

Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 9: Distribuzioni Bivariate

Domanda 1

Un provider di servizi Internet addebita ai propri clienti per l'utilizzo di Internet una cifra proporzionale al tempo in ore di utilizzo, arrotondandolo all'ora più vicina, e dipendente dalla fascia oraria. La distribuzione congiunta del tempo utilizzato X in ore e il prezzo Y di ogni ora in centesimi viene data nella tabella sottostante.

$p(x, y)$		X			
		1	2	3	4
Y	1	0	0.06	0.06	0.10
	2	0.10	0.10	0.04	0.04
	3	0.40	0.10	0	0

A ciascun cliente vengono addebitati $Z = X \cdot Y$ centesimi, cioè il numero di ore moltiplicato per il prezzo di ogni ora.

- (a) Trovare la distribuzione di Z .
- (b) Trovare il valor medio e la varianza di Z .
- (c) Trovare la distribuzione marginale di X .
- (d) Trovare il valor medio e la varianza di X .
- (e) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (f) Trovare il valor medio e la varianza di Y .
- (g) Trovare la distribuzione del tempo di utilizzo nella fascia in cui il prezzo è uguale a 2.

Domanda 2

Siano X e Y il numero di guasti hardware in due laboratori informatici in un dato mese. La distribuzione congiunta di X and Y viene data nella tabella sottostante.

- (a) Trovare la distribuzione marginale di X .

$p(x, y)$		X		
		0	1	2
Y	0	0.52	0.20	0.04
	1	0.14	0.02	0.01
	2	0.06	0.01	0

- (b) Trovare il valor medio e la varianza di X .
- (c) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (d) Trovare il valor medio e la varianza di Y .
- (e) Calcolare la probabilità che si verifichi almeno un guasto hardware.
- (f) Le variabili X e Y sono indipendenti?

Domanda 3

In un piccolo laboratorio informatico il numero di guasti hardware X e il numero di errori software Y in un dato giorno hanno la seguente distribuzione congiunta $p(x, y)$: $p(0, 0) = 0.6$, $p(0, 1) = 0.1$, $p(1, 0) = 0.1$, $p(1, 1) = 0.2$.

Sulla base di queste informazioni:

- (a) Trovare la distribuzione marginale di X .
- (b) Trovare il valor medio di X .
- (c) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (d) Trovare il valor medio di Y .
- (e) Le variabili X e Y sono indipendenti?
- (f) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X e Y .
- (g) Calcolare $E(X + Y)$, cioè il numero medio totale di errori durante un giorno.
- (h) Trovare la distribuzione di $X + Y$, cioè del numero totale di errori durante un giorno.

Domanda 4

Si consideri un'urna contenente 3 palline numerate da 1 a 3. L'esperimento consiste nell'estrarre 2 palline senza reinserimento. Sia X la variabile casuale associata al più grande dei numeri estratti e sia Y la variabile casuale somma dei due numeri estratti. Trovare:

- (a) la funzione di probabilità congiunta di X e Y ;
- (b) la funzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 3$ e la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X = 3$;
- (c) la covarianza e la correlazione di X e Y ;
- (d) valore atteso e varianza della variabile casuale $Z = 2X + 3Y$.
- (e) X e Y sono indipendenti?

Domanda 5

Sia data la funzione $p_{X,Y}(x, y) = k(2y + x)$, con $x = 2, 4$ e $y = 0, 1, 2$.

- (a) Determinare il valore k affinché $p_{X,Y}(x, y)$ sia una funzione di probabilità congiunta.
- (b) Determinare $P(Y \geq X)$.
- (c) Calcolare i valori della funzione di ripartizione $F_{X,Y}(2, 1)$, $F_{X,Y}(4, 1)$.
- (d) Calcolare $p_{X|Y}(x|1)$.
- (e) Valutare se X e Y sono indipendenti.

Domanda 6

Le due variabili casuali X e Y hanno funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = 12xy(1 - y)$, con $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Trovare le funzioni di densità marginali di X e Y e verificare se le due variabili sono indipendenti.

Domanda 7

Siano X e Y due variabili casuali con densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = k$, per $0 < x < 1$ e $0 < y < x$.

- Determinare la costante k affinché $f_{X,Y}(x, y)$ sia una funzione di densità.
- Determinare la distribuzione marginale di X e la distribuzione condizionata di X dato $Y = y$.
- Verificare se X e Y sono indipendenti.

Domanda 8

Siano X e Y due variabili casuali con funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y)I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y).$$

Trovare le distribuzioni marginali di X e Y e la funzione di densità condizionata di X dato $Y = y$, $y \in (2, 4)$.

Domanda 9

Si consideri la seguente densità bivariata

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Determinare la costante di normalizzazione k .
- Qual è la probabilità che X sia maggiore di Y ?
- Le due v.a. sono indipendenti?
- Determinare la densità condizionata di X rispetto a $Y = y$.

Domanda 10

Siano X e Y due variabili casuali tali che $(X|Y = y) \sim \text{Bin}(y, 1/3)$ e Y è una variabile casuale discreta che assume i valori 1 e 2 con probabilità $1/4$ e $3/4$, rispettivamente.

- Si determini la funzione di probabilità congiunta di (X, Y) .
- Si calcolino la distribuzione e il valore atteso di $Y|X = 1$.
- Si calcoli $\Pr(Y > X)$.