*Università Ca' Foscari Venezia*, Corso di Laurea in Informatica

# Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

05/09/2022; Tema A
Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome ....................... Nome ....................... Matricola ............ Aula-Posto ............

**Norme generali:**

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

## Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = -\frac{x}{3} - \log\left(\left|e^{-x/3} - e^{-1}\right|\right)$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di $f$ con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f$ determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha una soluzione reale.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di $f$. Discutere la concavità di $f$.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di $f$.

## Problema 2 (3 punti)

Usare le definizioni di funzione continua e funzione derivabile per determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

## Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione $g(x) = \log\left(\dfrac{1}{\sin(2x)}\right)$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $g$ nel punto $x_0 = \pi/8$.

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)} g(x)$

## Problema 4 (5 punti)

Considerare le funzioni

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad l(x) = 2 - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad \text{con} \quad x \in \,]-1, 2]$$

4.1 Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in nel loro dominio (lo studio di funzione non è richiesto);

4.2 Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = -1$ e $x = 2$ è finita e quindi calcolarla.

# Soluzioni

## Problema 1 (15 punti)

Considerare la seguente funzione (dove il logaritmo è in base naturale)

$$f(x) = -\frac{x}{3} - \log\left(\left|e^{-x/3} - e^{-1}\right|\right)$$

4.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di $f$ con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto). (1 punto)

Bisogna imporre $e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1} \neq 0$ e quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\} = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi $f$ non è né pari né dispari. Intersezione asse $y$: $y = -\log(1 - e^{-1}) \approx 0.458$.

4.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (5 punti)

$$\lim_{x\to 3} -\log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right) - \frac{x}{3} = +\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a zero. Quindi $x = 3$ è asintoto verticale.

Limiti ad infinito

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{3} - \log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right) = -1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right) - \frac{x}{3}\right) = \tag{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right) + \log\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right) = \tag{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}}{e^{-\frac{x}{3}}}\right) = 0 \tag{3}$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a 0 quando l'argomento tende a 1 (il logaritmo è funzione continua). Quindi $f$ ha un asintoto orizzontale a $-\infty$.

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$m: \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right)\right) = -\frac{1}{3}$$

$$q: \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}x - \log\left(\left|e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right|\right) + \frac{1}{3}x\right) = -\log(e^{-1}) = 1$$

Quindi $f$ ha un asintoto obliquo a $+\infty$ che è $y = -x/3 + 1$

$f$ è continua perché prodotto, e composizione di funzioni continue

4.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f$ determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha una soluzione reale.

(5 punti)

Derivabilità: Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero ($x = 3$), ma tale punto non appartiene al dominio. Quindi $f$ è derivabile perché composizione e somma di funzioni derivabili

Per il calcolo della derivata riscriviamo $f$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -\log\left(e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right) - \dfrac{x}{3} & \text{per } x < -3 \\ f_2(x) = -\log\left(-e^{-\frac{x}{3}} + e^{-1}\right) - \dfrac{x}{3} & \text{per } x > -3 \end{cases}$$

Derivata per $x < -3$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= D[-\log\left(e^{-\frac{x}{3}} - e^{-1}\right) - \frac{x}{3}] = -\frac{-e^{-\frac{x}{3}}}{3e^{-\frac{x}{3}} - 3e^{-1}} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}} + e^{-1}}{3e^{-\frac{x}{3}} - 3e} = \\ &= \frac{e^{-1}}{3e^{-\frac{x}{3}} - 3e^{-1}}, \quad x < -3 \end{aligned}$$

Si può notare che $f_2' = f_1'$.

Studio del segno e punti di massimo/minimo:

$$\begin{aligned} &N \geq 0 \iff e^{-1} \geq 0 \iff \forall x \in D_f \\ &D > 0 \iff 3e^{-\frac{x}{3}} - 3e^{-1} > 0 \iff -\frac{x}{3} > -1 \iff x < 3 \end{aligned}$$

Quindi $f(x) > 0$ in $]-\infty, 3[$ (intervallo di crescenza). $f(x)$ decresce in $]3, +\infty[$; Non ci sono punti critici.

La funzione è continua e strettamente crescente in $]-\infty, 3[$; inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, quindi $f(x)$ non può avere zeri in questo intervallo. La funzione è continua e in $]3, +\infty[$, inoltre $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, quindi per il teorema degli zeri la funzione deve avere almeno uno zero in questo intervallo. Siccome $f(x)$ è strettamente decrescente in questo intervallo, lo zero è unico.

4.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di $f$. Discutere la concavità di $f$. (2 punti)

$$f''(x) = -\frac{-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}}{(3\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} - 3\mathrm{e}^{-1})^2} =$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}-1}}{(3\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} - 3\mathrm{e}^{-1})^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$ ed $f$ è convessa nel suo dominio. Non ci sono punti di flesso.

4.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di $f$.

(2 punti)

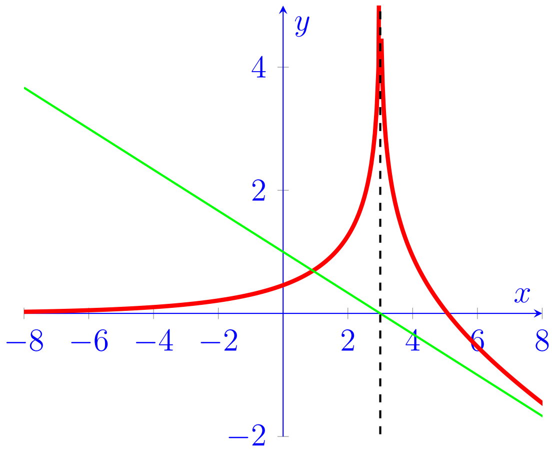


Figura 1: Grafico di $f(x)$ ;L'immagine è $]-\infty, +\infty[$

=

# Problema 2 (3 punti)

Usare le definizioni di funzione continua e funzione derivabile per determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di possibile discontinuità è $x = 0$. In questo punto possiamo verificare che $f$ è continua verificando che vale la definizione: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Infatti:

$$\lim_{x \to 0} \left(\sin(2x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) = 1 + \lim_{x \to 0} \sin(2x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Il secondo limite fa zero in quanto prodotto di una funzione infinitesima (che è $\sin(2x)$ ) per una funzione limitata (che è $\cos(1/x)$).

Per verificare se la funzione è derivabile in $x_0 = 0$ dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$$

Quindi il limite del rapporto incrementale non esiste in $x_0 = 0$ e la funzione non è derivabile in tale punto. Quindi la funzione è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ma non $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

# Problema 3 (7 punti)

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

Il dominio è dato da

$$\sin(2x) > 0 \implies 2k\pi \le 2x \le \pi + 2k\pi \implies k\pi \le x \le \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

La funzione si annulla in

$$\sin(2x) = 1 \implies 2x = \pi/2 + 2k\pi \implies x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

La funzione non è né pari né dispari, infatti il dominio non è simmetrico rispetto all'origine (per esempio, $\pi/6$ è un punto del dominio, ma $-\pi/6$ no)

La funzione è periodica con periodo $\tau = \pi$, infatti $g(x + \pi) = \log(\frac{1}{\sin(2x+2\pi)}) = g(x)$.

3.2 Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $g$ nel punto $x_0 = \pi/8$.

$$g(x_0) = \log(\sqrt{2})$$
$$g'(x) = -2\sin(2x)\frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)} = -2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$$
$$g'(x_0) = -2$$

Retta tangente in $x_0$: $y = -2(x - \pi/8) + \log(\sqrt{2})$

3.3 Calcolare l'integrale indefinito di $\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)}g(x)$

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \log(\frac{1}{\sin(2x)})\,dx = -\frac{1}{2}\int g'(x)g(x)\,dx = -\frac{1}{4}g^2(x) + c = -\frac{1}{4}\log^2(\frac{1}{\sin(2x)}) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

# Problema 4 (5 punti)

1. Considerare le funzioni
$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad l(x) = 2 - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad \text{con} \quad x \in \,]-1, 2]$$
Abbozzare i grafici di $h(x)$ e $l(x)$ in nel loro dominio (lo studio di funzione non è richiesto);

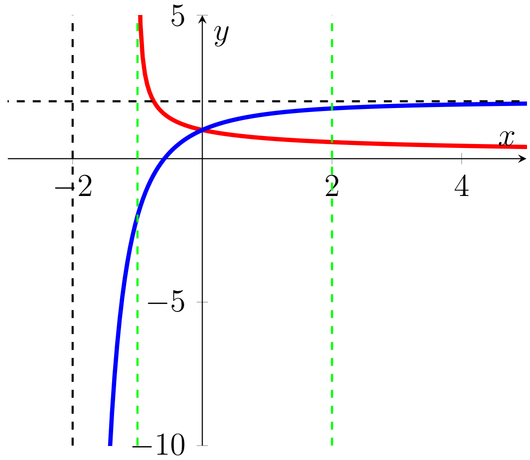


Figura 2: Grafico di $h(x)$ (in rosso) e $l(x)$ (in blu). Sono entrambe funzioni elementari, per cui il grafico si può ottenere senza studio di funzione. $h$ ha un asintoto verticale in $x = -1$ ed un asintoto orizzontale in $y = 0$. $l$ ha un asintoto verticale in $x = -2$ ed un asintoto orizzontale in $y = 2$.

2. Spiegare perché l'area delimitata tra i grafici delle due funzioni e le rette $x = -1$ e $x = 2$ è finita e quindi calcolarla. $l$ è continua in $[-1, 2]$ e quindi integrabile; e $h$ in $x = -1$ cresce come $1/x^{0.5}$ in $x = 0$, e quindi integrabile in quanto le funzioni del tipo $1/x^p$ sono integrabili in 0 per $0 < p < 1$.

   Bisogna notare che le due funzioni si intersecano in $x = 0$. L'area si ottiene dall'integrale di:
$$\begin{aligned}
\text{Area} = \int_{-1}^{2} |h(x) - l(x)|\, dx = \\
&= \lim_{t \to -1^+} \int_t^0 h(x) - l(x)\, dx + \int_0^2 l(x) - h(x)\, dx = \\
&= \lim_{t \to -1^+} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 2 + \frac{4}{(x+2)^2}\, dx + \int_0^2 2 - \frac{4}{(x+2)^2} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \\
&= \lim_{t \to -1^+} [2\sqrt{x+1} - 2x - 4(x+2)^{-1}]_t^0 + [2x + 4(x+2)^{-1} - 2\sqrt{x+1}]_0^2 = \\
&= (2 - 2 - 2 + 4) + 4 + 1 - 2\sqrt{3} - 2 + 2 = 7 - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$