G. Santin 05.09.2024

Esame del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Corso di Laurea in Informatica

Tema B

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.

Esercizio 1 (Studio di funzione) .... **14 punti**

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{\log(2(1-x))} \ ,$$

dove $\log = \log_e$.

(a) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi e studiarne il segno.

(b) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.

(c) Discutere la continuità e derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

(d) Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di concavità e convessità di f determinando, se esistono, i punti di flesso.

(e) Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Soluzione ....

Conviene scrivere la funzione come

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{\log(2) + \log(1-x)}.$$

(a) Dividiamo per punti:

- Dobbiamo richiedere che l'argomento dei logaritmi sia positivo, quindi $1 - x > 0$, cioè $x < 1$. Inoltre vogliamo che $\log(2(1-x)) \neq 0$, quindi $2(1-x) \neq 1$, cioè $x \neq \frac{1}{2}$. Quindi il dominio è $D =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$.
- La funzione non è ne' pari ne' dispari perchè il dominio non è simmetrico.
- Abbiamo $f(0) = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0$, e quindi il grafico di f interseca l'asse y in $(0, 0)$.
- Per l'asse x abbiamo $f(x) = 0$ se e solo se $\log(x + 1) = 0$, quindi per $x = 0$. Quindi abbiamo solo un'intersezione in $(0, 0)$.
- Per lo studio del segno abbiamo $\log(1-x) > 0$ se e solo se $1 - x > 1$, cioè se $x < 0$, mentre $\log(2(1-x)) > 0$ se e solo se $2(1-x) > 1$, cioè se $x < 1/2$. Quindi abbiamo lo studio del segno come in Tabella 2.

(b) Gli estremi del dominio sono 1^-, $\frac{1}{2}^{\pm}$, $-\infty$.

Raccogliendo il termine $\log(1-x)$ abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)}{\log(2) + \log(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(1-x)} + 1} = 1,$$

		0		1/2	
$\log(x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\log(2(x+1))$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Tabella 2: Studio del segno di f.

e quindi non ci sono asintoti verticali per $x \to 1^-$.

Per $1/2$, visto che $\log(1-1/2) = \log(1/2) < 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = \lim_{x\to 1/2^+} \frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1/2^-} f(x) = \lim_{x\to 1/2^-} \frac{\log(x+1)}{\log(2(x+1))} = -\infty,$$

e quindi c'è un asintoto verticale $x = 1/2$, sia a destra che a sinistra.

Per $-\infty$, raccogliendo il termine $\log(1-x)$ otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1-x)}{\log(2)+\log(1-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(1-x)}+1} = 1,$$

e quindi c'e' un asintoto orizzontale $y = 1$ a $-\infty$. Questo implica anche che non ci sono asintoti obliqui.

(c) La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio perchè è data da somme, rapporti e composizioni di funzioni continue e derivabili.

Per $x \in D$ possiamo calcolare la derivata con la regola di derivazione di un rapporto, cioè

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\log(1-x)}{\log(2(1-x))}\right)' \\ &= \frac{(\log(1-x))'\log(2(1-x)) - \log(1-x)(\log(2(1-x)))'}{(\log(2(1-x)))^2} \\ &= \frac{-\dfrac{1}{1-x}\log(2(1-x)) - \log(1-x)\dfrac{-2}{2(1-x)}}{(\log(2(1-x)))^2} \\ &= -\frac{\log(2)}{(1-x)(\log(2(1-x)))^2} = \frac{\log(2)}{(x-1)(\log(2(1-x)))^2}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $f'(x) \neq 0$, visto che il numeratore non è mai nullo. Per studiare il segno osserviamo che $\log(2(1-x)))^2 \geq 0$ per ogni x, e che $\log(2) > 0$. Quindi il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $(x-1)$, e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x-1 > 0$, cioé se $x > 1$, cioè in nessun punto del dominio.

Ne segue che f è sempre decrescente e non ha punti di massimo o minimo relativi, e quindi nemmeno assoluti.

(d) Nel dominio di f calcoliamo la derivata seconda usando la regola di derivazione del reciproco, del prodotto e della funzione composta, e otteniamo

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\log(2)}{(x-1)(\log(2(1-x)))^2}\right)' = \log(2)\left(\frac{1}{(x-1)(\log(2(1-x)))^2}\right)' \\
&= -\log(2)\frac{((x-1)(\log(2(1-x)))^2)'}{(x-1)^2\log(2(1-x))^4} \\
&= -\log(2)\frac{(x-1)'\log(2(1-x))^2 + (x-1)\left(\log(2(1-x))^2\right)'}{(x-1)^2\log(2(1-x))^4} \\
&= -\log(2)\frac{\log(2(1-x))^2 + (x-1)\left(2\log(2(1-x))\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2\log(2(1-x))^4} \\
&= -\log(2)\frac{\log(2(1-x))+2}{(x-1)^2(\log(2(x-1))^3}.
\end{aligned}
$$

Per lo studio del segno di f'' abbiamo che

- Il termine $-\log(2)/(x-1)^2$ è sempre negativo nel dominio.
- Vale $\log(2(1-x))+2 \geq 0 \Leftrightarrow \log(2(1-x)) \geq -2 \Leftrightarrow 2(1-x) \geq e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow x \leq 1 - \dfrac{1}{2e^2} \approx 0.93$.
- Vale $(\log(2(1-x)))^3 > 0$ se e solo se $\log(2(1-x)) > 0$, e abbiamo già visto che questo vale per $x < 1/2$.

Quindi abbiamo lo studio del segno di f'', e gli intervalli di convessità e concavità e punti di flesso di f come in Tabella 3.

		$1/2$		$1-1/(2e^2)$	
$-\log(2)/(x-1)^2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\log(2(1-x))+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(\log(2(1-x)))^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	flesso	$\cap$

Tabella 3: Studio del segno di f'' e intervalli di convessità e concavità di f.

Ne segue che il punto $x = 1 - 1/(2e^2)$ è di flesso, e

$$
f\left(1-\frac{1}{2e^2}\right) = \frac{\log\left(\dfrac{1}{2e^2}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{e^2}\right)} = \frac{2+\log(2)}{2} \approx 1.35.
$$

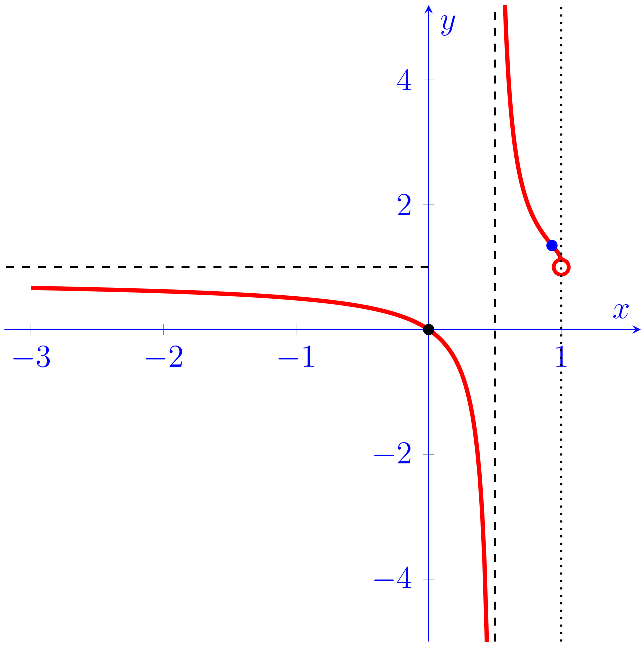

Figura 1: Grafico della funzione f.

(e) Il grafico di f è abbozzato in Figura 1. L'immagine di f è $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, visto che $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ e che non esiste nessun $x \in D$ per cui $f(x) = 1$.

Esercizio 2 (Continuità e derivabilità) .... **6 punti**

Dato $p \in \mathbb{R}$, considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\log(x-2) & \text{se } x > 2 \\ x^2 + 2px + p^2 & \text{se } x \leq 2, \end{cases}$$

dove $\log = \log_e$.
Discutere per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ la funzione f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Soluzione ....

Analizziamo prima le due parti separatamente:

- La funzione $(x-2)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e la funzione $\log(x-2)$ è continua e derivabile nel suo dominio, cioè per $x - 2 > 0$, ovvero per $x > 2$. Quindi la funzione $(2-x)\log(2-x)$ è continua e derivabile per $x > 2$ perchè prodotto di due funzioni continue e derivabili.

- La funzione $x^2 + 2px + p^2$ è continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e quindi anche per ogni $x \leq 2$) e per ogni $p \in \mathbb{R}$.

Ci resta da controllare il punto di giunzione $x = 2$:

- Per la continuità abbiamo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)\log(x-2) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4 + 4p + p^2 = (p+2)^2,$$

  quindi la funzione è continua in 2 (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $(p+2)^2 = 0$, cioè per $p = -2$.

- La funzione è derivabile solo se e' continua, quindi possiamo assumere d'ora in poi $p = -2$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} x > 2: \quad f'(x) &= ((x-2)\log(x-2))' = (x-2)'\log(x-2) + (x-2)(\log(x-2))' \\ &= \log(x-2) + (x-2)\frac{1}{x-2} = \log(x-2) + 1, \\ x < 2: \quad f'(x) &= \left(x^2 - 4x + 4\right)' = 2x - 4. \end{aligned}$$

  Calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (\log(x-2) + 1) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x - 4) = 0.$$

  Quindi la funzione non ha derivata continua in $x = 2$.

Esercizio 3 (Polinomio di Taylor) .... **7 punti**

Considerare la funzione $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x)$.

(a) Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in tal caso, determinarne il periodo.

(b) Calcolare il polinomio di Taylor di g di grado $n = 2$ centrato in $x_0 = 0$.

Soluzione ....

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $g(x) = 0$ se e solo se $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ oppure $\cos(2x) = 0$. Nel primo caso otteniamo $x/2 = 0 + k\pi$, cioè $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nel secondo caso abbiamo $2x = \pi/2 + k\pi$, ovvero $x = \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per verificare la simmetria calcoliamo

$$g(-x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos(-2x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos(2x) = -g(x),$$

e quindi la funzione è dispari.

La funzione $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ è periodica di periodo 4π, mentre la funzione $\cos(2x)$ è periodica di periodo π. Quindi g è periodica di periodo 4π.

(b) Il polinomio di Taylor di secondo grado ha equazione

$$T_{2,x_0}(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2 .$$

Usando la formula di derivazione del prodotto, otteniamo

$$g'(x) = (\sin\left(\frac{x}{2}\right))'\cos(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)(\cos(2x))' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x),$$

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)\right) - 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x)\right) \\
&= -\frac{17}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x).
\end{aligned}$$

Quindi per $x_0 = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= \sin(0)\cos(0) = 0, \\
g'(x_0) &= \frac{1}{2}\cos(0)\cos(0) - 2\sin(0)\sin(0) = \frac{1}{2}, \\
g''(x) &= -\frac{17}{4}\sin(0)\cos(0) - 2\cos(0)\sin(0) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_{2,x_0}(x) = \frac{1}{2}x.$$

Esercizio 4 (Integrali) .... **6 punti**

Considerare la funzione

$$h(x) = -x - \sin(x).$$

Determinare l'area del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione delimitata da $y = h(x)$, $x = -3\pi$, $y = 0$, $x = 0$.

Soluzione ....

Il grafico dell'area da ruotare (non richiesto) è abbozzato in Figura 2.

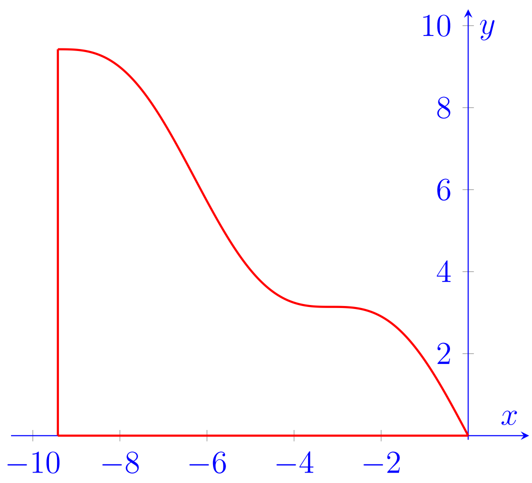

Figura 2: Il grafico dell'area da ruotare.

Il volume del solido è dato dalla formula

$$V = \int_{-3\pi}^{0} \pi h(x)^2 dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3\pi}^{0} (-x - \sin(x))^2 dx = \pi \int_{-3\pi}^{0} (x^2 + 2x\sin(x) + \sin^2(x)) dx \\ &= \pi \left(\int_{-3\pi}^{0} x^2 dx + 2 \int_{-3\pi}^{0} x \sin(x) dx + \int_{-3\pi}^{0} \sin^2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo prima gli integrali indefiniti. Abbiamo $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, e per gli altri integrali usiamo la regola di integrazione per parti per calcolare

$$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x),$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= \int \sin(x)\cdot\sin(x)dx = \sin(x)(-\cos(x)) - \int \cos(x)(-\cos(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx,\end{aligned}$$

e quindi

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x \Rightarrow \int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(-\sin(x)\cos(x)+x\right).$$

Gli integrali definiti hanno quindi i valori

$$\begin{aligned}\int_{-3\pi}^{0} x^2dx &= 0 - \frac{(-3\pi)^3}{3} = 9\pi^3, \\ \int_{-3\pi}^{0} x\sin(x)dx &= (-0\cos(0)+\sin(0)) - (3\pi\cos(-3\pi)+\sin(-3\pi)) = 3\pi, \\ \int_{-3\pi}^{0} \sin^2(x)dx &= \frac{1}{2}\left(-\sin(0)\cos(0)+0\right) - \frac{1}{2}\left(-\sin(-3\pi)\cos(-3\pi)-3\pi\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Quindi

$$V = \pi\left(9\pi^3 + 6\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = 3\pi^2\left(3\pi^2 + \frac{5}{2}\right).$$