ALGEBRA LINEARE AAA

18 Gennaio 2023

Nome: ______________ **Cognome**: ________________ **Matricola**: ___________

Tempo: 2h00

La valutazione tiene conto di ordine e chiarezza nello svolgimento. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

$\boxed{1}$ Dati i punti $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, 5, 4)$:

(a) Determinare l'equazione parametrica e l'equazione lineare della retta r dello spazio passante per i punti A e B.

(b) Stabilire se la retta r interseca il piano di equazione lineare $2x - y + z = 0$.

Solution: (a) Consideriamo il punto $C = B - A = (1, 6, 1)$. Allora il vettore $\overrightarrow{OC}$ applicato nell'origine O degli assi Cartesiani ha uguale lunghezza, direzione e verso del vettore $\overrightarrow{AB}$ applicato nel punto A. L'equazione parametrica della retta s passante per O e C è:

$$x = t$$
$$y = 6t$$
$$z = t$$

L'equazione lineare della retta r si ottiene ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due: $t = x - 2$ da cuil $y = 6(x - 2) - 1$ e $z = (x - 2) + 3$. In conclusione la retta r è intersezione dei seguenti due piani:

$$\begin{aligned} 6x - y &= 13 \\ x - z &= -1 \end{aligned}$$

(b) Per stabilire se r interseca il piano $2x - y + z = 0$, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{aligned} 6x - y &= 13 \\ x - z &= -1 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

oppure verificare se esiste la soluzione. È sufficiente calcolare il determinante della matrice A del sistema e verificare che è diverso da 0.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna per ottenere $\det(A) = -4 + 1 = -3$.

$\boxed{2}$ Quali sono gli assiomi (espressi in termini di equazioni) che definiscono gli spazi vettoriali?

Solution: Soluzione: Sia $\mathbb{K}$ un campo numerico, i cui elementi sono chiamati scalari. Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è costituito da un insieme V di vettori dotati di somma vettoriale $+ : V \times V \to V$ e prodotto per uno scalare $: \mathbb{K} \times V \to V$, che soddisfano gli assiomi seguenti ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ sono vettori arbitrari e $r, s \in \mathbb{K}$ sono scalari arbitrari):

SV1: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
SV2: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
SV3: $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$
SV4: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a}$;
SV5: $(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$;
SV6: $(rs)\mathbf{a} = r(s\mathbf{a})$
SV7: $r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$;
SV8: $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$; $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$; $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$

$\boxed{3}$ Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix}$$

(a) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

(b) Si determini il valore di k per cui la matrice A ha determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.

Solution: (a) Sviluppiamo rispetto all'ultima riga: $\det(A) = 6k$. La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq 0$. (b) Posto $k = 1/6$, abbiamo che $\det(A) = 1$. Chiamiamo B la matrice ottenuta

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1/6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i cofattori $\mathrm{cof}_{ij}(B) = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$, dove B_{ij} è il minore di B ottenuto cancellando la riga i e la colonna j. Allora

$$\mathrm{cof}(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/6 & 2 \end{bmatrix}$$

Siccome

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot (\mathrm{cof}\, B)^t$$

e il determinante di B è 1 si ha:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2 \right).$$

(a) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di f.

(b) f è diagonalizzabile?

(c) Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, la trasformazione lineare di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?

Solution: La matrice A di f rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Quindi esiste solo un autovalore reale $\lambda = 1$. La matrice non è né triangolabile né diagonalizzabile perché la molteplicità algebrica è 1 e non 3. Calcoliamo l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava $y = z$ e $x = \frac{3}{2}z$. Abbiamo quindi un autospazio di dimensione 1 . Nel caso del campo dei numeri complessi vi sono altri due autovalori complessi coniugati $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$. Abbiamo quindi tre autovalori come la dimensione di $\mathbb{C}^3$ e ciascun autovalore avrà un autospazio di dimensione 1. Siccome la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica, la trasformazione lineare complessa è diagonalizzabile.

$\boxed{5}$ Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases}$$

(k parametro reale)

(a) Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.

(b) Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.

Solution: Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & k \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & k & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 2II - I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & -2 & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & k \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$III + (-k+1)II \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & k^2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = k \\ y + 2z = k \\ (3k-1)z = k^2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi: - Se $k = \frac{1}{3}$ allora l'ultima riga diventa $0 = \frac{1}{9}$, quindi è impossibile e il sistema non ammette soluzione. - Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite che ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} 2x_{-}x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$