Funzioni continue

$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in A$

- se x_0 è di accumulazione per A diremo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- se x_0 è punto isolato di A diciamo che $f(x)$ è continua in x_0

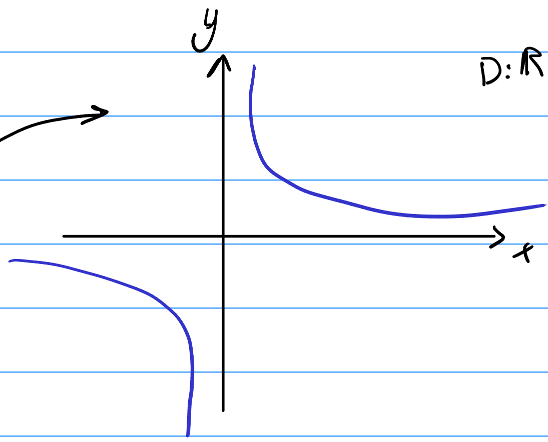
- $f(x)$ è continua se è continua in tutti i punti del dominio

esempio 1

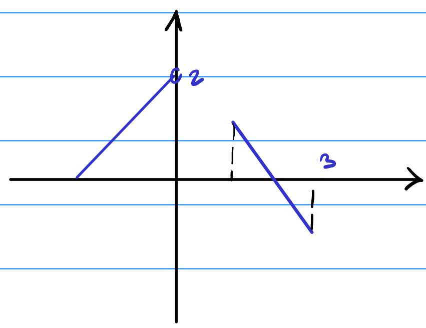
$f(x) = \frac{1}{x}$

$D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

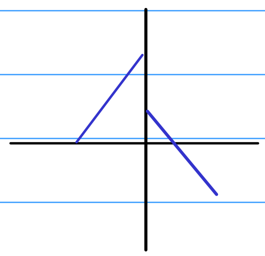
è continua



esempio 2



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -x+2 & \text{se } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

non è continua

Come capire se é continua o no?
calcolo limite x_0^- x_0

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = r$

Allora $f(x)$ é continua x_0 se e solo se $l = r = f(x_0)$ $x_0 \in D$

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, allora

$f + g$ é continua
$f \cdot g$ "
f / g "
$|f|$ "

dimostrazione dalla definizione di limite

$f : A \to \mathbb{R}$ $f : B \to \mathbb{R}$ continue

$f \circ g$, $g \circ f$ risul.: continuo

permette lo scambio di variabili

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \quad ; \quad f : A \to \mathbb{R}$$

e di accum. per A (f continua)

$$\lim_{x \to x_0} f(\overbrace{g(x)}^{\ell}) = \lim_{t \to \ell} f(t) \quad \rightsquigarrow \text{what?}$$

example

$$\lim_{x \to 0^+} \log\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\Big) = \lim_{t \to +\infty} \log(t) = +\infty$$

f continua, strett. monotona, definita su un intervallo, allora f^{-1} é continua.

solo cres. o decr.

? cosa vuol dire

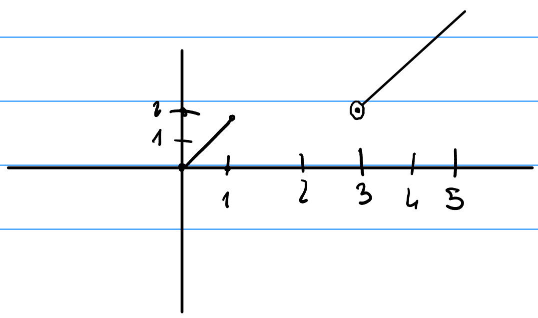
esempio

f continua, strett. monotona ma f^{-1} non continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & 3 < x \le 5 \end{cases}$$

guarda le y!

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$



non é continua

$$\lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x) = 3!$$

$y = sgn$ é una funzione non continua

funzioni definite a tratti possono non essere continue, bisogna controllare i punti di giunta!

$f(x) = \log_a(x)$ é continua

i limiti sono solo per gli estremi!

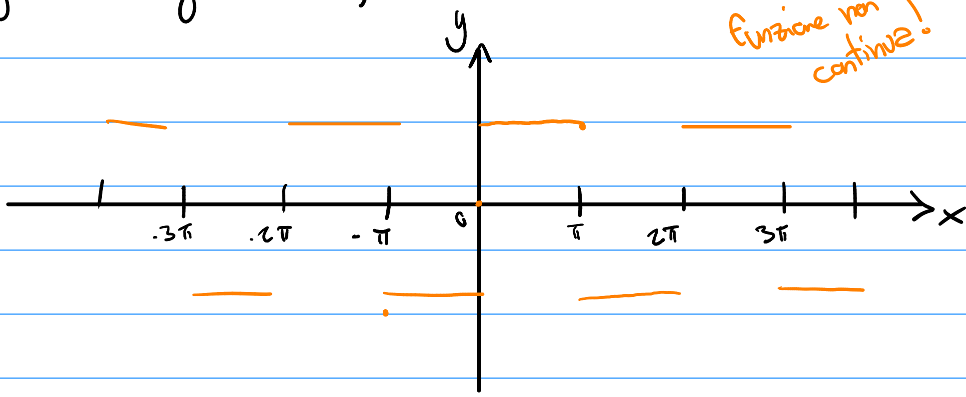
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

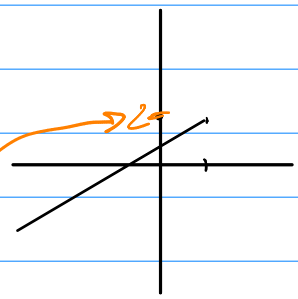
non continua perché

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(x) = sng(\sin(x))$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3-2ax^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



per quali $a \in \mathbb{R}$ $f(x)$ é continua?

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3-2a$

$\hookrightarrow$ per essere continua deve essere che $3-2a = 2 \Rightarrow 1/2$

that's why