Algebra Lineare A.A. 2020-2021

Simulazione d'esame

Il seguente testo ha lo scopo di simulare la *struttura* del compito d'esame. Il tipo di esercizi proposti potrà variare. Il tempo di risoluzione è di 90 minuti.

Esercizio 1. Siano dati nello spazio euclideo tridimensionale i piani di equazione $\pi_1 : x - 2y + 2z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 2z + 6 = 0$. Detto θ l'angolo determinato dalle giaciture di π_1 e π_2 si determini $\cos\theta$.

Esercizio 2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se due di essi sono proporzionali.
b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
c) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Si giustifichi la risposta.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} kx - y + z = 2k + 1 \\ x + y + (2k+1)z = 1 \\ (k-1)x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$, determinare:

i) i valori di k per cui il sistema è compatibile;

ii) i valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione;

iii) i valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni. Per tali valori di k si esplicitino le soluzioni del sistema.

Esercizio 4. Sia A una matrice quadrata. Si dimostri che $\det A = \det A^T$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Si determini la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica e si dica se T è diagonalizzabile.

2. Se possibile, si determini una matrice ortogonale M tale che M^TAM è una matrice diagonale.

3. Posto $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0\}$. Si dica se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo se ne determini una base.