Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

09/01/2023; Tema A

Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Problema 1 (14 punti)

Considerare la funzione
$$f(x) = \log\left(\mid x-2 \mid (1+x^2)\right)$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno non è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

1.5 Calcolare $f''(x)$. Dedurre dal grafico di $f(x)$ la posizione di eventuali punti di flesso e, senza fare ulteriori conti, discutere lo studio del segno di $f''(x)$.

Problema 2 (4 punti)

Discutere continuità e derivabilità della seguente funzione. f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\log(x-1) & \text{se } x > 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione $g(x) = \dfrac{x^2}{\sin(2x)}$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\quad \sin^2(2x)g(x)$

Problema 4 (5 punti)

Considerare le funzioni
$$h_1(x) = \frac{5}{x^2+5} \quad ; \quad h_2(x) = -\frac{3}{x^2+2x-3}$$

4.1 Spiegare perché h_1 e h_2 sono integrabili a $+\infty$ senza calcolare l'integrale.

4.2 Abbozzare il grafico di h_1 e h_2 in $[3, +\infty[$ e calcolare l'area compresa tra i grafici delle due funzioni in tale intervallo.

Soluzioni

Problema 1 (14 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log\left(\mid x - 2 \mid (1 + x^2)\right)$$

4.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno non è richiesto). (2 punti)

Per trovare il dominio bisogna imporre $\mid x - 2 \mid (1 + x^2) > 0$ e quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non ha simmetrie.

Intersezione asse y: $y = \log(2) \approx 0.693$

4.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (4 punti)

La funzione si può riscrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log((x-2)(1+x^2)) & \text{per } x > 2 \\ f_2(x) = \log((2-x)(1+x^2)) & \text{per } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^\pm} \log(\mid x - 2 \mid (x^2 + 1)) = -\infty$$

dove si è usato il fatto che il logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento va a zero.

Limiti ad infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \log(\mid x - 2 \mid (x^2 + 1)) = +\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to \pm\infty$:

$$m : \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \log(\mid x - 2 \mid (x^2 + 1)) = 0$$

Quindi non ci sono asintoti obliqui

f è continua perché prodotto, e composizione di funzioni continue.

4.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. (4 punti)

Derivabilità: Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero ($x = 2$), ma tale punto non appartiene al dominio. Quindi f è derivabile perché composizione e somma di funzioni derivabili

Calcoliamo la derivata per f_1 (per $x > 2$)

$$f_1'(x) = \frac{(x^2+1) + 2x(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{3x^2 - 4x + 1}{(x-2)(x^2+1)}$$

Dal calcolo di f_2' si ottiene la stessa espressione per $x < 2$

Studio del segno e punti di massimo/minimo:

$$f'(x) \geq 0 \iff 1/3 \leq x \leq 1 \ \vee \ x > 2$$

Quindi si ha che f cresce in $]1/3, 1[$ e in $]2, +\infty[$. f decresce in $]-\infty, 1/3[$ e $]1, 2[$.

In $x = 1$ f ha un massimo relativo, $P_1 = (1, \log(2)) \approx (1, \approx 0.693)$.

In $x = 1/3$ f ha un minimo relativo, $P_2 = (1/3, \log(50/27)) \approx (0.333, 0.616)$.

4.4 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

(2 punti)

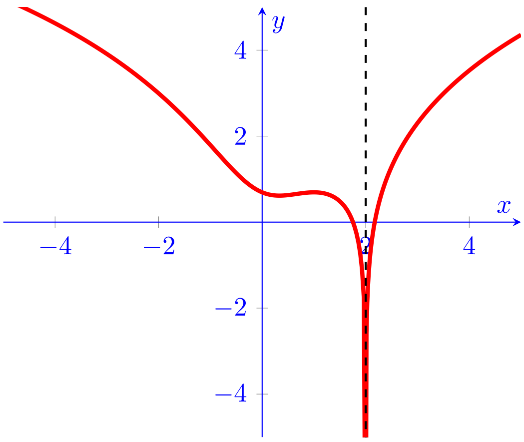

Figura 1: Grafico di $f(x)$;L'immagine è $]-\infty,+\infty[$

4.5 Calcolare $f''(x)$. Dedurre dal grafico di $f(x)$ la posizione di eventuali punti di flesso e, senza fare ulteriori conti, discutere lo studio del segno di $f''(x)$. (2 punti)

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{(6x-4)(x-2)(x^2+1)-(3x^2-4x+1)(3x^2-4x+1)}{(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

Al numeratore si ottiene un polinomio di quarto grado che non si riesce a fattorizzare. Dal grafico di f si può dedurre che ci sono due punti di flesso (cambi di concavità), con ascisse in $F_1 \in]-\infty, 1/3[$ e $F_2 \in]1/3, 1[$

Quindi $f''(x) > 0$ corrisponde ai punti in cui la funzione è convessa, $x \in]F_1, F_2[$. $f''(x) < 0$ corrisponde ai punti in cui la funzione è concava, $x \in]-\infty, F_1[\cup]F_2, 2[\cup]2, +\infty[$

Attenzione che la funzione a $\pm\infty$ va come un logaritmo, quindi ha concavità negativa.

Problema 2 (4 punti)

Discutere continuità e derivabilità della seguente funzione. f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\log(x-1) & \text{se } x > 1 \\ x^2-2x+1 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$

L'unico punto di possibile discontinuità è $x = 1$. In questo punto possiamo verificare che f è continua tramite la definizione: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Infatti:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\log(x-1) = 0 = f(1)$$

Il risultato del limite si può ottenere usando de l'Hopital o il confronto di infiniti

Per verificare se la funzione è derivabile in $x_0 = 1$ possiamo verificare che derivata destra e sinistra coincidano in quel punto. La derivata sinistra vale $f'_-(x) = 2x-2$ che in 1 vale 0. La derivata destra vale

$$f'_+ = \log(x-1) + \frac{x-1}{x-1} = \log(x-1) + 1$$

Il cui limite in 1 vale $-\infty$.

Quindi f non è derivabile in $x = 1$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ma non $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione $g(x) = \dfrac{x^2}{\sin(2x)}$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

Il dominio è dato da

$$\sin(2x) \neq 0 \implies 2x \neq k\pi \implies x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Il numeratore si annulla solo in 0, che non fa parte del dominio (no zeri)

La funzione è dispari, infatti $f(-x) = \frac{x^2}{-\sin(2x)} = -f(x)$.

La funzione non è periodica (il numeratore non è una funzione periodica).

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = -\frac{\pi}{4}$. (3 punti)

$$g(x_0) = -\frac{\pi^2}{16}$$
$$g'(x) = \frac{2x\sin(2x) - 2x^2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$
$$g'(x_0) = \frac{\pi}{2}$$

Retta tangente in x_0: $y = \frac{\pi}{2}(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi^2}{16}$

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\sin^2(2x)g(x)$ (2 punti)

L'integrale si risolve con due integrazioni per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(2x)\,dx &= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + \int x\cos(2x)dx = \\ &= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}dx = \\ &= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\end{aligned}$$

Problema 4 (5 punti)

Considerare le funzioni

$$h_1(x) = \frac{5}{x^2+5} \quad ; \quad h_2(x) = -\frac{3}{x^2+2x-3}$$

4.1 Spiegare perché h_1 e h_2 sono integrabili a $+\infty$ senza calcolare l'integrale.

Entrambe le funzioni sono integrabili a più infinito in quanto il termine dominante al numeratore è x^0 e al denominatore è x^2. Quindi vanno a zero come $\frac{1}{x^2}$ (si può anche usare il teorema del confronto rispetto a $\dfrac{1}{x^2}$ per entrambe le funzioni)

4.2 Abbozzare il grafico di h_1 e h_2 in $[3, +\infty[$ e calcolare l'area compresa tra i grafici delle due funzioni in tale intervallo.

h_1 è sempre positiva in $[3, +\infty[$, mentre h_2 è negativa in tale intervallo. L'area quindi si ottiene da $\int_3^{+\infty} h_1(x) - h_2(x)\,dx$.

Per il primo integrale si ha:

$$\int_3^{+\infty} \frac{5}{x^2+5}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x/\sqrt{5})^2+1}\,dx =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} [\sqrt{5}\arctan(x/\sqrt{5})]_3^t =$$
$$= \sqrt{5}\frac{\pi}{2} - \sqrt{5}\arctan(\frac{3}{\sqrt{5}})$$

Per il secondo integrale per prima cosa bisogna fattorizzare il denominatore e separare la frazione:

$$\frac{3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=-\frac{-3}{4} \end{cases}$$

Quindi:

$$\int_3^{+\infty} \frac{3}{x^2+2x-3}\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+3} - dx =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\int_2^t \frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x+\sqrt{2}}\,dx \right) =$$
$$= \frac{3}{4}\lim_{t\to+\infty} [\log(x-1) - \log(x+3)]_3^t =$$
$$= \frac{3}{4}\lim_{t\to+\infty} \left[\log(\frac{x-1}{x+3})\right]_3^t =$$
$$= -\frac{3}{4}\log(\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}\lim_{t\to+\infty}\log(\frac{t-1}{t+3}) =$$
$$= \frac{3}{4}\log(3)$$

Area: $\sqrt{5}\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\arctan(\frac{3}{\sqrt{5}}) + \frac{3}{4}\log(3))$