POSTO:

NOME e COGNOME (stampatello):

MATRICOLA:

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

09/01/2020 - Tema A

Tempo a disposizione: 90 min

Voto

Problema 1	Problema 2	Totale

Problema 1 (21 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{0.5x} - x}$$

1.1 Determinarne il dominio e evidenziare eventuali simmetrie. Studiare il segno di $f(x)$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti e discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Evidenziare i punti stazionari.

1.4 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f.

1.5 Calcolare $f''(x)$. Senza fare conti, dedurre dal grafico il numero degli zeri di $f''(x)$ e dare indicativamente la loro posizione. Senza fare conti, dedurre lo studio del segno di $f''(x)$.

1.6 Calcolare il polinomio di Taylor, $p(x)$, centrato in $x_0 = 0$, di grado minore di 3 per $f(x)$. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx$$

Problema 2 (9 punti)

2.1 Sia $I =]a, b[$ e $x_0 \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di derivata di f in x_0.

2.2 Assumere che f sia derivabile e invertibile, e chiamare g la sua funzione inversa. Usare la definizione di derivata di f per mostrare che, se $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2.3 Considerare la seguente funzione $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2x) - \pi\sqrt{2}\log\left(\frac{x}{\pi} + \frac{7}{8}\right) .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

f è una funzione invertibile? Perché?

POSTO:

NOME e COGNOME (stampatello):

MATRICOLA:

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 *- Prof. D. Pasetto*

09/01/2020 - Tema B

Tempo a disposizione: 90 min

Voto

Problema 1	Problema 2	Totale

Problema 1 (21 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{0.5e^{2x}}{2x - e^{2x}}$$

1.1 Determinarne il dominio e evidenziare eventuali simmetrie. Studiare il segno di $f(x)$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti e discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Evidenziare i punti stazionari.

1.4 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f.

1.5 Calcolare $f''(x)$. Senza fare conti, dedurre dal grafico il numero degli zeri di $f''(x)$ e dare indicativamente la loro posizione. Senza fare conti, dedurre lo studio del segno di $f''(x)$.

1.6 Calcolare il polinomio di Taylor, $p(x)$, centrato in $x_0 = 0$, di grado minore di 3 per $f(x)$. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx$$

Problema 2 (9 punti)

2.1 Sia $I =]a, b[$ e $x_0 \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di derivata di f in x_0.

2.2 Assumere che f sia derivabile e invertibile, e chiamare g la sua funzione inversa. Usare la definizione di derivata di f per mostrare che, se $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2.3 Considerare la seguente funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2\pi \log\left(\frac{x}{4\pi} + \frac{7}{8}\right) .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

f è una funzione invertibile? Perché?

Esame di Calcolo 1 (09/01/2019, Tema A)

Soluzioni - Problema 1 - Tema A

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{0.5x} - x}$$

1.1 Determinarne il dominio e evidenziare eventuali simmetrie. Studiare il segno di $f(x)$.

Bisogna imporre che il denominatore sia diverso da 0, cioè, $e^{x/2} \neq x/2$. Disegnando i grafici di $y = e^{x/2}$ e $y = x/2$ si trova che $e^{x/2} > x/2 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
Quindi il dominio è: $D =]-\infty, +\infty[$.
Siccome $f(-x) \neq -f(x)$, allora f non è dispari f.
Siccome $f(-x) \neq f(x)$, allora f non è pari f.
Numeratore e denominatore sono entrambi positivi $\forall \; x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x) > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti e discutere la continuità di $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{\left[\frac{0}{0+\infty}\right]}{=} 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\left[\frac{+\infty}{+\infty-\infty}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{x/2}} = 1.$$

Quindi $y = 0$ e $y = 1$ sono asintoti orizzontali.
$f(x)$ è continua perché è data dalla somma e rapporto di funzioni continue.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Evidenziare i punti stazionari.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x) - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)}{(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(2 - x)}{(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x)^2}$$

$f(x) > 0$ è dato da $(2 - x) > 0$ perché gli altri fattori sono sempre positivi.
Quindi $f(x)$ cresce per $x < 2$ e decresce per $x > 2$.
In $x = 2$ c'è un massimo relativo di ordinata $f(2) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

1.4 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f.

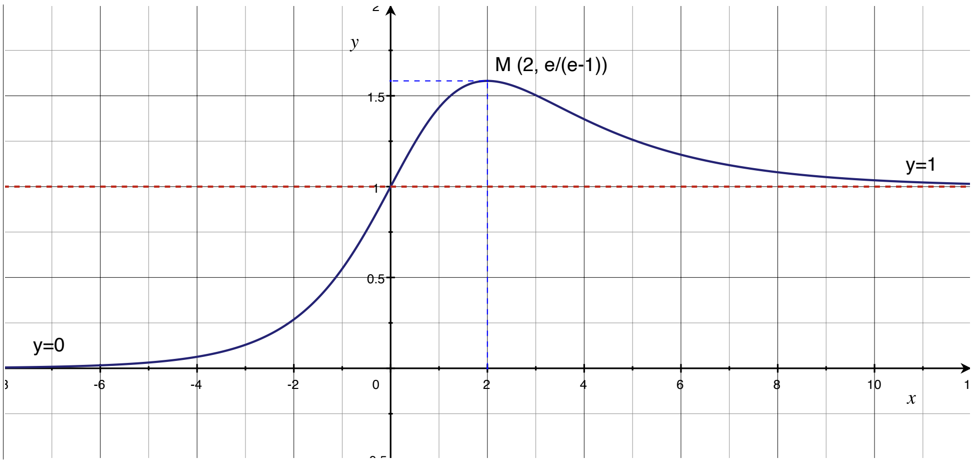

Grafico: Segnare bene le informazioni disponibili, in questo caso gli asintoti orizzontali $y = 0$ e $y = 1$, le coordinate del punto di massimo M, l'intersezione con l'asse y, $f(0) = 1$.

L'immagine è data dall'insieme dei valori restituito dalla funzione e si deduce dal grafico. In questo caso 0 è un estremo inferiore per f (NON un minimo), mentre $f(2)$ è massimo locale e globale.
Quindi, immagine: $]0, \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}]$.

1.5 Calcolare $f''(x)$. Senza fare conti, dedurre dal grafico il numero degli zeri di $f''(x)$ e dare indicativamente la loro posizione. Senza fare conti, dedurre lo studio del segno di $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})(2e^{\frac{x}{2}} - x)^2 - 2(2e^{\frac{x}{2}} - x)(e^{\frac{x}{2}} - 1)(2e^{\frac{x}{2}} - xe^{\frac{x}{2}})}{(2e^{\frac{x}{2}} - x)^4} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}(2e^{\frac{x}{2}} - x) - 2(e^{\frac{x}{2}} - 1)(2e^{\frac{x}{2}} - xe^{\frac{x}{2}})}{(2e^{\frac{x}{2}} - x)^3} =$$

$$= \frac{-xe^x + \frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}} - 4e^x + 2xe^x + 4e^{\frac{x}{2}} - 2xe^{\frac{x}{2}}}{(2e^{\frac{x}{2}} - x)^3} =$$

$$\frac{(x-4)e^x + (\frac{x^2}{2} - 2x + 4)e^{\frac{x}{2}}}{(2e^{\frac{x}{2}} - x)^3}$$

Dal grafico si può vedere che, partendo da $-\infty$, $f(x)$ è convessa (concavità verso l'alto), poi concava in prossimità del massimo relativo, e poi ancora convessa. Ci sono quindi 2 punti di flesso, uno prima del massimo (chiamiamolo f_1) e uno dopo (chiamiamolo f_2). Quindi, $f''(x) > 0$ per $x < f_1$ e $x > f_2$.

1.6 Calcolare il polinomio di Taylor, $p(x)$, centrato in $x_0 = 0$, di grado minore di 3 per $f(x)$. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx$$

La formula del polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado 2 è:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)$$

Sostituendo $x_0 = 0$ si ha che $f''(0) = 0$ e $p(x)$ è la retta: $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x$
L'integrale diventa: $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = [x + x^2/4]_{-1}^{1} = 2$

Soluzioni - Problema 2 (9 punti) - Tema A

2.1 Sia $I =]a, b[$ e $x_0 \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di derivata di f in x_0.

Se il limite esiste finito si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2.2 Assumere che f sia derivabile e invertibile, e chiamare g la sua funzione inversa. Usare la definizione di derivata di f per mostrare che, se $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si usa la formula precedente scritta per $g'(y_0)$ e facendo il cambio di variabile $x = g(y)$ (da cui $y = f(x)$):

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2.3 Considerare la seguente funzione $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2x) - \pi\sqrt{2} \log\left(\frac{x}{\pi} + \frac{7}{8}\right) \ .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

f è una funzione invertibile? Perché?

La formula per la retta tangente ad f in x_0 è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Calcolo $f'(x)$, $f'(x_0)$, e $f(x_0)$:
$f'(x) = 2\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{\frac{x}{\pi} + \frac{7}{8}}$
$f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x_0) = 0$.
Tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
f non è invertibile perché non è iniettiva: si verifica che $f''(x_0) < 0$, per cui x_0 è un punto di massimo relativo interno al dominio.
$f''(x) = -4\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{x}{\pi} + \frac{7}{8}\right)^{-2}$
$f''(x_0) = -2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\pi} - 2\right) < 0$

Esame di Calcolo 1 (09/01/2019, Tema B)

Soluzioni - Problema 1 - Tema B

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{0.5e^{2x}}{2x - e^{2x}}$$

1.1 Determinarne il dominio e evidenziare eventuali simmetrie. Studiare il segno di $f(x)$.

Bisogna imporre che il denominatore sia diverso da 0, cioè, $e^{2x} \neq 2x$. Disegnando i grafici di $y = e^{2x}$ e $y = 2x$ si trova che $e^{2x} > 2x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
Quindi il dominio è: $D =]-\infty, +\infty[$.
Siccome $f(-x) \neq -f(x)$, allora f non è dispari f.
Siccome $f(-x) \neq f(x)$, allora f non è pari f.
Il numeratore è positivo mentre il denominatore è negativo $\forall \ x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti e discutere la continuità di $f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{[\frac{0}{-\infty-0}]}{=} 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{[\frac{+\infty}{+\infty-\infty}]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}\left(4\frac{x}{e^{2x}}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{-2e^{2x}} = -\frac{1}{2}$.
Quindi $y = 0$ e $y = -1/2$ sono asintoti orizzontali.
$f(x)$ è continua perché è data dalla somma e rapporto di funzioni continue.

1.3 Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Evidenziare i punti stazionari.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x - \mathrm{e}^{2x}) - 0.5\mathrm{e}^{2x}(2 - 2\mathrm{e}^{2x})}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x - 1)}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^2}$$

$f(x) > 0$ è dato da $(2x - 1) > 0$ perché gli altri fattori sono sempre positivi.
Quindi $f(x)$ cresce per $x > 1/2$ e decresce per $x < 1/2$.
In $x = 1/2$ c'è un minimo relativo di ordinata $f(1/2) = -\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}-2}$.

1.4 Disegnare il grafico di $f(x)$. Trovare l'immagine di f.

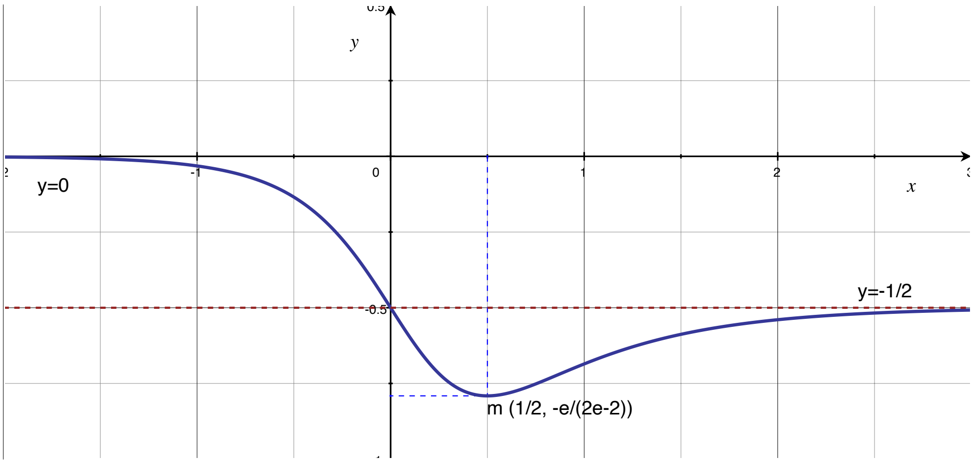

Grafico: Segnare bene le informazioni disponibili, in questo caso gli asintoti orizzontali $y = 0$ e $y = -1/2$, le coordinate del punto di minimo m, l'intersezione con l'asse y, $f(0) = -0.5$.

L'immagine è data dall'insieme dei valori restituito dalla funzione e si deduce dal grafico. In questo caso 0 è un estremo superiore per f (NON un massimo), mentre $f(1/2)$ è minimo locale e globale.
Quindi, immagine: $[\frac{e}{2e-2}, 0[$.

1.5 Calcolare $f''(x)$. Senza fare conti, dedurre dal grafico il numero degli zeri di $f''(x)$ e dare indicativamente la loro posizione. Senza fare conti, dedurre lo studio del segno di $f''(x)$.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x})(2x - \mathrm{e}^{2x})^2 - 2(2x - \mathrm{e}^{2x})(2 - 2\mathrm{e}^{2x})(2x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x})}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^4} = \\
&= \frac{4x\mathrm{e}^{2x}(2x - \mathrm{e}^{2x}) - 4(1 - \mathrm{e}^{2x})(2x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x})}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^3} = \\
&= \frac{8x^2\mathrm{e}^{2x} - 4x\mathrm{e}^{4x} - 8x\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{2x} + 8x\mathrm{e}^{4x} - 4\mathrm{e}^{4x}}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^3} = \\
&= 4\frac{(2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{2x} + (x - 1)\mathrm{e}^{4x}}{(2x - \mathrm{e}^{2x})^3}
\end{aligned}
$$

Dal grafico si può vedere che, partendo da $-\infty$, $f(x)$ è concava (concavità verso il basso), poi convessa in prossimità del minimo relativo, e poi ancora concava. Ci sono quindi 2 punti di flesso, uno prima del minimo (chiamiamolo f_1) e uno dopo (chiamiamolo f_2). Quindi, $f''(x) > 0$ per $f_1 < x < f_2$.

1.6 Calcolare il polinomio di Taylor, $p(x)$, centrato in $x_0 = 0$, di grado minore di 3 per $f(x)$. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx$$

La formula del polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado 2 è:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)$$

Sostituendo $x_0 = 0$ si ha che $f''(0) = 0$ e $p(x)$ è la retta: $p(x) = -0.5 - x$
L'integrale diventa: $\int_{-1}^{1} p(x) = [-0.5x - x^2/2]_{-1}^{1} = -1$

Soluzione - Problema 2 - Tema B

2.1 Sia $I =]a, b[$ e $x_0 \in I$. Sia $f: \ I \to \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di derivata di f in x_0.

Se il limite esiste finito si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2.2 Assumere che f sia derivabile e invertibile, e chiamare g la sua funzione inversa. Usare la definizione di derivata di f per mostrare che, se $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si usa la formula precedente scritta per $g'(y_0)$ e facendo il cambio di variabile $x = g(y)$ (da cui $y = f(x)$):

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2.3 Considerare la seguente funzione $f: \ [0, \pi] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2\pi \log\left(\frac{x}{4\pi} + \frac{7}{8}\right) \quad .$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

f è una funzione invertibile? Perché?

La formula per la retta tangente ad f in x_0 è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Calcolo $f'(x)$, $f'(x_0)$, e $f(x_0)$:
$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{0.5}{\frac{x}{4\pi} + \frac{7}{8}}$
$f(x_0) = -1$
$f'(x_0) = 0.$
Tangente: $y = -1$.
f non è invertibile perché non è iniettiva: si verifica che $f''(x_0) > 0$, per cui x_0 è un punto di minimo relativo interno al dominio.
$f''(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{x}{4\pi} + \frac{7}{8}\right)^{-2}$
$f''(x_0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8\pi} > 0$