Lezione 1 - Data . . 2024

1 Introduzione al corso

Mail personale: rob.ghiselliricci@unive.it
Materiali, avvisi e altro: pagina del corso su Moodle
Ricevimento: su Moodle indicato giorno e fascia oraria fissa (a meno di cancellazioni o spostamenti debitamente segnalati nella pagina avvisi) Possibili ricevimenti in presenza o su Google Meet in altre date previo appuntamento tramite mail.
Durata corso: 48h suddivise in 24 lezioni (in presenza) di durata effettiva 1h 30. Presenza di un tutor per esercizi e richieste varie.
Argomenti corso:

1. Numeri complessi
2. Vettori
3. Spazi vettoriali
4. Applicazioni lineari
5. Matrici
6. Sistemi lineari
7. Autovalori e autovettori

Spirito del corso: Cercheremo di approfondire solo gli aspetti teorici che risultano cruciali per la risoluzione degli esercizi. La capacitá di saper affrontare e comprendere gli esercizi sará la chiave di volta per capire se siete in linea con le richieste del corso. Cercheró di svolgere lezioni il piú possibile "interattive", ove si richiederá il vostro contributo con domande ed esercizi lasciati in sospeso (magari qualche volta faró volutamente qualche errore per vedere se qualcuno se ne accorge... solo per controllare se siete svegli). Ricordate comuque una regola fondamentale: non imparate mai nulla a memoria. Fortunatamente, i requisiti preliminari sono minimi.
Esami: due appelli sessione estiva 2024, uno a settembre 2024 e uno sessione invernale 2025. Esame in forma scritta con vari problemi tendenti a coprire l'intero programma. Svolgeremo una simulazione di esame al termine del corso.

2 Numeri complessi

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ per $x \in \mathbb{R}$ non ha soluzione: giá nel 1600 qualcuno pensó di chiamare i il numero $\sqrt{-1}$: peccato che come numero reale esso sia inesistente, anzi immaginario. Nel libro "I turbamenti del giovane Torless" di Musil, il protagonista, dopo una lezione sui numeri complessi, esprime i suoi dubbi nel seguente modo: "Quella radice non esiste. Qualsiasi numero, che sia negativo o positivo, elevato al quadrato dà un valore positivo. Per cui non può esserci un numero reale che sia la radice quadrata di qualcosa di negativo." Invece, si puó fare: i numeri complessi non sono solo una elucubrazione teorica di qualche pazzo matematico ma si sono dimostrati utili in tante applicazioni pratiche, anche quelle piú impensabili, come ad esempio in elettrotecnica.
L'insieme dei numeri complessi si indica col simbolo $\mathbb{C}$: alla loro invenzione contribuirono diversi matematici. La rappresentazione dei numeri complessi su un piano, detto appunto piano complesso, venne per la prima volta ad un matematico danese di nome Wessel, poi quasi contemporaneamente al matematico svizzero Argand e al piú famoso di tutti, ossia Gauss, ma siccome il primo scriveva in danese e non lo

capiva (o leggeva) nessuno e l'ultimo é stato uno dei piú grandi matematici della storia, quasi tutti oramai lo chiamano piano di Gauss.
Un numero $z \in \mathbb{C}$ si esprime sempre come una coppia $z = (x, y)$ di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$. Ovviamente, due numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono uguali se e solo se $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Rappresentiamo z sul piano complesso: un piano cartesiano (fig.1.1) in cui l'asse x é detto asse dei numeri reali perché si identifica con $\mathbb{R}$ (dunque $\mathbb{R}$ é un sottoinsieme di $\mathbb{C}$), mentre l'asse y é detto immaginario, perché il punto di coordinate $(0, 1)$ é identificato con i, detta unitá immaginaria (il perché del termine immaginario lo vedremo tra poco). In generale, se $z = (x, y)$, allora $x = Re(z)$ é la sua parte reale, mentre $Im(z) = y$ é la sua parte "immaginaria". Ad es., sia $z = (2, -5)$, allora $Re(z) = 2$ e $Im(z) = -5$. Se $z = (2, 0)$ si identifica completamente col numero reale 2, perché la sua parte immaginaria é zero, mentre al contrario $z = (0, 6)$ é completamente immaginario. Lo "zero" del piano complesso é ovviamente l'origine, ossia $(0, 0)$.

Operazioni su $\mathbb{C}$: vediamo quali operazioni si possono definire su $\mathbb{C}$.
Somma: $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Gode di tutte le buone proprietá della somma su $\mathbb{R}$: commutativa, associativa, elemento **neutro** (chi é?) e ogni $z = (x, y)$ ha un **opposto** $-z = (-x, -y)$.
Moltiplicazione: $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ allora

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ahi: mentre la somma é facile (si sommano parte reale ed immaginaria), la moltiplicazione sembra piuttosto complicata: non disperate, tra poco vedremo un trucco per farla in pochi secondi senza imparare alcuna formula a memoria (ricordate la regola fondamentale?). Anche il prodotto gode di tutte le buone proprietá della moltiplicazione su $\mathbb{R}$: commutativa, associativa, elemento neutro (chi é? qui é $(1, 0)$...provate a dimostrarlo), ogni elemento diverso da zero ha un reciproco (l'opposto rispetto al prodotto) e, infine, essa é distributiva rispetto alla somma.

Osservazione 2.1. Quando un insieme $\mathbb{K}$ possiede due operazioni di somma e moltiplicazioni con tutte le proprietá sopra elencate, si dice un *campo*. Fino ad ora, conoscevamo solo due esempi di campi: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e quello $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Adesso, possiamo aggiungere il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Nel seguito, indicheremo con $\mathbb{K}$ un qualunque campo, con questa convenzione: salvo diverso avviso intenderemo che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Mostriamo ora che $i \cdot i = i^2 = -1$: infatti, secondo la definizione, $(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$ che si identifica con il numero reale -1. Ecco perché il numero complesso $(0, 1)$ viene detto immaginario e si denota i.

Importante: si puó dimostrare (lo prendiamo per buono anche se sarebbe facile da dimostrare) che ogni numero complesso $z = (x, y)$ si puó sempre scrivere come $z = x + iy$. A questo punto, é facile calcolare il prodotto $z_1 z_2$ sfruttando le proprietá proprio come nella moltiplicazione sui numeri reali, sfruttando il fatto che $i^2 = -1$ e raccogliendo parte reale da una parte e immaginaria dall'altra. Proviamo prima con il prodotto di $1 + i$ con $1 - 5i$, poi in generale, si ha che

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2) =$$

$$= (x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - y_1 y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)) =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

EX PER CASA: prodotto di $2 - i$ e $3 + 4i$.

Il coniugato di $z = (x, y)$ é $\overline{z} = (x, -y)$, oppure $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$: vedi interpretazione geometrica sul piano complesso (fig. 1.2). Il coniugato di un numero "reale" é lui stesso, ossia $z = \overline{z}$ se e solo se z é un numero reale. Si noti che $z\overline{z} = x^2 + y^2$, ossia un numero reale strettamente positivo, ad eccezione di $z = (0, 0)$. Valgono le seguenti proprietá (utili negli esercizi): i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
Divisione: z_1/z_2, supponendo che z_2 non sia $(0, 0)$: proviamo prima con $1 + i$ diviso per $1 - 5i$, poi in generale

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

EX PER CASA: divisione di $2 - i$ e $3 + 4i$.

Forma trigonometrica di un numero complesso (o **polare**): si veda fig. 1.3 sul piano complesso. Dato z, il modulo di z é $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (teorema di Pitagora): ad esempio $|3 + 4i| = 5$.
L'argomento di z é l'angolo che forma con l'asse x misurato a partire dallo stesso asse reale in senso antiorario.
Si puó identificare equivalentemente un numero complesso in forma algebrica, ossia $z = x+iy$, conoscendo parte reale e immaginaria, o polare, conoscendo $|z|$ e $Arg(z) = \theta$. Se conosciamo la forma algebrica, come passare alla trigonometrica? Esempio: $z = 3+4i$: allora $|z| = 5$ e dalla trigonometria sui triangoli rettangoli (cateto uguale ad altro cateto per tangente angolo opposto) $4 = 3\tan(\theta)$, da cui

$$\theta = \arctan(4/3),$$

ossia circa 53 gradi. In generale, da algebrica a trigonometrica, si ha che

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan(Im(z)/Re(z)).$$

Viceversa, se conosciamo $Arg(z) = \theta$ e $|z|$, sempre dalla trigonometria dei triangoli rettangoli si ha che

$$Re(z) = x = |z|\cos(\theta)$$

e

$$Im(z) = y = |z|\sin(\theta).$$

Dunque $z = |z|\cdot(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$: il termine $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ coincide con la funzione esponenziale complessa (lo prendiamo per buono):

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

quindi

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}.$$

Si noti che il numero complesso $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ é sempre di modulo 1, perché $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (sempre Pitagora).
Vediamo un esercizio in cui si passa dalla forma algebrica alla trigonometrica calcolando l'argomento con la forma esponenziale: sia $z = \sqrt{3}+i$. Allora $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

da cui

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La soluzione é $\theta = \pi/6$ (30 gradi). In generale, il sistema

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

individua una ed unica soluzione θ.
Nel seguito, dato un numero complesso z, normalmente indicheremo con ρ il suo modulo e θ il suo argomento: ovviamente $\rho \geq 0$ ed é zero se e solo se $z = 0$, mentre $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esercizio: scrivere in forma polare i: é facile vedere che $\rho = 1$ e vedendo la posizione di i sul piano complesso $\theta = \pi/2$, quindi $i = e^{i\pi/2}$.
EX PER CASA: scrivere in forma polare $z = \frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Suggerimento: quando si puó, ricavate direttamente θ dalla rappresentazione di z sul piano complesso.

Proposizione 2.1. *Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si ha che $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.*

La dimostrazione si basa sulle formule di addizione di seni e coseni. Un corollario immediato é che $|z^n| = |z|^n$ (se moltiplico z n volte per se stesso). Infine, la formula di De Moivre:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Senza badare troppo al rigore matematico, dando per scontato che per l'esponenziale complesso valgano (come in effetti é) tutte le proprietá di quello reale, la dimostrazione é facilissima, ossia

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n(e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Esercizio: scrivere $(1+i)^7$ in forma algebrica. Prima scriviamo la base in forma trigonometrica:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

quindi si trova $\theta = \pi/4$ e $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$. Con De Moivre, si ha

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot e^{i7\pi/4} = 8\sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4))$$

Dalla goniometria, $\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $\sin(7\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, quindi si trova

$$(1+i)^7 = 8(1-i) = 8 - 8i.$$

EX CASA: determinare in forma algebrica

$$1 + i - \frac{i}{1-2i}$$

e

$$(1-i)^{11}.$$