Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 8 – Matrici e Applicazioni lineari

1 Operazioni con le matrici

Esercizio 1. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

capire quali tra i due prodotti AB oppure $A^T B$ e' possibile eseguire, e poi calcolarlo.

Esercizio 2. *Date le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare, **quando possibile**

$$AC, \ B + CA, \ (BC)A, \ BA, \ BA^T, \ A^T + BC.$$

Esercizio 3. *Dati $a, b, c, \in \mathbb{R}$ numeri reali e date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ c-2b & 3c-a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -b-c & 0 \\ 4a+b & a+b \end{pmatrix},$$

trovare i valori di a, b, c tali che $A = -B$.

2 Rango di una matrice

Esercizio 4. *Determinare il rango delle seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Stabilire poi quanti e quali sono i vettori linearmente indipendenti che costituiscono le righe (o le colonne) delle matrici.

Esercizio 5. *Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 2k & 1 \\ 2 & k+2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. *Calcolare il rango delle seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 1 & 2h \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 2h & h^2 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$ *. Stabilire, sempre al variare di* h *, quali e quanti vettori linearmente indipendenti sono presenti tra le righe (o le colonne) di* A *e* B *.*

Esercizio 7. *Calcolare il rango di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ *.*

Esercizio 8. *Stabilire per quali valori di* $h \in \mathbb{R}$ *la seguente matrice ha rango* 1 *.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ h & 2h & 0 \end{pmatrix},$$

3 Applicazioni Lineari

Esercizio 9. *È data la seguente applicazione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}$$

a) *Scrivere la matrice associata a* T *rispetto alle basi canoniche di* $\mathbb{R}^3$ *e di* $\mathbb{R}^2$

Esercizio 10. *Sono date le matrici*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *Per ciascun* $i = 1, 2$ *scrivere esplicitamente l'applicazione lineare* $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *rappresentata da* A_i *rispetto alle basi canoniche.*

b) *Trovare una base di* $\operatorname{Ker} T_i$ *e* $\operatorname{Im} T_i$ *.*

Esercizio 11. *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$\begin{aligned} T(0, -2, 1) &= (3, -1) \\ T(1, 1, -2) &= (1, 2) \\ T(2, 0, -1) &= (11, 1). \end{aligned}$$

Determinare la matrice che rappresenta T *rispetto alle basi canoniche.*

Esercizio 12. *Sia* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *, e si consideri l'unica applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che:*

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (2, -1) \quad \text{e} \quad T(e_3) = (1, 1).$$

a) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alle basi canoniche.*