G. Santin 17.06.2024

Esame del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Corso di Laurea in Informatica

Tema B

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.

Esercizio 1 (Studio di funzione) .... **15 punti**

Considerare la funzione

$$f(x) = -(x+1)\log(|x+1|) \ ,$$

dove $\log = \log_e$.

(a) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi e studiarne il segno.

(b) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.

(c) Discutere la continuità e derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

(d) Calcolare $f''(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di concavità e convessità di f determinando, se esistono, i punti di flesso.

(e) Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Soluzione ....

Conviene scrivere la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)\log(-x-1), & x < -1 \\ -(x+1)\log(x+1), & x \geq -1. \end{cases}$$

(a) Dividiamo per punti:

- Dobbiamo richiedere $|x-1| > 0$, quindi $x \neq -1$.
- Calcoliamo

  $$f(-x) = -(-x+1)\log(|-x+1|) = (x-1)\log(|x-1|),$$

  e siccome $f(x) \neq f(x)$, $f(x) \neq -f(x)$ la funzione non è ne' pari ne' dispari.
- Abbiamo $f(0) = -\log(1) = 0$, e quindi il grafico di f interseca l'asse y in $(0,0)$.
- Per l'asse x abbiamo $f(x) = 0$ se $x+1 = 0$ oppure $\log(|x+1|) = 0$. Il primo caso dà $x = -1$, che non è nel dominio. Il secondo caso dà $x = 0$ oppure $x = -2$, e quindi i punti $(0,0)$ e $(-2,0)$.
- Per lo studio del segno abbiamo $-(x+1) > 0$ se e solo se $x < -1$, mentre $\log(|x+1|) > 0$ se e solo se $|x+1| > 1$, cioè se $x < -2$ oppure $x > 0$. Quindi abbiamo lo studio del segno come in Tabella 2.

		-2		-1		0	
$-(x+1)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\log(\lvert x+1\rvert)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Tabella 2: Studio del segno di f.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e $x = -1$. Per sostituzione otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -(x+1)\log(-x-1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -(x+1)\log(x+1) = -\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Inoltre, usando il limite notevole $\lim_{t\to 0^+} t\log(t) = 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} -(x+1)\log(-x-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} -(x+1)\log(x+1) = 0,$$

e quindi non ci sono asintoti verticali.

Dobbiamo ora verificare la presenza di asintoti obliqui (visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$). Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(x+1)}{x}\log(-x-1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(x+1)}{x}\log(x+1) = -\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti obliqui.

(c) La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio perchè è data da somme, rapporti e composizioni di funzioni continue e derivabili.

Calcoliamo la derivata prima nei due intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\log(-x-1) - (x+1)\frac{1}{-x-1}(-1) = -\log(-x-1) - 1, & x < -1 \\ -\log(x+1) - (x+1)\frac{1}{x+1} = -\log(x+1) - 1, & x > -1. \end{cases}$$

Studiamo il segno di f' nei due intervalli:

- $x < -1$: $f'(x) = -\log(-x-1) - 1 \geq 0$ se e solo se

$$\log(-x-1) \leq -1 \Leftrightarrow -x-1 \leq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq -1-e^{-1} \approx -1.37.$$

	$-\infty$	$-1-e^{-1}$		-1		$-1+e^{-1}$	
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Tabella 3: Studio del segno di f' e intervalli di crescenza e descrescenza di f.

- $x > 1$: $f'(x) = -\log(x+1) - 1 \geq 0$ se e solo se

$$\log(x+1) \leq -1 \Leftrightarrow x+1 \leq e^{-1} \Leftrightarrow x \leq -1+e^{-1} \approx 0.63.$$

Riassumendo, otteniamo lo studio del segno di f', e quindi i rispettivi intevalli di crescita e descrescita di f, come in Tabella 3.

Il valore che f assume nei due max/min locali è

$$f(-1-e^{-1}) = e^{-1}\log(e^{-1}) = -e^{-1} \approx -0.37,$$
$$f(-1+e^{-1}) = -e^{-1}\log(e^{-1}) = e^{-1} \approx 0.37.$$

Nessuno di questi punti è di minimo o massimo assoluto, perchè f non è limitata superiormente ne' inferiormente.

(d) Nel dominio di f abbiamo

$$f''(x) = \begin{cases} (-\log(-x-1)-1)' = -\frac{1}{-x-1}(-1) = -\frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ (-\log(x+1)-1)' = -\frac{1}{x+1}, & x > -1, \end{cases}$$

e quindi abbiamo lo studio del segno di f'', e gli intervalli di convessità e concavità e punti di flesso di f come in Tabella 4.

		-1	
f''	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\cup$	$\nexists$	$\cap$

Tabella 4: Studio del segno di f'' e intervalli di convessità e concavità di f.

(e) Il grafico di f è abbozzato in Figura 1. L'immagine di f è $]-\infty, +\infty[$, visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

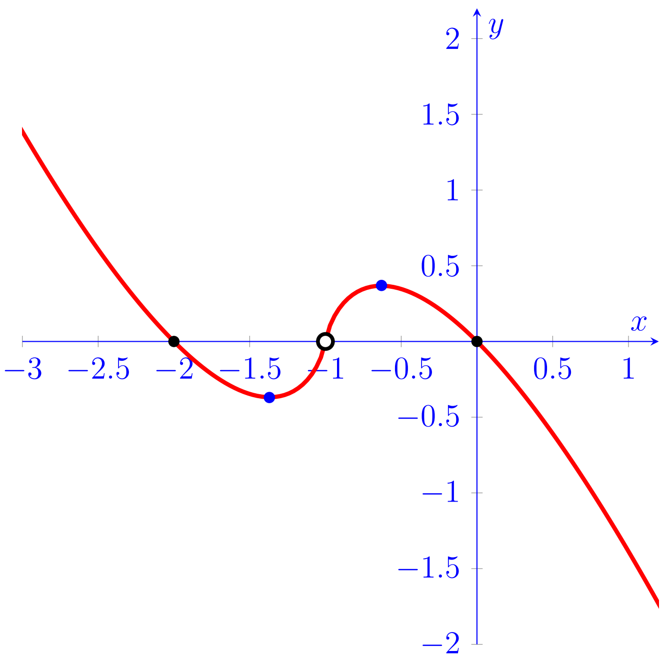

Figura 1: Grafico della funzione f.

Esercizio 2 (Definizione di limite) . . . . **4 punti**

Verificare l'identità seguente utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x+1)^2} = 0^-.$$

Soluzione . . . .

Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $M > 0$ per cui

$$x > M \Rightarrow -\varepsilon < \frac{-1}{(x+1)^2} < 0.$$

Abbiamo quindi due disequazioni:

- Per soddisfare $\frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ basta richiedere $x \neq -1$, quindi ci basta prendere $M > 0$.
- Per soddisfare $-\varepsilon < \frac{-1}{(x+1)^2}$ dobbiamo richiedere che $-\varepsilon(x+1)^2 < -1$, cioè che $(x+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè che $|x+1| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Visto che cerchiamo un x positivo, questo equivale a richiedere che $x+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, cioè $x > -1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Quindi possiamo prendere

$$M = -1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Esercizio 3 (Polinomio di Taylor) .... **7 punti**

Considerare la funzione $g(x) = e^{\cos(x/2)} - e$.

(a) Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in tal caso, determinarne il periodo.

(b) Calcolare il polinomio di Taylor di g di grado $n = 2$ centrato in $x_0 = 4\pi$.

Soluzione ....

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $g(x) = 0$ se e solo se $\cos(x/2) = 1$, ovvero $\frac{x}{2} = 0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $x = 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per verificare la simmetria calcoliamo

$$g(-x) = e^{\cos(-x/2)} - e = e^{\cos(x/2)} - e = g(x),$$

e quindi la funzione è pari.

La funzione $\cos(x/2)$ è periodica di periodo 4π, e quindi lo è anche g.

(b) Il polinomio di Taylor di secondo grado ha equazione

$$T_{2,x_0}(x) = g(x_0) + g'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0)\,(x - x_0)^2\,.$$

Usando la formula di derivazione della funzione composta e del prodotto, otteniamo

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{1}{2} e^{\cos(x/2)} \sin(x/2) \\
g''(x) &= \left(-\frac{1}{2} e^{\cos(x/2)} \sin(x/2)\right)' = -\frac{1}{2}\left(e^{\cos(x/2)} \sin(x/2)\right)' \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(x/2) e^{\cos(x/2)} \sin(x/2) + \frac{1}{2} e^{\cos(x/2)} \cos(x/2)\right) \\
&= -\frac{1}{4} e^{\cos(2x)} \left(-\sin^2(x/2) + \cos(x/2)\right),
\end{aligned}$$

e quindi per $x_0 = 4\pi$ otteniamo

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= e^{\cos(x_0/2)} - e = e^{\cos(2\pi)} - e = 0, \\
g'(x_0) &= -\frac{1}{2} e^{\cos(x_0/2)} \sin(x_0/2) = -\frac{1}{2} e^{\cos(2\pi)} \sin(2\pi) = 0, \\
g''(x) &= -\frac{1}{4} e^{\cos(x_0/2)} \left(-\sin^2(x_0/2) + \cos(x_0/2)\right) = -\frac{1}{4} e^{\cos(2\pi)} \left(-\sin^2(2\pi) + \cos(2\pi)\right) = -\frac{1}{4} e.
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_{2,x_0}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} e\right)(x - 4\pi)^2 = -\frac{1}{8} e (x - 4\pi)^2.$$

Esercizio 4 (Integrali) . . . . **7 punti**

Considerare le funzioni

$$h_1(x) = -\sin(2x), \quad h_2(x) = x\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Studiare il segno delle due funzioni nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, e abbozzarne il grafico nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Determinare l'area della regione compresa fra i grafici delle funzioni h_1 e h_2 nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluzione . . . .

(a) Per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ abbiamo $h_1(x) = 0$ se e solo se $x = -\pi/2, x = 0, x = \pi/2$, mentre $h_1(x) > 0$ se e solo se $x < 0$.

Invece abbiamo $h_2(x) = 0$ se e solo se $x = 0, x = -\pi/2$, e $h_2(x) < 0$ per $-\pi/2 < x < 0$, mentre $h_2(x) > 0$ per $0 < x < \pi/2$.

I grafici delle due funzioni sono abbozzati in Figura 2.

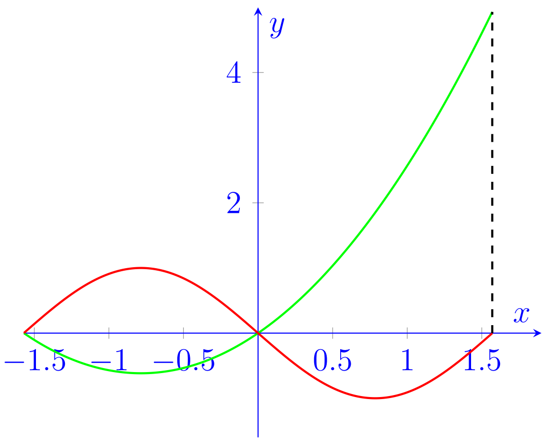

Figura 2: I grafici delle funzioni h_1 (in rosso) e h_2 (in verde).

(b) L'area è data dall'integrale definito

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |h_1(x) - h_2(x)|\, dx.$$

Dallo studio del segno del punto precedente abbiamo che

$$A = |h_1(x) - h_2(x)| = \begin{cases} h_1(x) - h_2(x), & -\pi/2 \le x \le 0 \\ h_2(x) - h_1(x), & 0 \le x \le \pi/2, \end{cases}$$

e quindi possiamo spezzare l'integrale in due parti, e calcolarlo come

$$\begin{aligned} A = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} |h_1(x) - h_2(x)|\,dx &= \int_{-\pi/2}^{0} (h_1(x) - h_2(x))\,dx + \int_0^{\pi/2} (h_2(x) - h_1(x))\,dx \\ &= -\int_{-\pi/2}^{0} (h_2(x) - h_1(x))\,dx + \int_0^{\pi/2} (h_2(x) - h_1(x))\,dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale definito di

$$h_2(x) - h_1(x) = x\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(2x) = x^2 + \frac{\pi}{2}x + \sin(2x),$$

cioè

$$\begin{aligned} \int (h_2(x) - h_1(x))\,dx &= \int \left(x^2 + \frac{\pi}{2}x + \sin(2x)\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x) + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Scegliamo la primitiva $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x)$ con $c = 0$, e calcoliamo l'area come

$$\begin{aligned} A = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} |h_1(x) - h_2(x)|\,dx &= -\int_{-\pi/2}^{0} (h_2(x) - h_1(x))\,dx + \int_0^{\pi/2} (h_2(x) - h_1(x))\,dx \\ &= -\left[F(x)\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[F(x)\right]_0^{\pi/2} = -F(0) + F(-\pi/2) + F(\pi/2) - F(0) \\ &= -2F(0) + F(-\pi/2) + F(\pi/2), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} F(0) &= -\frac{1}{2}\cos(0) = -\frac{1}{2} \\ F(\pi/2) &= \frac{1}{3}(\pi/2)^3 + \frac{\pi}{4}(\pi/2)^2 - \frac{1}{2}\cos(\pi) = \frac{1}{24}\pi^3 + \frac{1}{16}\pi^3 + \frac{1}{2} = \frac{5}{48}\pi^3 + \frac{1}{2} \\ F(-\pi/2) &= \frac{1}{3}(-\pi/2)^3 + \frac{\pi}{4}(-\pi/2)^2 - \frac{1}{2}\cos(-\pi) = -\frac{1}{24}\pi^3 + \frac{1}{16}\pi^3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{48}\pi^3 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Quindi

$$A = -2F(0) + F(-\pi/2) + F(\pi/2) = 1 + \frac{6}{48}\pi^3 + 1 = 2 + \frac{\pi^3}{8}.$$