Università Ca' Foscari Venezia
Corso di Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 12 – Autovalori e autovettori

Nota: Per i seguenti esercizi è importante ricordarsi che una matrice è diagonalizzabile quando la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica. Una condizione necessaria affinché la matrice sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ è che il numero di autovalori (contati con la loro molteplicità) sia uguale ad n (dimensione della matrice).

Esercizio 1. *Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se le matrici sono diagonalizzabili, e in tal caso trovare la matrice S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale (con gli autovalori sulla diagonale).

Esercizio 2. *Stabilire se la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{C}$, o su nessuno dei due campi.

Esercizio 3. *Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$.*

$$1) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 5 & k \end{pmatrix}$$

$$2) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ammette $v = (1,1,2)$ *come autovettore. Scelto uno di questi valori, si dica se* A *è diagonalizzabile.*

Esercizio 5. *Sono dati i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (2,0,1) \quad \textit{e} \quad v_3 = (1,1,3).$$

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo tale che*

$$T(v_1) = 3v_1, \quad T(v_2) = 2v_2 \quad \textit{e} \quad T(v_3) = 2v_3 + 2v_2.$$

- *Determinare la matrice che rappresenta* T *rispetto alla base canonica.*
- *Determinare* $\operatorname{Ker} T$ *e* $\operatorname{Im} T$ *.*
- *Stabilire se* T *è invertibile e, in caso affermativo, determinare l'applicazione inversa* T^{-1} *.*
- *Determinare autovalori e autovettori di* T *.*
- *Verificare che gli autospazi sono in somma diretta.*

Esercizio 6. *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo tale che*

$$T(e_1 + e_2) = 6e_1 - 6e_2 + 4e_3, \quad T(e_1 - e_2) = 2e_1 - 2e_2, \quad T(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

- *Determinare la matrice* A *di rappresentazione di* T *rispetto alla base canonica* $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- *Determinare gli autovalori e gli autovettori di* T *, e stabilire se* T *è diagonalizzabile.*
- *Stabilire se esistono* $t \in \mathbb{R}$ *per i quali il vettore* $(-2, t, -2)$ *è un autovettore di* T *.*

Esercizio 7. *Dimostrare che l' endomorfismo* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito da*

$$T(x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}, \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

è diagonalizzabile, e trovare una base di $\mathbb{R}^3$ *composta da autovettori.*