Università Ca' Foscari Venezia
Algebra Lineare; Corso di Laurea in Informatica

Foglio di Esercizi 2 –Vettori linearmente indipendenti e sottospazi vettoriali

Esercizio 1. *Dati i seguenti vettori nello spazio*

$$\mathbf{v} = (1, -1, -1) \quad e \quad \mathbf{w} = (-2, 2, 0)$$

calcolare:

1.1 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

1.2 $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$

1.3 $-3\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$

Esercizio 2. *Verificare se i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti o indipendenti*

2.1 $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{z} = (0, 2, 1)$

2.2 $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{z} = (0, 3, -1)$

2.3 $\mathbf{v_1} = (1, -1, -1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v_3} = (-2, 2, 0)$

Esercizio 3. *Verificare se i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti o indipendenti*

$$\mathbf{v_1} = (1, 1, 2) \ , \ \mathbf{v_2} = (0, 2, 2) \ , \ \mathbf{v_3} = (-1, 3, 2)$$

In caso di dipendenza, trovare poi la relazione che permette di scrivere uno dei vettori come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 4. *Dato il vettore* $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, *trovare altri due vettori di* $\mathbb{R}^3$ *che, insieme a* $\mathbf{v}$ *, diano tre vettori linearmente indipendenti.*

Esercizio 5. *Sono dati i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\mathbf{v_1} = (3, 1, k), \quad \mathbf{v_2} = (-k, 1, 0) \quad e \quad \mathbf{v_3} = (2k, -2, k).$$

5.1 Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ *i vettori sono linearmente indipendenti.*

5.2 Per i valori di k *per cui risultano linearmente dipendenti, stabilire quanti tra di loro sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 6. *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$ *sono linearmente dipendenti:*

$$\mathbf{v_1} = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v_2} = (2, -3, 0, 0) \quad e \quad \mathbf{v_3} = (0, 1, 0, k).$$

Per i valori di k *trovati, esprimere* $\mathbf{v_3}$ *come combinazione lineare degli altri due.*

Esercizio 7. *Stabilire se il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$ *è uno sottospazio vettoriale*

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}.$$

Esercizio 8. *Verificare che i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$ *sono sottospazi vettoriali.*

8.1 $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + z = 0,\; 3y - w = 0\}.$

8.2 $T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + z = 0,\; y + 2w = 0\}.$

Esplicitare le componenti (x, y, w, z) *del generico elemento di* S *e* T *in funzione di due parametri liberi.*

Esercizio 9. *Verificare se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}_3[x]$ *(polinomi in* x *a coefficienti reali di grado minore o uguale a tre) sono sottospazi vettoriali*

9.1 $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, p(0) = 0\}$

9.2 $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, p(x)$ *ha grado al più* $1\}$

9.3 $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, p(x) = ax + bx^3,$ *dove* $a, b \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 10. *È dato il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = z, 2x = y\}$$

10.1 Scrivere le componenti (x, y, z) *del generico elemento di* S *in funzione di un parametro libero.*

10.2 Verificare che S *è un sottospazio vettoriale.*

Esercizio 11. *Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$ *é formato da vettori linearmente indipendenti:*

11.1 $S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

11.2 $T = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

11.3 $U = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ *;*

11.4 $V = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 3, 0, 0)\}$ *;*

Esercizio 12. *Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}_2[x]$ *é formato da vettori linearmente indipendenti.*

12.1 $S = \{1, x, x^2\}$ *;*

12.2 $S = \{1, x\}$ *;*

12.3 $S = \{x, x^2\}$ *;*

12.4 $S = \{1 + x, x, x^2\}$ *;*

12.5 $S = \{1, x, x^2, 1 + x\}$ *;*

12.6 $S = \{1, x, 2 + x\}$;

12.7 $S = \{1, x, x^2, 2 - x\}$;

12.8 $S = \{2 - x, x, x^2\}$;

12.9 $S = \{1, x + x^2, 1 + x + x^2\}$;

12.10 $S = \{1, x + x^2, 1 + x - x^2\}$;

12.11 $S = \{x + x^2, 1 + x + x^2\}$