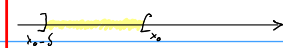


definizione di limite destro e sinistro pag. 10

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 accum. di D

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x < x_0$)

\hookrightarrow se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \forall x: x_0 - \delta < x < x_0$



definizione di limite (ε - δ) pag. 4

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 punto di accumulazione per D_f

ovvero che l è un limite di f per x tende a x_0

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon) \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D_f$

Teorema di unicità

pag. 7

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 di accum. in D_f

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$

allora
 $l_1 = l_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

pag. 11

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

pag. 13 limiti di somma
prodotto, rapporto

Teorema di permanenza del segno

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 accum. di D_f

• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ allora

$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D_f$

• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ allora

$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D_f$

pag. 8

teorema teorema del confronto (o dei carabinieri)

pag. 12

f, g, h funzioni definite su intervallo I ; x_0 di acc. per I

assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in I$

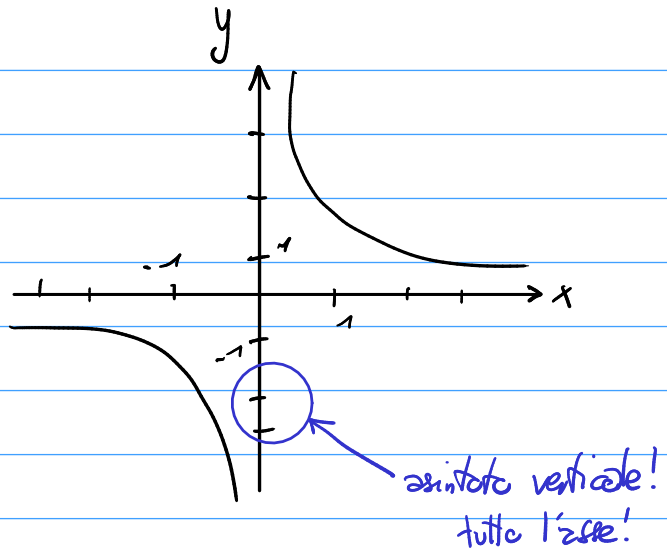
• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

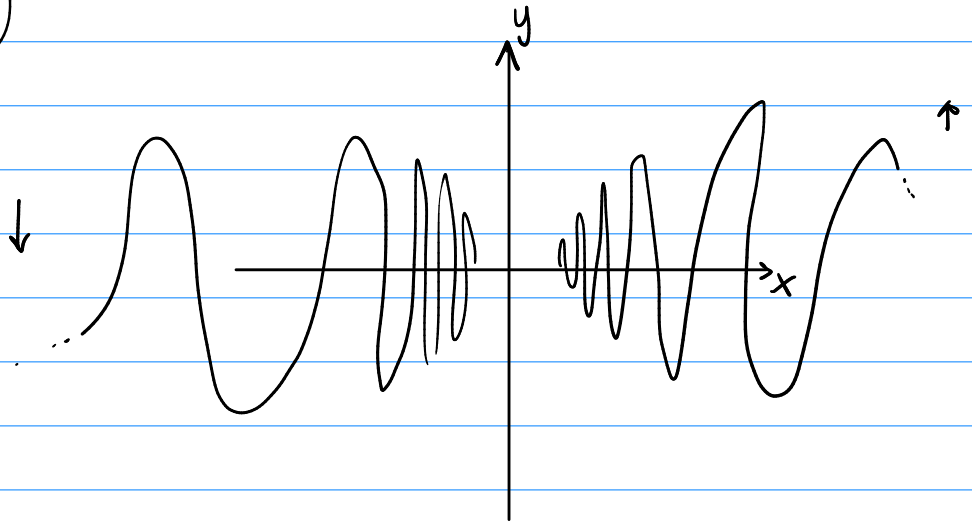
• se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

Limiti

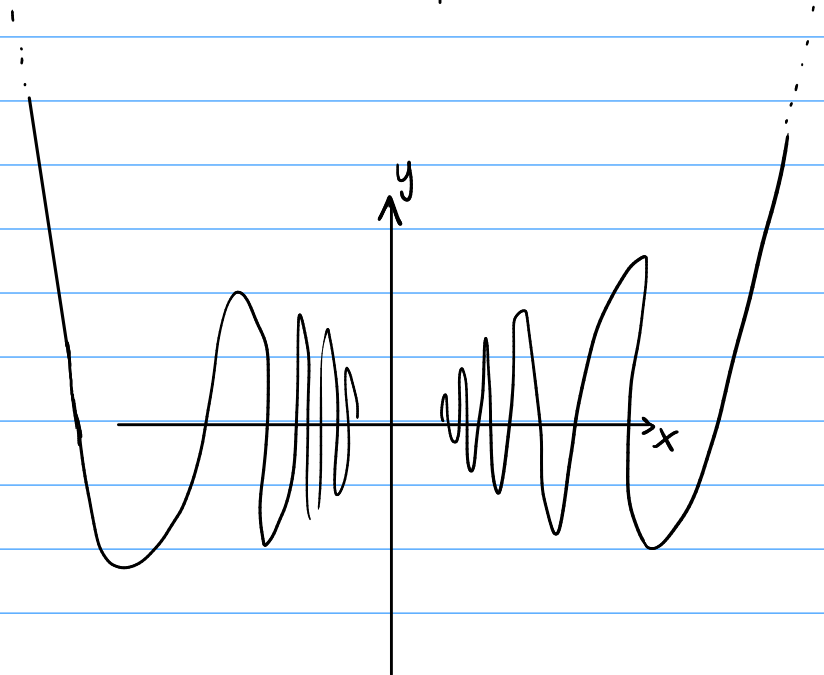
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



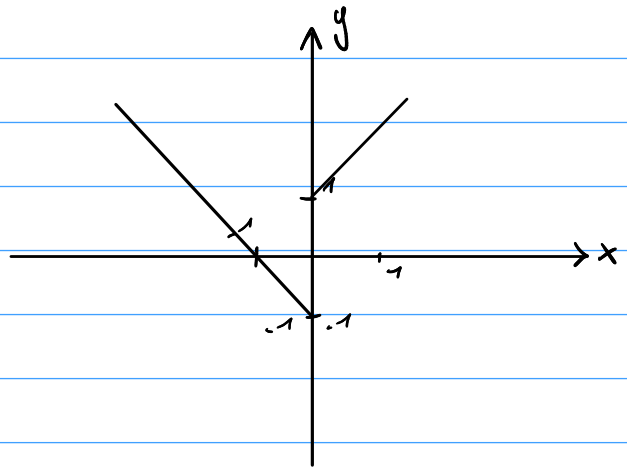
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

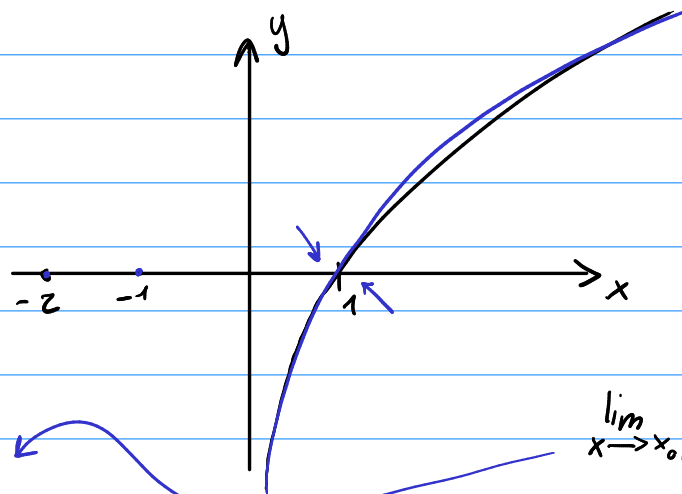


$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$$



$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = \{-1, -2\} \end{cases}$$

1. grafico



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e$$

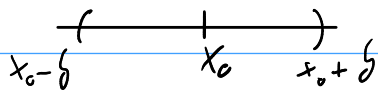
possibili x_0 $\{x=0, x=+\infty, x=1\}$

$x_0 \in [0, +\infty[$ e limite a $+\infty$

↳ sono punti di accumulazione del \mathbb{D} di $f(x)$!

-2, -1 sono invece isolati, non c'è nulla da calcolare

prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; $\delta > 0$ regola (intervallo attorno)



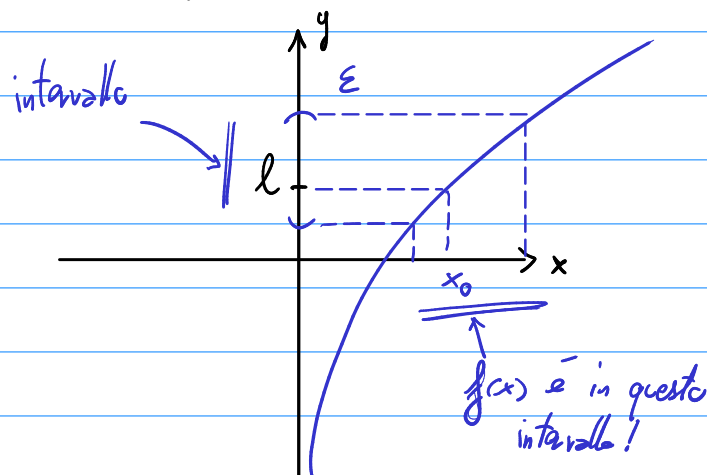
definizione di limite (ϵ - δ)

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x_0 \text{ punto di accumulazione per } D_f$$

diremo che l è un limite di f per x tende a x_0

$$\text{se } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon) \quad \forall x \in B(x_0, \delta \cap D_f)$$

e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e$



$\forall \varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) \in B(l, \varepsilon) \Rightarrow$

$\forall x \in B(l, \varepsilon) \cap D_f$ questo vuol dire

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta$$

indire $x \in D_f$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} ; \text{ verifichiamo che } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$(\text{Dominio} = (\text{denom}) = x - 1 \neq 0 ; x \neq 1)$$

(so il risultato, me mi dedico alla verifica!)

$$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

dobbiamo mostrare che fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad x \in D_f$$

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x : |x - 1| < \delta ; x \neq 1$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right) < \varepsilon \iff \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\iff |x+1-2| < \varepsilon \iff |x-1| < \varepsilon$$

↓
poniamo $\delta = \varepsilon$

$$g(x) = 4x + 5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 13$$

$$|g(x) - 13| < \varepsilon \quad \forall x : |x - 2| < \delta \quad \mathbb{R}$$

$$|4x + 5 - 13| < \varepsilon$$

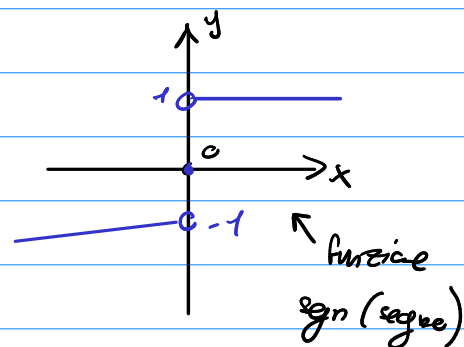
$$|4x - 8| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{poniamo } \delta = \frac{\varepsilon}{4}, \text{ allora va bene}$$



esempio con limite che non esiste

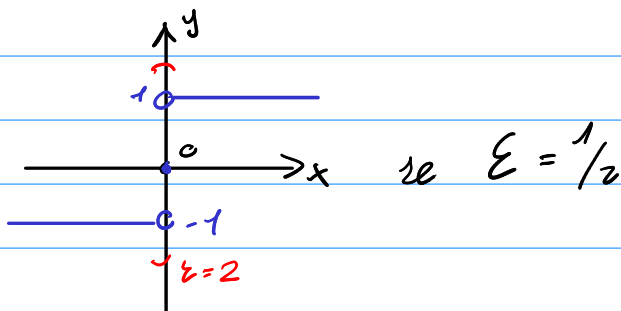
$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x) = \nexists \quad \text{non esiste}$$



Dim assumiamo che non può essere 0
(in maniera analoga, anche nessun altro numero)

↙
basta trovare un $\varepsilon > 0$ per cui non esista un $\delta > 0$
che non rispetti la definizione di limite!

$$|x - 0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$



$\forall \delta > 0$ i h di
in $B(0, \delta[$ ci sono
 $x > 0$, quindi $f(x) = 1 \in B(0, 1/2[$

↑
that's why

Teorema di unicità

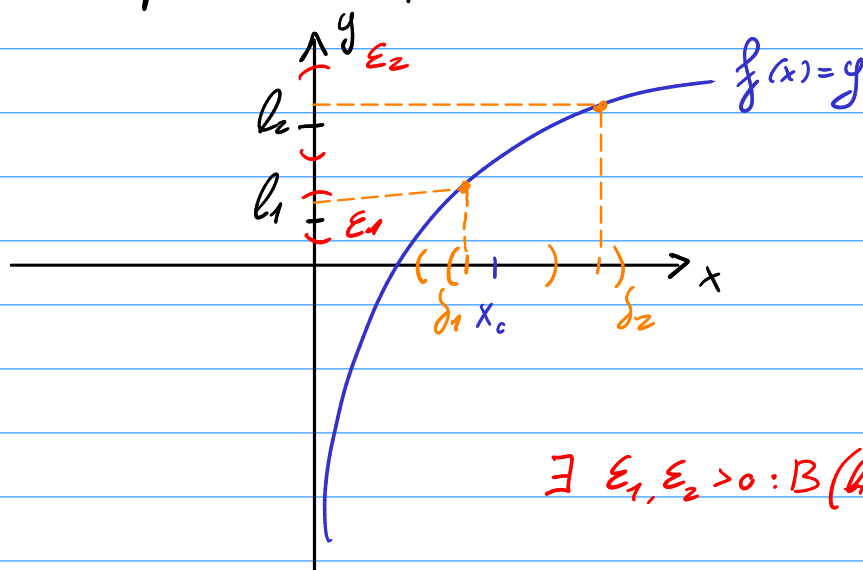
$$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x_0 \text{ di accum. in } D_f$$

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora
 $l_1 = l_2$

dimostriamo per assurdo, ponendo $l_1 \neq l_2$



$$\exists \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 : B(l_1, \epsilon_1) \cap B(l_2, \epsilon_2) \neq \emptyset$$

dalla definizione di limite troviamo $\delta_1, \delta_2 > 0$
tali che

$$f(x) \in B(l_1, \epsilon_1) \quad \forall \quad x \in B(x_0, \delta_1)$$

$$\text{e} \quad f(x) \in B(l_2, \epsilon_2) \quad \forall \quad x \in B(x_0, \delta_2)$$

$$\text{chiamiamo } J = B(x_0, \delta_1) \cap B(x_0, \delta_2) \neq \emptyset$$

allora si è $x \in J: f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[$
 \nearrow e $f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[$

disgiunte!

essendo, prima abbiamo scelto $B(l_1, \varepsilon_1[\cap B(l_2, \varepsilon_2[= \emptyset$
 mentre ora diciamo il contrario!

Teorema di permanenza del segno

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 accum. di D_f

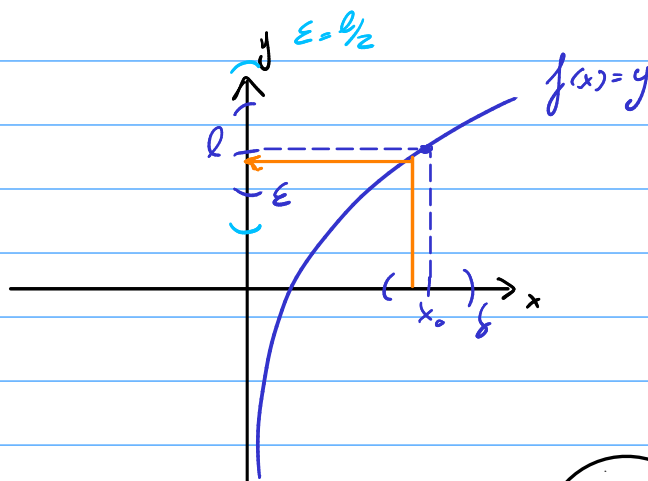
• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

• se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

Dim



$\varepsilon < l$ allora
 sono sicuro si è
 positivo!

usiamo la definizione di limite prendendo

$$\varepsilon = \frac{l}{2}$$

Limiti ad infinito

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m > 0 \mid f(x) - l < \varepsilon \quad \forall x \in \underline{[m, +\infty[} \cap D_f$$

\downarrow
 $x > m$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m > 0 \mid f(x) - l < \varepsilon \quad \forall x \in \underline{]-\infty, -m]} \cap D_f$$

\downarrow
 $x < m$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : f(x) \in]L, +\infty[\quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

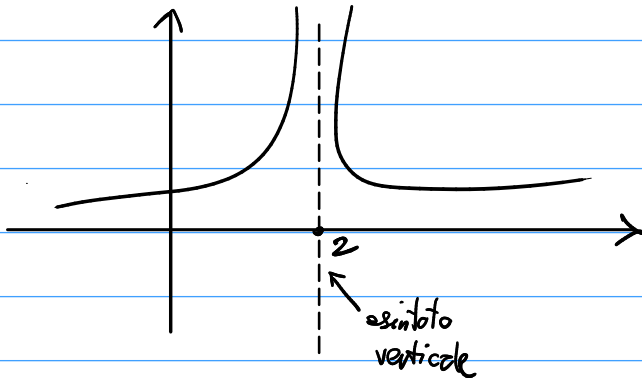
$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : f(x) \in]-\infty, -L[\quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

prossime volte con definizioni di:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad (\text{separate})$$

esercizio

verificare che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$



fissato un $m > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) > m$

$$\forall x \in]2, \delta[\quad |x-2| < \delta$$

molto simile

$$f(x) > m \rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > m \Leftrightarrow \frac{1}{m} > (x-2)^2$$

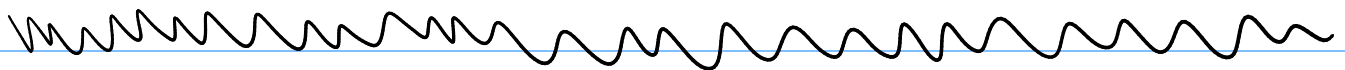
$m > 0$
 $x \neq 2$

$$|x-2| < \frac{1}{\sqrt{m}}$$

quindi fissiamo $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$

noto come

cresce m diminuisce δ !!



definizione di limite destro e sinistro

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x_0$ accum. di D

• $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x < x_0$)

\hookrightarrow se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x: x_0 - \delta < x < x_0$



$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x_0$ acum. di D

• $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite destro $x > x_0$)

\hookrightarrow se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta$
 $(x \neq x_0)$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

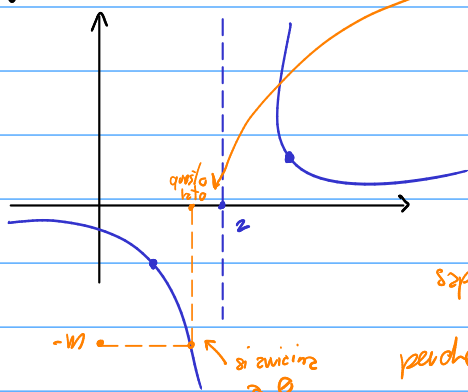
$$\text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

teorema

esempio

$f(x) = \frac{1}{x-2}$; verificare che $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$



$\forall m > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < -m \quad \forall x: 2 - \delta < x < 2$$

$$\frac{1}{x-2} < -m$$

sappiamo già che è negativo

perché $\frac{x < 2}{x \rightarrow 2^-}$ (tante)
 $=$
 $x - 2 < 0 !!$

$$\frac{1}{x-2} < -m$$

$$1 < -m(x-2)$$

$$\frac{1}{-m} > (x-2)$$

$$2 - \frac{1}{m} < x < 2$$

poniamo $\delta = 1/m$

teorema del confronto (o dei carabinieri)

f, g, h funzioni definite su intervallo I ; x_0 di acc. per I

assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$

- se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

limite di una somma

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

dimostriamo che fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(x) + g(x) \in B(l+m, \varepsilon) \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$$

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

Sappiamo che possiamo trovare δ_1 tale che $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x : |x - x_0| < \delta_1$
e inoltre troviamo δ_2 tale che $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x : |x - x_0| < \delta_2$

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)|$$

$$\stackrel{!}{\leq} |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$
proprietà triangolare

se $|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$

cioè se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$		m		
		$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
l	$m \in \mathbb{R}$	$m + l$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F ind
	$-\infty$	$-\infty$	F ind	$-\infty$

F ind = $[\infty - \infty]$ (calcoli particolari da compiere)

limite del prodotto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

$$\text{allora} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$	< 0	$= 0$	> 0	$+\infty$	$-\infty$
l	< 0	$= 0$	> 0	$+\infty$	$-\infty$
< 0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$-\infty$	$+\infty$
$= 0$	0	0	0	F ind	F ind
> 0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F ind	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

limite del rapporto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{allora} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l}{g(x) - m}$	< 0	0^\pm	> 0	$+\infty$	$-\infty$
l	< 0	0^\pm	> 0	$+\infty$	$-\infty$
< 0	l/m	$\mp \infty$	l/m	0	0
0^\pm	0	$[0/0]$	0	0	0
> 0	l/m	$\pm \infty$	l/m	0	0
$+\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	$+\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$
$-\infty$	$+\infty$	$\mp \infty$	$-\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{x^2} \rightarrow$ denominatore tende a zero, il numeratore tende a crescere
ma il risultato è $-\infty$

forme indeterminate

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{0}{0} \quad !! \text{ forma indeterminata}$$

fattorizzazione!

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 4$$

$$x^2 + 2x + 4 \rightarrow 2^2 + 2(2) + 4 = 12$$

ecco a cosa punta!

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$ID: x^2 - 4 > 0 \quad x^2 > 4 \quad x > \pm 2 = x < -2 \wedge x > 2$$

| =

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(x-2)(\sqrt{x^2-4})}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2-4})}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = \frac{0}{4} = 0 \quad \leftarrow \text{soluzione finale!}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$ID) \quad x \neq 0 \quad 4+x > 0 \quad x > -4$$

| =

$$\frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x^2})}}{x(2 + \frac{1}{x})} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x(2 + \frac{1}{x})}$$

$$D: x \neq -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{|x| \cdot 1}{x \cdot 2} = \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

C.E. $x > 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^+}$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x^2 - 4}(\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 - (x-2)}{\sqrt{x^2 - 4}(\sqrt{x} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{x+2 - 2\sqrt{x-2} - x+2}{\sqrt{x^2 - 4}(\sqrt{x} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2})}$$

Controllo forum modello, da finire calcol.

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}(\sqrt{x} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{(x^2 - 1)} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{x(x^2 + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$(x^3 + x)(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \quad \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \quad \nexists \text{ se } \acute{\text{e}} \text{ periodica, me attenzione!}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) + x = +\infty$$

$[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = |l|$$

forme indeterminate

$$[\infty - \infty]; [0 \cdot \infty]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \left[\frac{0}{0}\right];$$

$$[1^\infty] \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$[0^0] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

$$[\infty^0] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

1) Riconosco le forme indet.

2) Usare i "trucchi" per risolvere (es. de l'Hôpital)

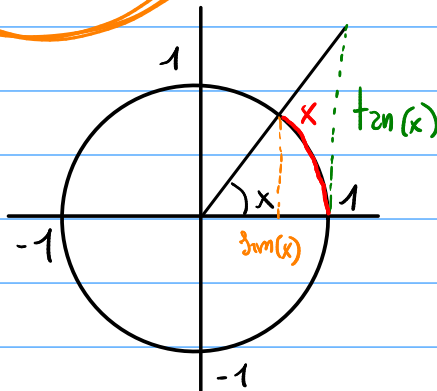


limiti notevoli

1) $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

DIM



$x = \text{angolo in rad}$

$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

↓ costante 1 ↓ $x \rightarrow 0$ ↓ $x \rightarrow 0$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \xrightarrow{x \rightarrow 1} \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{(cambio di variabili)} \quad \begin{matrix} t = \arcsin(x) \\ x = \sin(t) \end{matrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \begin{matrix} t = \frac{x}{2} \\ x = 2t \end{matrix} \quad \frac{2\sin^2(t)}{4t^2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left[\frac{1}{1^0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \left[\frac{1}{1^0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \rightarrow e \quad \rightarrow \ln e = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad t = e^x - 1$$

$$x = \ln(t+1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \rightarrow \text{reciproco di prima} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha} - 1}{x} = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}$$

$$\frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = 1 \quad \frac{\alpha e^{\alpha} - 1}{\alpha^2} = \alpha$$

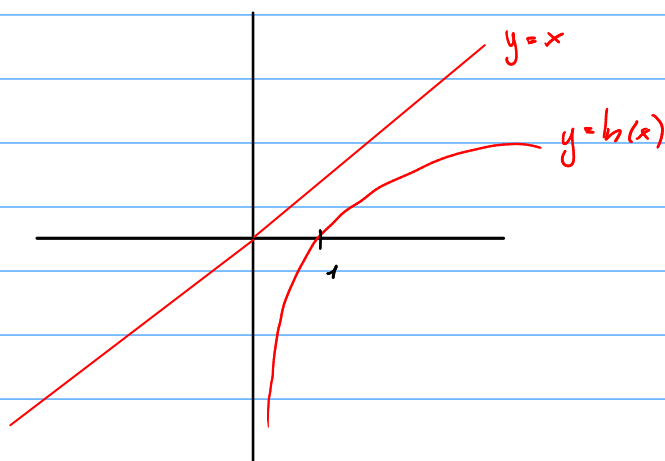
$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (x > \ln x)$$

$$\rightarrow \text{ne consegue che: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x^b}{x^p} = 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$p > 0$$

$$b \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo con il teorema del confronto



$$x \rightarrow +\infty$$

$$\exists x \text{ s.t. } x > 1$$

$$0 < \ln(x) < x$$

$$\downarrow$$

$$\text{vero } \forall x > 1$$

$$0 < \ln(x) < 2\sqrt{x}$$

$$\frac{0 < \ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$0 < \ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \ln(x) < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \forall x > 1 \text{ si ha che } 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$
 $+\infty \quad 0 \quad +\infty$

quindi per il teorema del confronto si ha come
 $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ e $\frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$
 e $0 \rightarrow 0$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x^p}{x^p} = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{R}$$

$$p > 0$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta \log_a x}{x^p} = \frac{\beta \ln(x)}{\ln(a) \cdot x^p}$$

sia $y = x^p$ $x = y^{\frac{1}{p}}$

$$\frac{\beta \ln(y^{\frac{1}{p}})}{\ln(a) \cdot y}$$

$$\frac{\frac{\beta}{p} \ln(y)}{\ln(a) \cdot y}$$

$$\rightarrow \frac{\beta}{p \ln(a)} \cdot \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

Molto simile $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot \log_a x^B$ $[0, \infty)$

$$B \in \mathbb{R}, p > 0$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{y}$$

cambio variabili



$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^p} \log_a \frac{1}{y^B} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a y^{-B}}{y^p} = 0$$

per il limite
precedente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} \quad (a > 1, p > 0)$$

$$\downarrow$$
$$\left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty \quad (\text{non lo dimostra, essendo simile al precedente})$$
