

Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2022/23

Isadora Antoniano Villalobos
Esame B, 10 febbraio 2023

Cognome: _____ Nome: _____

Matricola: _____ Firma: _____

ISTRUZIONI: DA LEGGERE CON ATTENZIONE!

Questo compito è composto di **5 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.

Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	6	6	4	5	9	30
Score:						

Domanda 1 (6 punti)

Si consideri una variabile casuale R con funzione di densità

$$f_R(r) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-4x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il valore di C .

(b) Si calcoli la media e la varianza di R

(c) Si trovi il valore atteso dell'area, A , del cerchio di raggio R

(d) Sia P il perimetro del cerchio di raggio R . Si trovi il valore atteso e la varianza della variabile $X = P/R$

Domanda 2 (6 punti)

Ogni giorno Alessandro percorre la stessa strada per andare da casa all'università. Ci sono 5 semafori lungo la strada, ed Alessandro ha notato che se vede un semaforo verde a un incrocio, il 70% delle volte anche il semaforo successivo è verde, e il 30% delle volte il semaforo successivo è rosso. Tuttavia, se vede un semaforo rosso, l'80% delle volte anche quello successivo è rosso e il 20% delle volte è verde.

- (a) Si determini la matrice di transizione per la catena di Markov che rappresenta i colori dei semafori, specificando chiaramente gli stati della catena.

- (b) Se il primo semaforo è rosso, qual è la probabilità che il terzo sia verde?

- (c) Tommaso, il compagno di classe di Alessandro, ha tantissimi semafori lungo il percorso da casa sua all'università. Se il primo semaforo è rosso, qual è la probabilità che l'ultimo sia verde?

Hint: Utilizzare la distribuzione stazionaria

Domanda 3 (4 punti)

Si spieghi la proprietà Markoviana e si fornisca un esempio di una situazione per la quale può risultare utile come modello.

Domanda 4 (5 punti)

Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

- (a) Se X e Y sono due variabili casuali continue con funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
- i) $Y = f_{X,Y}(x, y)/g(x)$
 - ii) X e Y sono indipendenti con densità marginali $f_X(x) = g(x)$ e $f_Y(y) = h(y)$
 - iii) $f_X(x) = g(x)$ e $f_Y(y) = h(y)$ sono le densità marginali ma X e Y potrebbero non essere indipendenti
 - iv) X e Y sono indipendenti ma $g(x)$ e $h(y)$ potrebbero non essere le densità marginali.
 - v) Nessuna delle precedenti.
- (b) Un'urna contiene 24 palline tra cui 6 nere e 12 rosse. Si estraggono 4 palline con reinserimento. Qual è la probabilità che almeno 2 delle palline estratte non siano né rosse né nere?
- i) `1-phyper(1,6,18,4)`
 - ii) `1-phyper(2,6,12,4)`
 - iii) `phyper(1,6,12,4)`
 - iv) `1-pbinom(1,4,6/24)`
 - v) `1-pbinom(1,4,6/12)`
- (c) Quale delle seguenti è una funzione di densità per una variabile casuale continua?
- i) Nessuna.
 - ii) Tutte.
 - iii) $f(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} dx; \quad y \in (-\infty, \infty).$
 - iv) $f(y) = \begin{cases} 1 - e^{-3y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$
 - v) $f(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & -0.75 \leq y \leq 0.75 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- (d) Se A e B formano una partizione dello spazio campionario, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
- i) $\mathbb{P}[B] \geq 1/2$
 - ii) $\mathbb{P}[A] \geq 1/2$
 - iii) $\mathbb{P}[A] \geq 1/2$ o $\mathbb{P}[B] \geq 1/2$
 - iv) $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B]$
 - v) Nessuna delle precedenti.

- (e) Per una variabile casuale Y con possibili valori nell'intervallo $(0, 6)$ quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
- i) $\mathbb{E}[Y] > 0$ ma non si può sapere nulla sul valore di $\text{Var}[Y]$
 - ii) $\mathbb{E}[Y] \geq 0$ e $\text{Var}[Y] \geq 0$
 - iii) $\text{Var}[Y] \geq 0$ ma non si può sapere nulla sul valore di $\mathbb{E}[Y]$
 - iv) $\mathbb{E}[Y] = 3$
 - v) $\text{Var}[Y] = 3$

Domanda 5 (9 punti)

I componenti elettronici di un modello e di una marca specifici vengono spediti a un fornitore in lotti da dieci. 50% dei lotti non contengono componenti difettosi, 30% ne contengono esattamente uno e il restante 20% contiene due componenti difettosi. Si sceglie a caso un lotto e due componenti dello stesso vengono selezionati in modo casuale e testati. Si considerino le variabili $X = \text{Numero di componenti difettosi nel lotto selezionato}$ e $Y = \text{Numero di componenti difettosi testati}$.

- (a) Qual è la distribuzione marginale di X ?
- (b) Qual è la distribuzione condizionata di Y dato che il lotto selezionato ha due componenti difettosi?

(c) Qual è la distribuzione marginale di Y ?

(d) Le due variabili sono indipendenti? Si giustifichi adeguatamente la risposta.

- (e) Se nessuno dei componenti testati risulta difettoso, qual è la probabilità che non ci siano componenti difettosi nel lotto?