COMBINATORIA

n = elem   k = estratti

ORD $P_n = n!$ $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ $P'_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots}$ $D'_{n,k} = n^k$

NO ORD $C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $C' = \frac{n+k-1}{k!(n-1)!}$

DE MORGAN $P[\bar A \cap \bar B] = 1 - P[A \cup B]$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- $P[\bar A] = 1 - P[A]$

INDIPENDENZA $P[A \cap B] = P[A]P[B]$

DISGIUNZIONE $P[A \cap B] = \varnothing$ o succede A o succede B

- $A \cup B \cup C = A + B + C - A\cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$

Sis. in Serie

P_i = prob. guasto A_i = componente funzionante

$$P[A] = \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} (1-P_i)$$

Sis in Parallelo

$$P[A] = 1 - \prod_i^n [\bar A_i] = 1 - \prod_i^n P_i$$

BAYES

$$P[A_m | B] = \frac{P[B|A_m]\, P[A_m]}{\sum_i P[A_i]\, P[B|A_i]}$$

- $P[\bar A | B] = 1 - P[A|B]$
- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$

F. di PROBABILITÀ P(x)

$\int_a^a f(x)dx = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

F. di RIPARTIZIONE F(x)

- non decresc. Valori minori o al+ =
- $\lim_{-\infty} = 0$
- $\lim_{+\infty} = 1$

CONT: $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ DISCR: $F(x) = P[X \le x] = \sum_{i: x_i \le x} P[x_i]$

E[X] V. atteso/Media

$\sum P_i \cdot x_i$ / $\int_D x f(x) dx$

- $E[a] = a$
- $E[aX+b] = aE[X]+b$
- $E[X - E[X]] = 0$

SCARTO QUADR.

Var[X]

Indice dispersione quadratica valori da E[X]

- $X - E[X]$ = SCARTO
- $(x - E[x])^2$

$\sum_i x_i^2 P_i - E[X]^2$ / $\int_D x^2 f(x) dx - E[X]^2$

SCARTO QUADR. MEDIO $\sigma = \sqrt{Var[X]}$

- $Var[a] = 0$
- $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

MODA: punto/i in cui $f(x)$ assume valore max

QUANTILI: $F(q_\alpha) = P[X \le q_\alpha] \geq \alpha$

RANGO INTERQ. 3° quart − 1° quartile

MEDIANA Quantile lv $\frac{1}{2}$

Distribuzioni	P[X = x]	E[X]	Var[X]		
UNIFORME DISCRETA	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}\sum x_i = \frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	unif(x,a,b)	
IPERGEOM $X \sim Ig(N,K,n)$	$\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} / \binom{N}{n}$	$n\frac{K}{N}$	$E[X]\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$	hyper(x,K,N-K,n)	#successi su n estraz senza reinserim N elem di cui K soddisfano
BERNOULLI $X \sim Ber(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$	/	X vale 0, 1 con prob p
BINOMIALE $X \sim Bin(n,p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$n \cdot p$	$np(1-p)$	• binom(x,n,p)	#successi su n prove bernoulli con ognuna prob p di successo
POISSON $\lambda > 0$ $X \sim Pois(\lambda)$	$\frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$	λ	λ	pois(x,λ)	Prob di avere x volte un fenomeno con media λ
GEOM $X \sim Geo(p)$	$(1-p)^{x-1} \cdot p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	• geom(x,p)	rep. indipendenti necessarie x primo succ evento con prob. p
UNIFORME CONTINUA $X \sim Unif(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$ / $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	unif(x,a,b)	
NORMALE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	Tavola STANDARD $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$	μ	σ^2	norm(x,μ,σ)	
GAMMA $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	gamma(x,α,λ)	MODA = $\frac{\alpha-1}{\lambda}$ solo se $\alpha > 1$; $\alpha \le 1$ NO MODA
EXP $X \sim Exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	exp(x,λ)	

CONGIUNTE

Cong. Continue se f è integrabile e $\iint_{\mathbb{R}^2} = 1$

$P[X=x, Y=y] = p(x,y)$ / $f(x,y) = 0$, $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$

MARGINALI

$P_X(x) = \sum_i p(x, y_i)$ / $f_X(x) = \int_Y f(x,y)dy$

$P_Y(y) = \sum_i p(x_i, y)$ / $f_Y(y) = \int_X f(x,y)dx$

RIPARTIZIONE

$F(x,y) = F[X \le x, Y \le y]$ / $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$ } sul dominio di X e Y

INDIPENDENZA

$P_X(x) \cdot P_Y(y) = p(x,y)$ / $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$ ← Se supporto NON rettangolare NON sono INDIP

CONDIZIONATE

$P_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{P_Y(y)}$ / $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ ← Se INDIPEND

COVARIANZA

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

- $Cov[aX, bY] = a \cdot b \cdot Cov[X,Y]$
- $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$
- $Cov[X,X] = Var[X]$

CORRELAZIONE $-1 \le cor \le 1$

$Cor[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X] \cdot Var[Y]}}$

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $Var[aX+bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y] + 2ab\, Cov$

- $P[X < x]$ = pgeom$(x-2)$
  $P[X \le x]$ = pgeom$(x-1)$
- $n \geq 100$, $p \le 0.05$ $Bin \sim Pois(np)$
- $np(1-p) \geq 10$ $Bin \sim N(np, np(1-p))$

CORREZ CONTINUITÀ

- $[X = x] \to [x - \frac{1}{2} \le x \le x + \frac{1}{2}]$
- $[X > x] \to [X > x + \frac{1}{2}]$
- $[X \geq x] \to [X > x - \frac{1}{2}]$
- $[X < x] \to [X < x - \frac{1}{2}]$
- $[X \le x] \to [X < x + \frac{1}{2}]$

Processo Poisson $\{X_t\}_{t \ge 0}$

$X_t \sim Pois(\lambda t)$ X_t = # eventi

- λ = # medio eventi per unità tempo
- $T_n \sim Ga(n, \lambda)$ tempo n occorrenze successive
- $T_1 \sim Exp(\lambda)$ tempo tra evento e successivo

$E[X]$ Congiunte CONDIZIONATA

$E[X|Y] = \sum_x x\, p(x|y) \,/\, \int_x x f(x|y)\,dx$

$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j \, P(x_i, y_j) \,/\, \int_y \int_x xy\, f(x,y)$

Somme V.A.

- n v.a $\sim Bin(1,p) \to Z \sim Bin(n,p)$
- n v.a $\sim Pois(\lambda_i) \to Z \sim Pois(\Sigma \lambda_i)$
- n v.a $\sim Exp(\lambda) \to Z \sim Ga(n,\lambda)$
- n v.a $\sim N(\mu,\sigma^2) \to Z \sim N(\Sigma\mu, \Sigma\sigma^2)$

Media CAMPIONARIA

$\bullet\ E[X_i] = \mu \quad Var[X_i] = \sigma^2$

$\bullet\ E[\overline{X}_n] = \mu \qquad Var[\overline{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$

CHEBYSHEV dimostrazval sono più concentrati intorno media

$P[|X - E[X]| > \varepsilon] \le \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$

$P[|X - E[X]| < \varepsilon] \ge 1 - \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$

TLC

approssima distribuzione sequenza n v.a. iid. con E e Var valori finiti con $\sim N(0,1)$

$\bullet\ E[X_i] = \mu \quad \cdot\ Var[X_i] = \sigma^2$

① $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ OPPURE ② $\dfrac{\sum_i^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \sum_i^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

Catene MARKOV

v.a. DISCRETE

Modello rappr. v.a. legate da una determinata dipendenza e loro probabilità. V.a assumono valori in insieme finito detto Spazio degli Stati

$P = \begin{array}{c|c} & \text{Arrivo} \\ \hline \text{partenza} & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$ matrice di transizione

$P^n \to$ transiz a n passi $= \underbrace{P \cdot P \cdots P}_{n \text{ volte}}$

$\cdot\ P_{ij} \ge 0 \qquad \cdot\ \sum_j^M P_{ij} = 1$

$\pi^{(0)} \to$ stato iniziale $\qquad \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n$

MARGINALE $= \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n$

STAZIONARIA

$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} \wedge \sum_i^M \pi_i = 1$

Se X_0 ha distrib staz $\to$ CATENA STAZION.

REGOLARE

catena è regolare se ad un certo passo n P^n ha solo elem > 0

GRANDI NUMERI

descrive andamento media di seq v.a. iid, $E=\mu$ $Var=\sigma^2$

con $E=\mu$

FORTE $X_n \longrightarrow \mu$ q.c.

con E e Var

Debole $X_n \xrightarrow{P} \mu$

MANCANZA MEMORIA

$\sim Exp \sim Geom$

$P[X>t+s \,|\, X>t] = \frac{P[X>t+s]}{P[X>t]} = P[X>s]$

CONVERGENZE

per $n \longrightarrow +\infty$

Data seq X_n di v.a. con ripartizione F_n e una v.a. X con ripartizione F

In PROBAB: All'aumentare di n i valori assunti da X_n differiscono sempre meno da quelli di X nello stesso intervallo ε

$X_n \xrightarrow{P} X$ se $P[|X_n - X| > \varepsilon] \longrightarrow 0$

In DISTRIBUZ: all'aumentare di n, il valore $X_n \le x$ assumerà valori sempre + uguali a X nello stesso interv. X_n e X possono assumere valori differenti, essendo anche modellati su fenomeni differenti.

$X_n \xrightarrow{d} X$ se $F_n(X) \longrightarrow F(X)$ $\forall x$ di continuità di F

QUASI CERT/con PROB 1: X_n e X all'aumentare di n differiranno in limite solo su eventi di prob. nulle

$X_n \longrightarrow X$ q.c. se $P[X_n \longrightarrow X] = 1$ LGN FORTE

CONDIZIONATE MARKOV

$P[X_2 = j | X_0 = i] = P[X_2 = j | X_1 = k] \cdot P[X_1 = k | X_0 = i] = P^2_{ij}$

$P[X_2 = j | X_1 = i] = \pi^{(1)} \cdot P_{1,2}$ matrice 1 perchè cambia solo 1 stato

V.A. f. che assume valori det da esito fenomeno aleatorio $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ DISCR/CONTINUA

Cov $\to$ Val Atteso prodotto scarti da media di X e Y **Cor** $\to$ forza dipendenza lineare

Quantile $\to$ min valore q_α : $F(q_\alpha) \ge \alpha$. Generalizza mediana distribuz.

Legge Ev. rari $\to$ approssimaz Bin~Pois perchè $n \to \infty, p \to 0$, successi molto rari

Processo Pois modellaz eventi intervallo tempo t, $E[X]$ dipende solo da ampiezza t.

Media Camp Somma n v.a. iid diviso n. No facile calc distribuz ma Var e E sì.

Passegg. Aleatoria Catena, spazio stati $= \mathbb{Z}$. Movim a dx con p, Mov a sx con $(1-p)$

Con BARRIERE: non assorbenti che raggiunte, portano sistema a stato prec.

Probabilità: misura incertezza che accada un determinato fenomeno

Assioma Positività $P[A] \ge 0$, Ass. di Normalizz. $P[\Omega] = 1$

Assioma Additività: Sequenza Eventi incompatibili $A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow P\left[\bigcup_1^\infty A_i\right] = \sum_1^\infty P[A_i]$