D. Pasetto

Esercizi del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Primo semestre 2024/2025

Foglio 1: Insiemistica e topologia

Esercizio 1 (Insiemistica) ....

Siano A, B, C tre insiemi. Dimostrare che

$$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

Esercizio 2 (Intervalli) ....

Trovare i seguenti insiemi:

(a) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$

(b) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$

(c) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}]$

(d) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, 1 - \frac{1}{n^2}]$

Esercizio 3 (Estremi, insiemi aperti e chiusi) ....

Per i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ indicare (se esistono):

- gli estremi superiore e inferiore
- il massimo e il minimo
- i punti interni, di accumulazione, di frontiera, e i punti isolati

Infine dire se l'insieme è aperto, chiuso, o né aperto né chiuso.

(a) $E = \left\{ \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $E = \left\{ \frac{n+2}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

(c) $E = \{(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$

(d) $E = \left\{ \frac{n^2-1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

(e) $E =]2, 3[$

(f) $E =]-1, 5]$

(g) $E =]-1, 5] \cup \left\{ -2, 8, \frac{21}{2} \right\}$

(h) $E = \left\{ \frac{n^2}{n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \right\}$

(i) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(j) $E = \left\{ \frac{1}{2^n} + 2, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

(k) $E = \left\{ \frac{n^3+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

Per rispondere provare a scrivere alcuni elementi di E e cercare di capire cosa succede quando n cresce all'infinito. Risposte:

(a) $E = \left\{\frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

sup$(E) = 1$; inf$(E) = 0$; max(E) non esiste; $min(E) = 0$; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); $\{1\}$ è l'unico punto di accumulazione; $F(E) = E \cup \{1\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(b) $E = \left\{\frac{n+2}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = \left\{1 + \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

sup$(E) = 3$; inf$(E) = 1$; max$(E) = 3$; $min(E)$ non esiste; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); $\{1\}$ è l'unico punto di accumulazione; $F(E) = E \cup \{1\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(c) $E = \{(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$

sup$(E) = 1$; inf$(E) = -1$; max$(E) = 1$; $min(E) = -1$; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); E non ha punti di accumulazione; $F(E) = E = \{-1, 1\}$; E è chiuso.

(d) $E = \left\{\frac{n^2-1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} = \{n - 1, \quad n \in \mathbb{N}\}$

sup$(E) = +\inf$; inf$(E) = -1$; max(E) non esiste; $min(E) = -1$; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); non ci sono punti di accumulazione in $\mathbb{R}$ (siccome E è superiormente illimitato, si dice anche che $\{+\infty\}$ è punto di accumulazione); $F(E) = E$; E è chiuso.

(e) $E =]2, 3[$

sup$(E) = 3$; inf$(E) = 2$; max(E) e $min(E)$ non esistono; tutti i punti di E sono interni, cioè $E = \overset{\circ}{E}$; nessun punto isolato; $F(E) = \{2, 3\}$; tutti i punti di E e della sua frontiera sono di accumulazione; E è aperto.

(f) $E =]-1, 5]$

sup$(E) = 5$; inf$(E) = -1$; max$(E) = 5$; $min(E)$ non esiste; punti interni di E sono $\overset{\circ}{E} =]-15[$; non ci sono punti isolati ; tutti i punti di E e della sua frontiera sono di accumulazione; $F(E) = \{5, -1\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(g) $E =]-1, 5] \cup \left\{-2, 8, \frac{21}{2}\right\}$

sup$(E) = $ max$(E) = \frac{21}{2}$; inf$(E) = $ min$(E) = -2$; punti interni di E sono $\overset{\circ}{E} =]-15[$; punti isolati: $\left\{-2, 8, \frac{21}{2}\right\}$; punti di accumulazione: $[-1, 5]$; $F(E) = \{-2, -1, 5, 8, 21/2\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(h) $E = \left\{\frac{n^2}{n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 1\right\} = \left\{1 + \frac{1}{n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 1\right\}$

sup$(E) = 4/3 = $ max(E); inf$(E) = 0 = $ min(E); E ha solo punti isolati (nessun punto interno); unico punto di accumulazione: $\{1\}$; frontiera $F(E) = E \cup \{1\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(i) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\sup(E) = 5 = \max(E)$; $\inf(E) = 1 = \min(E)$; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); non ci sono punti di accumulazione; frontiera $F(E) = E$; E è chiuso.

(j) $E = \left\{\frac{1}{2^n} + 2, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

$\sup(E) = 3 = \max(E)$; $\inf(E) = 2$; $\min(E)$ non esiste; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); unico punto di accumulazione: $\{2\}$; frontiera $F(E) = E \cup \{2\}$; E non è nè aperto nè chiuso.

(k) $E = \left\{\frac{n^3+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = \left\{n^2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

$\sup(E) = +\infty$; $\inf(E) = 2 = \min(E)$; $\max(E)$ non esiste; E ha solo punti isolati (nessun punto interno); nessun punto di accumulazione in $\mathbb{R}$; frontiera $F(E) = E$; E è chiuso.