Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

12/01/2021;
Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Inserire anche una foto del vostro documento d'identità sovrapposto alla prima pagina del compito. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a poco dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (15 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = (x + 5)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi cartesiani e studiare il segno di f.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e verificare che esiste un solo punto di flesso. Discutere la concavità di f.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 6}{2e^x + 1} = \frac{1}{2}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = x\cos(x^2)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = -\sqrt{\pi}$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito $\int g(x)\,dx$.

Problema 4 (5 punti)

4.1 Utilizzare il teorema del confronto per mostrare che la funzione

$$h(x) = x^2\mathrm{e}^{2-3x}$$

è integrabile a $+\infty$.

4.2 Calcolare l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$.

Soluzioni

Problema 1 (15 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = (x+5)e^{\frac{1}{x-1}}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi cartesiani e studiarne il segno.

Bisogna imporre $x - 1 \neq 0$ e quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non ha simmetrie.

Intersezione asse y: $y = \frac{5}{e} \approx 1.84$. Intersezione asse x: $x = -5$.

Segno: $f(x) > 0$ per $x \in]-5, 1[\cup]1, +\infty[$. $f(x) < 0$ per $x \in]-\infty, -5[$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

$$\lim_{x \to 1^-} (x+5)e^{\frac{1}{x-1}} = 6e^{\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}} = 0$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $-\infty$.

$$\lim_{x \to 1^+} (x+5)e^{\frac{1}{x-1}} = 6e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}} = +\infty$$

dove si è usata la continuità della funzione esponenziale e il fatto che l'esponente tende a $+\infty$. Quindi $x = 1$ è asintoto verticale da destra.

Limiti ad infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x+5)e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to \pm\infty} (x+5) = \pm\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$m: \lim_{x \to +\infty} (\frac{x+5}{x})e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$q: \lim_{x \to +\infty} \left((x+5)e^{\frac{1}{x-1}} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) + 5e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

La seconda parte del limite per q vale 5 mentre la prima parte è una forma indeterminata $\infty * 0$. Si può risolvere con de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1)\right) \underset{[0\infty]}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Gli stessi conti valgono per $x \to -\infty$, quindi f ha un asintoto obliquo che è $y = x+6$

f è continua perché prodotto, e composizione di funzioni continue.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

f è derivabile perché prodotto e composizione di funzioni derivabili

Derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} - \frac{x+5}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(x^2-2x+1-x-5\right) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(x^2-3x-4\right) \end{aligned}$$

Studio del segno e punti di massimo/minimo:

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -1 \ \vee \ x \geq 4$$

Quindi f cresce in $]-\infty,-1[$ e in $]4,+\infty[$; altrimenti f decresce. In $x=1$ f ha un massimo relativo, $P_1 = (-1, 4\mathrm{e}^{-1/2}) \approx (-1, 2.42)$.

In $x=4$ f ha un minimo relativo, $P_2 = (4, 9\mathrm{e}^{1/3}) \approx (4, 12.56)$.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e verificare che esiste un solo punto di flesso. Discutere la concavità di f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{x^2-3x-4}{(x-1)^2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{(2x-3)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-3x-4)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\left(-x^2+3x+4+(2x-3)(x^2-2x+1)-2(x^3-3x^2-4x-x^2+3x+4)\right) = \\ &= \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\left(-x^2+3x+4+2x^3-4x^2+2x-3x^2+6x-3-2x^3+6x^2+8x+2x^2-6x \right. \\ &= \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}(13x-7) \end{aligned}$$

Quindi f è convessa per $x \in]7/13, 1[\ \cup \ ]1,+\infty[$, e concava per $x \in]-\infty, 7/13[$. $x = 13/7$ è l'unico punto di flesso, $F \approx (0.54, 0.63)$

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-6}{2e^x+1} = \frac{1}{2}$$

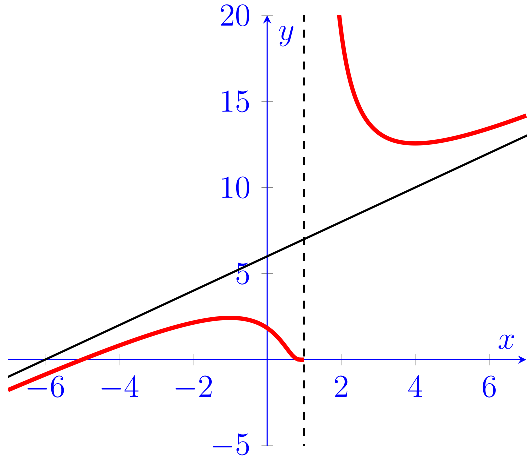

Figura 1: Grafico di $f(x)$:L'immagine è $]-\infty, 4\mathrm{e}^{-1/2}[\,\cup\,]9\mathrm{e}^{1/3}, +\infty[$.

Dato $\epsilon > 0$ bisogna trovare $M > 0$ tale che

$$x > M \implies \left|\frac{e^x - 6}{2e^x + 1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

Si ha:

$$\left|\frac{e^x - 6}{2e^x + 1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \iff$$
$$\left|\frac{-13}{4e^x + 2}\right| < \epsilon \iff$$
$$4\epsilon \mathrm{e}^x + 2\epsilon > 13 \iff$$
$$x > \log\left(\frac{13 - 2\epsilon}{4\epsilon}\right)$$

Quindi $M = \log\left(\frac{13 - 2\epsilon}{4\epsilon}\right)$.

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = x\cos\left(x^2\right)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

Il dominio è $\mathbb{R}$. Gli zeri sono, oltre a $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\pi/2 + k\pi}, k \in \mathbb{N}$.

La funzione è dispari, $g(-x) = -g(x)$.

La funzione non è periodica (si può mostrare ad esempio dal fatto che gli zeri non sono equidistanti).

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = -\sqrt{\pi}$.

$$g(x_0) = \sqrt{\pi}$$
$$g'(x) = \cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)$$
$$g'(x_0) = -1$$

Retta tangente: $y = -(x+\sqrt{\pi}) + \sqrt{\pi} = -x$

3.3 Calcolare $\int g(x)\,dx$

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Problema 4 (5 punti)

4.1 Utilizzare il teorema del confronto per mostrare che la funzione

$$h(x) = x^2 \mathrm{e}^{2-3x}$$

è integrabile a $+\infty$.

Bisogna mostrare che, per x sufficientemente grande, $|h(x)|$ è maggiorato da una funzione integrabile (ad esempio $1/x^2$). Si ha:

$$x^2\mathrm{e}^{2-3x} < \frac{1}{x^2} \iff \mathrm{e}^{2-3x}x^4 < 1$$

che è verificata per x sufficientemente grande, in quanto la funzione esponenziale è infinitesima rispetto a x^4.

4.2 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{2-3x}\,dx$

Per prima cosa troviamo una primitiva integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{2-3x}\,dx &= -\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{2-3x} + \int \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{2-3x}\,dx = \\ &= -\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{2-3x} - \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{2-3x} + \int \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2-3x}\,dx = \\ &= -\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{2-3x} - \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{2-3x} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{2-3x}\end{aligned}$$

Quindi, passando all'integrale proprio:

$$\begin{aligned}\int_0^t x^2\mathrm{e}^{2-3x}\,dx &= [-\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{2-3x} - \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{2-3x} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{2-3x}]_0^t = \\ &= -\frac{1}{3}t^2\mathrm{e}^{2-3t} - \frac{2}{9}t\mathrm{e}^{2-3t} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{2-3t} + \frac{2}{27}\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

E infine:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{2-3x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}t^2\mathrm{e}^{2-3t} - \frac{2}{9}t\mathrm{e}^{2-3t} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{2-3t} + \frac{2}{27}\mathrm{e}^2\right) = \frac{2}{27}\mathrm{e}^2$$