definizione di limite destro e sinistro pag. 10

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di D

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x < x_0$)

$\hookrightarrow$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| > \varepsilon \ \forall x : x_0 - \delta < x < x_0$

$x_0 - \delta$ $\quad$ x_0

definizione di limite $(\varepsilon - \delta)$ pag 4

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 punto di accumulazione per D_f

diremo che l è un limite di f per x tende a x_0

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon[\ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

Teorema di unicità pag 7

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 di accum. in D_f

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

allora $l_1 = l_2$

Teorema di permanenza del segno pag 8

$f: D_f \to \mathbb{R}$; x_0 accumu. di D_f

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora

  $\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ allora

  $\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

pag. 11

teorema teorema del confronto (o dei carabinieri) pag 12

f, g, h funzioni definite su intervallo I; x_0 di acc. per I

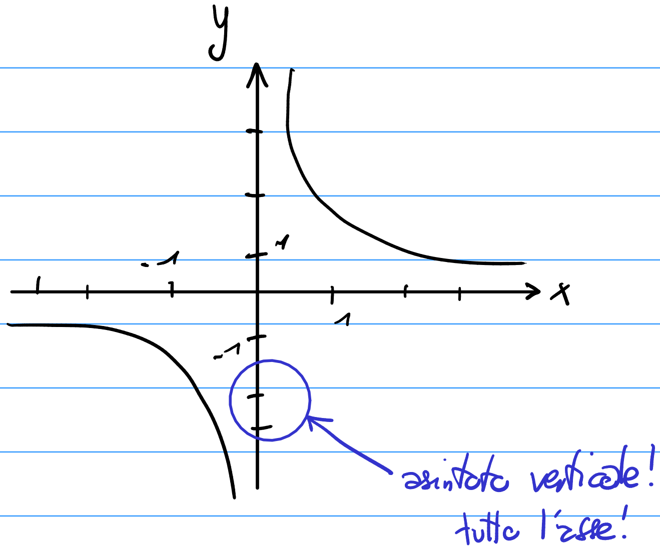
assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

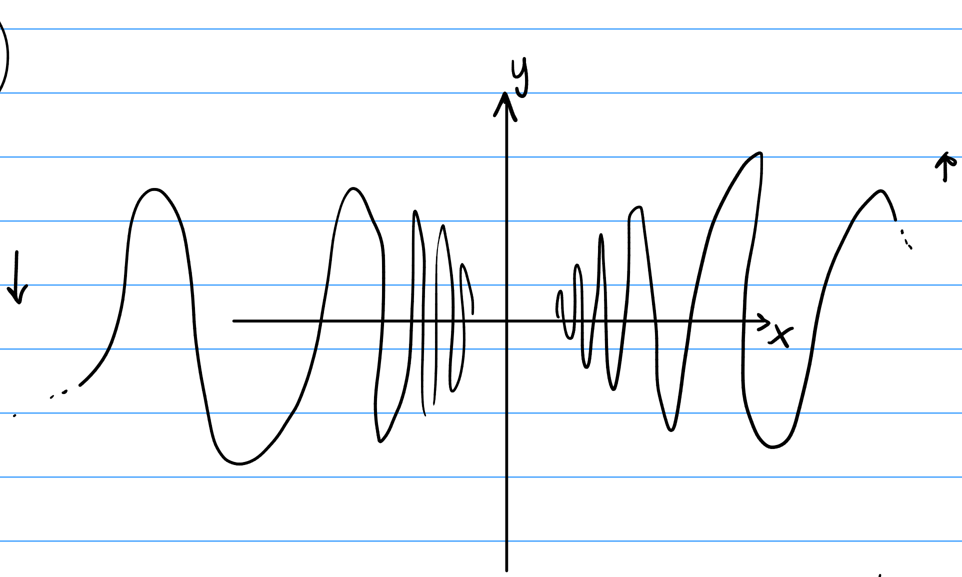
pag. 13 limiti di somma prodotto, rapporto

Limiti

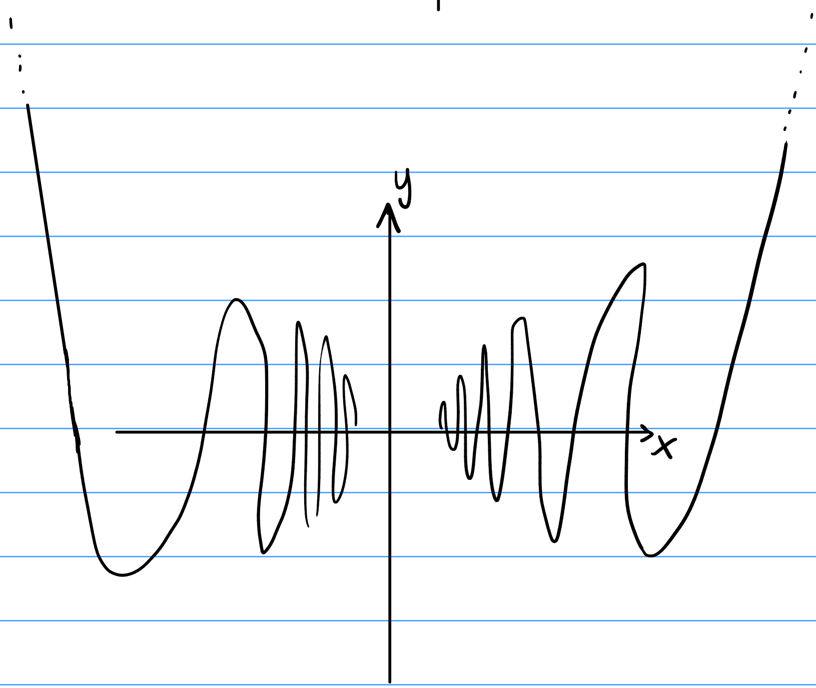
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



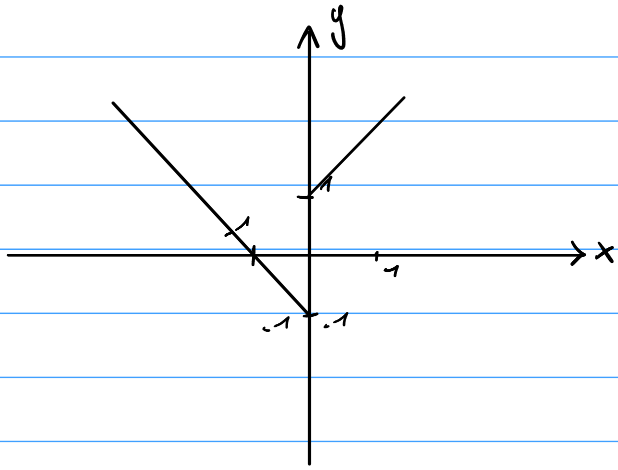
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

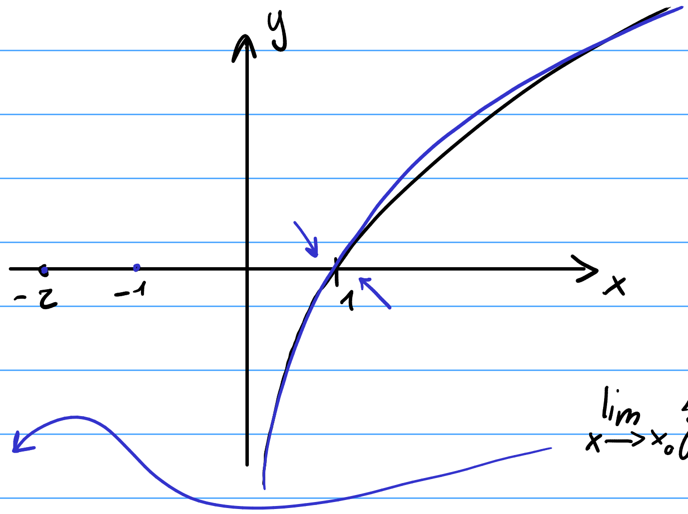


$$f(x) = \frac{x^2+x}{|x|}$$



$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = \{-1,-2\} \end{cases}$$

1. grafico



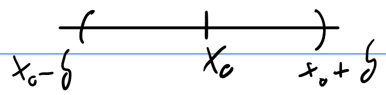
$\lim_{x \to x_0} f(x) = e$

possibili x_0 $\{x=0,\ x=+\infty,\ x=1\}$

$x_0 \in [0,+\infty[$ e limite a $+\infty$

↳ sono punti di accumulazione del D di $f(x)$!

$-2, -1$ sono invece isolati: non c'è nulla da calcolare prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; $\delta > 0$ raggio (intervallo circolare)



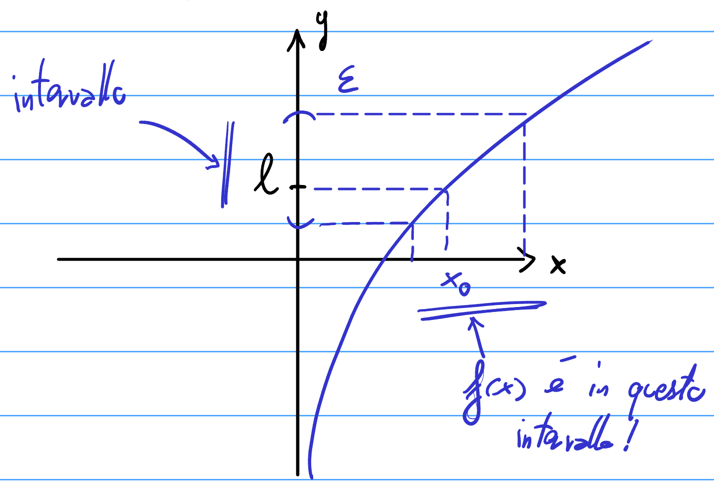
definizione di limite (ε - δ)

$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 punto di accumulazione per D_f

diremo che l è un limite di f per x tende a x_0

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon[\ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

e scriveremo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$



$\forall \varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) \in B(l, \varepsilon[$

$\forall x \in B(l, \varepsilon[\cap D_f$ questo vuol dire

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad\qquad |x - x_0| < \delta$

inoltre $x \in D_f$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; verifichiamo che $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

(so il risultato, ma mi dedico alla verifica!)

$\left(\text{Dominio} = (\text{denom}) = x - 1 \neq 0 ; x \neq 1 \right)$

$]-\infty, 1[\ \cup \ ]1, +\infty[$

dobbiamo mostrare che fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad x \in D_f$$

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x : |x - 1| < \delta \ ; x \neq 1$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right) < \varepsilon \iff \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\iff |x + 1 - 2| < \varepsilon \iff |x - 1| < \varepsilon$$

poniamo $\delta = \varepsilon$

$g(x) = 4x + 5$; $\lim_{x \to 2} g(x) = 13$

$$|g(x) - 13| < \varepsilon \quad \forall x : |x - 2| < \delta \quad \mathbb{R}$$

$$|4x+5-13| < \varepsilon$$

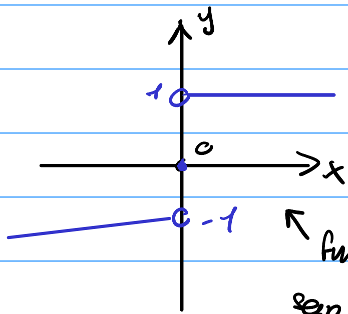
$$\Updownarrow$$

$$|4x-8| < \varepsilon$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$ poniamo $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, allora va bene

esempio con limite che non esiste

$$\lim_{x \to 0} sgn(x) = \nexists$$ non esiste

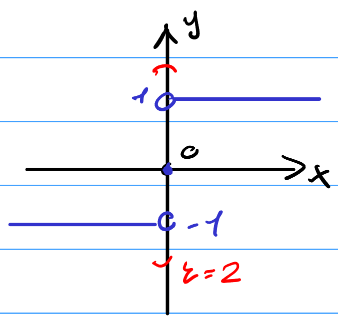


funzione sgn (segno)

Dim assumiamo che non può essere 0
(in maniera analoga, anche nessun altro numero)

basta trovare un $\varepsilon > 0$ per cui non esista un $\delta > 0$ che non rispetta la definizione di limite!

$$|x-0| < \delta \not\Rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$$



se $\varepsilon = 1/2$

$\forall \delta > 0$ si ha che in $B(0,\delta[$ ci sono $x > 0$, quindi $f(x) = 1 \in B(0,1/2[$

that's why

Teorema di unicità

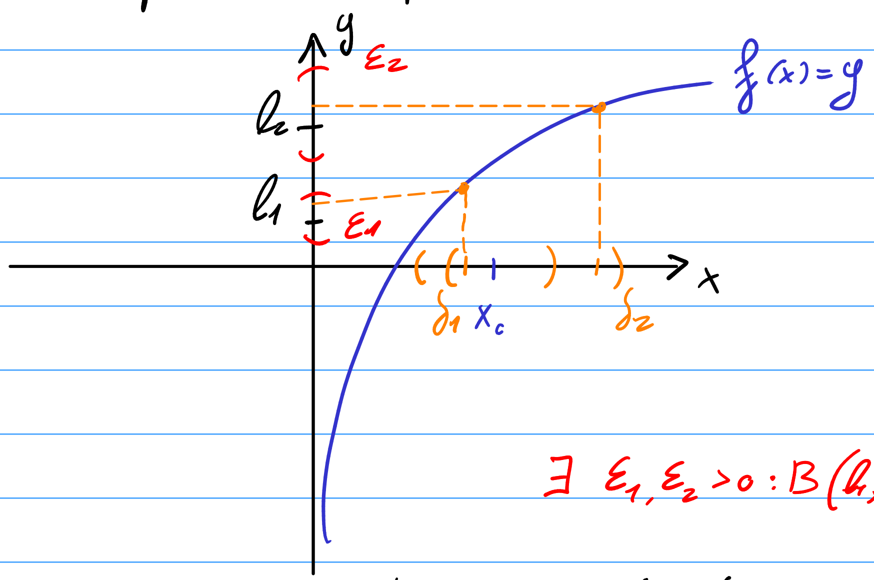
$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 di accum. in D_f

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

allora $l_1 = l_2$

dimostriamo per assurdo, ponendo $l_1 \neq l_2$



$\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B(l_1, \varepsilon_1[\cap B(l_2, \varepsilon_2[= \emptyset$

dalla definizione di limite troviamo $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che

$$f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[\ \forall\ x \in B(x_0, \delta_1[$$

$$\text{e } f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[\ \forall\ x \in B(x_0, \delta_2[$$

chiamiamo $J = B(x_0, \delta_1[\cap B(x_0, \delta_2[\neq \emptyset$

allora sia $x \in J : f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[$
e $f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[$ disgiunte!

assurdo, prima abbiamo scelto $B(l_1, \varepsilon_1[\cap B(l_2, \varepsilon_2[= \emptyset$
mentre ora diciamo il contrario!

Teorema di permanenza del segno

$f : D_f \to \mathbb{R}$; x_0 accumu. di D_f

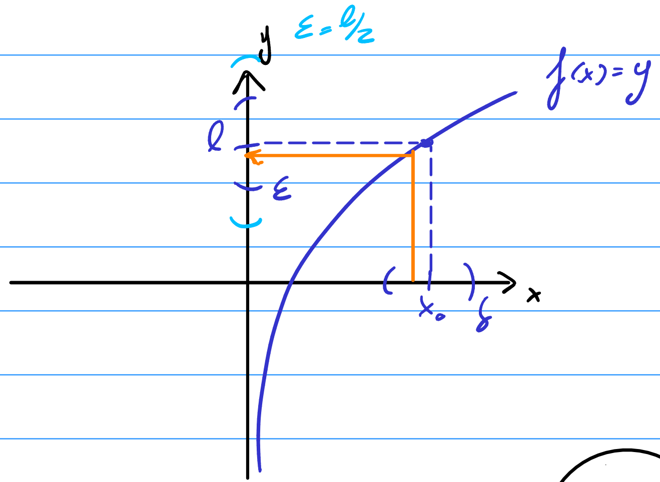
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

Dim



$\varepsilon < l$ allora sono sicuro sia positivo!

usiamo la definizione di limite prendendo $\varepsilon = l/2$

Limiti ad infinito

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m > 0 \mid f(x) - \ell < \varepsilon \quad \forall x \in]m, +\infty[\cap D_f$$

$x > m$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m > 0 \mid f(x) - \ell < \varepsilon \quad \forall x \in]-\infty, m[\cap D_f$$

$x < m$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in]L, +\infty[\ \forall x : |x - x_0| < \delta$$

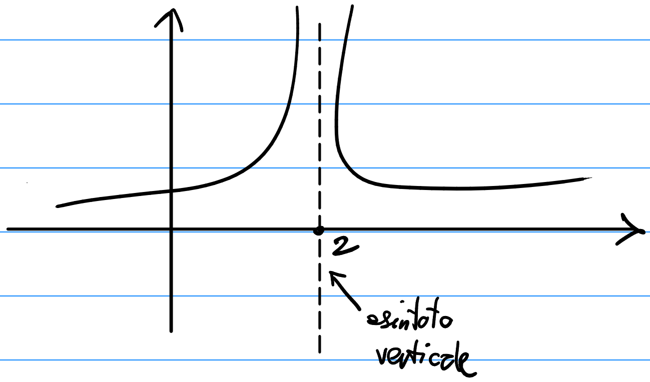
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in]-\infty, L[\ \forall x : |x - x_0| < \delta$$

prossima volta cerca definizioni di:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (separate) esercizio

verificare che $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$



fissato un $m>0$ dobbiamo trovare $\delta>0$ tale che $f(x)>m$

$\forall x \in B(2,\delta[$ $\quad |x-2|<\delta$ $\quad$ molto simile

$$f(x)>m \longrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > m \underset{\substack{m>0 \\ x \neq 2}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{m} > (x-2)^2$$

$$\downarrow$$

$$|x-2| < \frac{1}{\sqrt{m}}$$

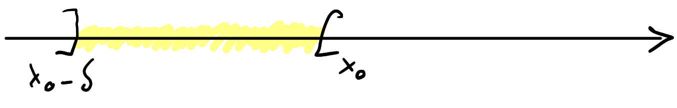
quindi fissiamo $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$ $\rightarrow$ noto come cresce m diminuisce δ!!

definizione di limite destro e sinistro

$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di $\mathbb{D}$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x<x_0$)

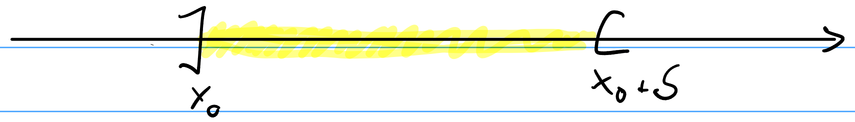
$\Leftrightarrow$ se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ tale che $|f(x)-l|>\varepsilon \ \forall x: x_0-\delta<x<x_0$



$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di D

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite destro $x > x_0$)

↳ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta$

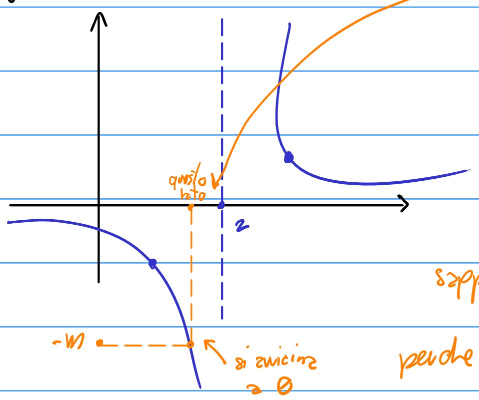


$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \ \text{ e } \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l}$$

teorema

esempio

$f(x) = \frac{1}{x-2}$; verificare che $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



$\forall m > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$f(x) < m \quad \forall x : 2 - \delta < x < 2$

$\frac{1}{x-2} < -m$

sappiamo già che è negativa

perché $\underbrace{x < 2 \quad x \to 2^- \text{ (tende)}}_{=}$

$x - 2 < 0$!!

$\frac{1}{x-2} < -m$

$1 > -m(x-2)$

$\frac{1}{-m} > (x-2)$

$2 - \frac{1}{m} < x < 2$

poniamo $\delta = 1/m$

teorema del confronto (o dei carabinieri)

f, g, h funzioni definite su intervallo I; x_0 di acc. per I

assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

---

limite di una somma

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + m$

dimostriamo che fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$f(x) + g(x) \in B(l+m, \varepsilon[\quad \forall x \in B(x_0, \delta[$ ↲

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| < \varepsilon \qquad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

sappiamo che possiamo trovare δ_1 tale che $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x : |x - x_0| < \delta$
e inoltre troviamo δ_2 tale che $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x : |x - x_0| < \delta_2$

$$|f(x) + g(x) - l - m| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)|$$

$$\leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$

proprietà usata

se $|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$

cioè se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$		m: $m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
l	$m \in \mathbb{R}$	$m + l$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F ind
	$-\infty$	$-\infty$	F ind	$-\infty$

F ind = $[\infty - \infty]$ (calcoli particolari da compiere)

limite del prodotto

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = l \cdot m$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$		m: < 0	$= 0$	> 0	$+\infty$	$-\infty$
l	< 0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$-\infty$	$+\infty$
	$= 0$	0	0	0	F ind	F ind
	> 0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	F ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	F ind	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

limite del rapporto

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

mi interessa per $\lim_{x \to x_0^{\pm}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) \to l}{g(x) \to m}$		m (den.): < 0	$0^{\pm}$	> 0	$+\infty$	$-\infty$
(num) l	< 0	l/m	$\mp\infty$ *	l/m	0	0
	$0^{\pm}$	0	$[0/0]$	0	0	0
	> 0	l/m	$\pm\infty$	l/m	0	0
	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$
	$-\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^2}$ → denominatore tende a zero, il numero tenterà di crescere ma il risultato è $-\infty$

forme indeterminate

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0} \;!!$$ forma indeterminata

fattorizzazione!

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

x^2+2x+4

$$\lim_{x\to 2} \Big|= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$|=$

$$x^2+2x+4 \to 2^2+2(2)+4 = 12$$

ecco a cosa punta!

2) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

D: $x^2-4>0 \qquad x^2>4 \qquad x>\pm 2 \;=\; x<-2 \wedge x>2$

$|=$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(x-2)(\sqrt{x^2-4})}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2-4})}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$$

soluzione finale!

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

D $\quad x\neq 0 \qquad 4+x>0 \qquad x>-4$

$|=$

$$\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0} = \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{4}$$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{|x| \cdot \sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$

$D: x \neq -\frac{1}{2}$

$= \dfrac{|\cancel{x}|\, 1}{\cancel{x}\, 2} = -\frac{1}{2}$ ✓