Algebra Lineare A.A. 2020/2021
Simulazione d'esame svolta

Esercizio 1. Siano dati nello spazio euclideo tridimensionale i piani di equazione $\pi_1 : x - 2y + 2z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 2z + 6 = 0$. Detto θ l'angolo determinato dalle giaciture di π_1 e π_2 si determini $\cos\theta$.

Sia $\pi : ax + by + cz = d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un piano, il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \pi$ è la giacitura del piano.

Quindi le giaciture dei due piani π_1 e π_2 sono $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ tra due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è legato al coseno dell'angolo θ tra loro compreso dalla relazione $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos\theta$.

Quindi, il coseno dell'angolo determinato dalle due giaciture è:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{8}{3 * 3} = \frac{8}{9}$$

Esercizio 2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera? Si giustifichi la risposta.

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se due di essi sono proporzionali. **FALSA**

Affinché questa doppia implicazione sia vera, entrambe le implicazioni (diretta e inversa) devono esser vere. Verifichiamole:

$\Leftarrow$

Supponiamo che i due vettori proporzionali siano, senza perdita di generalità, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.e siano legati dalla costante di proporzionalità $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1$. I tre vettori sono linearmente dipendenti se esistono se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

. In virtù della proporzionalità tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$, è sufficiente utilizzare $\alpha_1 = -\lambda, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ per soddisfare l'uguaglianza sopra:

$$-\lambda\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$

Confutiamo questa implicazione con un controesempio. Difatti, se $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, si ottiene

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

perciò i tre vettori son linearmente dipendenti. Tuttavia, non vi è nessuna coppia di vettori proporzionali.

b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. **FALSA**

Dato che $\dim\mathbb{R}^2 = 2$, la cardinalità del sottoinsieme massimale di $\mathbb{R}^2$ di vettori linearmente indipendenti (cioè la cardinalità di una sua base) è 2. Di conseguenza, in $\mathbb{R}^2$, tre vettori di $\mathbb{R}^2$ nello stesso insieme non possono essere linearmente indipendenti.

c) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti. **VERA**

Dato che $\dim\mathbb{R}^2 = 2$, la cardinalità del sottoinsieme massimale di $\mathbb{R}^2$ di vettori linearmente indipendenti (cioè la cardinalità di una sua base) è 2. Di conseguenza, in $\mathbb{R}^2$, tre vettori nello stesso insieme non possono essere linearmente indipendenti e sono necessariamente linearmente dipendenti.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} kx - y + z = 2k + 1 \\ x + y + (2k+1)z = 1 \\ (k-1)x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$, determinare:

i) i valori di k per cui il sistema è compatibile;

ii) i valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione;

iii) i valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni. Per tali valori di k si esplicitino le soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti A e completa A' del sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2k+1 \\ k-1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 2k+1 \\ 1 & 1 & 2k+1 & 1 \\ k-1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile se $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A'$.

Studiamo il rango di A. Calcoliamo il determinante $\det A = k(2+4k+2) - (-2+2) + (k-1)(-2k-1-1) = 4k + 4k^2 - 2k^2 - 2k + 2k + 2 = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k+1)^2$

quindi se $k \neq 1$ allora rg$A = 3$. Dato che rg$A \leq$ rg$A' \leq 3$, allora rg$A' = 3$ per $k \neq -1$ e il sistema è compatibile. Inoltre, siccome il numero di incognite $n = 3$, il sistema ammette una e una sola soluzione.

Se $k = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo subito che la prima matrice presenta due colonne uguali, la prima e la seconda, mentre la seconda e la terza son proporzionali. Quindi il rango è rg$A = 1$. Allo stesso modo, la seconda matrice presenta le prime tre colonne identiche e la quarta uguale alla terza, quindi rg$A' = 1$. Il sistema è ancora compatibile, ma presenta infinite soluzioni. Tramite il metodo di Gauss, la matrice A' diviene:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

supponendo che $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

quindi le soluzioni sono i vettori dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Esercizio 4. Sia A una matrice quadrata. Si dimostri che $\det A = \det A^T$.

(*Proposizione 19, lezione 18*)

Il teorema di Laplace afferma che, data A una matrice quadrata di ordine n, allora:

1. per ogni $k = 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

(sviluppo del determinante rispetto alla k-esima riga);

2. per ogni $h = 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \det A_{ih}$$

(sviluppo del determinante rispetto alla colonna h-esima);

Tramite il teorema di Laplace, possiamo procedere alla dimostrazione. Per matrici 2×2 il calcolo è immediato. In dimensione $n \geq 2$, per il teorema di Laplace calcolare il determinante della matrice A con lo sviluppo rispetto alla prima riga è equivalente a calcolarlo con lo sviluppo rispetto alla prima colonna, ovvero rispetto alla prima riga della matrice A^T.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Si determini la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica e si dica se T è diagonalizzabile.

   La matrice A che rappresenta T rispetto la base canonica presenta come colonne le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

   $$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
   $$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
   $$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

   Quindi $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. La matrice è simmetrica, quindi l'endomorfismo è simmetrico e diagonalizzabile per il teorema spettrale.

2. Se possibile, si determini una matrice ortogonale M tale che $M^T AM$ è una matrice diagonale.

   Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T.

   Determiniamo intanto gli autovalori di T tramite il polinomio caratteristico, $\det(\lambda I_3 - A) = \det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\-1 & \lambda & -1\\-1 & -1 & \lambda\end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2-1)+(-\lambda-1)-(1+\lambda) = \lambda^3 - \lambda - \lambda - 1 - 1 - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda - 2$.

   L'equazione $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ può essere risolta scomponendo il polinomio tramite il metodo di Ruffini. Per 2, si ha $-8 - 6 - 2 = 0$, quindi l'equazione divine $(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$. Gli autovalori son quindi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_{2,3} = -1$.

Determiniamo l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$. Esso è formato dalle soluzioni $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ del sistema lineare omogeneo $(2I_3 - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portiamo la matrice completa del sistema in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow -r_1 - 2r_3]{r_2 \leftrightarrow -r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quindi le soluzioni del sistema omogeoneo sono i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \ t \in \mathbb{R}$, $V_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La base ortonormale è $\bar{\mathcal{B}}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Determiniamo l'autospazio relativo a $\lambda_{2,3} = -1$. Esso è formato dalle soluzioni $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ del sistema lineare omogeneo $(-I_3 - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portiamo la matrice completa del sistema in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1 - r_3]{r_2 \leftrightarrow r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2 + r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t, \ t \in \mathbb{R} x_2 = s, \ s \in \mathbb{R} \\ x_3 = -t - s \end{cases}$$

quindi le soluzioni del sistema omogeneo sono i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s,\ t, s \in \mathbb{R}$,

$V_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ $\mathcal{B}_{-1} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$. Questa base non è ortonormale, rendiamola ortonormale tramite il metodo di Gram-Schmidt.

$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{w}_1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $|\mathbf{w}_2| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. La base ortonormalizzata è quindi $\bar{\mathcal{B}}_{-1} = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \sqrt{\dfrac{2}{3}} \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

La matrice ortogonale M ha come colonne i vettori delle basi ortonormali degli autospazi associati agli autovalori di A.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonale D (cioè la matrice associata a T rispetto alla base ortonormale di $\mathbb{R}^3$) è:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Posto $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0\}$. Si dica se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo se ne determini una base.

   Ricordiamo che, se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, quindi $T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 2y + 2z$

   V è un sottospazio vettoriale se:

   - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \implies \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$;
   - $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1 \in V \implies \lambda \mathbf{v}_1 \in V$;

In questo caso

- siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Si ha $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = (T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)) \cdot \mathbf{u} = T(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u} + T(\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0$. Quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$.
- $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1 \in V$. Si ha $T(\lambda \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u} = \lambda T(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u} = \lambda * 0 = 0$. Quindi $\lambda \mathbf{v}_1 \in V$.

quindi V è un sottospazio vettoriale.

Sappiamo che $V = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : T(\mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} \right\}$.

Quindi una base è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.