Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 7 –Prova scritta parziale (simulazione) – 45 minuti

Esercizio 1. *Risolvere l'equazione* $z|z|-2z+i=0$ *e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.*

Esercizio 2. *Sia* $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita come segue:*

$$T(x,y,z,w)=(x+2y+3z,-y+2z+w,-x-3y-z+w)\,.$$

2.1 Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} T$ *.*

2.2 Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} T$ *.*

2.3 Determinare la controimmagine del vettore $(1,2,3)$ *, ossia il sottoinsieme* $T^{-1}(1,2,3)$ *di* $\mathbb{R}^4$ *.*

Soluzione del primo quesito

Scrivendo $z = x + iy$, l'equazione proposta diviene

$$(x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2iy + i = 0.$$

Se scindiamo parte reale e immaginaria, arriviamo al sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} + 1 - 2y = 0. \end{cases}$$

Partiamo dalla prima equazione, nella forma $x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) = 0$: la prima soluzione é $x = 0$. Se la immettiamo nella seconda equazione, ricordando che $\sqrt{y^2} = |y|$, si trova

$$y|y| + 1 - 2y = 0.$$

Dividiamo tale equazione in due parti: per $y \geq 0$, si ha

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 = 0,$$

che ha come unica soluzione (accettabile) $y = 1$, quindi la prima soluzione é $(0, 1)$, ossia il numero complesso $z_1 = i$. Invece, per $y < 0$, si arriva a

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Con la classica formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, si trovano le soluzioni $y = -1-\sqrt{2}$ e $y = -1+\sqrt{2}$, ma la seconda é da scartare, perché non rientra nel sottodominio richiesto $y < 0$, quindi l'unica accettabile é la prima, che porta alla seconda soluzione $z_2 = (-1 - \sqrt{2})i$.

Infine, tornando alla prima equazione nella forma $x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) = 0$, ci accorgiamo che la seconda soluzione é data da $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$: tuttavia, quando andiamo a sostituire tale espressione nella seconda equazione del sistema, si trova immediatamente $1 = 0$, ossia tale seconda strada non porta ad alcuna soluzione del sistema. In definitiva, le uniche soluzioni della nostra equazione in campo complesso sono z_1 e z_2 . La forma polare di z_1 é $z_1 = e^{i\pi/2}$, mentre quella di z_2 é $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot e^{i3\pi/2}$.

Soluzione del secondo quesito

Per lo studio del nucleo di T , impostiamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -y + 2z + w = 0 \\ -x - 3y - z + w = 0. \end{cases}$$

Procediamo con il metodo della riduzione: se sommiamo prima e terza equazione, si trova $y = 2z+w$, mentre se consideriamo seconda equazione meno la prima si arriva a $2y+3z+x = 0$, da cui, sostituendo y come trovato in precedenza, si giunge a $x = -7z-2w$. In definitiva, una qualunque soluzione del suddetto sistema omogeneo é data dal generico vettore $(-7z - 2w, 2z + w, z, w)$, quindi dipende da due parametri liberi (nel nostro caso, z e w). Pertanto la dimensione del nucleo di T é due: una base B_1 del nucleo di T puó essere determinata immettendo prima $z = 1$ e $w = 0$, poi $z = 0$ e $w = 1$, per ottenere $B_1 = \{(-7, 2, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$. Per il teorema della dimensione, sappiamo che il rango di T é due: per trovare una base dell'immagine di T , calcoliamoci i trasformati secondo T dei quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$, ossia $T(e_1) = w_1 = (1, 0, -1)$, $T(e_2) = w_2 = (2, -1, -3)$, $T(e_3) = w_3 = (3, 2, -1)$ e infine $T(e_4) = w_4 = (0, 1, 1)$. Sappiamo che dobbiamo scartarne due, perché il rango di T é due e noi abbiamo quattro vettori in gioco: scegliamo di tenere i due vettori con il maggior numero di zeri, sperando che siano quelli *buoni*, ossia teniamo w_1 e w_4 e scartiamo w_2 e w_3 . Per dimostrare che $B_2 = \{w_1, w_4\}$ é una base di $\operatorname{Im} T$, dobbiamo far vedere che sono linearmente indipendenti: il modo piú veloce, quando si tratta di due vettori, é ragionare mostrando che NON possono essere linearmente dipendenti. Infatti, se lo fossero, vorrebbe dire, ad esempio, che esiste un $\lambda \neq 0$ tale che $w_4 = \lambda w_1$ che, per la prima componente, significherebbe $0 = \lambda$ che contraddice l'ipotesi che λ sia diverso da zero. Dunque, B_2 é effettivamente una base di $\operatorname{Im} T$. Infine, per sapere chi é $T^{-1}(1, 2, 3)$, dobbiamo preliminarmente controllare che il vettore $w = (1, 2, 3)$ appartenga all'immagine di T . Se fosse vero, dovrei poter scrivere w come combinazione lineare dei vettori di B_2 , ossia devono esistere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha w_1 + \beta w_4 = w.$$

In altri termini, sviluppando la sudddetta equazione si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ -\alpha + \beta = 3, \end{cases}$$

ma si vede chiaramente come la terza equazione sia incompatibile con le prime due, dunque concludiamo che w non appartiene all'immagine di T e quindi $T^{-1}(1, 2, 3)$ é l'insieme vuoto.