# ALGEBRA LINEARE AAA

16 Giugno 2023

**Nome**: ______________ **Cognome**: ________________ **Matricola**: ___________

Tempo: 2h00

La valutazione tiene conto di ordine e chiarezza nello svolgimento. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

---

$\boxed{1}$ Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) Determinare se esiste la matrice $B$ tale che $AB = BA = I$.

(ii) Come definiamo la matrice $B$? Possiamo calcolarla in altro modo?

$\boxed{2}$ Sia $r$ la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per $i$ punti $A(1,-1,2)$ e $B(-2,0,1)$, e sia $s$ la retta contenente $C(1,3,-3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2,-2,3)$.

(i) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).

(ii) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

$\boxed{3}$ Risolvere il seguente sistema omogeneo e scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Senza usare il polinomio caratteristico confermare se $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ possono essere autovettori di $A$, e trovare eventualmente i corrispondenti autovalori.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

(i) Verificare che $T$ è lineare.

(ii) Determinare Nucleo e Immagine di $T$.

(iii) Determinare la matrice $A$ associata a $T$ (rispetto alle basi canoniche).

(iv) Determinare $T(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice $A$.

$\boxed{6}$ L'insieme $S$ qua sotto definito è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$? Perchè?

$$S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$