Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Algebra Lineare

Prova d'esame - Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto

Tema A - 27/05/2024

Tempo a disposizione: 2h

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Esercizio 1 (6 punti)

Risolvere l'equazione $z^3 = |z|^2$ e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.

Esercizio 2 (9 punti)

Si considerino la matrice A_k, dipendente dal parametro reale k, e il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ dati da

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & -2 \\ 1 & 4 & 4k+1 & -1 \\ -1 & -2 & -2k-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2k+3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Si stabilisca il rango di A_k al variare di k.

2.2 Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $A_k\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni, ove $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$.

Esercizio 3 (7 punti)

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1 Stabilire se T è diagonalizzabile.

3.2 Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

3.3 Determinare una matrice ortogonale P tale che P^TAP sia diagonale.

Esercizio 4 (7 punti)

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo tale che

$$T(1,1,1) = (-1,2),\ T(0,1,1) = (0,4),\ T(1,1,0) = (2,1).$$

4.1 Determinare la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche.

4.2 Determinare le dimensioni di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 5 (3 punti)

Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una matrice B di ordine 3×2 tale che $AB = I_2$, ove I_2 é la matrice identica di ordine due.

Soluzioni

Esercizio 1 (6 punti)

Risolvere l'equazione $z^3 = |z|^2$ e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.

Attraverso la sostituzione $z = x + iy$, si ottiene l'equazione $(x+iy)^3 = x^2 + y^2$. Svolgendo il cubo del binomio a primo membro, si giunge a $x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2 = x^2 + y^2$, da cui, separando i termini reali da quelli immaginari, si arriva al sistema

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

Conviene partire dalla seconda equazione, nella forma fattorizzata $y(3x^2 - y^2) = 0$, le cui soluzioni sono $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{3}x$ e $y_3 = \sqrt{3}x$. Partiamo da y_1: andando nella prima equazione, si trova $x^3 - x^2 = 0$, ossia $x^2(x-1) = 0$, da cui $x = 0$ e $x = 1$, quindi le prime due soluzioni sono $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$.
Se ripetiamo la procedura con y_2, si trova $x^3 - 9x^3 - x^2 - 3x^2 = 0$, ossia $-4x^2(2x+1) = 0$, da cui $x = 0$ e $x = -1/2$: dalla prima, torniamo a trovare z_1, mentre dalla seconda scopriamo una nuova soluzione $z_3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Analogamente, da y_3 si arriva alla nuova soluzione $z_4 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.

Si noti che si poteva anche risolvere l'equazione nella forma polare: sarebbe stato molto piú veloce, ma bisognava assolutamente ricordare che la funzione $\exp\{it\}$ é periodica di periodo 2π, ossia $\exp\{it\} = \exp\{i(t + 2k\pi)\}$ per ogni numero naturale $k \geq 0$. Se z é espresso in forma polare come $z = \rho \cdot \exp\{i\theta\}$, l'equazione diviene $\rho^3 \cdot \exp\{i3\theta\} = \rho^2 = \rho^2 \cdot \exp\{i(0 + 2k\pi)\}$, da cui si arriva al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 - \rho^2 = 0 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

La prima delle due equazioni diviene $\rho^2(\rho - 1) = 0$ le cui soluzioni sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. La seconda invece porta alle tre soluzioni

$$\theta_1 = 0, \ \ \theta_2 = \frac{2}{3}\pi, \ \ \theta_3 = \frac{4}{3}\pi,$$

rispettivamente per $k = 0, 1, 2$ (si osservi che non si puó andare oltre con k, perché θ é vincolato a stare in $[0, 2\pi[$). Ovviamente, tutti questi valori, ben combinati tra loro, portano alle stesse soluzioni trovate in precedenza.

Le corrispettive forme polari sono

$$z_1 = (0,0), \ \ z_2 = (1,0), \ \ z_3 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right), \ \ z_4 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Esercizio 2 (9 punti)

Si considerino la matrice A_k, dipendente dal parametro reale k, e il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ dati da

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & -2 \\ 1 & 4 & 4k+1 & -1 \\ -1 & -2 & -2k-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2k+3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Si stabilisca il rango di A_k al variare di k.

Il rango massimo di A_k é 4: tuttavia, senza fare alcun calcolo, possiamo concludere che A_k é singolare in quanto la quarta colonna é uguale alla prima cambiata di segno, quindi i vettori identificati con le quattro colonne non potranno mai essere linearmente indipendenti. Indubbiamente, alla luce della seconda domanda di questo problema, conviene adottare il metodo dell'algoritmo di Gauss. Dopo le due operazioni $2R \to 2R + 1R \cdot (-1/2)$ e $3R \to 3R + 1R \cdot (1/2)$ otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & -2 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2k+3 & 0 \end{pmatrix}$$

Poi, con la sola operazione $4R \to 4R + 2R \cdot (-1)$ si arriva a

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & -2 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora, agiamo su $\tilde{A}_k$ a seconda che $k \neq 1$ o $k = 1$: nel primo caso, possiamo sostituire la quarta riga con la quarta riga sommata alla terza moltiplicata per $\frac{-k-2}{k-1}$. In tal modo, si giunge alla matrice a scala S_k data da

$$S_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & -2 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui pivot diversi da zero sono tre, quindi il rango é tre.

Nel caso $k = 1$, invece, possiamo scambiare terza e quarta riga di $\tilde{A}_1$ e si arriva alla matrice a scala S_1 data da

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per concludere in analogia con il precedente ragionamento che il rango é sempre tre, indipendentemente da k.

Ora, vediamo che succede con il metodo del determinante e del teorema degli orlati e partiamo "dal basso". In pratica, ci troviamo una sottomatrice quadrata di ordine due non singolare e proviamo poi ad orlarla in tutti i modi possibili. Conviene scegliere una sottomatrice che non dipenda da k, ad esempio quella di nord-ovest data da

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

il cui determinante é diverso da zero. Se la orliamo con terza riga e quarta colonna, la matrice ottenuta é certamente singolare perché la terza colonna é uguale alla prima cambiata di segno e lo stesso accade se la orliamo con quarta riga e quarta colonna. Orliamo allora con quarta riga e terza colonna (la colonna era l'unica possibile, mentre abbiamo preferito la quarta riga perché vi é uno zero) e otteniamo la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k \\ 1 & 4 & 4k+1 \\ 0 & 2 & 2k+3 \end{pmatrix}$$

Un rapido calcolo porta a $|B_k| = 4k + 8$, quindi B_k é non singolare per $k \neq -2$, il che significa che il rango di A_k é tre per $k \neq -2$. Nel caso in cui $k = -2$, invece, devo orlare B nell'ultimo modo rimasto, con quarta riga e quarta colonna, ottenendo la matrice C data da

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -12 \\ 1 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Di nuovo, un rapido calcolo porta a $|C| = -12$, quindi, in conclusione, il rango di A_k é tre per ogni $k \in \mathbb{R}$.

2.2 Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $A_k\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni, ove $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$.

Adottiamo un metodo misto: per risolvere il problema della risolubilitá del sistema, uso il determinante, poi per le eventuali soluzioni si recuperano i risultati dell'algoritmo di Gauss ottenuti nella prima parte. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema é risolubile se il rango della matrice A, che abbiamo visto essere tre per ogni k, coincide con quello della matrice completa $A \vdots \mathbf{b}$. Pertanto, si ha non esistenza di soluzioni se e solo se il rango della matrice completa é quattro ed evidentemente, in base a quanto mostrato all'inizio della risposta al primo punto, ció puó accadere se e solo se la matrice quadrata ottenuta sostituendo alla quarta, o indifferentemente alla prima, colonna di A_k il vettore dei termini noti é non singolare. Se scegliamo la quarta colonna di A_k, la nuova matrice, denotata E_k, diviene

$$E_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k & 0 \\ -1 & 4 & 4k+1 & 1 \\ -1 & -2 & -2k-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2k+3 & 2 \end{pmatrix}$$

Attraverso lo sviluppo di Laplace sulla quarta colonna, si trova che $|E_k| = d_1 + 2d_2$, ove d_1 é il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k \\ -1 & -2 & -2k-1 \\ 0 & 2 & 2k+3 \end{pmatrix}$$

mentre d_2 é il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6k \\ -1 & 4 & 4k+1 \\ -1 & -2 & -2k-1 \end{pmatrix}$$

Un rapido calcolo porta a $d_1 = 4 - 4k$ e $d_2 = 12k - 12$, sicché $|E_k| = 20k - 20$, quindi per $k \neq 1$ E_k é non singolare, ossia il sistema non ha soluzioni.

Invece, per $k = 1$, E_1 é singolare, quindi in questo caso anche il rango della matrice completa é tre ed ho risolubilitá.

Per trovare le soluzioni nel caso $k = 1$, basta osservare che il sistema lineare $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é equivalente a $S_1\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$, ove $\tilde{\mathbf{b}} = (0, 1, 1, 0)$ (per provare quest'ultima affermazione, basta riapplicare tutte le trasformazioni di Gauss fatte per arrivare alla matrice a scala S_1 sul vettore $\mathbf{b}$). Il sistema $S_1\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ é di facile soluzione, perché basta andare a ritroso a partire dall'ultima equazione e si trova:

$$\mathbf{x} = (w - 4/3, 1/6, 1/3, w).$$

Esercizio 3 (7 punti)

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1 Stabilire se T è diagonalizzabile.

Si noti che la matrice A é simmetrica, dunque sappiamo giá per il teorema spettrale che é diagonalizzabile.

3.2 Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

L'equazione secolare $det(A - \lambda I) = 0$ diviene, dopo qualche raccoglimento algebrico,

$$\lambda(\lambda - 3)(1 - \lambda) = 0$$

da cui si hanno i tre autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$.

In corrispondenza di λ_i, calcoliamo l'autospazio V_{λ_i} con il solito metodo della risoluzione del sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ove $\mathbf{x} = (x, y, z)$, per ogni $i = 1, 2, 3$ e si trova (

$$V_0 = \{(x, -x, -x) : x \in \mathbb{R}\},$$
$$V_1 = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$
$$V_3 = \{(x, -x, 2x) : x \in \mathbb{R}\},$$

quindi una possibile base di autovettori è data da $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, ove

$$w_1 = (1, -1, -1)\ ;\ w_2 = (1, 1, 0)\ ;\ w_3 = (1, -1, 2).$$

3.3 Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^T AP$ sia diagonale.

Dalla teoria, sappiamo che la matrice di cambiamento di base P che fa passare dalla matrice A a quella diagonale D é ortogonale se la base é ortonormale. Sempre dalla teoria, sappiamo che i tre autovettori w_1, w_2, w_3 sono tra loro ortogonali a due a due. Ci basta allora definire i tre nuovi vettori u_1, u_2, u_3 come

$$u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|},\ \ i = 1, 2, 3.$$

Pertanto la nuova base ortonormale é $\{u_1, u_2, u_3\}$, con

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right),\ u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

e la matrice ortogonale P cercata ha come colonne i tre vettori della base ortonormale, ossia

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 (7 punti)

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo tale che

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2),\ T(0, 1, 1) = (0, 4),\ T(1, 1, 0) = (2, 1).$$

4.1 Determinare la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche.

Per determinare la matrice A che rappresenta l'omomorfismo T rispetto alle basi canoniche, bisogna trovare i trasformati secondo T di e_1, e_2, e_3. Posto $w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (0, 1, 1)$ e $w_3 = (1, 1, 0)$, non é difficile vedere che

$$e_1 = w_1 - w_2,\ \ e_3 = w_1 - w_3,\ \ e_2 = w_2 - e_3,$$

quindi, per le proprietá delle trasformazioni lineari, si trova che

$$T(e_1) = T(w_1) - T(w_2) = (-1, 2) - (0, 4) = (-1, -2)$$

e analogamente

$$T(e_3) = (-3, 1),\ T(e_2) = (3, 3).$$

Pertanto, la matrice A diviene

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Determinare le dimensioni di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

La dimensione dell'immagine di T coincide con il rango della matrice A, che é due (basta individuare, ad esempio, la sottomatrice non singolare data dalle prime due righe e colonne).

Per il teorema della dimensione, dunque, la dimensione del nucleo di T é pari a uno (la somma delle dimensioni di nucleo e immagine deve coincidere con la dimensione dello spazio vettoriale di partenza, in questo caso pari a 3).

Esercizio 5 (3 punti)

Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una matrice B di ordine 3×2 tale che $AB = I_2$, ove I_2 é la matrice identica di ordine due.

Se scriviamo la matrice incognita B come

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix},$$

allora il prodotto riga per colonna $AB = I_2$ produce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a + c + e = 1 \\ b + d + f = 0 \\ a + e = 0 \\ b + f = 1 \end{cases}$$

Non é difficile vedere che la prima e la terza equazione implicano $c = 1$, mentre la seconda e la quarta implicano $d = -1$. Dunque, possiamo sceglire in libertá a, b, e, f con i soli vincoli $a + e = 0$ e $b + f = 1$. Scegliamo, ad esempio, $a = 1$, $e = -1$, $b = 0$ e $f = 1$, da cui (

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$