Algebra Lineare A.A. 2020-2021
Esame 25/1/2021

Soluzione dell'esame.

Esercizio 1. Siano $A = (1, 2, -3)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, 0, 0)$ tre punti dello spazio euclideo. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera e si giustifichi la scelta.

a) Il piano $\pi : x + 9y + 6z - 1 = 0$ passa per A, B e C.
b) Il piano $\sigma : 2y - 3z + 3 = 0$ ha giacitura parallela ad $\overrightarrow{AC}$ e passa per B.
c) La retta r di equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ passa per B e C.

Soluzione:
La risposta vera è la b). $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\mathbf{n}$ dove $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ è la giacitura di σ. Inoltre σ passa per B in quanto $2(0) - 3(1) + 3 = 0$.

Esercizio 2. Sia A una matrice quadrata 3×3 ad entrate reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ possiamo concludere che A è invertibile? Perché? Si tenga presente che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Soluzione:
Sì, possiamo concludere che A è invertibile. Poiché $p_A(\lambda) = 0$ se e solo se $\lambda = -1, 1, 2$, A ha 3 autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile. Ciò significa che esiste una matrice invertibile B tale che $B^{-1}AB = D$ con $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Allora $-2 = \det D = \det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \det A \det B = \frac{1}{\cancel{\det B}} \det A \cancel{\det B} = \det A$, quindi $\det A \neq 0$ e A è invertibile.

Esercizio 3.

1. Si utilizzi il teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità (ovvero l'esistenza o meno di soluzioni) del sistema

$$\Sigma_k = \begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 - kx_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + (1-k)x_3 = 0 \\ -k(1-k)x_2 - kx_4 = 0 \end{cases}.$$

2. Si dica se esistono dei valori di k per cui l'insieme delle soluzioni di Σ_k è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si giustifichi la risposta facendo riferimento al punto 1.

3. Sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice dei coefficienti di Σ_k. Si studi iniettività e suriettività di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si faccia riferimento al punto 1.

4. Posto $k=-1$, si calcoli $\mathrm{Spec}(T_{-1})$ e si verifichi che T_{-1} è diagonalizzabile.

Soluzione:

1. La matrice dei coefficienti di Σ_k è la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1-k & 0 \\ 0 & -k(1-k) & 0 & -k \end{pmatrix},$$

quella completa è invece la matrice

$$A'_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & -k(1-k) & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & 1-k & 0 \\ -k(1-k) & 0 & -k \end{pmatrix} - k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} =$$
$$= k \det \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} - k \det \begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ -k(1-k) & 0 \end{pmatrix} - k\left(-k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \cancel{-k^2(1-k)} - k^2(1-k)^2 + \cancel{k^2(1-k)} = -k^2(1-k)^2.$$

Poiché $\det A_k = 0 \Leftrightarrow k=0$ o $k=1$, per $k \neq 0,1$, $\mathrm{rg}A_k = \mathrm{rg}A'_k = 4$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema Σ_k ammette una e una sola soluzione.

Se $k=0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scala entrambe le matrici si ha:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e quindi } \mathrm{rg}A_0 = 2;$$

$$A'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e quindi } \mathrm{rg}A'_0 = 3.$$

Quindi per $k=0$ $\mathrm{rg}A'_0 > \mathrm{rg}A_0$ e il sistema NON è compatibile (non ammette soluzioni).

Se $k=1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scala entrambe le matrici si ha:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e quindi } \mathrm{rg} A_1 = 2;$$

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e quindi } \mathrm{rg} A'_1 = 3.$$

Quindi per $k = 1$ $\mathrm{rg} A'_1 > \mathrm{rg} A_1$ e il sistema NON è compatibile (non ammette soluzioni).

2. No, non esistono valori di k per cui l'insieme delle soluzioni di Σ_k è costituito da un numero infinito di valori. Per il punto precedente Σ_k ammette una sola soluzione ($k \neq 0, 1$) o non ne ammette nessuna ($k = 0, 1$).

3. Per $k \neq 0, 1$, $\mathrm{rg} A_k = \dim \mathrm{Im} T_k = 4$ quindi l'endomorfismo T_k è suriettivo e di conseguenza anche iniettivo, pertanto T_k è bigettivo. Per $k = 0, 1$, $\mathrm{rg} A_k = \dim \mathrm{Im} T_k = 2$, quindi $\dim ker T_k = 4 - 2 = 2$ e T_k non è né iniettivo né suriettivo.

4. Per definizione, l'endomorfismo $T_{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è rappresentato dalla matrice

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_{T_{-1}}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{-1}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} =$$
$$(\lambda - 2) \left((\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right) = (\lambda - 2) \left[(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) + (\lambda - 1) \right] =$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, 1, \pm\sqrt{2}.$$

Ne segue che $\mathrm{Spec} T_{-1} = \{2, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ e T_{-1} è diagonalizzabile, avendo 4 autovalori distinti.

Esercizio 4. Si enunci il secondo criterio di diagonalizzabilità di un endomorfismo $T : V \to V$.

Soluzione:
Sia $\mathrm{Spec}\, T = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ l'insieme degli autovalori (distinti) di T. Il secondo criterio di diagonalizzabilità afferma che T è diagonalizzabile se e solo se $\sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = n$ e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ per ogni $1 \leq i \leq k$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si trovi una base di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. Cosa possiamo dire su iniettività e suriettività di f?

b) Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice A' che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) Detta B la matrice del cambiamento di base tale che $A' = AB$ (si veda il punto b)), calcolare B^{-1}.

Soluzione:

a) Osserviamo che $\mathrm{rg} A = 2$. La sottomatrice 2×2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ di A ha infatti determinante $5 \neq 0$. Ne segue che $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e che le due colonne linearmente indipendenti di A costituiscono una base di $\mathrm{Im} f$: $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre, $\dim \mathrm{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ implica che f *non* è suriettiva.
Per il teorema della dimensione: $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Im} f = 2 - 2 = 0$. Pertando $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ e f è iniettiva.

b) La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Allora

$$A' = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Utilizzando la formula dell'inversa di una matrice 2×2, poiché $\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$,

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$