathrm{e}^{3\pi} \end{aligned}$$

Retta tangente in x_0: $y = -2\mathrm{e}^{3\pi}x + 1$

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\frac{g(x)}{x}$ (2 punti)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\log(2x))}{x\cos(\log(2x))}\,dx &= \int \frac{\sin(y)}{\frac{\mathrm{e}^y}{2}\cos(y)}\frac{\mathrm{e}^y}{2}\,dy = \\ &= \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,dy = \log|\cos(y)| + c \\ &= \log|\cos(\log(2y))| + c \end{aligned}$$

Dove si è usata la sostituzione $y = \log(2x)$.

Problema 4 (6 punti)

Considerare la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + 1, \quad \text{con} \quad x \in I = [-32, 0[$$

Disegnare il grafico di h e spiegare perché h è integrabile in I. Calcolare:

1. l'area della regione del piano compresa tra il grafico di h, l'asse delle ascisse e le rette $x = -32$ e $x = 0$. L'area si ottiene dall'integrale di:

$$\text{Area} = \int_{-32}^{0} |h(x)|\,dx = \int_{-32}^{-1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + 1\,dx + \int_{-1}^{0} -\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - 1\,dx$$

Il secondo integrale è improprio e converge siccome, per $-1 < x < 0$ si ha $x^{-3/5} > x^{-1}$.

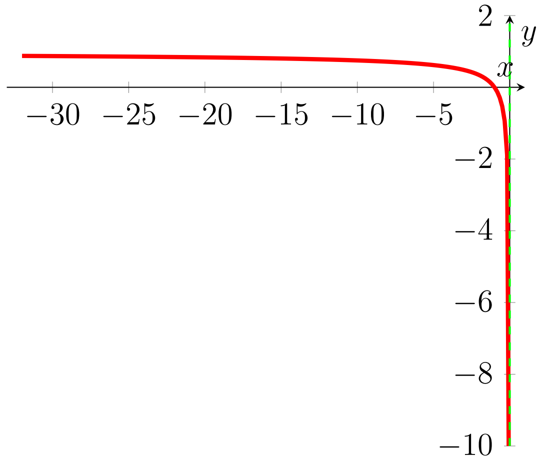

Figura 2: Grafico di $h(x)$

$$\text{Area} = \lim_{t\to 0^-} -[\frac{5}{2}x^{2/5} + x]_{-1}^{t} + [\frac{5}{2}x^{2/5} + x]_{-32}^{-1} = \frac{5}{2} - 1 + 32 + \frac{5}{2} - 1 - 10 = 25$$

2. il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di h attorno all'asse y.
   Per prima cosa scriviamo x in funzione di y:

   $$x = f(y) = 1/\sqrt[3]{(y-1)^5} \quad \text{con } y \leq 7/8$$

   Il volume è dato da:

$$\int_{-\infty}^{7/8} \pi f^2(y)\, dy = \pi \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{7/8} (y-1)^{-10/3}\, dy = \pi \lim_{t\to-\infty} [-\frac{3}{7}\frac{1}{(y-1)^{7/3}}]_{t}^{7/8} = 364\pi/7$$