1

Siano X e Y due variabili aleatorie con densità congiunta $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} I_{(0,y)}(x) I_{(0,+\infty)}(y)$, con $\lambda = 5$.

a. Calcolare $\mathbb{P}[Y < 0.13]$.

b. Calcolare $\mathbb{P}[X < 0.05 | Y < 0.13]$.

c. X e Y sono indipendenti? (Rispondere S per si o N per no)

2

Un'azienda produce tondini in acciaio di lunghezza (in cm) distribuita come una normale di media 50 e varianza 3.98.

a. Scelto a caso un tondino, si calcoli la probabilità che la sua lunghezza sia superiore a 52.79 cm.

b. Quale lunghezza è superata con una probabilità pari a 0.8?

c. Supponendo di scegliere casualmente 22 tondini tra quelli prodotti, qual è la probabilità che meno di 2 abbiano lunghezza superiore a 52.79 cm?

d. Qual è la probabilità che la lunghezza media dei 22 tondini sia inferiore a 49.41 cm?

3

Se A e B sono eventi indipendenti con $P(A) = 1/4$ e $P(B) = 1/2$, allora

Scegli un'alternativa:

- a. nessuna delle altre opzioni.
- b. $P(A \cap B) = 0$.
- c. $P(A \cup B) = 5/8$.
- d. $P(A \cup B) = 1/8$.

4

Robinson Crusoe (R.C.) va a pesca tutti i giorni, ma non sempre la pesca è fruttuosa. Infatti in un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare qualche pesce solo con probabilità 0.35, mentre in un giorno sereno con probabilità 0.77. Per fortuna nell'isola di R.C. la probabilità dei giorni di tempesta è 0.03.

Considerando gli eventi

$$B = \text{"Pesca fruttuosa"}; \quad A = \text{Giorno di tempesta},$$

scegliere l'opzione giusta o determinare il valore richiesto:

a. La probabilità che in un giorno qualsiasi la pesca sia fruttuosa.

b. ○In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $A \cup B$.
○In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $A|B$.
○In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $B|A$.
○In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $\mathbb{P}[A|B]$.

c. Sapendo che ieri la pesca è stata fruttuosa, la probabilità che fosse un giorno di tempesta.

5

Se $A = \{4, \dagger, \heartsuit, \clubsuit\}$ e $B = \{2, 1, 4, 3\}$, allora:

Scegli un'alternativa:

- a. $B \cap \bar{A} = \{\dagger, \heartsuit, \clubsuit\}$
- b. $A \cap B = \{4, \dagger\}$
- c. $A \cap B = 4$
- d. $A \cup B = \{4, \dagger, \heartsuit, 1, 2, 3\}$

6

Si spieghi brevemente il metodo di inversione per la simulazione di valori casuali e si scrivano alcuni comandi di R utili per simulare 1000 valori casuali da una distribuzione con densità $f(x) = \frac{110}{x^2} \mathbb{I}_{(10,11)}(x)$, utilizzando il metodo di inversione

7

Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov con spazio degli stati $\{0, 1, 2\}$ e con le seguenti probabilità di transizione: $p_{00} = 1$, $p_{10} = 0.3$, $p_{12} = 0.7$, $p_{22} = 1$. Lo stato iniziale è scelto a caso.

a. Si calcoli $P(X_2 = 1)$.

b. Si calcoli $P(X_2 = 1, X_3 = 2)$

c. Il vettore $\pi = (0.1, 0, 0.9)$ è una distribuzione stazionaria della catena? (Rispondere S per si o N per no.)

Domanda 1
Parzialmente corretta
Punteggio ottenuto 1,00 su 5,00
Contrassegna domanda

Siano X e Y due variabili aleatorie con densità congiunta $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} I_{(0,y)}(x) I_{(0,+\infty)}(y)$, con $\lambda = 5$.

a. Calcolare $\mathbb{P}[Y < 0.13]$ ×

b. Calcolare $\mathbb{P}[X < 0.05|Y < 0.13]$ ×

c. X e Y sono indipendenti? (Rispondere S per si o N per no) N ✓

a. $f_Y(y) = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} I_{(0,+\infty)}(y) dx = \lambda^2 y e^{-\lambda y} I_{(0,+\infty)}(y)$. Si tratta di una Gamma con parametri $\alpha = 2$ e λ, quindi

$$\mathbb{P}[Y < 0.13] = \texttt{pgamma(0.13, 2, 5)} = 0.1386$$

b. $f_{X|Y}(x|y) = f(x,y)/f_Y(y) = 1/y I_{(0,y)}(x)$. E' una distribuzione Uniforme nell'intervallo $(0,y)$, quindi

$$\mathbb{P}[X < 0.05|Y < 0.13] = \texttt{punif(0.05, 0, 0.13)} = 0.3846$$

c. Le due variabili non sono indipendenti. Infatti il loro dominio è una specie di triangolo in cui il dominio di una variabile dipende dai valori che l'altra assume. Inoltre la densità di $X|Y = y$ dipende da y e perciò è sicuramente diversa dalla marginale della X.

a. 0.1386
b. 0.3846
c. N

Domanda 2
Risposta errata
Punteggio ottenuto 0,00 su 6,00
Contrassegna domanda

Un'azienda produce tondini in acciaio di lunghezza (in cm) distribuita come una normale di media 50 e varianza 3.98.

a. Scelto a caso un tondino, si calcoli la probabilità che la sua lunghezza sia superiore a 52.79 cm. 0,242 ×

b. Quale lunghezza è superata con una probabilità pari a 0.8? 53,383 ×

c. Supponendo di scegliere casualmente 22 tondini tra quelli prodotti, qual è la probabilità che meno di 2 abbiano lunghezza superiore a 52.79 cm? ×

d. Qual è la probabilità che la lunghezza media dei 22 tondini sia inferiore a 49.41 cm? ×

Sia X la lunghezza di un tondino. Allora $X \sim N(50, 3.98)$.

a. La probabilità che la lunghezza sia superiore a 52.79 cm è

$$\mathbb{P}[X > 52.79] = 1 - \texttt{pnorm(52.79, 50, sqrt(3.98))} = 0.081$$

b. Si tratta di calcolare il quantile di livello $1 - 0.8$ di X, usando il comando

$$\texttt{qnorm(1 - 0.8, 50, sqrt(3.98))} = 48.321$$

c. Sia Y il numero di tondini di lunghezza superiore a 52.79 cm su 22 scelti a caso tra quelli prodotti. Allora $Y \sim Bin(22, 0.081)$. La probabilità richiesta corrisponde a

$$\mathbb{P}[Y < 2] = \mathbb{P}[Y \leq 2 - 1] = \texttt{pbinom(2 - 1, 22, 0.081)} = 0.4583.$$

d. La media campionaria di 22 variabili aleatorie normali ha distribuzione $\bar{X} \sim N(50, 3.98/22)$. La probabilità richiesta è dunque

$$\mathbb{P}[\bar{X} < 49.41] = \texttt{pnorm(49.41, 50, sqrt(3.98/22))} = 0.0827.$$

a. 0.081
b. 48.321
c. 0.4583
d. 0.0827

Domanda 3
Risposta errata
Punteggio ottenuto 0,00 su 2,00
Contrassegna domanda

Se A e B sono eventi indipendenti con $P(A) = 1/4$ e $P(B) = 1/2$, allora

Scegli un'alternativa:
- a. nessuna delle altre opzioni. × False
- b. $P(A \cap B) = 0$.
- c. $P(A \cup B) = 5/8$.
- d. $P(A \cup B) = 1/8$.

a. False
b. False
c. True
d. False

La risposta corretta è: $P(A \cup B) = 5/8$.

Domanda 4
Parzialmente corretta
Punteggio ottenuto 3,00 su 5,00
Contrassegna domanda

Robinson Crusoe (R.C.) va a pesca tutti i giorni, ma non sempre la pesca è fruttuosa. Infatti in un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare qualche pesce solo con probabilità 0.35, mentre in un giorno sereno con probabilità 0.77. Per fortuna nell'isola di R.C. la probabilità dei giorni di tempesta è 0.03.

Considerando gli eventi

$$B = \text{"Pesca fruttuosa"}; \quad A = \text{Giorno di tempesta},$$

scegliere l'opzione giusta o determinare il valore richiesto:

a. La probabilità che in un giorno qualsiasi la pesca sia fruttuosa. 0,757 ✓

b.
- In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $A \cup B$.
- In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $A|B$.
- In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $B|A$. ✓
- In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $\mathbb{P}[A|B]$.

Punteggio ottenuto 1,00 su 1,00

La risposta corretta è: In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare corrisponde al evento $B|A$.

c. Sapendo che ieri la pesca è stata fruttuosa, la probabilità che fosse un giorno di tempesta. 0,065 ×

Si ha che "In un giorno di tempesta R.C. riesce a pescare" corrisponde al evento $B|A$, allora $\mathbb{P}[B|A] = 0.35$, $\mathbb{P}[B|\bar{A}] = 0.77$ e $\mathbb{P}[A] = 0.03$.

Per la legge delle probabilità totali si trova

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B|\bar{A}]\mathbb{P}[\bar{A}] = 0.757.$$

Per il Teorema di Bayes si ha

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = 0.014.$$

a. 0.757
b. FALSE / FALSE / TRUE / FALSE
c. 0.014

Domanda 5
Risposta corretta
Punteggio ottenuto 2,00 su 2,00
Contrassegna domanda

Se $A = \{4, \dagger, \heartsuit, \clubsuit\}$ e $B = \{2, 1, 4, 3\}$, allora:

Scegli un'alternativa:
- a. $B \cap \bar{A} = \{\dagger, \heartsuit, \clubsuit\}$
- b. $A \cap B = \{4, \dagger\}$
- c. $A \cap B = 4$ ✓ True
- d. $A \cup B = \{4, \dagger, \heartsuit, 1, 2, 3\}$

a. False
b. False
c. True
d. False

La risposta corretta è: $A \cap B = 4$

Domanda 6
Risposta non data
Punteggio max.: 4,00
Contrassegna domanda

Si spieghi brevemente il metodo di inversione per la simulazione di valori casuali e si scrivano alcuni comandi di R utili per simulare 1000 valori casuali da una distribuzione con densità $f(x) = \frac{110}{x^2} \mathbb{I}_{(10,11)}(x)$, utilizzando il metodo di inversione

Il metodo di inversione sfrutta il fatto che se X è una v.a. continua con funzione di ripartizione F, allora $U = F(X)$ ha una distribuzione $U(0,1)$. Per generare un valore x:

1. si genera un valore casuale u da una distribuzione $U(0,1)$,
2. si determina il quantile corrispondente, x, di F tramite la relazione $x = F^{-1}(u)$, ovvero x è il valore della funzione inversa di F, valutata in u.

In questo caso, la funzione di ripartizione di X vale 0 prima di 10 e 1 dopo il 11. Per $x \in (10, 11)$, $F(x) = \int_{10}^{x} 110 t^{-2} dt = 11(1 - \frac{10}{x})$

Se $F(x) = 11(1 - \frac{10}{x}) = u$, allora $x = F^{-1}(u) = 10/(1 - \frac{u}{11})$. Perciò si possono generare 1000 valori da un'uniforme in $(0,1)$ e poi trasformarli tramite la F^{-1} per ottenere i corrispondenti valori da X.

```
> u<- runif(1000)
> x<- 10/(1 - u/11)
```

a. Vedere slides o libro di testo. `> u<- runif(1000); x<- 10/(1 - u/11)`

Domanda 7
Risposta errata
Punteggio ottenuto 0,00 su 6,00
Contrassegna domanda

Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov con spazio degli stati $\{0, 1, 2\}$ e con le seguenti probabilità di transizione: $p_{00} = 1$, $p_{10} = 0.3$, $p_{12} = 0.7$, $p_{22} = 1$. Lo stato iniziale è scelto a caso.

a. Si calcoli $P(X_2 = 1)$. 1 ×

b. Si calcoli $P(X_2 = 1, X_3 = 2)$ ×

c. Il vettore $\pi = (0.1, 0, 0.9)$ è una distribuzione stazionaria della catena? (Rispondere S per si o N per no.) ×

a. La matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che la matrice di transizione a due passi è uguale a P. Infatti,

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In R, si può calcolare $P^2 = \texttt{P\%*\%P}$, dopo aver definito la matrice di transizione:

`P <- matrix(c(1, 0.3, 0, 0, 0, 0, 0, 0.7, 1), nrow = 3, ncol = 3)`.

Se lo stato iniziale è scelto a caso, il vettore delle probabilità iniziali è $\pi^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)$ e la distribuzione marginale a due passi è $\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = (0.4333, 0, 0.5667)$. Dunque, $P(X_2 = 1) = \pi_1^{(2)} = 0$

b. La distribuzione congiunta di X_2 e X_3 si trova moltiplicando la marginale di X_2 per la condizionata di $X_3|X_2$, quindi:

$$P(X_2 = 1, X_3 = 2) = P(X_2 = 1)P(X_3 = 2|X_2 = 1) = \pi_1^{(2)} p_{1,2} = 0.$$

c. Le distribuzioni stazionarie della catena soddisfano la condizione $\pi = \pi P$ che dà origine ad un sistema lineare con tre equazioni e tre incognite, π_0, π_1, π_2. Aggiungendo la condizione $\sum_i \pi_i = 1$, si ottiene $\pi = (\pi_0, 0, \pi_2)$, con $\pi_0 + \pi_2 = 1$. Ad esempio, $\pi = (0.1, 0, 0.9)$ è stazionaria.

a. 0
b. 0
c. S