Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2022/23

Isadora Antoniano Villalobos

Esame A, 10 febbraio 2023

Cognome: ______________________ Nome: ______________________

Matricola: ______________________ Firma: ______________________

ISTRUZIONI: DA LEGGERE CON ATTENZIONE!

Questo compito è composto di **5 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.
Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	5	9	6	4	4	30
Score:						

Domanda 1 (5 punti)
Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

(a) Quale delle seguenti è una funzione di densità per una variabile casuale continua?

i) Tutte.

ii) Nessuna.

iii)
$$f(x) = e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy; \quad x \in (-\infty, \infty).$$

iv)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & -0.75 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

v)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-6x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Se X e Y sono due variabili casuai continue con funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y)$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) X e Y sono indipendenti con densità marginali $f_X(x) = g(x)$ e $f_Y(y) = h(y)$

ii) X e Y sono indipendenti ma $g(x)$ e $h(y)$ potrebbero non essere le densità marginali.

iii) $f_X(x) = g(x)$ e $f_Y(y) = h(y)$ sono le densità marginali ma X e Y potrebbero non essere indipendenti

iv) $Y = f_{X,Y}(x,y)/g(x)$

v) Nessuna delle precedenti.

(c) Se A e B formano una partizione dello spazio campionario, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B]$

ii) $\mathbb{P}[A] \geq 1/2$

iii) $\mathbb{P}[B] \geq 1/2$

iv) $\mathbb{P}[A] \geq 1/2$ o $\mathbb{P}[B] \geq 1/2$

v) Nessuna delle precedenti.

(d) Per una variabile casuale Y con possibili valori nell'intervallo $(0, 4)$ quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathrm{Var}[Y] = 4/3$

ii) $\mathbb{E}[Y] = 2$

iii) $\mathrm{Var}[Y] \geq 0$ ma non si può sapere nulla sul valore di $\mathbb{E}[Y]$

iv) $\mathbb{E}[Y] \geq 0$ e $\mathrm{Var}[Y] \geq 0$

v) $\mathbb{E}[Y] > 0$ ma non si può sapere nulla sul valore di $\mathrm{Var}[Y]$

(e) Un'urna contiene 20 palline tra cui 5 bianche e 10 nere. Si estraggono 3 palline con reinserimento. Qual è la probabilità che almeno 2 delle palline estratte non siano ne bianche ne nere?

i) `phyper(1,5,10,3)`
ii) `1-pbinom(1,3,5/20)`
iii) `1-phyper(2,5,15,3)`
iv) `1-pbinom(1,3,5/10)`
v) `1-phyper(1,5,10,3)`

Domanda 2 (9 punti)

I componenti elettronici di un modello e di una marca specifici vengono spediti a un fornitore in lotti da dieci. 70% dei lotti non contengono componenti difettosi, 20% ne contengono essattamente uno e il restante 10% contiene due componenti difettosi. Si sceglie a caso un lotto e due componenti dello stesso vengono selezionati in modo casuale e testati. Si considerino le variabili $X =$ *Numero di componenti difettosi nel lotto selezionato* e $Y =$ *Numero di componenti difettosi testati.*

(a) Qual è la distribuzione marginale di X?

(b) Qual è la distribuzione condizionata di Y dato che il lotto selezionato ha due componenti difettosi?

(c) Qual è la distribuzione marginale di Y?

(d) Le due variabili sono indipendenti? Si giustifichi adeguatamente la risposta.

(e) Se nessuno dei componenti testati risulta difettoso, qual è la probabilità che non ci siano componenti difettosi nel lotto?

Domanda 3 (6 punti)

Si consideri una variabile casuale R con funzione di densità

$$f_R(r) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il valore di C.

(b) Si calcoli la media e la varianza di R

(c) Si trovi il valore atteso dell'area, A, del cerchio di raggio R

(d) Sia P il perimetro del cerchio di raggio R. Si trovi il valore atteso e la varianza della variabile $X = P/R$

Domanda 4 (6 punti)

Ogni giorno Alessandro percorre la stessa strada per andare da casa all'università. Ci sono 4 semafori lungo la strada, ed Alessandro ha notato che se vede un semaforo verde a un incrocio, il 60% delle volte anche il semaforo successivo è verde, e il 40% delle volte il semaforo successivo è rosso. Tuttavia, se vede un semaforo rosso, il 70% delle volte anche quello successivo è rosso e il 30% delle volte è verde.

(a) Si determini la matrice di transizione per la catena di Markov che rappresenta i colori dei semafori, specificando chiaramente gli stati della catena.

(b) Se il primo semaforo è verde, qual è la probabilità che il terzo sia rosso?

(c) Tommaso, il compagno di classe di Alessandro, ha tantissimi semafori lungro il percorso da casa sua all'università. Se il primo semaforo è verde, qual è la probabilità che l'ultimo sia rosso?

Hint: Utilizzare la distribuzone stazionaria

Domanda 5 (4 punti)

Si spieghi la proprietà Markoviana e si fornisca un esempio, giustificato, di una situazione per la quale può risultare utile come modello.