

Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 5: Costanti caratteristiche – Soluzioni

Domanda 1

Un'urna contiene tre palline numerate da 1 a 3. Si estraggono con reinserimento due palline e sia X la variabile aleatoria che indica la differenza in modulo dei numeri estratti. Si determini:

Hint: Vedere l'esercizio 1 del foglio 4

Si determini:

- (a) La funzione di ripartizione di X , con relativa rappresentazione grafica
- (b) La media e la moda di X

Soluzione: Media: $8/9$

Moda: 1

- (c) La varianza di X

Soluzione: 0.54

Domanda 2

Il numero giornaliero di interruzioni dei servizi di rete ha la seguente distribuzione di probabilità

x	0	1	2
p(x)	0.7	0.2	0.1

Una piccola azienda di commercio online stima che, ad ogni interruzione, perde 500\$. Si determini:

Hint: Vedere l'esercizio 2 del foglio 4

- (a) la funzione di ripartizione (con relativa rappresentazione grafica) delle perdite giornaliere dovute alle interruzioni di rete che subisce questa azienda.
- (b) Il valore atteso e la varianza delle perdite giornaliere dovute alle interruzioni di rete che subisce questa azienda.

Soluzione: Valore atteso: 200\$

Varianza: 110000\$²

Domanda 3

Sia data una variabile aleatoria X la cui funzione di densità è $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare media, mediana e varianza di X .

Soluzione: Media: 0 Varianza: 2

Domanda 4

X indica la vita in ore di una lampadina ed è distribuita secondo la densità

$$f(x) = \frac{100}{x^2} \mathbf{1}_{(100, +\infty)}(x).$$

Trovare la media e la varianza di X

Hint: Vedere l'esercizio 5 del foglio 4

Soluzione: ∞

Domanda 5

Sia X una variabile aleatoria continua il cui supporto è l'intervallo $[-3, 3]$, avente la funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ \frac{x^3+27}{a} & -3 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

- (a) Trovare il valore di a per cui questa funzione è una funzione di ripartizione

Soluzione: $a = 54$

- (b) Calcolare la funzione di densità di X

Domanda 6

Il reparto di assistenza clienti di un'azienda di computer dispone di sei linee telefoniche. Sia X il numero di linee in uso in un determinato momento, con funzione di ripartizione:

	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$	$4 \leq x < 5$	$5 \leq x < 6$	$6 \leq x$
$F(x)$	0	0.1	0.25	0.45	0.7	0.9	0.96	1

Trovare la funzione di probabilità di X e determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- (a) {Sono in uso al massimo tre linee}

Soluzione: 0.7

- (b) {Sono in uso meno di tre linee}

Soluzione: 0.45

- (c) {Sono in uso al meno tre linee}

Soluzione: 0.55

- (d) {sono in uso tra due e cinque linee, comprese}

Soluzione: 0.71

- (e) {non sono in uso tra due e quattro linee, comprese}

Soluzione: 0.65

- (f) {almeno quattro linee sono libere}

Soluzione: 0.45

Domanda 7

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{4} \left[1 + \log \frac{a}{x} \right] & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 4, \end{cases}$$

dove $\log(x)$ indica il logaritmo naturale di x . Trovare

- (a) Il valore di a

Soluzione: 4

- (b) $\mathbb{P}[X \leq 1]$

Soluzione: 0.597

- (c) La funzione di densità di X

Domanda 8

Un rivenditore di elettrodomestici vende tre diversi modelli di congelatori con 13.5, 15.9 e 19.1 piedi cubi di capacità, rispettivamente. Sia X la capacità (non nota e quindi casuale) del congelatore acquistato dal prossimo cliente e supponiamo che X abbia funzione di probabilità:

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

- (a) Trovare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\text{Var}[X]$

Soluzione: 16.38; 272.298; 3.9936

- (b) Se il prezzo di un congelatore con capacità di X piedi cubi è $17X + 180$, qual è il prezzo previsto pagato dal prossimo cliente per l'acquisto di un congelatore?

Soluzione: 458.46

- (c) La deviazione standard o scarto quadratico medio di una variabile casuale si definisce come la radice quadrata della sua varianza. Qual è la deviazione standard del prezzo $17X + 180$ pagato dal prossimo cliente?

Soluzione: 33.97

- (d) Supponiamo che, sebbene la capacità nominale di un congelatore è X , quella effettiva sia $h(X) = X - 0.01X^2$. Qual è la capacità effettiva prevista per il congelatore acquistato dal prossimo cliente?

Soluzione: 13.657