ESERCIZIO 1

Considerare la mappa lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-2z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}$$ Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$

Guardiamo T applicata ai 3 vettori della base canonica:

$$T(1,0,0) = (1,-1) \quad T(0,1,0) = (1,-1) \quad T(0,0,1) = (-2,+2)$$

$\Rightarrow$ La matrice è formata dalle 3 colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Considerare le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Scrivere la mappa lineare associata alle due matrici

A_1 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1(x,y) = (-x+2y,\ 2x-4y)$

A_2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z-w \\ x+2y+z-w \\ x+2y+z-w \end{pmatrix} \Rightarrow A_2(x,y,z,w) = (x+2y+z-w, \dots)$

(b) Trovare $\operatorname{Ker} A_i$ e $\operatorname{Im} A_i$

Per il kernel: $A_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Rightarrow$ 1 DIMENSIONE ~~KERNEL~~

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ BASE DI $\operatorname{Ker} A_1$

(A_2) Data la forma generale di A_2, il kernel corrisponde alle soluzioni di $x+2y+z-w=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = u \\ w = s+2t+u \end{cases} \Rightarrow 3 \text{ PARAMETRI LIBERI}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ BASE } \operatorname{Ker} A_2$$

Per quanto riguarda l'immagine, guardiamo il rango per colonne della matrice (corrisponde a guardare lo Span di $\{T(e_1), T(e_2), \dots\}$

Per (A_1) Le colonne sono una multipla dell'altra

$\Rightarrow \dim A_1 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ BASE di $\operatorname{Im} A_1$

Per (A_2) $\dim \operatorname{Im} A_2 = \operatorname{rank}(A_2) = 1$

Infatti le colonne sono tutte multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ BASE $\operatorname{Im} A_2$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T(0,-2,1) = (3,-1) \quad T(1,1,-2) = (1,2) \quad T(2,0,-1) = (11,1)$$

Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica

Poiché T va da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ la matrice sarà 2×3

$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ Dalle equazioni si ha

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2b+c \\ -2e+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+b-2c \\ d+e-2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2a-c \\ 2d-e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi abbiamo un sistema di 6 equazioni

$$\begin{cases} -2b+c=3 \; ① \longrightarrow c=3+2b \\ -2e+f=-1 \longrightarrow f=2e-1 \; ④ \\ a+b-2c=1 \; ③ \longrightarrow 7+b+b-6-4b=1 \Rightarrow -4b=0 \Rightarrow b=0 \\ d+e-2f=2 \longrightarrow d+e-4e+2=2 \Rightarrow d=3e \; ⑤ \\ 2a-c=11 \; ② \longrightarrow \cancel{\ldots} \\ \quad 2a=11+c \Rightarrow 2a=11+3+2b=14+2b \Rightarrow a=7+b \\ 2d-f=1 \longrightarrow f=-1+2d \; ⑥ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f=-1+2e \\ f=-1+6e \\ d=3e \end{cases} \rightarrow e=0, \; d=0 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ e=0 \\ f=-1 \end{cases}$$

La matrice sarà $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ESERCIZIO 4

Siano e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$T(e_1) = (1,0) \quad T(e_2) = (2,-1) \quad T(e_3) = (1,1)$

Trovare la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche

Poiché $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la matrice ha dimensioni 2×3 e

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=0 \end{cases}$$

$$\ldots \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ e=-1 \end{cases}, \begin{cases} c=1 \\ f=1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 5

Considerare le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Trovare il rango di A, B, C (b) Trovare righe o colonne lin. indip.

Guardiamo se le colonne o le righe sono indipendenti

$\boxed{A}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ sono multipli

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ é ripetuto

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sono lin. indip

$\Rightarrow$ rango $A = 2$

$\boxed{B}$ Considerando le righe: $(1\ 0\ 1\ -1)$, $(0\ 1\ 0\ 0)$ $(1\ 0\ 0\ 0)$ e $(1\ 1\ 1\ -1)$

righa 1 + riga 2 = riga 4

righe 1, 2, 3 sono lin. indip $\Rightarrow$ rango $B = 3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{C}$ Applichiamo la riduzione di GAUSS

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 12 & 6 & 21 & 29 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{RIGA 1 + RIGA 2} \\ \leftarrow -3 \text{ VOLTE RIGA 1 + RIGA 3} \\ \leftarrow 4 \text{ VOLTE RIGA 1 + RIGA 4} \end{matrix}$$

Cerchiamo di annullare il primo elemento della riga [~~della~~ colonna 1]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & +2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{RIGA 3 - RIGA 2} \\ \leftarrow \text{RIGA 4 - 3 VOLTE RIGA 3} \end{matrix}$$

Cerchiamo di annullare il secondo elemento di ogni riga dopo la prima

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RIGA 4 + 6 VOLTE RIGA 3   RIGA 4 − 2 VOLTE RIGA 3

$\Rightarrow$ RANGO $= 3$

Scrivendo il sistema otterremmo lo stesso risultato, ma con più conti. Per trovare quali righe sono indipendenti, sappiamo che una delle 4 righe può essere scritta come combinazione lineare delle altre. Allora, proviamo con

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ① \; 2a - 2b + 6c = -8 \\ ② \; a + 3b - c = 8 \\ ③ \; 3a - b + 7c = -6 \\ ④ \; 4a + 5b + 4c = 13 \\ ⑤ \; 6a + 3b + 10c = 5 \end{cases}$$

② $a = 8 + c - 3b = 8 + b - 3 - 3b = 5 - 2b$

① $16 + 2c - 6b - 2b + 6c = -8 \Rightarrow 8c - 8b = -24$

$\Rightarrow c = b - 3$

③ $3(8 + c - 3b) - b + 7(b-3) = -6$

$\Rightarrow 24 + 3(b-3) - 9b - b + 7b - 21 = -6$

$\Rightarrow 3b - 9b - b + 7b = -6 + 21 + 9 - 24 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

④ $4(5 - 2b) + 5b + 4(b-3) = 13 \Rightarrow 20 - 8b + 5b + 4b - 12 = 13$

$\Rightarrow b = 5 \Rightarrow c = 2$

⑤ $-30 + 15 + 20 = +5 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow b = 5, \quad a = -5, \quad c = 2$

$r_4 = -5 \cdot r_1 + 5 r_2 + 2 r_3 \Rightarrow r_1, r_2, r_3$ sono tre righe linearmente indipendenti

ESERCIZIO 6

Trovare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$$ guardiamo il rango per righe:

$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.?

$$\begin{cases} -2\alpha + k\beta + 4\gamma = 0 & (1) \\ -2\alpha - \beta + k\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2\gamma & (3) \\ -2\beta - 4\gamma + k\beta + 4\gamma = 0 \Rightarrow \beta(k-2) = 0 & (1) \\ -2\beta - 4\gamma - \beta + \gamma k = 0 & (2) \end{cases}$$

Se $k \neq 2 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ -4\gamma + \gamma k = 0 \leadsto \gamma(k-4) = 0 \end{cases}$

Se $k \neq 4 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Allora se $k \neq 2, 4 \Rightarrow$ rango $A = 3$

Se $k = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono multipli

$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono lin. indip: $\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ se $k = 2 \Rightarrow$ RANGO $A = 2$

Se $k = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 & (1) \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (2) \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)+(2) \quad 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2}\alpha_2 \\ (2)-(3) \quad -5\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -5\alpha_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I tre vettori sono lin. dipendenti

$\Rightarrow$ RANGO $A = 2$ se $k = 4$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & k & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Guardando le righe = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} ① \ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 \\ ② \ \alpha_2 + k\alpha_3 = 0 \\ ③ \ -k\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ ④ \ \alpha_1 + k\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1(1-k) = 0 \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \overset{③}{\Rightarrow} \alpha_3 = 0 \overset{②}{\Downarrow} \alpha_2 = 0$$

Se $k \neq 1 \Rightarrow$ RANGO $C = 3$

Se $k = 1$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $-$riga 1 + riga 2 = riga 3

e riga 1, riga 2 sono linearmente indipendenti

$\Downarrow$

RANGO $C = 2$

~~ESERCIZIO 7~~

~~Siano [illegible] consideriamo la matrice~~

ESERCIZIO 8 $\quad$ Trovare il rango di A al variare di H e $K \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & K-1 \\ 2 & 0 & K & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Consideriamo le righe $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ K-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + H\alpha_3 = 0 \\ K\alpha_2 = 0 \longrightarrow K \neq 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow H\alpha_3 = 0 \\ (K-1)\alpha_1 = 0 \longrightarrow K \neq 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow H\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Per $K \neq 0, 1$ e $H \neq 0$ $\quad$ RANGO $A = 3$