Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

16/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a poco dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

16/06/2020 - Tema A;
Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (18 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log |e^{2x} - e^2| - 2x$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di f con gli assi cartesiani.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

1.5 Disegnare il grafico di $f(x)$ e trovare l'immagine di f.

Problema 2 (12 punti)

2.1 Calcolare il dominio di g,

$$g(x) = \log\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$$

2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x = \frac{1}{4}$.

2.3 Calcolare il dominio di h,

$$h(x) = \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}$$

2.4 Calcolare le primitive di h (Suggerimento: iniziare col cambiamento di variabile $t = ...$).

2.5 Calcolare l'integrale proprio di h nell'intervallo $[e^{\frac{3\pi}{4}}, e^{\pi}]$.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

16/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 90 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (18 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log |e^{2x} - e^2| - 2x$$

dove il logaritmo è in base naturale.

1.1 (3 Punti) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Se possibile, calcolare l'intersezione di f con gli assi e studiare il segno di f.

Bisogna imporre $|e^{2x} - e^2| \neq 0$ e quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non ha simmetrie.

Per lo studio del segno conviene riscrivere la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log(e^{2x} - e^2) - 2x & \text{se } x > 1 \\ f_2(x) = \log(-e^{2x} + e^2) - 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Ponendo $f_1(x) \geq 0$ si ottiene

$$\log(e^{2x} - e^2) \geq 2x \implies e^{2x} - e^2 \geq e^{2x} \implies -e^2 \geq 0$$

e quindi $f_1(x) < 0$ in $]1, +\infty[$.

Ponendo $f_2(x) \geq 0$ si ottiene

$$\log(-e^{2x} + e^2) \geq 2x \implies -e^{2x} + e^2 \geq e^{2x} \implies x \leq 1 - \frac{1}{2}\log 2$$

e quindi $f_2(x) \geq 0$ in $]-\infty, 1 - \frac{1}{2}\log 2]$.

Quindi:

$f(x) \geq 0$ in $]-\infty, 1 - \frac{1}{2}\log 2]$; $f(x) < 0$ in $]1 - \frac{1}{2}\log 2, 1[\cup]1, +\infty[$

Intersezione asse x: $x = 1 - \frac{1}{2}\log 2$; Intersezione asse y: $y = \log(e^2 - 1)$.

1.2 (5 Punti) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \left(\log |e^{2x} - e^2| - 2x\right) = -\infty$$

Quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale per.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\log|e^{2x} - e^2| - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\log(e^{2x}) + \log\left(1 - \frac{e^2}{e^{2x}}\right) - 2x\right) = 0$$

Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\log|e^{2x} - e^2| - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\log(e^2) - 2x\right) = +\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$:

$$m: \lim_{x\to-\infty} \frac{\log|e^{2x} - e^2| - 2x}{x} = -2$$

$$q: \lim_{x\to-\infty} \log|e^{2x} - e^2| - 2x + 2x = 2$$

Quindi $y = -2x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

f è continua perché differenza e composizione di funzioni continue.

1.3 (5 Punti) Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

f è derivabile perché le due funzioni che la costituiscono, f_1 e f_2 sono derivabili (perché differenza e composizione di funzioni derivabili), e il punto di frontiera ($x = 1$) non appartiene al dominio.

Si verifica facilmente che:

$$f_1'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - e^2} - 2 \quad , \quad x > 1$$

Studio del segno:

$$f_1'(x) \geq 0 \implies 2e^{2x} > 2(e^{2x} - e^2) \implies 0 > -e^2$$

Quindi $f_1(x) > 0$ in $]1, +\infty[$.

$$f_2'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - e^2} - 2 \quad , \quad x < 1$$

Studio del segno:

$$f_2'(x) \geq 0 \implies 2e^{2x} < 2(e^{2x} - e^2) \implies 0 < -e^2$$

Quindi $f_2(x) < 0$ in $] - \infty, 1[$.

f decresce in $] - \infty, 1[$ e cresce in $]1, +\infty[$. Non ci sono punti di massimo o minimo relativi.

1.4 (2 Punti) Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di convessità di f, determinando, se esistono, i punti di flesso.

$$f''(x) = f_1''(x) = f_2''(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x} - e^2) - 4e^{4x}}{(e^{2x} - e^2)^2} = \frac{-4e^{2x+2}}{(e^{2x} - e^2)^2}$$

Si ha $f''(x) < 0$ in D, quindi la funzione è concava in tutto il dominio. Non ci sono punti di flesso .

1.5 (3 Punti) Disegnare il grafico di $f(x)$ assieme agli eventuali asisntoti. Trovare l'immagine di f .

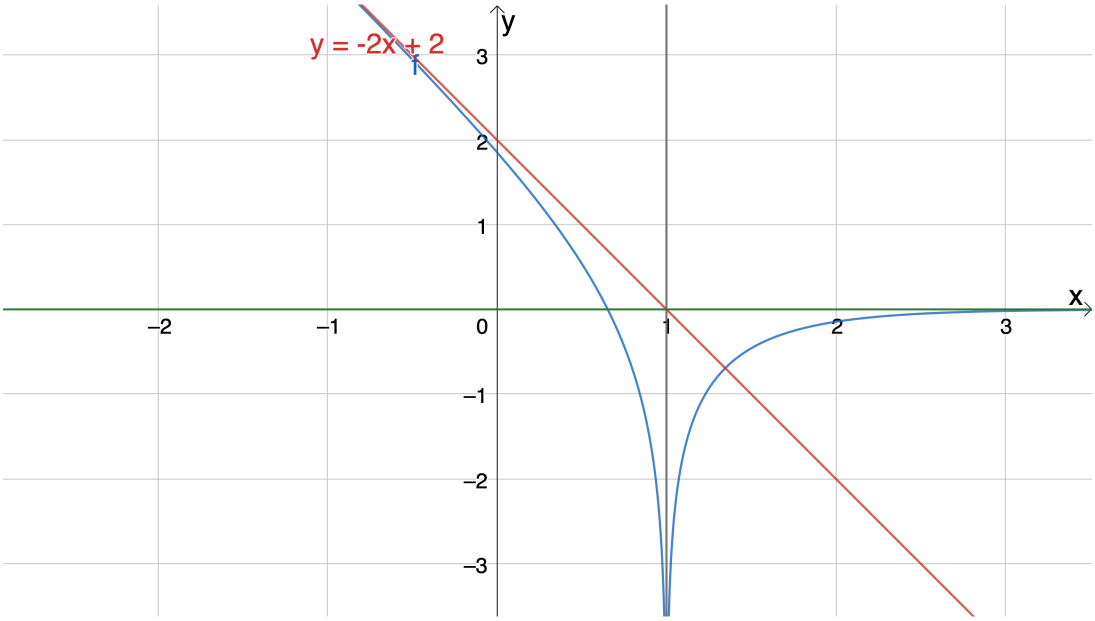

Figura 1: Grafico; L'immagine è $]-\infty, +\infty[$.

Problema 2 (12 punti)

2.1 (2 Punti) Calcolare il dominio di g,

$$g(x) = \log\left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}}\right)$$

Il dominio è dato dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{1-\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $0 \leq x < 1$.

2.2 (3 Punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x = \frac{1}{4}$.

Per il calcolo della retta tangente si ha $g(\frac{1}{4}) = \log(2)$; inoltre

$$g'(x) = (1-\sqrt{x})\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}-2x}$$

e $g'(\frac{1}{4}) = 2$. Quindi l'equazione della retta tangente è: $y = 2(x-\frac{1}{4}) + \log(2)$

2.3 (2 Punti) Calcolare il dominio di h,

$$h(x) = \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}$$

Per il dominio bisogna imporre $x > 0$ e

$$\cos(\log(x)) \neq 0 \implies \log(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies x \neq \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

2.4 (3 Punti) Calcolare le primitive di h. (Suggerimento: iniziare col cambio di variabili $t = \ldots$)

Per il calcolo delle primitive si usa il cambio di variabile $t = \log(x)$ e quindi $dt = \frac{dx}{x}$:

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\,dx = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\log|\cos(t)| + C = -\log|\cos(\log x)| + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$.

2.5 (2 Punti) Calcolare l'integrale proprio di h nell'intervallo $[\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\pi}]$.

L'integrale proprio vale:

$$\int_{\mathrm{e}^{3\pi/4}}^{\mathrm{e}^{\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\,dx == -\log|\cos(\pi)| + \log|\cos(3\pi/4)| = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$