Probabilità e Statistica[1]

Isadora Antoniano-Villalobos
isadora.antoniano@unive.it

Laurea in Informatica
(Data science/ Tecnologie e scienze dell'informazione)
Università Ca' Foscari di Venezia

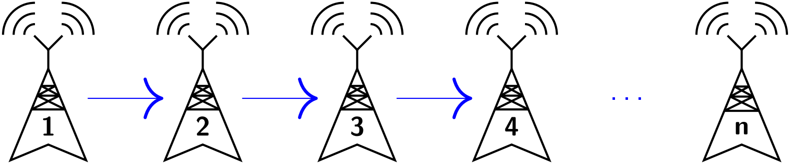
Anno academico 2023/2024

[1]Materiale didattico redatto da: Isadora Antoniano-Villalobos & Federica Giummolè

Probabilità elementare

Un problema difficile

Un sistema di comunicazione è formato da n antenne allineate.



Il sistema funziona correttamente se non ci sono due antenne difettose consecutive.
Quante sono le configurazioni in cui, avendo m antenne difettose, il sistema risulta funzionante?

Un problema difficile

- Consideriamo $n = 4$ e $m = 2$. Indicando con 0 ogni antenna difettosa e con 1 ogni antenna funzionante, le possibili configurazioni del sistema sono le seguenti:

Configurazione	**Funzionante**
1100	No
0110	Yes
1010	Yes
0011	No
0101	Yes
1001	No

  Il sistema funziona correttamente in 3 casi su un totale di 6 possibili configurazioni.

- E se $n = 20$ e $m = 8$? O ancora più grandi?

Contare le possibilità

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se una scelta può essere fatta in m_1 modi diversi e un'altra scelta può essere fatta in m_2 modi diversi, allora esistono in totale

$$m_1 \times m_2$$

possibilità di scelta.

- **Esempio:** 10 cavalieri e 12 dame partecipano a un ballo.

  ☞ Ci sono $10 \times 12 = 120$ possibili coppie danzanti.

Contare le possibilità

Principio fondamentale generalizzato

Se ciascuna di r scelte successive può essere fatta in m_i modi rispettivamente, allora esistono in totale

$$\prod_{i=1}^{r} m_i = m_1 \times \ldots \times m_r$$

possibilità di scelta.

- **Esempio:** una commissione parlamentare deve essere composta da un membro del partito A, che conta 10 rappresentanti, da un membro del partito B, che conta 15 rappresentanti, e da un membro del partito C, che conta 2 rappresentanti.

  ☞ Ci sono in totale $10 \times 15 \times 2 = 300$ possibili commissioni parlamentari.

Disposizioni

Consideriamo un insieme di n elementi. Una **disposizione** di r di essi è una scelta ordinata di r elementi tra quegli n.

- Si distinguono le disposizioni **con ripetizione** da quelle **semplici** o **senza ripetizione**, a seconda o meno che uno stesso elemento possa essere scelto più di una volta.

Disposizioni con ripetizione

Le **disposizioni con ripetizione** di n elementi presi r alla volta sono in numero di

$$\prod_{i=1}^{r} n = n^r.$$

- **Esempio:** le parole lunghe due lettere che si possono comporre con le lettere I, L, A sono $3^2 = 9$: $II, IL, IA, LI, LL, LA, AI, AL, AA$.

Disposizioni

- **Esempio:** un bit può assumere i valori 0 o 1. Un byte è una fila di otto bit. Quanti byte ci sono?

Disposizioni semplici

Le **disposizioni semplici** o **senza ripetizione** di n elementi presi r alla volta sono in numero di

$$n \times (n-1) \ldots \times (n-r+1).$$

- **Esempio:** le parole di due lettere diverse che si possono comporre con le lettere I, L, A sono $3 \times 2 = 6$: IL, IA, LI, LA, AI, AL.
- **Esempio:** di 10 concorrenti in una gara ciclistica vengono classificati solo i primi 3 arrivati. Quante possibili classifiche ci sono?

Campionamento da un'urna

Il **campionamento casuale da un'urna** è un'estrazione di palle da un'urna. Può essere fatto **con o senza reintroduzione**.

- Per **casuale** si intende dire che prima di ogni estrazione l'urna viene mescolata appropriatamente per essere riportata a una condizione di irriconoscibilità delle palle. Un'operazione del genere viene fatta, ad esempio, per le estrazioni del lotto.
- La **reintroduzione** fa invece riferimento al fatto di rimettere nell'urna ciascuna palla subito dopo averla estratta e averne registrate le caratteristiche di interesse, per esempio il suo numero o il suo colore.

Campionamento da un'urna

- Dunque:

  ➔ Se un'urna contiene n palle distinguibili (per esempio numerate da 1 a n) e r palle vengono estratte **con reintroduzione**, le estrazioni possibili sono in numero di n^r.

  ➔ Se un'urna contiene n palle distinguibili e r palle vengono estratte **senza reintroduzione** reintroduzione, le estrazioni possibili sono in numero di $n \times (n-1) \ldots \times (n-r+1)$.

Permutazioni

Permutazioni

Le disposizioni semplici di n elementi presi n alla volta si chiamano anche **permutazioni** perché rappresentano tutti i modi in cui n elementi possono essere ordinati in fila. Esse sono in numero di

$$n \times (n-1) \ldots \times 2 \times 1 =: n!$$

☞ Il simbolo speciale $n!$ che rappresenta questa quantità si legge n **fattoriale**.

- **Esempio:** Le permutazioni delle lettere I, L, A sono $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$:

$$ILA, IAL, LIA, LAI, AIL, ALI.$$

Permutazioni

- **Esempio:** Le possibili file che si possono fare con 10 bambini dell'asilo sono $10! = ?$
- **Esempio (più difficile):** Supponiamo di fare due file, i 6 maschietti a destra e le 4 femminucce a sinistra.

  Ci sono $6!$ possibili file di maschietti e $4!$ file di femminucce possibili.

  ☞ Quindi, dal principio fondamentale del calcolo combinatorio, in tutto ci sono $6! \times 4! = 17280$ possibili file.

Combinazioni

Quanti sono i **sottoinsiemi** di 3 lettere dell'insieme di 5 lettere $\{A, B, C, D, E\}$?

- Finora sappiamo che ci sono $5 \times 4 \times 3 = 60$ parole di tre lettere diverse.
- Ma, per esempio, le parole ABC e BCA rappresentano lo stesso sottoinsieme, perché nella definizione di sottoinsieme l'ordine non conta.
- Ci sono $3! = 6$ parole equivalenti per ogni scelta
- Ci sono quindi $60/6 = 10$ sottoinsiemi cercati:

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$$

Combinazioni

Combinazioni

In generale, un sottoinsieme di numerosità r scelto da un insieme con n elementi si chiama **combinazione** di n elementi presi r alla volta.
Il numero di combinazioni di n elementi r alla volta è

$$\frac{n \times (n-1) \ldots (n-r+1)}{r!} =: \binom{n}{r}$$

e si chiama anche **coefficiente binomiale** n su r.

- **Esempio:** La professoressa di matematica interroga ogni lunedì 10 studenti da una classe di 25. Esistono per lei $\binom{25}{10} = 3.268.760$ possibilità di scelta.

Combinazioni

- Il nome coefficiente binomiale deriva dalla seguente espressione:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

detta formula del **binomio di Newton**.

- **Esempio:**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Tornando al problema difficile delle antenne...

... adesso che sappiamo contare.

- Le configurazioni funzionanti si possono rappresentare come una sequenza del tipo

$$\_\,1\,\_\,1\,\_\,1\,\_\,1 \ldots .\,\_\,1\,\_\,1\,\_\,1\,\_$$

  dove gli 1 rappresentano le $n-m$ antenne non difettose e gli $n-m+1$ spazi, rappresentati da _ possono essere liberi o occupati da al più uno 0 (che rappresenta un'antenna difettosa).
- Gli m zeri vanno posizionati in uno degli $n-m+1$ spazi, e questo può essere fatto in tanti modi quanti

$$\binom{n-m+1}{m}$$

Fenomeni aleatori

- La logica del **certo** è la logica della teoria degli insiemi e del calcolo su proposizioni (o eventi) che possono assumere il valore di vero o falso in modo **deterministico**.
- Il **calcolo delle probabilità** è invece la logica dell'**incerto**. Si usa per ragionare sui possibili risultati di un **fenomeno aleatorio** o **casuale**, del quale cioè non si può prevedere con certezza l'esito.
- Si può pensare al termine **aleatorio** come l'opposto di **deterministico**.
- **Esempi di fenomeni aleatori:**
  1. Il lancio di un dado.
  2. Il lancio di una stessa moneta 4 volte.
  3. La classificazione di 10 pezzi prodotti da una macchina in conformi o non conformi alle specifiche di progetto.
  4. L'estrazione di una mano di poker, cioè un insieme di cinque carte, da un mazzo di 52.

Fenomeni aleatori

5. L'osservazione del tempo di guasto [min] di un circuito elettrico formato da tre resistenze in serie.
6. La registrazione giornaliera dei livelli massimi di polveri [mcg/mc] nell'aria alla centralina del Parco di San Giuliano nel Gennaio 2015.

   ⋮

- **Esempi dell'incertezza in informatica:**
  1. Il tempo o lo spazio su un disco richiesti per l'installazione di un software
  2. Il numero di difetti di un nuovo software
  3. La memoria richiesta per processare un programma
  4. Il tempo richiesto per una stampa o il numero di lavori in coda di stampa prima di questo
  5. Il momento nel quale un virus attacca un sistema o il numero di file e directory infetti

     ⋮

Spazio campionario, risultati, eventi

- Lo **spazio campionario** è l'insieme di tutti i possibili risultati di un fenomeno aleatorio. In questo corso sarà rappresentato dalla lettera greca Ω.
- Un generico (singolo) risultato è un elemento dello spazio campionario e si può indicare con $\omega \in \Omega$.
- Un **evento** è un sottoinsieme $A \subset \Omega$.
- Una volta che il fenomeno aleatorio di interesse è stato osservato si può dire se un qualsiasi evento sia A vero o falso.
- Quando un evento è vero, si dice che si è **realizzato** o **verificato**
- I possibili risultati $\{\omega\}$, visti come singoletti, cioè insiemi contenenti un solo elemento, sono anch'essi eventi, detti **eventi elementari**.
- Ω viene anche chiamato l'**evento certo**, perché sicuramente si verificherà.

Esempi di spazi campionari

1. Lancio di un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Lancio di una stessa moneta quattro volte: $\Omega =$ le sedici possibili sequenze di quattro dei simboli T e C, dove T indica "testa" e C indica "croce".
3. La classificazione di 10 pezzi con 2 possibili risultati C e N, dove C indica 'conforme' e N indica 'non conforme': $\Omega =$ le 2^{10} possibili sequenze di dieci dei simboli C e N.
4. Una mano di poker: $\Omega =$ i $\binom{52}{5}$ possibili sottoinsiemi delle 52 carte.
5. Il tempo di guasto del circuito elettrico: $\Omega = \mathcal{R}^+ := [0, \infty)$, cioè tutti i numeri non negativi, visto che il tempo di guasto è un numero non negativo.
6. I livelli massimi giornalieri di polveri nel Gennaio 2015: $\Omega =$ tutte le possibili sequenze di 31 numeri non negativi (la maggior parte contenuti tra 10 e 350).

Esempi di eventi

1. Il dado dà un punteggio superiore a quattro: A $= \{5, 6\}$
2. Otteniamo almeno tre teste sui quattro lanci:

$$\mathsf{A} = \{TTTC, TTCT, TCTT, CTTT, TTTT\}$$

3. Tutti i pezzi sono conformi:

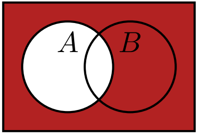
$$\mathsf{A} = \{CCCCCCCCCC\} \text{ (questo è anche un singoletto)}$$

4. Si ottiene un poker: l'evento A di interesse è dato da tutte le possibili mani contenenti un poker, che sono in numero di 13x48 perché 13 sono i possibili poker e 48 sono, per ogni dato poker, i modi di scegliere la quinta carta.
5. Il circuito ha una durata di meno di 50 ore: A $= [0, 50)$
6. In nessun giorno si è superato il limite di 300 [mcg/mc]:

$$\mathsf{A} = \{(x_1, \dots, x_{31}) : 0 \leq x_i \leq 300, i = 1, \dots, 31\}$$

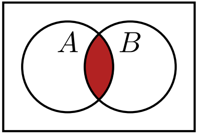
Operazioni sugli eventi e Diagrammi di Venn

- La negazione o **complementare** di un evento A, indicato con $\bar{A}$, è l'evento che è vero quando A è falso ed è falso quando A è vero.



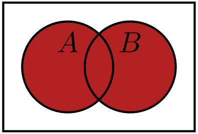
☞ La negazione dell'evento certo è l'**evento impossibile**: $\bar{\Omega} = \emptyset$ (evento impossibile = insieme vuoto).

- L'**intersezione** di due eventi A e B, indicata con $A \cap B$, è l'evento che è vero quando sia A che B sono veri.

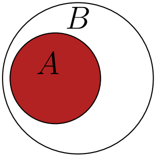


Operazioni sugli eventi e Diagrammi di Venn

- L'**unione** di due eventi A e B, indicata con $A \cup B$, è l'evento che è vero quando o A oppure B oppure entrambi sono veri.

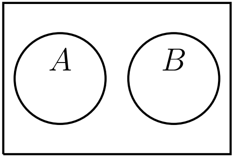


- L'evento A è **incluso** nell'evento B, in simboli $A \subset B$, se il verificarsi di A implica il verificarsi di B.



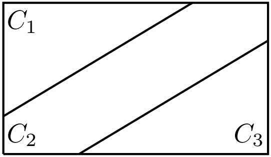
Partizioni

- Due eventi A e B si dicono **incompatibili**, o **disgiunti**, se non è possibile che siano entrambi veri, cioè se $A \cap B = \emptyset$.



- Una famiglia di eventi si dice una **partizione** dello spazio campionario se ogni coppia di insiemi della famiglia ha intersezione vuota e l'unione di tutti i componenti della famiglia è Ω stesso.

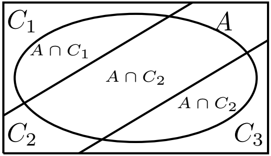
☞ Una partizione può essere **finita**, ad esempio, $\{C_1, C_2, C_3\}$ è una partizione di 3 elementi se $C_1 \cap C_1 = C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \emptyset$ e $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega$.



Partizioni

- Un qualsiasi evento A si può scrivere come unione delle sue intersezioni con gli elementi di una partizione:

$$A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup (A \cap C_3)$$



- In generale, si può pensare a una partizione **numerabile** $C_1, C_2, \ldots$:

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i, j; \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega$$

Scrivendo un qualsiasi evento A come unione numerabile delle sue intersezioni con gli elementi di una partizione:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)$$

Esempio

Fenomeno aleatorio: lancio di un dado.

Eventi: Ne consideriamo i seguenti:

$A = \{5, 6\}$ ➔ il risultato del lancio è superiore a 4

$B = \{2, 4, 6\}$ ➔ il risultato del lancio è pari

Allora:

$A \cap B = \{6\}$ ➔ il risultato del lancio è pari e superiore a 4

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ ➔ il risultato del lancio è pari oppure superiore a 4

Partizione: numeri divisibili per 3 e non:

$$C_1 = \{3, 6\}; \quad C_2 = \{1, 2, 4, 5\}$$

Allora:

$$A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) = \{6\} \cup \{5\}$$

$$B = (B \cap C_1) \cup (B \cap C_2) = \{6\} \cup \{2, 4\}$$

Definizione assiomatica di probabilità

Formalmente, la **probabilità** è una funzione che assegna ad ogni evento di uno spazio campionario un valore in $\mathbb{R}^+$, ossia un numero non negativo, e deve sodisfare i seguenti assiomi:

1. **Positività:** $0 \leq \mathbb{P}[A] \leq 1$
2. **Normalizzazione:** $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3. **Aditività:** Se $A_1, A_2, \ldots$ è una sequenza di eventi incompatibili, cioè se $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, allora

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Definizione assiomatica di probabilità

Interpretazione della probabilità

La probabilità dell'evento A, $\mathbb{P}[A]$, è un numero tra 0 e 1 che indica il grado di fiducia del individuo nell'avverarsi dell'evento A. Più $\mathbb{P}[A]$ è vicina a 1, più ci aspettiamo che l'evento si avveri (minore la nostra incertezza sul avverarsi del evento).

- Una volta osservato il fenomeno aleatorio, sappiamo se A si è verificato o meno, e la sua probabilità non serve più (diventa 1 se l'evento si è verificato e 0 in caso contrario)
- Si può pensare alla probabilità come a una massa unitaria (in virtù del assioma (ii)) da spargere sullo spazio campionario.Se un evento si può scomporre in più pezzi (eventi disgiunti) la sua massa sarà uguale alla somma delle singole masse sui pezzi (singoli eventi).

Alcune proprietà della probabilità

- Probabilità del **complementare**: dato un evento A,

$$\mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[A\right].$$

- Probabilità dell'**evento impossibile**:

$$\mathbb{P}\left[\emptyset\right] = \mathbb{P}\left[\bar{\Omega}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\Omega\right] = 0.$$

- Probabilità dell'**unione**: dati due eventi A e B,

$$\mathbb{P}\left[A \cup B\right] = \mathbb{P}\left[A\right] + \mathbb{P}\left[B\right] - \mathbb{P}\left[A \cap B\right].$$

- Probabilità di una **partizione**: se $C_1, C_2, \ldots$ sono una partizione, allora

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right] = \mathbb{P}\left[\Omega\right] = 1.$$

Alcune proprietà della probabilità

Legge della probabilità totale (versione facile)

Se $C_1, C_2, \ldots$ sono una partizione dell'evento certo, la probabilità di un qualsiasi evento A può essere scritta come

$$\mathbb{P}[A] = \sum_i \mathbb{P}[A \cap C_i]$$

Spazi campionari finiti

Se lo spazio campionario costituisce un insieme finito, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, allora un'assegnazione di probabilità è data da n valori $p_1, \ldots, p_n$ tali che:

1. $p_i \in [0, 1]$, $\forall i = 1, \ldots, n$;
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;
3. $p_i = \mathbb{P}\left[\{\omega_i\}\right]$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Dato che ogni evento $A \subset \Omega$ si può scrivere come unione (finita) degli eventi elementari (disgiunti) che lo costituiscono,

$$A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}\} = \bigcup_{k=1}^{r} \{\omega_{i_k}\},$$

si ha che

$$\mathbb{P}\left[A\right] = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}\left[\{\omega_{i_k}\}\right] = \sum_{k=1}^{r} p_{i_k}.$$

Eventi elementari equiprobabili

In particolare, se possiamo supporre (per ragioni di simmetria) che tutti gli eventi elementari abbiano la stessa probabilità, allora

$$p_i = \mathbb{P}\left[\{\omega_i\}\right] = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Per ogni evento $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}\}$ si può dunque scrivere

$$\mathbb{P}\left[A\right] = \frac{r}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Attenzione! Questa formula vale solo se gli eventi elementari sono **equiprobabili**.

Eventi elementari equiprobabili: Esempi

1. **Il dado:** Qual è la probabilità che il risultato del lancio di un dado equilibrato sia un numero divisibile per 3?

   - Dato che il dado non è truccato, si può assumere che ognuno dei 6 possibili risultati abbia la stessa probabilità pari a $1/6$.
   - I casi favorevoli al nostro evento sono 2, $\{3\}$ e $\{6\}$, mentre quelli possibili sono 6. Il risultato è dunque $2/6 = 1/3$.

☞ Se il dado fosse truccato questo procedimento di calcolo non sarebbe corretto.

Eventi elementari equiprobabili: Esempi

2. **Le antenne:** Un sistema di comunicazione è formato da n antenne allineate di cui m sono difettose. Il sistema funziona correttamente se non ci sono due antenne difettose consecutive. Qual è la probabilità che il sistema sia funzionante?
   - In questo caso dobbiamo pensare (assumere) che tutte le $\binom{n}{m}$ configurazioni possibili abbiano la stessa probabilità di presentarsi.
   - Abbiamo già contato il numero di configurazioni funzionanti, $\binom{n-m+1}{m}$. Perciò la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}\left[\text{sistema funzionante}\right] = \frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}$$

☞ Se le configurazioni non fossero equiprobabili avremmo bisogno di informazioni aggiuntive per fare il conto.

Eventi elementari equiprobabili: Esempi

3. **L'urna:** Si consideri un'urna composta da quattro palle bianche numerate da 1 a 4 e tre palle nere numerate da 1 a 3. Si campioni casualmente una palla dall'urna.
   - È ragionevole assumere che ciascuna palla abbia probabilità 1/7 di essere estratta.
   - ➔ Consideriamo i seguenti eventi:

$$B = \text{"viene estratta una palla bianca"};$$
$$N = \text{"viene estratta una palla nera"}$$
$$C_i = \text{"viene estratto il numero } i\text{"}, i = 1, 2, 3, 4;$$
$$D = \text{"viene estratto un numero dispari"}.$$

☞ **Nota:** $N = \bar{B})$

Eventi elementari equiprobabili: Esempi

- Appplicando gli assiomi e altre proprietà del calcolo della probabilità possiamo calcolare le probabilità di tutti questi eventi e di altri ancora:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= 4/7 \\
\mathbb{P}[N] &= 1 - \mathbb{P}[B] = 3/7 \\
\mathbb{P}[C_i] &= 2/7, \quad i = 1, 2, 3 \\
\mathbb{P}[C_4] &= 1/7, \\
\mathbb{P}[D] &= 4/7 \\
\mathbb{P}[B \cap D] &= 2/7 \\
\mathbb{P}[B \cup D] &= \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[D] - \mathbb{P}[B \cap D] = 6/7 \\
\mathbb{P}[B \cap C_4] &= \mathbb{P}[C_4] = 1/7 \;\; (C_4 \text{ implica } B) \\
\mathbb{P}[B \cap C_2] &= 1/7 \;\; (C_2 \text{ non implica } B)
\end{aligned}
$$

Popolazioni e sottopopolazioni

Consideriamo un insieme, la **popolazione**, di N elementi suddivisi, a seconda che possiedano o meno una certa caratteristica, in due **sottopopolazioni**, rispettivamente di m e $N-m$ elementi.

Qual è la probabilità che su n elementi estratti casualmente esattamente k abbiano quella caratteristica (e i rimanenti $n-k$ no)?

Soluzione con reinserimento:

- **Spazio campionario:** $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n);\, x_i \in \text{ popolazione } \forall i\}$

  ☞ Le estrazioni sono casuali quindi ogni n-upla (vettore ordinato di dimensione n) in Ω ha la stessa probabilità di essere estratta.

- **Evento d'interesse:**
  $A_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega;\, k \text{ elementi hanno la caratteristica richiesta}\}$

Popolazioni e sottopopolazioni

$$\#\Omega = N^n; \quad \#A_k = \binom{n}{k} m^k (N-m)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{P}\left[A_k\right] &= \binom{n}{k} m^k (N-m)^{n-k} \frac{1}{N^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(\frac{N-m}{N}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Popolazioni e sottopopolazioni

Soluzione senza reinserimento: Solo valida se $n \leq N$, $k \leq m$ e $n - k \leq N - m$

- **Spazio campionario:** $\Omega = \{\{x_1, \ldots, x_n\}; \, x_i \in \text{ popolazione } \forall i\}$

  ☞ Le estrazioni sono casuali quindi ogni sottoinsieme (non ordinato di n elementi) in Ω ha la stessa probabilità di essere estratta.

- **Evento d'interesse:**
  $A_k = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega; \, k \text{ elementi hanno la caratteristica richiesta}\}$

$$\#\Omega = \binom{N}{n}; \quad \#A_k = \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[A_k\right] = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$