Funzioni

$$f : A \to B$$
$$x \to y = f(x)$$

"esiste un solo"

f funzione se $\forall x \in A \ \exists! \, y \in B$ tale che $y = f(x)$

A = dominio di f , B = codominio

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$$
$$\underset{\mathbb{R}}{x} \to y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Grafico di f

$$G(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in D) \wedge (y = f(x)) \}$$
$$G(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow G(f) = \text{sottoinsieme del piano cartesiano}$$

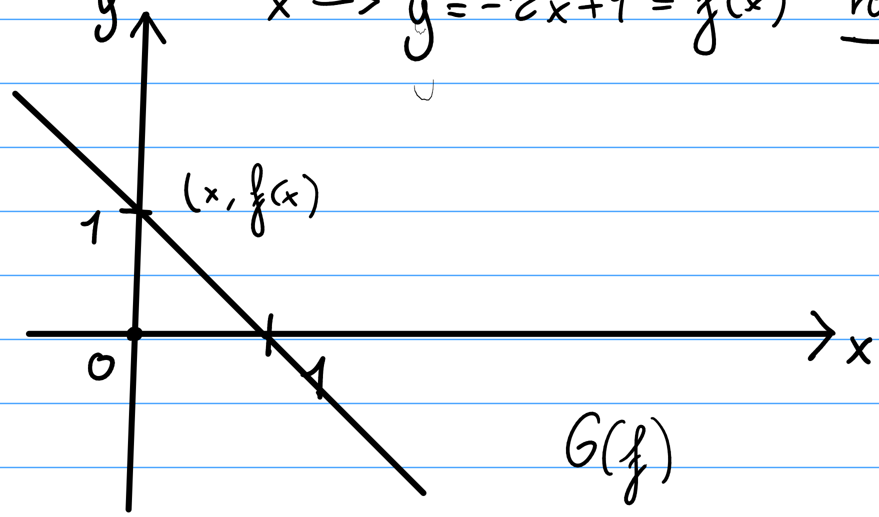
Immagine di f

$$\text{Im}(f) = f(D) = \{ y \in B \mid \exists x \in D \text{ tale che } y = f(x) \}$$
$$\text{Im}(f) \subseteq B \text{ (codominio)}$$

esempi

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = -2x+1 = f(x)$ <u>retta</u>



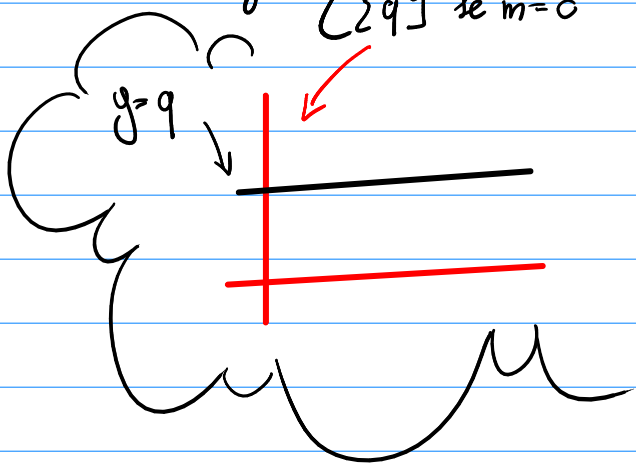
$Im(f) = \mathbb{R}$ → corrisponde ai valori di y corrisposti a $f(x)$, tutti quanti!

Retta f

$y = mx + q$ retta

coefficiente angolare (m), intercetta (q)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } m \neq 0 \\ \{q\} & \text{se } m = 0 \end{cases}$



Parabola f

asse simmetria (- - - -)

$x(x-2)$ $\quad x_a = 1 \quad x(x-2)=0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

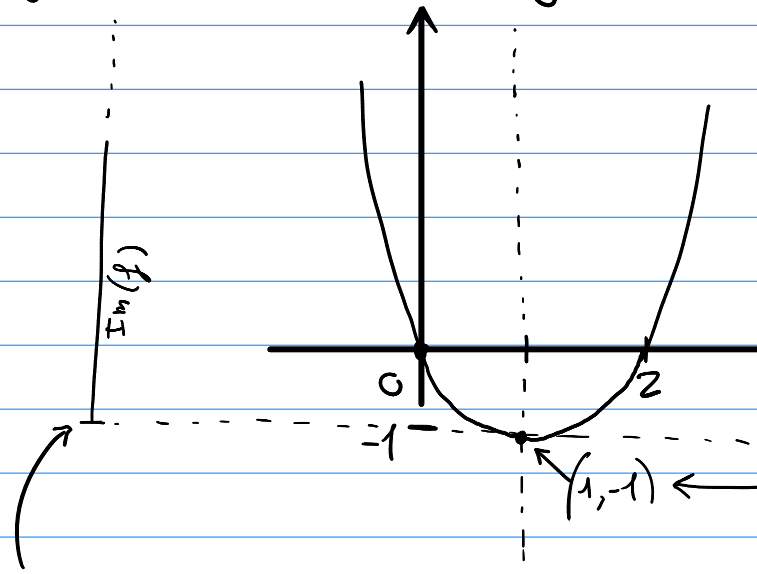
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to y = x^2 - 2x = f(x)$

$(x_1+x_2)/2 = 1$

vertice = 1 sostituito alla x

$1(1-2) = -1$

vertice $= (1,-1)$



$\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty[$

$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0 \Rightarrow$ (caso generale di parabola)

$$\mathrm{Im}(f) \begin{cases} [y_v, +\infty[& \text{se } a>0 \\ ]-\infty, y_v] & \text{se } a<0 \end{cases}$$

Trovare coord. vertice

vertice (x_v, y_v)

$x_v = -\frac{b}{2a} \to$ asse simmetria

$y_v = f(x_v)$

Controimmagine

dominio ricorda $\quad f: D \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{\leftarrow}(C) = \{ x \in D \mid f(x) \in C \}$$

$(C \subseteq B) \qquad f^{\leftarrow}(C) \subseteq D$

altro foglio

usiamo la parabola di cui sopra per fare i calcoli

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto y = x^2 - 2x = f(x)$$

$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{0, 2\}$

controimmagine = valori di x da y!!

$f^{\leftarrow}(\{-1\}) = \{1\}$

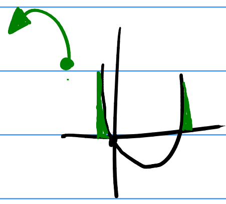
$f^{\leftarrow}(C) \subseteq D$

y!!

$f^{\leftarrow}(\{-2\}) = \emptyset$

$f^{\leftarrow}([-2, 3[) = \,]-1, 3[$

$f^{\leftarrow}(]0, 3]) = [-1, 0[\,\cup\,]2, 3]$



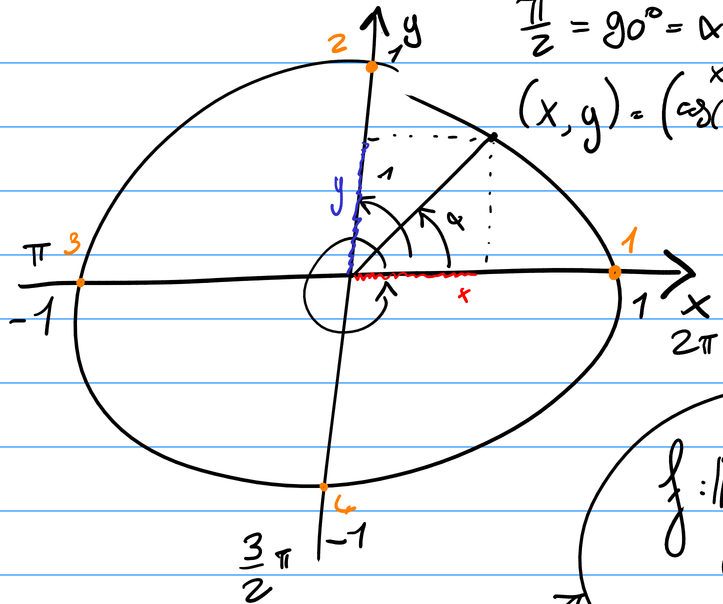
Funzione di Seno

$\frac{\pi}{2} = 90° = \alpha$

$(x, y) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$x^2 + y^2 = 1$

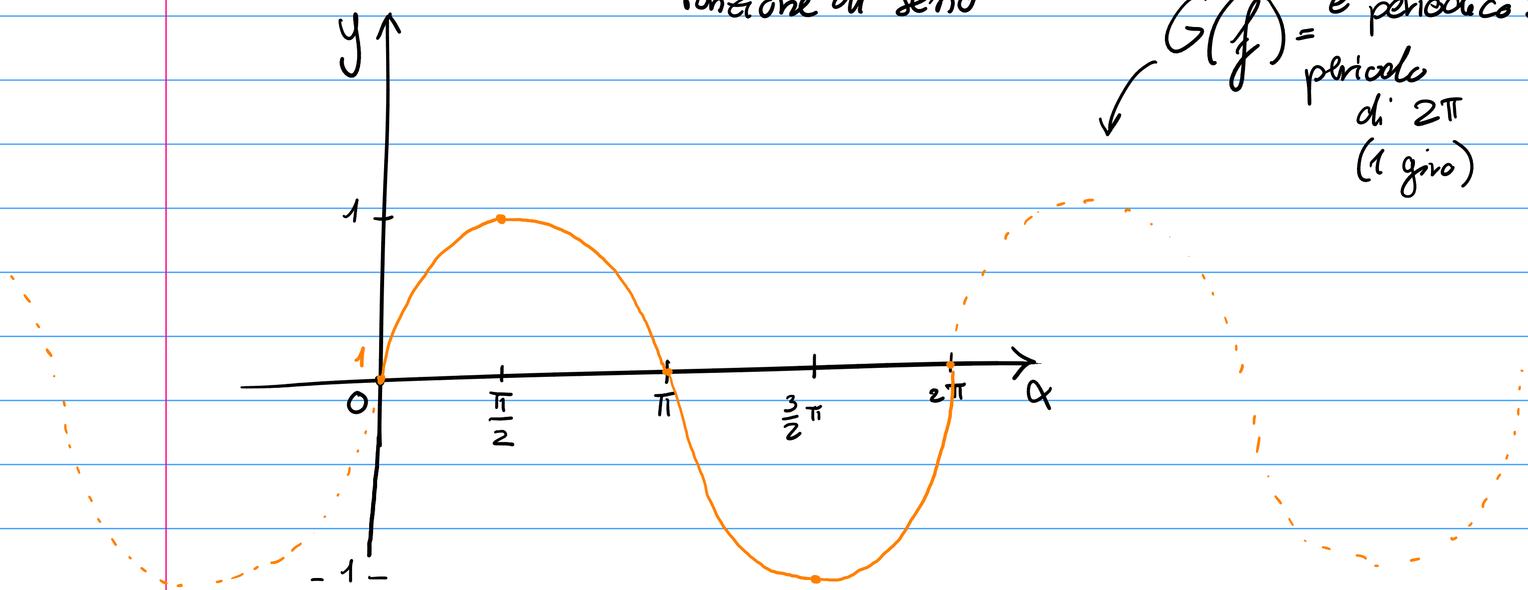
$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto y = \sin(\alpha)$$

generale funzione di seno

$G(f) =$ é periodico! periodo di 2π (1 giro)



contro immagine di 0?

$$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, -\pi, -2\pi, \ldots\} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f^{\leftarrow}(\{1\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

y non é mai -2!

$$f^{\leftarrow}([-2, 1]) = \mathbb{R} \qquad f^{\leftarrow}(\{-2\}) = \emptyset$$

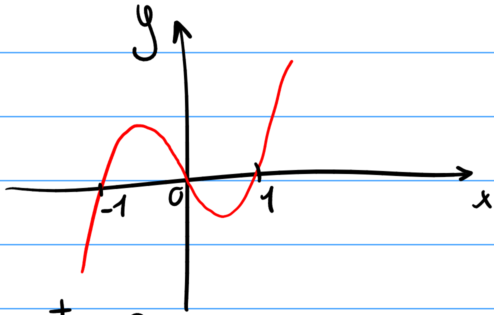
$$f: D \subseteq \mathbb{R} \longmapsto B \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

- iniettiva se $\forall y_0 \in B$ esiste al più un $x_0 \in D : f(x_0) = y_0$
- suriettiva se $\forall y_0 \in B$ esiste almeno un $x_0 \in D : f(x_0) = y_0$
- biettiva se $\forall y_0 \in B$ esiste un unico $x_0 \in D : f(x_0) = y_0$

Esempi

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $y = x$ biettiva
- $y = x^2$ → no iniettiva $(f(-1) = f(1))$
  → no suriettiva $(f^{\leftarrow}(-1) = \emptyset)$
- $y = 3x^2 - x$ no iniettiva → non unico valore
  $= x(x^2-1)$ si suriettiva
  ↳ $G(f)$ →



- $y = \sqrt{x}$ $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ iniettiva, no suriettiva

a) f é iniettiva $\Leftrightarrow$ ("se e solo se") dati $x_1, x_2 \in D$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

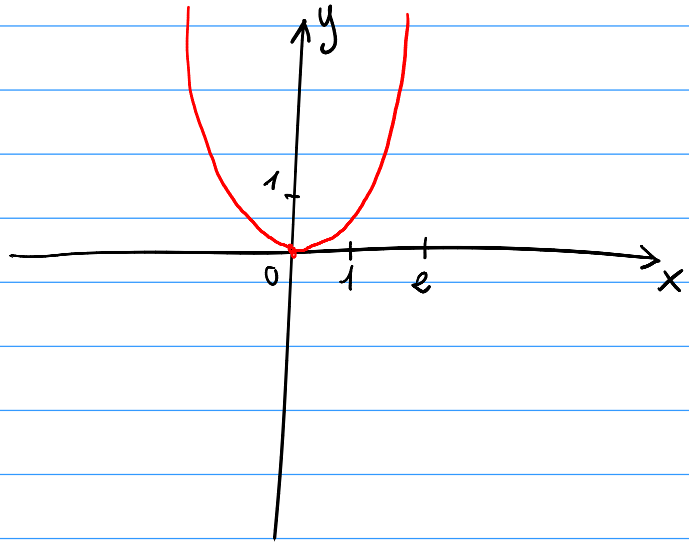
b) f é iniettiva $\Leftrightarrow$ dati $x_1, x_2 \in D$ tali che $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

c) f é suriettiva $\Leftrightarrow f(D) = B$

d) biettiva = sia iniettiva sia suriettiva

Restrizioni del dominio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y = x^2$$



no iniettiva

no suriettiva

$$Im(f) = [0, +\infty[$$

$$g : D \mapsto [0, +\infty[\qquad x \mapsto y = x^2$$

g biettiva

perché sia possibile allora

$$D = [0, +\infty[$$

oppure

$$D' =]-\infty, 0]$$

$$g = f|_D$$

si legge ristretta, restrizione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y = \sin(x)$$

$$Im(f) = [-1, 1]$$

$$g : D \to [-1, 1] \qquad x \to y = \sin(x)$$

$$D = [-\pi/2, \pi/2]$$

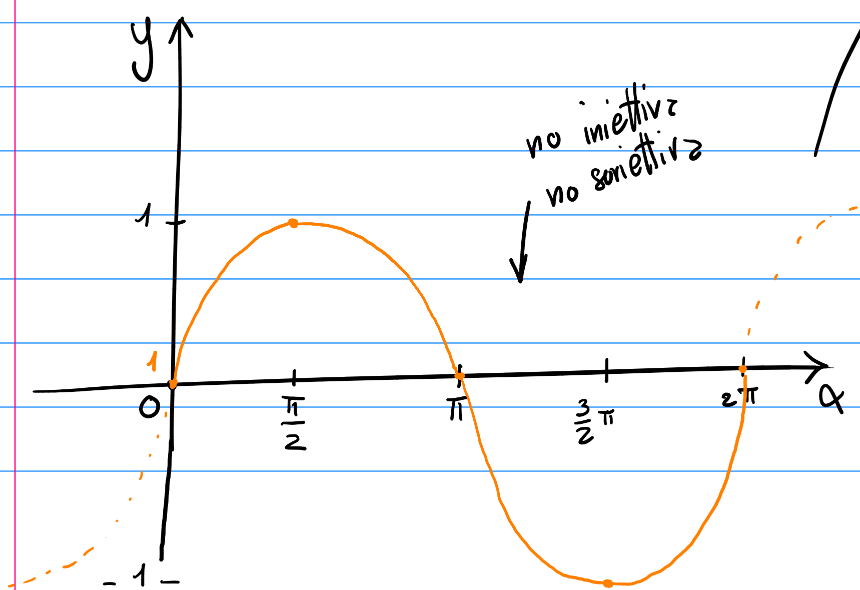
oppure

$$D = [\pi/2, 3\pi/2]$$

$$g = f|_D$$

no iniettiva

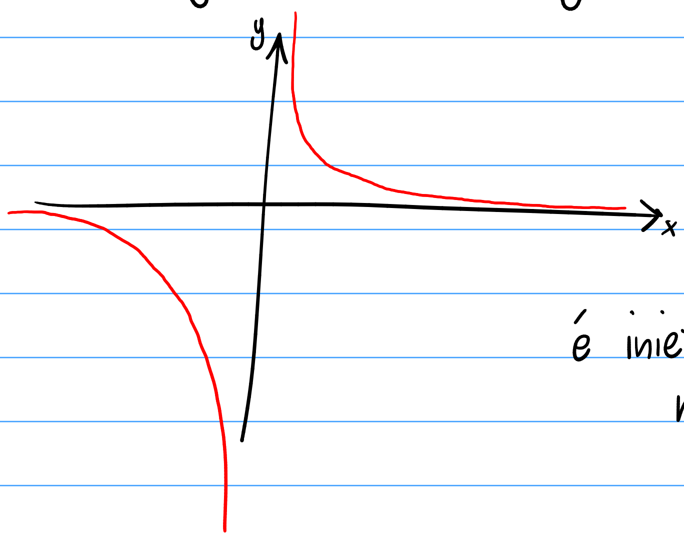
no suriettiva



[se f é monotona (crescente o decrescente (strettamente)) allora f é iniettiva]

esistono peró funzioni iniettive non strettamente monotone!

$y = 1/x$



$\setminus\{0\}$ -> zero é escluso, ovviamente

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x)$

é iniettiva e non monotona, monotona solo se guardiamo una delle due parti