ALGEBRA LINEARE AAA

8 Febbraio 2023

Nome: ________________ **Cognome**: __________________ **Matricola**: ____________

Tempo: 2h00

La valutazione tiene conto di ordine e chiarezza nello svolgimento. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

$\boxed{1}$ Si considerino le rette di equazioni lineari

$$s : \begin{cases} 2x & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti (cioé si intersecano in un punto), determinare l'equazione lineare della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e incidente r e s. (b) Determinare l'equazione lineare del piano passante per il punto $C = (1, 2, -3)$ e perpendicolare a r.

Solution: Soluzione: a) Si vede subito che le due rette sono incidenti nel punto $(0, 0, 0)$. Allora l'equazione parametrica della retta che passa per l'origine e per il punto $P = (1, 1, 1)$ è $x = t$, $y = t, z = t$. L'equazione lineare si ottiene ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due: $y - x = 0$ e $z - x = 0$. b) Il punto $Q = (2, -1, -1)$ appartiene alla retta r. Il piano π passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{OQ}$ (e quindi alla retta r) ha equazione $(2, -1, -1) \cdot (x, y, z) = 2x - y - z = 0$. Il piano parallelo a π passante per il punto $C = (1, 2, -3)$ ha equazione $2x - y - z = 3$

$\boxed{2}$ Si determinino gli autovalori/autovettori ad elementi reali della matrice reale B qui sotto definita:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice B

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + (1+\lambda) \\
&= (-1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) \\
&= \lambda(-1-\lambda)(\lambda-2)
\end{aligned}
$$

Allora gli autovalori sono $\lambda = 0, \lambda = -1$ e $\lambda = 2$.

Lo spazio degli autovettori di $\lambda = 0$ $\{(a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Lo spazio degli autovettori di $\lambda = -1$ $\{(0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$

Lo spazio degli autovettori di $\lambda = 2$ $\{(a, -a/3, a) : a \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{3}$ (a) Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = (1, -3, 2, 0); \quad v_2 = (2, -1, 1, 0); \quad v_3 = (-4, 1, 2, 0); \quad v_4 = (0, 0, 0, 0).$$

(b) Determinare se il sistema lineare ammette soluzione.

$$x\,[1\ \ -3\ 2\ 0]^\top + y[2\ \ -1\ 1\ 0]^\top + z[-4\ 1\ 2\ 0]^\top + t[0\ 0\ 0\ 0]^\top = [1\ 1\ 1\ 0]^\top$$

Solution: La matrice 4×4 $A = (a_{ij})$ le cui colonne sono i quattro vettori $v_1, \ldots, v_4$ ha rango 3. Basta calcolare il determinante del minore associato all'elemento a_{44}. Il sistema lineare del testo ha soluzione perché ha soluzione il sistema lineare in tre incognite $x + 2y - 4z = 1, -3x - y + z = 1, 2x + y + 2z = 1$. Infatti la matrice di questo sistema ha determinante diverso da zero.

$\boxed{4}$ Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 2) = (3, 0); \quad T(2, 4) = (5, 0); \quad T(0, 1) = (1, 1).$$

Solution: Soluzione: Se T fosse una trasformazione lineare avremmo

$$T(2, 4) = T(2(1, 2)) = 2T(1, 2) = 2(3, 0) = (6, 0),$$

che contraddice l'ipotesi $T(2, 4) = (5, 0)$.

$\boxed{5}$ Siano $u = (4, 2, -2)$ e $v = (3, -3, 2)$ vettori di $\mathbf{R}^3$.

(a) Calcolare le lunghezze di u e di v (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).

(b) Trovare tutti i vettori w di lunghezza 1 ortogonali a u e a v.

$\boxed{6}$ Scrivere in forma algebrica z = a + ib con $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente numero complesso

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}.$$

Solution:

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}$$
$$= \frac{1}{i\,(9+4i^2+12i)} = \frac{1}{i(9+12i-4)} = \frac{1}{9i+12i^2-4i} =$$
$$= -\frac{1}{12-5i} = \frac{1(12+5i)}{(12-5i)(12+5i)} = -\frac{-12-5i}{144+25} = -\frac{12}{169} - \frac{5}{169}i.$$

In questo esercizio, così come nei successivi, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore svolgendo poi alcuni passaggi algebrici. Ricordare che dato un numero complesso $z = a + ib$ il suo coniugato $\bar{z}$ è $a - ib$. Notare inoltre che $i^2 = -1$.