*Università Ca' Foscari Venezia*, Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica mod. 2

*Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto*

Tema A - 09/01/2025
Tempo a disposizione: 2h

Cognome ....................... Nome ....................... Matricola ............. Aula-Posto ............

Voto Analisi Matematica mod 1: ........

**Norme generali:**

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

## Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $t^2y' = -(t^2-2)(2y-1)^3$.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = \frac{3}{8}$ e determinarne il dominio di esistenza.

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$ e determinarne il dominio di esistenza.

## Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva $\gamma$ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = t^2\left(-\cos(\pi t), \sin(\pi t)\right), \quad t \in [-1, 1]$$

2.1 Determinare se $\gamma$ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

2.3 Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente a $\gamma$ in $t = -\frac{1}{2}$

## Problema 3 (11 punti)

Sia $f(x,y) = 4x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x^2$ .

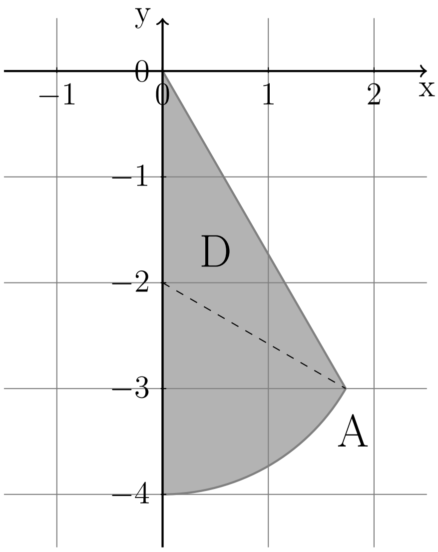
3.1 Determinare il dominio di $f$ e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, i grafici delle sezioni $y = 0$ e $x = 0$.

3.2 Mostrare che $f$ ha due punti stazionari, di cui almeno uno è estremo locale. Trovare l'immagine di $f$. DIFFICILE: stabilire la natura del secondo punto stazionario.

3.3 Determinare il versore di massima discesa nel punto $(1,1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

## Problema 4 (6 punti)

Sia $D$ il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,-2)$; il vertice $A$ ha coordinate $A = (\sqrt{3}, -3)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x,y) = -2x^2(y+2)$ su $D$.



# Soluzioni

## Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $t^2y' = -(t^2-2)(2y-1)^3$.

(5 Punti) L'equazione differenziale ordinaria è del primo ordine a variabili separabili.

Si nota che $y = 1/2$ è soluzione costante dell'equazione. Inoltre, per $t = 0$ si ottiene come unica soluzione $y = 1/2$. Si considera quindi $y \neq 1/2$ e $t \neq 0$, si separano le variabili e si integrano ambo i membri:

$$\begin{aligned}\int \frac{y'}{(2y-1)^3}\,dt &= \int -1+\frac{2}{t^2}\,dt\\ -\frac{1}{4}(2y-1)^{-2} &= -t-\frac{2}{t}+c \qquad ,c\in\mathbb{R}\\ (2y-1)^2 &= \frac{t}{4t^2-4ct+8}\\ |2y-1| &= \sqrt{\frac{t}{4t^2-4ct+8}}\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni hanno la forma

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{4t^2-4ct+8}} & \text{se } y > 1/2\\ y = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{4t^2-4ct+8}} & \text{se } y < 1/2\end{cases}$$

a cui va aggiunta la soluzione costante se $y = 1/2$.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = \frac{3}{8}$ e determinarne il dominio di esistenza.

(2 punti) Bisogna considerare la seconda soluzione e imporre le condizioni iniziali:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{12-4c}} \implies \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{12-4c}} \implies \frac{1}{16} = \frac{1}{12-4c} \implies c = -1$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{t}{t^2+t+2}}$

Il dominio è dato da

$$\frac{t}{t^2+t+2} \geq 0$$

da cui si ottiene

$$D = \{t\in\mathbb{R}:\ t>0\}$$

Sebbene la funzione sia definita in $t = 0$, la funzione non è differenziabile in $t = 0$, per cui tale punto viene escluso dal dominio della soluzione (infatti, questa soluzione si è ottenuta partendo dall'ipotesi $t \neq 0$).

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$ e determinarne il dominio di esistenza.

(1 punto) Non esiste alcuna soluzione che soddisfa tale condizione. Infatti, sostituendo nell'equazione differenziale $t = 0$ si ottiene $y = 1/2$. Cioè, non può essere che la soluzione $y$ assuma un valore diverso da $1/2$ per $t = 0$.

## Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva $\gamma$ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \left(-\cos(\pi t), \sin(\pi t)\right), \quad t \in [-1, 1]$$

2.1 Determinare se $\gamma$ è chiusa, semplice e regolare.

(3p totali)

Si ha $\mathbf{r}(-1) = (1, 0)$ e $\mathbf{r}(1) = (1, 0)$, quindi $\gamma$ è chiusa. (1p)

Per la semplicità, notiamo che si tratta di una curva in forma polare con centro l'origine (il segno meno sulla prima componente influisce solo sul verso di percorrenza, in questo caso orario). La distanza dall'origine è data dal termine $\rho(t) = t^2$. Questa curva non è semplice se esistono $t_1 \in [-1, 1]$, $t_2 \in \,]-1, 1[$, con $t_1 < t_2$, per cui

$$\begin{cases} \rho(t_1) = \rho(t_2) \\ t_2 = t_1 + 2k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ipotizziamo che la curva non sia semplice: in tal caso, la prima condizione conduce a $t_1 = -t_2$. Di conseguenza, $t_1 < t_2$ implica che $t_2 > 0$. Se operiamo la sostituzione $t_1 = -t_2$ nella seconda condizione, otteniamo $t_2 = k$, poi, tenendo conto del dominio e del fatto che $t_2 > 0$, deduciamo che l'unico valore accettabile di $k$ sia $k = 1$, sicché $t_1 = -1$ e $t_2 = 1$. Pertanto, la curva è semplice, perchè gli unici valori accettabili di $t_1$ e $t_2$ sono proprio gli estremi. (1p)

Possiamo mostrare che la curva non è regolare. Le componenti sono continue e derivabili. Derivando, si ottiene:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(-2t\cos(\pi t) + t^2\pi\sin(\pi t), 2t\sin(\pi t) + t\pi\cos(\pi t)\right), \quad t \in \; [-1, 1]$$

Pertanto, $\mathbf{r}'(0) = 0$ e la curva non è regolare (1p). Questo risultato si può ottenere anche usando il fatto che una curva in forma polare non è regolare se esiste un valore di $t$ per cui $\rho(t) = 0$ e $\rho'(t) = 0$.

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

(2p)

Si nota che $\mathbf{r}(t)$ è una curva in forma polare, percorsa in senso orario. Il supporto di $\mathbf{r}(t)$ è simmetrico rispetto all'asse $x$ e antisimmetrico rispetto all'asse $y$. Infatti, ponendo $\mathbf{r}(t) = (X(t), Y(t))$, si può notare che:

$$X(t) = X(-t) \quad ; \quad Y(t) = -Y(-t)$$

Per la forma della curva, si suggerisce di inserire qualche valore di $t$, tipo $t = -1, -1/2, 0$, in corrispondenza dei quali si trovano i punti $(1, 0)$, $(0, -1/4)$, $(0, 0)$, e tenere conto delle "simmetrie" menzionate in precedenza.

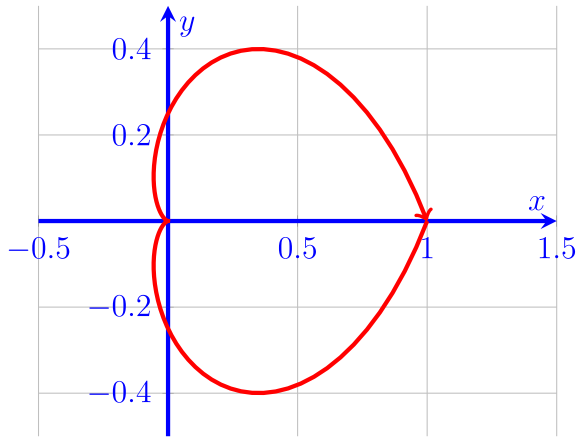



Figura 1: Supporto della curva parametrica.

2.3 Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente a $\gamma$ in $t = -\frac{1}{2}$

(2p totali)

Abbiamo che $\mathbf{r}(-1/2) = (0, -1/4)$; $\mathbf{r}'(-1/2) = \left(-\frac{1}{4}\pi, 1\right)$ Quindi l'equazione parametrica della retta tangente è (1p):

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{4}\pi(t + \frac{1}{2}) \\ y(t) = -\frac{1}{4} + (t + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana diventa: $y = -\frac{4}{\pi}x - \frac{1}{4}$ (1p).

## Problema 3 (11 punti)

Sia $f(x, y) = 4x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x^2$ .

3.1 Determinare il dominio di $f$ e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, i grafici delle sezioni $y = 0$ e $x = 0$.

(2 punti)

Il dominio di $f$ è $D_f = \mathbb{R}^2$ e la funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ in quanto funzione polinomiale in $x$ e $y$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

I grafici delle sezioni sono mostrati in Figura 2 e 3.

3.2 Mostrare che $f$ ha due punti stazionari, di cui almeno uno è estremo locale. Trovare l'immagine di $f$. DIFFICILE: stabilire la natura del secondo punto stazionario.

(7 punti tot)

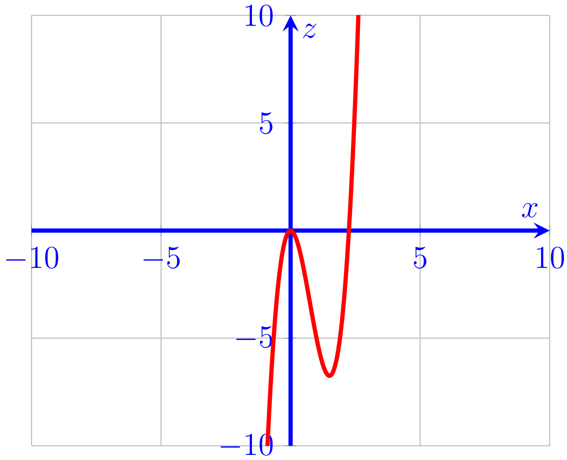



Figura 2: Sezione $y = 0$, $z = 2x^3 - 4x$ (1 p).

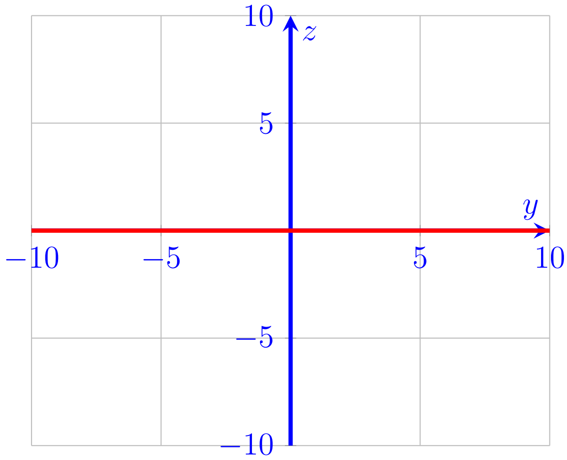



Figura 3: Sezione $x = 0$, $z = 0$ (1 p).

Il gradiente di $f$ è (2 p):

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4xy + y^2 - 18x \\ 2x^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x, y) = 0$ si ottiene dalla seconda equazione $x = 0$ oppure $x = -y$.

Per $x = 0$, dalla prima equazione si ottiene $y = 0$.

Per $x = -y$, si ottiene $(2, -2)$.

I punti stazionari quindi sono (1 p): $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, -2)$

Usiamo il test della matrice Hessiana per provare a caratterizzare tali punti. In un punto $(x, y)$ la matrice Hessiana $H_f$ è (1 p):

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x + 4y - 18 & 4x + 2y \\ 4x + 2y & 2x \end{pmatrix}$$

- $P_1$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, det $(H_f(0,0)) = 0$ , quindi il test dell'Hessiana non può essere utilizzato.
- $P_2$: $H_f(2,-2) = \begin{pmatrix} 22 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, det $(H_f(-2,2)) > 0$ e il primo termine di $H_f(2,-2)$ vale $22 > 0$, quindi $H_f$ è definita negativa in $P_2$ e $P_2$ è minimo locale (1 p).

Dalla sezione $y = 0$ si deduce che l'immagine è $\mathbb{R}$ (1 p).

DIFFICILE (1 p): per quel che riguarda la natura di $P_1 = (0,0)$, abbiamo che $f(0,0) = 0$. Consideriamo piccoli incrementi $(h,k)$ e la funzione

$$g(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = 4h^3 + 2h^2k + hk^2 - 9h^2$$

Mostriamo che $g(h,k)$ cambia segno in prossimità dell'origine, e quindi $P_1$ è punto di sella.

Prendiamo la sezione $k = 0$:

$$g(h,0) = h^2(4h-9)$$

Questa sezione assume valori negativi vicino all'origine (infatti $4h - 9 < 0$).

Se invece prendiamo la sezione

$$g(k^2, 3k) = 4k^6 + 6k^5 + 9k^4 - 9k^4 = k^5(4k+6)$$

questa assume sia valori positivi che negativi vicino all'origine.

3.3 Determinare il versore di massima discesa nel punto $(1,1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

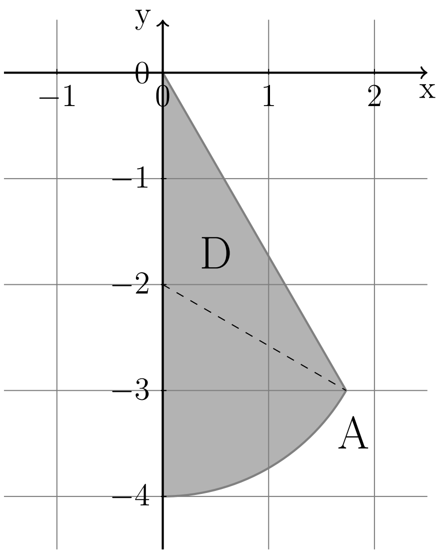
(2 punti)

Il versore $\mathbf{v}$ richiesto corrisponde all'opposto del gradiente calcolato in $(1,1)$ e normalizzato. Il gradiente in $(1,1)$ é $\nabla f(1,1) = (-1,4)$, con norma $\sqrt{17}$. Quindi $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}})$.

Il piano tangente ha equazione $z = -(x-1) + 4(y-1) - 2$.

## Problema 4 (6 punti)

Sia $D$ il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,-2)$; il vertice $A$ ha coordinate $A = (\sqrt{3}, -3)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x,y) = -2x^2(y+2)$ su $D$.



Il dominio $D$ si può scrivere come un dominio $x$-normale : (2 p):

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{4-x^2} \le y \le -\sqrt{3}x\}$$

Quindi l'integrale di $f$ su $D$ si ottiene da (4 p):

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^{\sqrt{3}} \left( \int_{-2-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{3}x} 2x^2(y+2)\,dy \right) dx =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{3}} 2x^2 \left[ \frac{(y+2)^2}{2} \right]_{-2-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{3}x} dx =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \left( (-\sqrt{3}x+2)^2 - (4-x^2) \right) dx =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{3}} 4x^4 - 4\sqrt{3}x^3\,dx =$$

$$= -\left[ \frac{4}{5}x^5 - \sqrt{3}x^4 \right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{36}{5}\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \frac{9}{5}\sqrt{3}$$

**Soluzione alternativa.** Lo stesso risultato si può ottenere scrivendo il dominio come unione di due insiemi disgiunti: $D = D_1 \cup D_2$ dove $D_1$ è il triangolo di vertici $AOB$, con $B = (0,-2)$, e $D_2$ è il settore circolare.

$D_1$ si può scrivere come dominio $x$-normale (1 p):

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \sqrt{3} \quad , \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 \le y \le -\sqrt{3}x\}$$

$D_2$ si può scrivere in coordinate polari ($x = \rho\cos\theta$; $y = -2 + \rho\sin\theta$ ) come il dominio $D_2'$, (1 p)

$$D_2' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \rho \le 2 \quad , \quad \frac{3}{2}\pi \le \theta \le \frac{11}{6}\pi\}$$

Quindi l'integrale di $f$ su $D$ si ottiene da :

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Su $D_1$: (2 p)

$$\int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2}^{-\sqrt{3}x} 2x^2(y+2)\,dy\right)dx =$$

$$= -\int_0^{-\sqrt{3}} 2x^2\left[\frac{(y+2)^2}{2}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2}^{-\sqrt{3}x} dx =$$

$$= -\int_0^{-\sqrt{3}} x^2\left((-\sqrt{3}x+2)^2 - (\frac{1}{3}x^2)\right)dx =$$

$$= -\int_0^{-\sqrt{3}} \frac{8}{3}x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 4x^2\,dx =$$

$$= -\left[\frac{8}{15}x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{24}{5}\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

Su $D_2$: (2 p)

$$\int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^2\left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2\rho^4\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= -\left(\int_0^2 2\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right) =$$

$$= \left[\frac{2\rho^5}{5}\right]_0^2\left[\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} =$$

$$= \frac{64}{5}\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{8}{5}\sqrt{3}$$