G. Santin 30.04.2025

Esame del corso

# Algebra Lineare

Corso di Laurea in Informatica

**Tema A**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cognome .......... | Nome .............. | Matricola .......... | Aula-Posto ........ |

**Norme generali:**

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. Non è permesso utilizzare libri o quaderni, o altri strumenti di calcolo (inclusi smartphone e smartwatch).
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.

**Esercizio 1 (Numeri complessi)** ................................................ **6 punti**

Risolvere l'equazione $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ per $z \in \mathbb{C}$ e rappresentare le soluzioni sia in forma algebrica che polare.

**Esercizio 2 (Diagonalizzazione)** ................................................ **9 punti**

Si consideri la matrice $A_k$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 5k & -k & k \\ 4k & k & -4k \\ 6k & -3k & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Scegliere un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k$ è diagonalizzabile.

(b) Per questo valore di $k$, determinare la matrice $S$ di autovettori di $A_k$ tale che $D = S^{-1} A_k S$, dove $D$ è la matrice diagonale che contiene gli autovalori di $A_k$ sulla diagonale, contati con molteplicità.

**Esercizio 3 (Sistemi lineari)** ................................................ **7 punti**

Dato $t \in \mathbb{R}$, stabilire il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} tx + y + z = 1 \\ x + ty + z = 2 - t \\ x + y + tz = t. \end{cases}$$

**Esercizio 4 (Applicazioni lineari)** ................................................ **7 punti**

Sia $T$ l'endormorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{aligned} T(2,0,2,0) &= (10,0,4,6) \\ T(0,1,0,0) &= (0,1,0,1) \\ T(0,2,1,1) &= (2,1,1,2) \\ T(0,0,1,0) &= (2,0,1,1). \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta $T$ rispetto alla base canonica.

(b) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(c) Stabilire se $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ sono in somma diretta.

**Esercizio 5 (Diagonalizzazione)** ................................................ **3 punti**

Sia $A \in M_3$ e supponiamo che $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ i corrispettivi autovettori.

(a) Determinare lo spettro della matrice $A^2 = AA$.

(b) Individuare una condizione sufficiente sugli autovalori di $A$ per cui $A^2$ sia diagonalizzabile.