Probabilità e Statistica [CT0111]
Corso di Laurea triennale in Informatica, a.a. 2022/23

Isadora Antoniano Villalobos

Soluzioni, 6 giugno 2023

Cognome: ______________________ Nome: ______________________

Matricola: ______________________ Firma: ______________________

ISTRUZIONI: DA LEGGERE CON ATTENZIONE!

Questo compito è composto di **5 domande**, per un totale di **30 punti** e dura complessivamente **90 minuti**.

Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Qualora si avesse bisogno di più spazio, sarà possibile continuare sulla prima e ultima pagina, indicandolo chiaramente.

Si richiede una traccia dello svolgimento di ogni esercizio e dei calcoli effettuati per rispondere alle domande. La sostituzione del calcolo e/o risposta numerica con un opportuno comando di R è consentita senza penalizzazione, soltanto dove indicato esplicitamente. Utilizzare almeno 4 decimali di precisione per tutti i calcoli numerici.

È consentito il solo uso della calcolatrice, della tavola della distribuzione Normale presente nel sito Moodle del corso e di un foglio A4 (entrambi lati) con formule e annotazioni. Non sono ammessi appunti, libri ed esercizi svolti.
Il compito non sarà corretto se ci sono informazioni mancanti: Cognome, Nome, Matricola o Firma

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	5	8	7	6	4	30
Score:						

Domanda 1 (5 punti)

Per ognuna delle 5 domande a scelta, leggere attentamente e selezionare un'unica risposta, indicandola chiaramente. Le giustificazioni non sono richieste e, se fornite, non verranno valutate (quindi non perdere tempo).

(a) Quale delle seguenti è una funzione di ripartizione?

i) Tutte.

ii) Nessuna.

iii)
$$F(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

iv)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

v)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-6x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Soluzione: *ii)*

(b) Supponiamo che solo il 25% di tutti i conducenti si fermi completamente a un incrocio quando non sono visibili altri veicoli. Qual è la probabilità che, su 20 conducenti scelti a caso che giungono a un incrocio in queste condizioni, esattamente 6 si fermino completamente?

i) `pbinom(6,20,0.25)`

ii) `dbinom(6,20, 25)`

iii)
$$\binom{20}{6} \frac{3^{14}}{4^{20}}$$

iv)
$$\binom{25}{6} 0.2^6 0.8^{25}$$

v)
$$\binom{20}{6} 0.25^{14} 0.8^6$$

Soluzione: *iii)*

(c) Sia X una variabile casuale e si definisca $Y = -X$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1$

ii) $\mathrm{Var}[Y] = -\mathrm{Var}[X]$

iii) $\mathrm{Cor}[X, Y] = 1$

iv) $\mathrm{Cov}[X, Y] = -1$

v) $\mathrm{Cor}[X, Y] = -1$

Soluzione: *v)*

(d) Se A e B sono due eventi indipendenti, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

i) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
ii) $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A]$
iii) $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[B]$
iv) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
v) Nessuna delle precedenti.

Soluzione: *iii)*

(e) Supponiamo che solo il 70% di tutti i conducenti in una certa zona indossi regolarmente la cintura di sicurezza. Viene selezionato un campione casuale di 500 conducenti della zona. Qual è la probabilità che meno di 325 di loro indossino regolarmente la cintura di sicurezza?

i) `pnorm(324.5,350,10.247)`
ii) `1-pbinom(325,500,0.7)`
iii) `dbinom(325,500,0.7)`
iv) `pnorm(325.5,350,10.247)`
v) `pnorm(324.5,350,105)`

Soluzione: *i)*

Domanda 2 (8 punti)
Una certa lampada ha due lampadine. Sia $X =$ *tempo di vita della prima lampadina* e sia $Y =$ *tempo di vita della seconda lampadina* (entrambe in migliaia di ore). Supponiamo che X e Y siano indipendenti, ciascuna abbia una distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1$ e definiamo $W = X + Y$ la durata totale delle due lampadine.

(a) Qual è la funzione di densità congiunta di (X, Y)?

Soluzione: Per indipendenza, abbiamo che, per $x \geq 0$ e $y \geq 0$,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}e^{-y},$$

quindi, la densità congiunta delle due variabili è

$$f_{X,Y}(x, y) \begin{cases} e^{-x-y} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b) Qual è la probabilità che entrambe lampadine abbiano un tempo di vita di almeno 1000 ore?

Soluzione: Per indipendenza, la probabilità richiesta è:

$$\mathbb{P}[X \geq 1, Y \geq 1] = \mathbb{P}[X \geq 1]\mathbb{P}[Y \geq 1] = e^{-1}e^{-1} = e^{-2} = 0.1353$$

(c) Qual è la probabilità che la durata totale delle due lampadine non superi le 2 migliaia di ore? *È possibile sostituire la risposta finale con un oportuno e ben giustificato commando di R.*

Soluzione: Sia $W = X + Y$. Allora, $W \sim$Gamma$(2, 1)$ e la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}[W \leq 2] = \text{pgamma}(2, 2, 1) = 0.594.$$

(d) Sapendo che la prima lampadina è già rismasta accessa per 2000 ore, trovare il valore atteso e la varianza del suo restante tempo di vita.

Soluzione: Per la proprietà di mancanza di memoria, la distribuzione del tempo di vita rimane invariata dopo le 2000 ore trascorse. In altre parole, $X|X > 2 \sim$Exp(1). Quindi, la media e la varianza richieste sono:

$$\mathbb{E}[X|X > 2] = 1, \quad \text{Var}[X|X > 2] = 1$$

Domanda 3 (7 punti)

Sia data una variabile aleatoria X con funzione di densità $f(x) = Ce^{-|2x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si trovi il valore di C.

Soluzione: Osservando che la denstià è simmetrica attorno a $x = 0$ ($f(x) = f(-x)$), abbiamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-|2x|}\, dx = C \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}\, dx = C$$

(b) Si calcoli la media e la varianza di X

Soluzione: La media di una variabile continua con funzione di densità simmetrica attorno a $x = 0$ è $\mathbb{E}[X] = 0$. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|2x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\, dx - \int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\, dx = 0$$

Per calcolare la varianza, ricordiamo che se $W \sim$Exp$(\lambda = 2)$, allora $\mathbb{E}[W^2] =$Var$[W]+$ $\mathbb{E}^2[W] = 2/2^2 = 1/2$, quindi

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|2x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} x^2 2e^{-|2x|}\, dx = \mathbb{E}[W^2] = \frac{1}{2}$$

(c) Si trovi la mediana di X

Soluzione: La mediana di una variabile continua con funzione di densità simmetrica attorno a $x = 0$ è $Q_2[X] = 0$ Infatti,

$$F_X(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-|2x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-|2x|}\, dx = \frac{1}{2}$$

(d) Si trovi la media e la varianza della variabile $Y = 3X - 1$

Soluzione:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[3X - 1] = 3\mathbb{E}[X] - 1 = -1$$

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[3X - 1] = 3^2\text{Var}[X] = \frac{9}{2} = 4.5$$

Domanda 4 (6 punti)
Un certo canale di comunicazioni puo essere modellato attraverso una catena di Markov con tre possibili stati: (1) trasmissione riuscita, (2) collisione e (e) inattivo, e con la seguente matrice di transizioni:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che P è la matrice di transizione di una catena di Markov regolare.

Soluzione: La matrice di transizioni a due pasi,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.01 & 0.14 \\ 0.06 & 0.7375 & 0.2025 \\ 0.56 & 0.135 & 0.305 \end{pmatrix}$$

ha tutti gli elementi strettamente positivi. Quindi, la catena corrispondente risulta regolare.

(b) Si trovi la distribuzione stazionaria della catena.

Soluzione: La distribuzione stazionaria della catena deve soddisfare la condizione $\pi = \pi P$. Aggiungendo la condizione $\sum_i \pi_i = 1$, si ottiene un sistema lineare con tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} 0.9\pi_1 + 0.4\pi_3 & = \pi_1 \\ 0.85\pi_2 + 0.1\pi_3 & = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1 \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione: $\pi = (0.7059, 0.1176, 0.1765)$.

(c) Si calcoli la percentuale di tempo che il canale risulta inattivo nel lungo periodo

Soluzione: $\pi_3 = 0.1765$, dunque nel lungo periodo il canale risulta inattivo circa il 17.65% del tempo.

Domanda 5 (4 punti)
Si spieghi la relazione tra la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson

Soluzione: La risposta corretta non è unica... Si deve menzionare (anche implicitamente) la legge degli eventi rari e l'approssimazione Poisson per la binomiale.