Esercizi Unità 1

Analisi dei dati 2023/24

Cristiano Varin

1. Si consideri un campione casuale semplice di dimensione n da una variabile casuale di media μ e varianza pari a 3. Si consideri il seguente stimatore di μ:

$$T = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

   Si calcolino la distorsione e la varianza dello stimatore e si dica se si tratta di uno stimatore consistente.

2. Si consideri un campione casuale semplice di dimensione tre da una popolazione con valore atteso μ e varianza unitaria. Si considerino i seguenti stimatori di μ:

$$T_1 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3 \quad \text{e} \quad T_2 = \bar{X},$$

   Si dica quale dei due stimatori è preferibile (la risposta va motivata)gvydet67dbfrtng6ymn.

3. Si consideri un campione casuale semplice (X_1, X_2, X_3) da una variabile di Poisson con media $\lambda > 0$. Si considerino i due stimatori di λ:

$$T_1 = \frac{2X_1 + X_2/2 + X_3}{5} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{4}.$$

   Si dica quale dei due stimatori è preferibile (la risposta va motivata).

4. Siano T_1 e T_2 due stimatori indipendenti tali che $\mathrm{E}(T_1) = \mathrm{E}(T_2) = \theta$, $\mathrm{Var}(T_1) = \sigma_1^2 > 0$ e $\mathrm{Var}(T_2) = \sigma_2^2 > 0$. Si consideri la combinazione lineare dei due stimatori

$$T_3 = aT_1 + (1-a)T_2, \quad a \in [0,1].$$

   Si calcoli il valore di a per cui l'errore quadratico medio di T_3 è il più piccolo possibile.

5. Sia X un campione casuale di dimensione uno da una variable casuale di Poisson con media $\lambda > 0$. Si considerano i due stimatori di λ :

$$T_1 = X \quad \text{e} \quad T_2 = 1.$$

   Si calcolino i valori di λ per cui lo stimatore T_2 è preferibile allo stimatore T_1.

6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice da una variabile casuale con media μ e varianza $\sigma^2 > 0$. Si costruisca uno stimatore non distorto di $\gamma = \mu^2$.

7. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice da una variabile casuale uniforme nell'intervallo $(0, \theta)$, ovvero con densità

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{se } 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per un qualche parametro ignoto $\theta > 0$. Si consideri lo stimatore $\hat{\theta} = 2\bar{X}$.

   (a) Si calcoli la distorsione di $\hat{\theta}$.

   (b) Si valuti la consistenza di $\hat{\theta}$.

8. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice da una variabile casuale discreta con funzione di probabilità:

$$\Pr(X = x;\theta) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = -1, \\ (1-\theta)/2, & \text{se } x = 0, \\ \theta/2, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

per un qualche parametro ignoto $\theta \in [0,1]$. Si consideri lo stimatore $\hat{\theta} = 2\bar{X} + 1$.

   (a) Si calcoli la distorsione di $\hat{\theta}$.

   (b) Si valuti la consistenza di $\hat{\theta}$.

9. Si risolva l'esercizio 8.3 del libro di testo Baron (2014, pagina 234).

10. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice da una variabile casuale con funzione di densità

$$f(x;\theta) = 2\theta^2 x^{-3}, \quad \text{per } x > \theta \text{ e } \theta > 0.$$

Si consideri lo stimatore $\hat{\theta} = \bar{X}/2$.

   (a) Si calcoli la distorsione di $\hat{\theta}$.

   (b) Si calcoli l'errore standard di $\hat{\theta}$.

   (c) Si valuti la consistenza di $\hat{\theta}$.