Numeri complessi
$i = \sqrt{-1}$

forma algebrica: $a+ib$ trig: $r[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]$ esp: $re^{i\theta}$ potenza: $z^n = |z|^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$ radice: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

$$0<\theta<2\pi \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a=0, b>0 \\ \frac{3\pi}{2} & a=0, b<0 \\ \text{non definito} & a=0, b=0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a>0, b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi & a>0, b<0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & a<0, b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$\begin{cases}\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\alpha) = \frac{b}{|z|}\end{cases}$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Matrici

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ $m \times n$ dove m = righe, n = colonne

Si dice quadrata se $m = n$

Inoltre abbiamo

triangolare superiore, triangolare inferiore → se entrambe è diagonale!

Sistema lin. arbitrario di m eq in n inc.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

matrice incompleta $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$

matrice completa $m \times n$: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ = matrice nulla

A^T = matrice trasposta

$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

Se $A = A^T$ si dice simmetrica

Moltiplicazione tra matrici

$AB = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-2\\0&-1\end{pmatrix}$

Se esiste una B tale che $AB = BA = I$
$B = A^{-1}$ o inversa di A
$(A^{-1})^{-1} = A$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Teorema del rango
$A \in M_{m,n}$ $rg(A) = rg(A^T)$
$rg(A) \leq \min\{m,n\}$

$Id = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ matrice identica

1) somma tra righe
2) sottrazione tra righe
3) $\lambda r_x \pm r_y$
4) Spostamento delle righe

tramite

Se $A \in M_n$ e $rg(A) < n$ si dice singolare.

Calcolo del determinante
$2\times 2 = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = ad - cb$
- determinante cambia segno ad ogni cambio di linee.
- Se c'è una linea nulla, $det = 0$
- S s è ottenuta con Gauss, a $Det(S) = (-1)^k d(A)$ con k scambi
- se le righe sono linearmente dip $det = 0$
- righe/colonne proporzionali
- righe/colonne comb. lin. di altre

Teorema Rouché-Capelli
1. se $rk(A) < rk(A|b)$ sistema impossibile
2. " $rk(A) = rk(A|b) < n$ ∞^{N-R} SOLUZIONI (N-R = RANGO)
3. " $rk(A) = rk(A|b) = n$ 1 SOLUZIONE

TEOREMA CRAMER
SE $DET(A) \neq 0$ 1° SOLUZIONE
SE $DET(A) = 0$ $\emptyset$ O ∞ SOL

Algoritmo di Gauss
$(S)\{$ sistema di incognite $\} = $ matrice superiore

Algoritmo di Sarrus
$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$

a	b	c	a	b
e	f	g	e	f
h	i	j	h	i

Laplace considero matrice di ordine n
es.
$A = \begin{pmatrix}1&0&5\\2&-1&0\\7&-2&0\end{pmatrix}$ • seleziono la riga/colonna con + 0 • applico ricorsivamente laplace

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, det(A_{ij})$$

$det(A) = 5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot det(A_{13}) = 5\cdot(-4+7) = 5 \cdot 3 = 15$, con $a_{ij} = 5$, $A_{13} = \begin{pmatrix}2&-1\\7&-2\end{pmatrix}$

Teorema di Binet
$A,B \in M_n$ allora $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$ perciò se $A \in M_n$ e $A^{-1} \in M_n$ allora $det(A\cdot A^{-1}) = det(A)\cdot det(A^{-1}) = det(I)$. A = invertibile <=> non singolare ($det \neq 0$) allora $det(A^{-1}) = \frac{1}{det A}$

Cramer $Ax = b$ se quadrato → $A \in M_n$ → A è non singolare. Per Rouché-Capelli se $rg(A) = rg(A|b) = n°$ incognite $= 1$ soluzione
quindi se $Ax = b$ di cramer allora l'unica soluzione $V = \{V_1,\dots,V_k\}$ si può trovare facendo: $V_i = \frac{det B_i}{det A}$ dove $B_i = \{A_i,\dots,A_{i+1}\}$ $i = 1,\dots,n$

Esempio
$\begin{cases} x+2z = 1 \\ -x+3y+z = 0 \\ x+7z = 1\end{cases}$ $A = \begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&1\\1&0&7\end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $A \in M_3$ $det(A) = 15 \neq 0$ non singolare! $V_1 = \frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\0&3&1\\1&0&7\end{vmatrix}}{15} = \frac{15}{15} = 1 = x$ | $V_2 = \frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&1&7\end{vmatrix}}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = y$ | $V_3 = \frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&3&0\\1&0&1\end{vmatrix}}{15} = \frac{0}{15} = 0 = z$ | $V = (1, 1/3, 0)$

Matrice Inversa: Usando Gauss

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\-1&3&1&0&1&0\\1&0&7&0&0&1\end{array}\right)$ tramite Gauss diventa (arriviamo la diagonale) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/5&0&-2/5\\0&1&0&8/15&1/3&-1/5\\0&0&1&-1/5&0&1/5\end{array}\right)$

$A^{-1} \cdot b$: $\begin{pmatrix}7/5&0&-2/5\\8/15&1/3&-1/5\\-1/5&0&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/3\\0\end{pmatrix}$

perché?
$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$
$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$
$Ix = A^{-1}b$
$x = A^{-1}b$

DEF. $T \in End(V)$ $\lambda \in \mathbb{K}$ (Noi scegliamo di fissare $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ ma in seguito potremo anche degli di scegliere $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
$\lambda \in \mathbb{R}$ si dice un AUTOVALORE di T se esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\boxed{T(v) = \lambda \cdot v}$. In tal caso, v viene detto AUTOVETTORE di T relativo all'autovalore λ.

TEOREMA DEGLI AUTOVETTORI
$T \in End(V)$. Fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ di V.
Sia A la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.
A è DIAGONALE $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ è composta solo da aut. vettori di T
DIM. $\Leftarrow$ $v_1,\dots,v_n$ sono aut. vett. di T
$T(v_i) = \lambda_i v_i$ dove λ_i è l'aut. val. di v_i $\forall i$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI T
$p_T(\lambda)$ è un polinomio nell'incognita λ
$p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} TR(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + det A$
dove A è una qualunque matrice associata a T, mentre $TR(A)$ = traccia di A = somma di tutti gli elementi della diag. principale di A
TEOREMA DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
$T \in End(V)$ A, B associate a T rispetto a 2 basi qualunque. Allora $det(A-\lambda I) = det(B-\lambda I)$

Si dice che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}$$

per lo scalare $\alpha \neq 0$, si ottiene

$$\alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda_0\mathbf{v}) \iff A(\alpha\mathbf{v}) = \lambda_0(\alpha\mathbf{v})$$

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$$

da cui segue che

$$A\mathbf{v} - \lambda_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

vale a dire $(A - \lambda_0 \mathrm{Id}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

MOLT GEOMETRICA (λ_1) = $m_g = DIM(E(\lambda))$ AUTOSPAZIO
$m_g = N - Rg(A(\lambda))$
ORDINE MATRICE

$= -\lambda^3 + TR(H(P_0))\cdot\lambda^2 + C_1\lambda + det(H(P_0))$
$TR(H(P_0)) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
$C_1 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{12}^2 - a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33}$

Spazio vettoriale:

Def. uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ è un insieme non vuoto su cui sono definite operazione di somma e moltiplicazione $+: V\times V \to V$, $(u,v) \to u+v$ (vettori) $\cdot: \mathbb{R}\times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda v$ (scalare)

proprietà della somma: commutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso
proprietà della moltip: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ||| $\lambda = 1$ elemento neutro ||| $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ ||| $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
$0 \cdot v = 0$ $\forall v \in V$

Sottospazio vettoriale: Def. W è un sott. vett. di V se è chiuso rispetto alle due operazioni. Contiene sempre il vettore nullo + l'intersezione tra sott. è a sua volta un sott. vett.

Combinazione lineare: Def. vettore dato da $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_k v_k$ $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$ — i vettori di uno spazio vett. possono essere indipendenti o dipendenti. Si dicono indipendenti se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$. Se sono dipendente, sono C.L. di altri vettori

Span $\{v_1,\dots,v_k\}$ = l'insieme di tutte le possibili C.L. dei vettori $v_1,\dots,v_k$

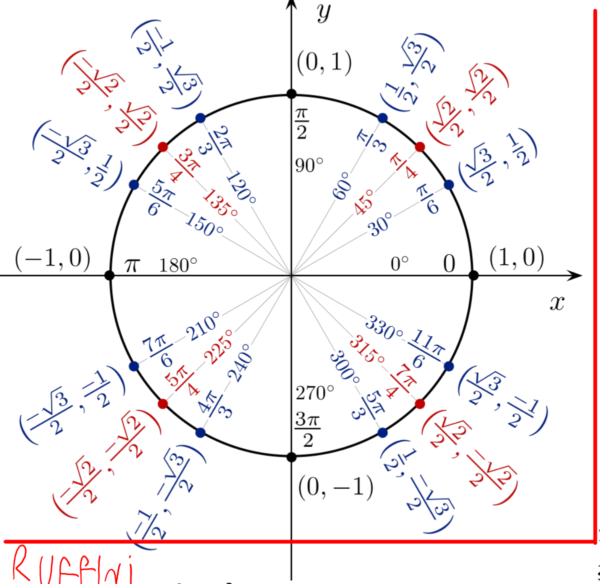
Base canonica: es. $\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **Base di uno spazio:** V sp vett e $B = \{v_1,\dots,v_k\} \subset V$ B si dice base di V se: 1) $V = \mathcal{L}(B)$ → V è generato da B 2) B lin. indip.

Dimensione: $\dim V = n$ W s.s. vett. di V 1) $\dim W \leq n$ 2) $\dim W = n$ allora $W = V$ 3) $\dim W = 0$ $W = \{0\}$ ||| $U \cup W \to U+W \to \dim(U+W) \geq \max(\dim U, \dim W)$
$U \cap W \to \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$
$U \oplus W$ = somma diretta (solo se $U \cap W = \{0\}$, $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$)

Teorema di Grassmann: $\dim(U+W) + \dim(U\cap W) = \dim U + \dim W$ — $DIM(U \cap W)$

Trasformazioni lineari: $f: A \to B$ A,B = insiemi arbitrari non vuoti $f: A \to A$ = funzione identica
A = dominio, B = codominio ||| f è iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ||| f è suriettiva se $Im f = B$ ||| se f è sia iniettiva che suriettiva allora si dice che è biettiva (ed è di conseguenza invertibile)
Proprietà: $T(V_1+V_2) = T(V_1)+T(V_2)$ ||| $T(\lambda V) = \lambda T(V)$

Teorema della dimensione: $T \in Hom(V,W)$ $\dim(V) = n$ allora $\dim Ker T + \dim Im T = n$
T è iniettiva <=> $\dim(V) = rg(T)$ T è suriettiva se $\dim(W) = rg(T)$ (sapendo che $T \in Hom(V,W)$)



APPLICAZIONI LINEARI
(FUNZ. LINEARI/OMOMORFISMI)

$f: V \to W$

VALE $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$

$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$

Im(t) = span{T(e1),T(e2)..}
Le colonne della matrice associata

INIETTIVA $\iff \dim \ker(f) = 0$ SE BASE NON CANONICA IL RIS. VA MOLT. PER BASE(V)

SE $\dim(V) = \dim(W) \iff$ SURIETTIVA

SE $\dim(V) > \dim(W)$ NO INIETTIVA

SURIETTIVA

$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim(W)$ $\dim \operatorname{Im}(f) = rg(A)$ MATRICE ASSOCIATA

BASE $\operatorname{Im}(f)$ = COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLA MATRICE ASSOCIATA (⚠ SOLO BASI CANONICHE)
SENNò SI MOLTIPLICA PER LA BASE W

DIAGONALIZZAZIONE
SOMMA m_a e $m_g = n$ TUTTI GLI AUTOVAL

e $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp$ m_a QUANTE VOLTE POLI VIENE ANNULLATO

$\exists$ BASE DI V FATTA CON AUTOVALORI $(\lambda-1)^2=0$ $m_a(1)=2$

$\Rightarrow M^{-1}AM = D \to$ AUTOVALORI SULLA DIAGONALE

$M = (v_1, v_2, v_3)$ v_1 VETTO NULLEO AUTOSPAZIO SOL $A(\lambda_i) = \bar{0}$
VETT. COLONNA

STEP
1) POLINOMIO CARATTERISTICO e TROVO AUTOVALORI CON RELATIVA MOLT. ALGEBRICA POI
2) $\forall \lambda$ SOSTITUISCO e $A(\lambda)=\bar{0}$ TROVO GLI AUTOVALORI e RELATIVI AUTOSPAZI $\to A(\lambda_i) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{0}$
3) MATRICE $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $M = (\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{LIN INDIP.}})$ $v_1 \to$ ASS λ_1

RUFFINI

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \gamma & \beta & r & k \\ a & & a\gamma & & \\ \hline & \gamma & \beta+(a\gamma) & & \end{array}$$

QUOZIENTE

$\gamma x^3 + \beta x^2 + r x + k = P(x)$ $x \in \{\text{DIVISORI DI } k\}$

$P(a) = 0$ $b \in \{\text{DIV. DI } \gamma\}$

$a = \frac{x}{b}$

$(x-a) \cdot q(x)$

MATRICI SIMILI
$\exists M^{-1} \cdot A \cdot M = B \Rightarrow A \sim B$

Matrice invertibile
Il determinante non è nullo: $\det A \neq 0$. se det = 0 => singolare non invertibile
Il rango di A è n.
dim ker = 0

FORMA QUADRATICA
$q = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

TROVARE AUTOVAL ASSOCIATI $\Rightarrow$

DEF. POS. $\forall \lambda > 0$

SEMI DEF. POS $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i = 0$

DEF. NEG $\forall \lambda < 0$

SEMI DEF. NEG. $\lambda < 0$ $\lambda = 0$

INDEF. $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i < 0$

CRITERIO CARTESIO
VARIAZIONE DEL SEGNO DEL POLINOMIO CARATT.

λ POS SONO TANTI QUANTE LE VARIAZIONI DI SEGNO

$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 11\lambda$ MAT 2X2

2 CAMBI DI SEGNO $\Rightarrow$ 2 AUTOVAL POSITIVI

$\lambda = 0$ SOL. $\Rightarrow$ A SEMI DEF.

PRODOTTO SCALARE
$\langle u_1, u_2 \rangle = \bar{u}_1^T \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \sum_1^n v_i^2$

VETTORI ORTONORMALI
$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ $\Rightarrow$ BASI ORTOGONALI
$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \forall i \neq j$

A SIMMETRICA $\Rightarrow \exists A = UDU^T$ U ORTOGONALE

NORMALIZZAZIONE VERSO BASE ORTONORMALE
SONO ORTONORMALI
$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ✓ $B = \{v_1, v_2\}$.

$\|u_1\| = \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle}$

NUOVA BASE DIVENTA

$\bar{v}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ $v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

Moltiplicazione matrici

$$A_{4x2} \cdot B_{2x4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 1 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot3 & - & - & - \\ 4\cdot1+6\cdot3 & - & - & - \\ 1\cdot1+9\cdot3 & - & - & - \\ 5\cdot1+2\cdot3 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Cambio di base

$A_{f,B'_V,B'_W} = M_{B_W,B'_W} A_{f,B_V,B_W} M_{B'_V,B_V}$

Il passaggio di base da B1 a B2 delle coordinate di un vettore si ottiene con la seguente formula:

$C_{B_2}(v) = M_{B_1,B_2} \cdot C_{B_1}(v)$

Viceversa

$C_{B_1}(v) = M^{-1}_{B_1,B_2} \cdot C_{B_2}(v)$

Posso calcolare la matrice del cambio di base anche passando tramite la base canonica dello spazio vettoriale.

$M_{B_1,B_2} = M^{-1}_{B_2,e_2} M_{B_1,e_2}$

E' un metodo più semplice del precedente, perché nelle basi canoniche le coordinate sono uguali agli elementi dei vettori.

Pertanto, evito di calcolare le coordinate dei vettori.

Matrice associata ad una base non canonica
Prendo i vettori risultanti della trasformazione e li metto come combinazione lineare dei vettori di base

ES V1,V2 vettori della base W

$(1,1) = b_1(v_1) + b_2(v_2)$ la soluzione (b1,b2) del sistema la metto nella matrice che sara rispetto alla base di W