Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

26/01/2021;

Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Inserire anche una foto del vostro documento d'identità sovrapposto alla prima pagina del compito. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a poco dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (14 punti)

Considerare la funzione
$$f(x) = \log\left(\left|\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}\right|\right) - \frac{x}{2}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni distinte.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (4 punti)

Determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione
$$g(x) = -\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare il polinomio di Taylor di primo grado di g rispetto al punto $x_0 = \pi/2$.

3.3 Calcolare il seguente l'integrale indefinito di $\dfrac{g(x)}{\sin(x/2)}$

Problema 4 (5 punti)

Calcolare, se possibile, i seguenti integrali impropri:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-2}\,dx \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+2}$$

Soluzioni

Problema 1 (14 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) - \frac{x}{2}$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto). (1 punto) Bisogna imporre $e^{-\frac{x}{2}} - e \neq 0$ e quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non è né pari né dispari. Intersezione asse y: $y = \log(e - 1) \approx 0.54$.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni distinte. (5 punti)

$$\lim_{x\to-2} \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) - \frac{x}{2} = -\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a zero. Quindi $x = -2$ è asintoto verticale.

Limiti ad infinito

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) - \frac{x}{2} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) - \frac{x}{2} = -\lim_{x\to-\infty} 2\frac{x}{2} = +\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$m: \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right)}{x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$q: \lim_{x\to+\infty} \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) = 1$$

Quindi f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ che è $y = -x/2 + 1$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to -\infty$:

$$m: \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right)}{x} - \frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(e^{-\frac{x}{2}}(1 - e^{1+x/2})\right)}{x} - \frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{x}{2}}{x} - \frac{1}{2} = -1$$

$$q: \lim_{x\to-\infty} \log\left(\left|e^{-\frac{x}{2}} - e\right|\right) + \frac{1}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \log\left(e^{-\frac{x}{2}} - e\right) - \log(e^{-x/2}) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}} - e}{e^{-\frac{x}{2}}}\right) = 0$$

Quindi f ha un asintoto obliquo a $-\infty$ che è $y = -x$

f è continua perché prodotto, e composizione di funzioni continue

Siccome $f(x)$ è continua in $]-\infty, -2[$ e agli estremi di questo intervallo la funzione tende rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$, per il teorema degli zeri ci deve essere almeno uno zero della funzione in questo intervallo. Analogamente c'è almeno uno zero in $]-2, 0[$ perché $f(0) > 0$ e almeno uno zero in $]0, +\infty[$

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. (4 punti)

Derivabilità: Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero ($x = -2$), ma tale punto non appartiene al dominio. Quindi f è derivabile perché composizione e somma di funzioni derivabili

Per il calcolo della derivata riscriviamo f come segue:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}\right) - \dfrac{x}{2} & \text{per } x < -2 \\ f_2(x) = \log\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}\right) - \dfrac{x}{2} & \text{per } x > -2 \end{cases}$$

Derivata per $x < -2$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= D[\log\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}\right) - \frac{x}{2}] = \frac{-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}} = \\ &= \frac{-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}}, \quad x < -2 \end{aligned}$$

Inoltre $f_2' = f_1'$.

Studio del segno e punti di massimo/minimo:

$$N \geq 0 \iff -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e} \geq 0 \iff -\frac{x}{2} \leq \log(\frac{\mathrm{e}}{2}) \iff x \geq -2\log(\frac{\mathrm{e}}{2}) = -2 + 2\log(2) \approx -0.61$$

$$D > 0 \iff 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e} \iff x < -2$$

Quindi $f(x) > 0$ in $]-2, -2\log(\frac{\mathrm{e}}{2})[$ (intervallo di crescenza). $f(x)$ decresce in $]-\infty, -2[\cup] - 2\log(\frac{\mathrm{e}}{2}, +\infty[$; In $x = -2\log(\frac{\mathrm{e}}{2})$ f ha un massimo relativo, $P_1 = (-2\log(\frac{\mathrm{e}}{2}), 2 - 2\log(2)) \approx (-0.61, 0.61)$.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f. (2 punti)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e})^2} = \\ &- \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+1}}{(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e})^2} \end{aligned}$$

Quindi $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D$ ed f è concava nel suo dominio. Non ci sono punti di flesso.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f. (2 punti)

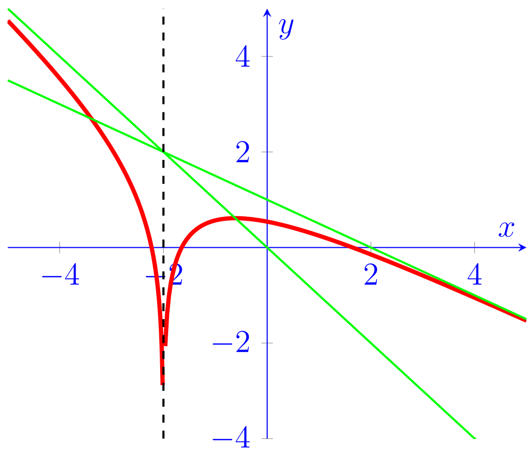

Figura 1: Grafico di $f(x)$;L'immagine è $]-\infty, +\infty[$

Problema 2 (4 punti)

Determinare se la seguente funzione è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione è continua infatti,

$$\lim_{x\to 0} \sin^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

in quanto prodotto di una funzione infinitesima per una limitata.

La funzione è derivabile, infatti il limite del rapporto incrementale esiste finito in 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$$

La derivata prima non è continua in 0, infatti:

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\cos(\frac{1}{x}) + \frac{\sin^2(x)}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$$

e $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) = \nexists$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = -\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo. (2 punti)

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Gli zeri sono, $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione è pari, $g(-x) = g(x)$.

La funzione è periodica con periodo $\tau = 2\pi$.

3.2 Calcolare il polinomio di Taylor di primo grado di g rispetto al punto $x_0 = \pi/2$. (3 punti)

$$g(x_0) = -\tan^2(\pi/4) = -1$$
$$g'(x) = -\frac{\tan(x/2)}{\cos^2(x/2)} g'(x_0) \qquad = -\frac{\tan(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)} = -\frac{1}{1/2} = -2$$

Polinomio di Taylor di primo grado in x_0:

$$P(x) = -1 - 2(x - \frac{\pi}{2})$$

3.3 Calcolare il seguente l'integrale indefinito di $\dfrac{g(x)}{\sin(x/2)}$ (2 punti)

$$-\int \frac{\sin(x/2)}{\cos^2(x/2)}\, dx = -2\cos^{-1}(x/2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Problema 4 (5 punti)

Calcolare, se possibile, i seguenti integrali impropri:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 2}\, dx \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2 + 2}$$

Entrambe le funzioni sono integrabili a più infinito in quanto vanno a zero come $\dfrac{1}{x^2}$
Per il primo integrale, per prima cosa bisogna separare la frazione:

$$\frac{2}{x^2-2} = \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\sqrt{2}-B\sqrt{2}=2 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ B=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-2}\,dx = & \int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-2}\,dx = \\
& = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_2^t \frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x+\sqrt{2}}\,dx \right) = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t\to+\infty} \Big[\log(x-\sqrt{2}) - \log(x+\sqrt{2}) \Big]_2^t = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t\to+\infty} \left[\log(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}) \right]_2^t = \\
& = -\frac{\sqrt{2}}{2} \log(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t\to+\infty} \log(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}) = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2} \log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log(3-2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Per il secondo integrale si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+2}\,dx = & \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\,dx = \\
& = \lim_{t\to+\infty} [\sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2})]_0^t = \\
& = \sqrt{2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$