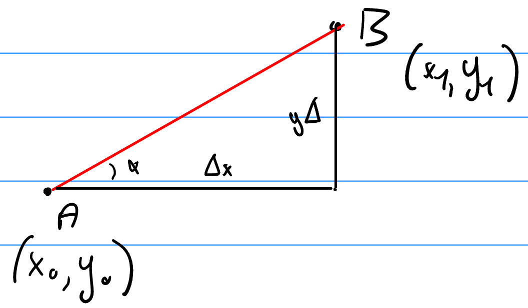
# Derivate




Eq: $y = mx + q$

$m$ → coeffic. angolare

$q$ = intercetta

tracciamo la retta

1) Passa per A $\quad y - y_0 = m(x - x_0)$

(tutte le rette per un punto tranne la verticale $x = x_0$)

retta passante per A e B: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)} = tg(\alpha)$

→ eq. $y = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0) + y_0$

↓ eq. finale

punto A

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{array}\right\} \text{verifica: passaggio per A e B}$$

punto B

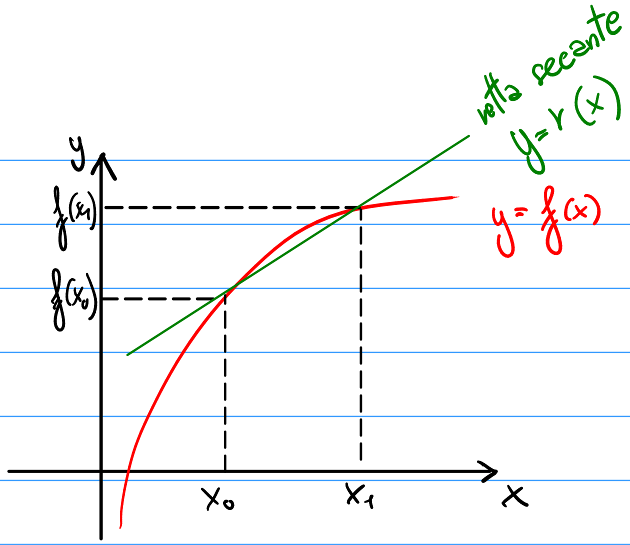
↓

passaggio per due punti,

tranne quando $x_0 = x_1$

↓

punti allineati verticalmente, retta $x = x_0$




$$y = r(x) = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m}(x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{q}$$

cosa succede se $f(x_1)$ si avvicina ad $f(x_0)$?

la retta secante diventa pian piano la retta tangente

quando $x_1 \to x_0$ la retta secante tende alla tg( )

al grafico di $f$ nel punto $x_0$!!

eq. retta tangente: $y = \bar{m}(x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad \bar{m} \neq m$

$$\bar{m} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{rapporto incrementale}} = f'(x_0)$$

**Definizione** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ($A$ = unione di intervalli)

$x_0 \in A$; se il limite per $x \to x_0$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito

allora diremo che $f$ è derivabile (o differenziabile) in $x_0$ e la derivata di $f$ in $x_0$ vale

(definizione di derivata da sapere)

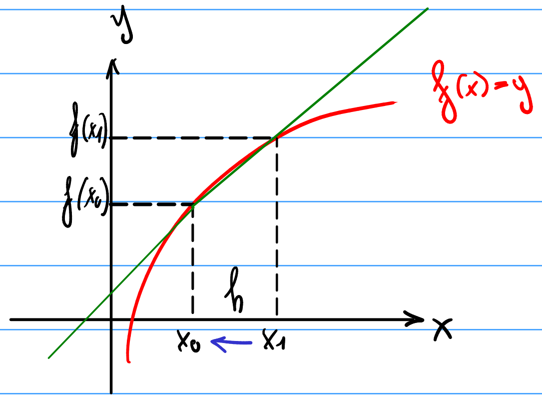
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

note: 1) $f$ derivabile in $x_0$ allora la retta tg() al $G(f)$ in $x_0$ è $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

2) notazione $f'(x_0)$; $D[f(x)](x_0)$; $\dfrac{df}{dx} x_0$

3) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

altro modo di scrivere il rapporto incrementale




$h = x - x_0$ $\qquad$ $x = x_0 + h$

1) $f(x) = c \in \mathbb{R}$ funz. costante

$D = \mathbb{R}$ ; $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

quindi la derivata di una funzione costante da 0 per $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x$ Dominio $= \mathbb{R}$ $x_0 \in$ Dominio

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

quindi $D[\, x \,](x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} \quad \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

$$D[\, x^2 \,](x_0) = 2x_0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad D: [0, +\infty[$

$x_0 \in D$:

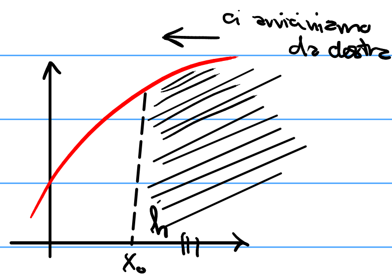
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \to \frac{x - x_0}{x - x_0(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{se } x_0 \neq 0 \quad \underline{\underline{x_0 > 0}}$$

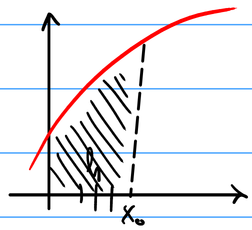
$$D[\sqrt{x}](x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{se } x_0 > 0$$

---

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$




$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$




Teorema

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x_0 \in A$

se la derivata sinistra assumo valga $\underline{s}$ e la dx $\underline{d}$ $\in \mathbb{R}$

allora $f$ é derivabile in $x_0$ se e solo se $s = d$.

In questo caso abbiamo che: $f'(x_0) = s$

esempio $f(x) = |x|$ ; $D = \mathbb{R}$

$x_0 > 0$ : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

$\begin{pmatrix} x \to x_0 \\ \Rightarrow x > 0 \end{pmatrix}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

$x_0 < 0$ : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

$\begin{pmatrix} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{pmatrix} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1$

$$D[|x|](x_0) = \pm 1 \begin{cases} \text{se } x > 0 & +1 \\ \text{se } x < 0 & -1 \end{cases}$$

$\boxed{x_0 = 0}$ $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h + 0}{h} = -1$

$\rightarrow$ per il teorema, $f(x) = |x|$ non é derivabile in $x_0 = 0$

## Teorema

se $f$ é derivabile in $x_0$ allora $f$ é continua in $x_0$
(non vale viceversa)

Esercizio

1) $f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$

$\Big|=$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \cdot \frac{\cancel{\cos(x)\cdot\cos(x)} - (1+\sin(x))(-\sin(x))}{\cancel{\cos(x)^2}}$$

$\Big|=$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \left(\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\right)$$

2) $f(x) = 2^{x^2} = e^{\ln(2^{x^2})} = e^{x^2\ln(2)}$

$\Big|=$

$$f'(x) = e^{x^2\ln(2)}\, 2\ln(2)\, x$$

3) $f(x) = x\cdot|x|$ é derivabile in $x_0 = 0$?

$\downarrow$

verifichiamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \\ -x^2 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \\ -2x \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

é derivabile, esiste per $x_0 = 0$

Secondo controllo, tramite rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$=$

$$\lim_{h\to 0^+} = \frac{h^2-0}{h} = h = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-0}{h} = -h = 0$$

uguali, quindi $f(x)$ esiste in $x_0=0$
quindi è derivabile!

4) $f(x) = e^{\cos(x)}$ // scrivere eq. retta tangente di $f(x)$
// in $x_0 = \pi/2$

$$e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))$$

$$f(\pi/2) = 1 \cdot \left(-\sin(\pi/2)\right) = -1$$

$$eq = -1\,(x-\pi/2)+1$$ // equazione retta tangente

5) $f(x) = x^2 + e^x$ 

$f(x)$ é invertibile per $x > 0$?

$g = f^{-1}$ é derivabile per $x > 0$?

trovare eq. retta tangente al grafico di $g$ in $\underline{x_0 = 1+e}$

1) $x^2$ e $e^x$ sono strettamente crescenti, sono invertibili (per $x > 0$ altrimenti potera non essere così!)

2) $f^{-1}(x)$ é derivabile per $x > 0$ perché $f$ é derivabile.

$f'(x) \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x + e^x > 0$ per $x > 0$ e $f$ é definita in un intervallo $(x > 0)$

3) $y - \underline{g(x_0)} = \underline{g'(x_0)}(x - x_0)$

ricordo che $f(x) = x^2 + e^x$ ; $g(x) = f^{-1}(x)$
e ci servono $g(x_0), g'(x_0)$

$g(x_0) = g(1+e) = y_0$ $\qquad f(y_0) = 1 + e$

$= (1+e)^2 + e^{(1+e)}$

$= y_0^2 + e^{y_0}$

$= y_0 = 1$

$g(1+e) = 1$

$$g'(1+e) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(1)}$$

derivata inversa!!

$2+e$

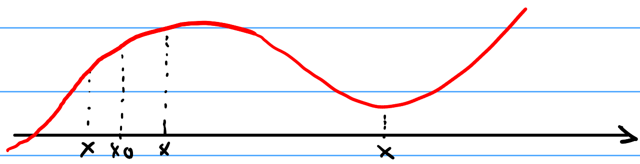
eq. $y = g'(1+e)(x-(1+e)) + g(1+e) = \frac{1}{2+e}(x-1-e)+1$

# Proprietá locali

$f: A \to \mathbb{R}$ ; $x_0 \in A$

- $f$ é crescente in $x_0$ se:
  - $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$
  - $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

per ogni x sufficientemente vicino ad $x_0$

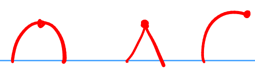



↳ questa x é lontana, non va bene!

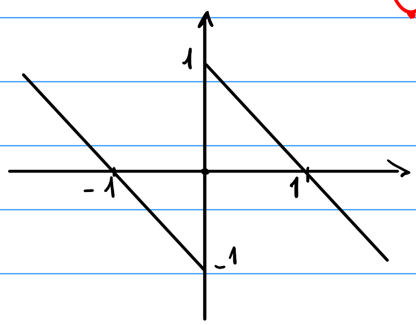
- $f$ é decrescente in $x_0$ se
  - $x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$
  - $x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

per ogni x sufficientemente vicino ad $x_0$

- $x_0$ é massimo locale (o relativo) di $f$ se:
  - $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni x sufficientemente vicino ad $x_0$



- $x_0$ é minimo locale (o relativo) di $f$ se:
  - $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x sufficientemente vicino ad $x_0$




funzione decrescente, crescente solo in $x = 0$

Teorema (legame tra derivate e proprietà locali)

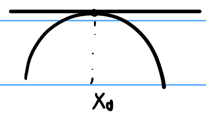
$f$ derivabile in $x_0$; $x_0$ = punto interno al dominio

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente in $x_0$
- $f'(x_0 < 0 \Rightarrow$ " " " decrescente in $x_0$

derivate e massimi/minimi relativi

$f: D \to \mathbb{R}$ ; $x_0$ interno a $D$ ; $f$ derivabile in $x_0$

1) se $x_0$ è max/min relativo allora $f'(x_0) = 0$

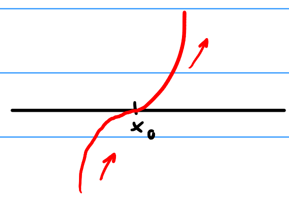


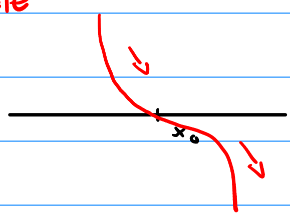
2) se $f'(x_0) = 0$ allora $x_0$ si dice punto stazionario

1) se $f(x)$ decresce per $x < x_0$ e cresce per $x > x_0$ ($x$. suff. vicino a $x_0$) allora $x_0$ è minimo relativo

2) se $f(x)$ cresce per $x < x_0$ e decresce per $x > x_0$ ($x$. suff. vicino a $x_0$) allora $x_0$ è massimo relativo

altrimenti $x_0$ = punto di flesso a tangente orizzontale

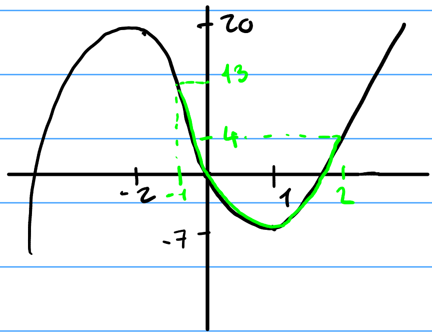




1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ $\quad$ $x \in \mathbb{R}$

tramite le derivate calcolo le concavità + minimi/massimi locali

- seconda parte, $f(x)$ uguale ma Dominio ridotto a $[-1, 2]$




$f(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$

$f(2) = 16 + 12 - 24 = 4$

cresc: $]1, 2]$

dec: $[-1, 1[$

$x_0 = -1$ max loc. ass

$x_0 = 1$ min loc. ass

$x_0 = 2$ max locale

esercizi intervalli (cres., dec., max, min)

- $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $x \in [0, \pi/2]$
- $f(x) = -(x+4)^3$ $\quad$ $x \in [-5, -2]$