Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 5 – Esercizi riassuntivi

Nota: la dicitura 'da esame' indica che l'esercizio é tratto da uno scritto di esame. Gli esercizi contrassegnati con asterisco sono impegnativi.

Numeri complessi

Esercizio 1. *Calcolare*

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$$

in forma algebrica e trigonometrica.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i^2-2i}{1-i^2} = -i$$

quindi

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = (-i)^2(-i) = i = \rho \cdot e^{i\theta},$$

con $\rho = 1$ *e* $\theta = \pi/2$.

Esercizio 2. *Dato*

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{i}$$

determinare nella forma piú comoda z^{22}.

Intanto

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i,$$

quindi

$$\rho = \sqrt{1/3+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

L'angolo θ *appartiene a* $]0, \pi/2[$ *, perché* z *si trova nel primo quadrante e*

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \sqrt{3},$$

pertanto $\theta = \pi/3$. *Allora*

$$z^{22} = \rho^{22} \cdot e^{i22\pi/3} = \rho^{22} \cdot e^{i4\pi/3} = \rho^{22}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)) = \rho^{22}(-1/2 - i\sqrt{3}/2)$$

Esercizio 3. *Determinare le seguenti radici e rappresentarle sul piano complesso:*

$$\Big(\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}\Big)^{1/4}$$

Se $w=-2/(1-i\sqrt{3})$ *, allora cerco* z *tale che* $z^4=w$ *, ossia*

$$z^4=w=\frac{-2(1+i\sqrt{3})}{1-3i^2}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il modulo di w *é* $\rho=1$ *, mentre* $arg(w)$ *si trova nel terzo quadrante ed é facile vedere che* $arg(w)=4\pi/3$. *Allora,* $z_k=e^{i\theta_k}$ *, ove*

$$\theta_k=\frac{4\pi/3+2k\pi}{4}$$

per $k=0,1,2,3$. *Dunque si ha* $z_0=e^{i\pi/3}$ *,* $z_1=e^{i5\pi/6}$ *,* $z_2=e^{i4\pi/3}$ *e* $z_3=e^{i11\pi/6}$ *. Tali radici sono i quattro vertici di un quadrato di lato* $\sqrt{2}$ *sulla circonferenza goniometrica, il primo dei quali ha coordinate* $(1/2,\sqrt{3}/2)$ *, il cui raggio forma un angolo di* 60 *gradi con l'asse* x *, e il secondo* $(-\sqrt{3}/2,1/2)$ *il cui raggio forma un angolo di* 150 *gradi con l'asse* x *.*

Esercizio 4. *(da esame) Calcolare le radici quarte di* -1 *.*

Cerco z *tale che* $z^4=w=-1$ *. Il modulo di* w *é* $\rho=1$ *e* $arg(w)=\pi$ *(quando si puó, come in questo caso, meglio individuare l'argomento di un numero complesso direttamente sul piano in base ad argomentazioni geometriche). Allora,* $z_k=e^{i\theta_k}$ *, ove*

$$\theta_k=\frac{\pi+2k\pi}{4}$$

per $k=0,1,2,3$ *. Dunque si ha* $z_0=e^{i\pi/4}$ *,* $z_1=e^{i3\pi/4}$ *,* $z_2=e^{i5\pi/4}$ *e* $z_3=e^{i7\pi/4}$ *.*

Esercizio 5. *(da esame) Sia* $z=(1+i)^6$ *. Calcolare il modulo di* z *e le sue radici cubiche e dire chi é il suo coniugato* $\overline{z}$ *.*

Poniamo $z_0=1+i$ *. Il modulo di* z_0 *é* $\sqrt{2}$ *; l'argomento di* z_0 *si trova nel primo quadrante e si ha* $arg(z_0)=\arctan(1)=\pi/4$ *. Dunque* $z_0=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ *e*

$$z=z_0^6=(\sqrt{2})^6\cdot(e^{i\pi/4})^6=8\cdot e^{i3\pi/2}=-8i,$$

ove l'ultimo passaggio é dovuto alla goniometria di base (che dovete conoscere), ossia $\cos(3\pi/2)=0$ *e* $\sin(3\pi/2)=-1$ *. Il suo coniugato é* $\overline{z}=8i$ *. Il modulo di* z *é* 8 *e il suo argomento é* $3\pi/2$ *. Cerco ora le radici cubiche di* z *, date da* $z_k=(8)^{1/3}e^{i\theta_k}=2e^{i\theta_k}$ *, ove*

$$\theta_k=\frac{3\pi/2+2k\pi}{3}$$

per $k=0,1,2$ *. Dunque si ha* $z_0=2e^{i\pi/2}$ *,* $z_1=2e^{i7\pi/6}$ *,* $z_2=2e^{i11\pi/6}$ *.*

Esercizio 6. $*$ *Risolvere l'equazione* $z^2 = \overline{z}^2$

In forma algebrica, l'equazione diviene $(x+iy)^2 = (x-iy)^2$ *, da cui*

$$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 - 2ixy,$$

quindi $4ixy = 0$ *, pertanto* $xy = 0$ *, da cui si conclude che ogni punto del tipo* $(x,0)$ *dell'asse reale oppure ogni punto* $(0,y)$ *dell'asse immaginario é soluzione dell'equazione.*

Spazi vettoriali

Esercizio 7. *Stabilire se* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$ *é un sottospazio vettoriale di* $V = \mathbb{R}^3$ *.*

Chiusura della somma: $(x_1, y_1, x_1 - y_1)$ *e* $(x_2, y_2, x_2 - y_2)$ *appartengono a* W *e la loro somma*

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$$

appartiene chiaramente a W *. Chiusura moltiplicazione scalare:* $(x, y, x-y) \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, allora chiaramente* $(\lambda x, \lambda y, \lambda(x-y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda x - \lambda y)$ *appartiene ancora a* W *. Pertanto* W *é un sotospazio vettoriale di* V *.*

Esercizio 8. *Stabilire se* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ *é un sottospazio vettoriale di* $V = \mathbb{R}^3$ *.*

No, perché, ad esempio, $(x,y,1) \in W$ *, ma* $\lambda(x,y,1) = (\lambda x, \lambda y, \lambda)$ *non appartiene a* W *per* $\lambda < 0$ *.*

Esercizio 9. *Dati* $u = (1,1)$ *,* $v = (0,2)$ *,* $w = (2,-2)$ *nello spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}^2$ *, dire se sono linearmente indipendenti (LI) e determinare il sottospazio da essi generato.*

Sappiamo giá che i tre vettori non sono LI perché sono tre, ma la dimensione dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ *cui appartengono é due. Mostriamo che, ad esempio,* u *e* v *sono LI: la combinazione lineare (CL)* $\alpha u + \beta v = \mathbf{O}$ *equivale a*

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente che $\alpha = \beta = 0$ *. Siccome* u *e* v *sono LI e la dimensione di* V *é due, significa che sono una base, quindi il sottospazio da essi generato é esattamente* V *.*

Esercizio 10. *(da esame) Stabilire se* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xy = 0\}$ *é un sottospazio vettoriale di* $V = \mathbb{R}^4$ *.*

Se lo fosse, allora dati $(x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ *, si dovrebbe avere che* $(x + x_1, y + y_1, z + z_1, t + t_1) \in W$ *, il che equivarrebbe a*

$$(x + x_1)(y + y_1) = 0,$$

quindi

$$0 = (x + x_1)(y + y_1) = xy + xy_1 + x_1y + x_1y_1.$$

Siccome $(x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ *, so che* $xy = 0$ *e* $x_1y_1 = 0$ *, pertanto l'equazione precedente si riduce a*

$$xy_1 + x_1y = 0.$$

Tuttavia, tale equazione non é sodisfatta da tutti i punti $(x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ *: si pensi ad esempio a* $(1, 0, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0, 0)$ *. Entrambi appartengono a* W *ma non soddisfano la precedente equazione, quindi in definitiva* W *non é un sottospazio vettoriale perché non é chiuso nella somma.*

Esercizio 11. $*$ *(da esame)*

$V = \mathbb{R}^4$, $U = span\{u_1, u_2, u_3\}$, $W = span\{w_1, w_2\}$ *, ove*

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1, 0), u_3 = (2, -3, 2, -3), w_1 = (1, 0, -1, 0), w_2 = (1, 5, 1, 5).$$

Determinare $dimU$ *,* $dimW$ *,* $dim(U \cap W)$ *, una base di* $U \cap W$ *, una base di* $U + W$ *e infine stabilire se* V *é somma diretta di* U *e* W *.*

Cominciamo con W *e vediamo se i due vettori* w_1 *e* w_2 *sono LI: la CL* $\alpha w_1 + \beta w_2 = \mathbf{O}$ *implica il sottosistema*

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 5\beta = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente che $\alpha = \beta = 0$ *, pertanto* w_1 *e* w_2 *sono LI e la dimensione di* W *é due. Vediamo* U *: la CL* $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \mathbf{O}$ *equivale a*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

e non é difficile vedere che tale sistema é soddisfatto, ad esempio, da $\alpha = 3$ *,* $\beta = -5$ *e* $\gamma = 1$ *, quindi* u_1, u_2, u_3 *sono linearmente dipendenti (LD). Provate voi a dimostrare che, ad esempio,* u_1 *e* u_2 *sono LI (non é difficile), il che vuol dire* $dimU = 2$ *e* $U = L(S)$ *, ove* $S = \{u_1, u_2\}$ *. Vediamo* $U \cap W$ *: se un vettore appartiene sia a* U *che a* W *, signfica che si puó esprimere cotemporaneamente come CL di* S *che di* $\{w_1, w_2\}$ *, dunque*

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma w_1 + \delta w_2$$

che equivale a

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma + \delta \\ \alpha = 5\delta \\ \alpha + \beta = -\gamma + \delta \end{cases}$$

Tramite riduzione, se consideriamo la prima equazione meno la terza, si trova $2\gamma = 0$ *, ossia* $\gamma = 0$ *ed ora é facile vedere che si arriva a*

$$\begin{cases} \alpha = 5\delta \\ \beta = -4\delta \\ \gamma = 0 \\ \delta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Come si vede, abbiamo un grado di libertá dato dal parametro δ *: ció significa che* $dim(U \cap W) = 1$ *e una sua base é data dal vettore* $5\delta u_1 - 4\delta u_2$ *o, equivalentemente, da* δw_2 *, quindi, per* $\delta = 1$ *, una base é data dal vettore* w_2 *. Vediamo* $U + W$ *: dal teorema di Grassmann, abbiamo*

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 3.$$

Siccome in generale $U+W$ *é generato dall'insieme unione dei generatori di* U *e* W *, in questo caso é generato da* $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ *, ma essendo di dimensione tre, per trovare una base é sufficiente che scartiamo uno di quei vettori e che i tre rimasti siano LI. Proviamo con* $\{u_1, u_2, w_1\}$ *, ossia scartiamo* w_2 *: la CL* $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 = \mathbf{O}$ *equivale a*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente che $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *, dunque* $\{u_1, u_2, w_1\}$ *é una base di* $U+W$ *. Infine,* V *non é somma diretta di* U *e* W *, perché* $U \cap W$ *non si riduce al solo vettore nullo.*

Esercizio 12. *(da esame)*

Sia $W = span\{w_1, w_2\}$ *, ove*

$$w_1 = (1, 0, -1, 0), w_2 = (1, 1, 1, 5).$$

Completare W *in modo da formare una base di* $V = \mathbb{R}^4$ *.*

Non é difficile verificare che w_1, w_2 *sono LI, quindi dobbiamo trovare altri due vettori LI tra loro in modo che tutti e quattro i vettori siano LI e automaticamente, essendo* V *di dimensione* 4 *, avremo una base di* V *. Idea: aggiungiamo due vettori della base canonica. Un primo metodo é quello di sceglierli in modo (piú o meno) casuale e verificare poi che siano LI. Se siete abili a fare la scelta giusta, tale metodo é il piú veloce. Ad esempio, scegliamo* e_2 *e* e_4 *e verifichiamo se* $\{w_1, w_2, e_2, e_4\}$ *sia LI. La CL* $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma e_2 + \delta e_4 = \mathbf{O}$ *equivale a*

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 5\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Tramite riduzione, se consideriamo la prima equazione piú la terza, si trova $\beta = 0$ *, quindi* $\alpha = 0$ *e facilmente anche* $\gamma = \delta = 0$ *, perció tale insieme é effettivamente una base di* V *. Nella lezione* 8 *abbiamo visto un metodo piú razionale, anche se spesso piú lungo.*