G. Santin 09.01.2024

Esame del corso

Analisi Matematica - Mod. 1

Corso di Laurea in Informatica

Tema B

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- Durante la prova è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4 e una calcolatrice. NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Su ogni foglio consegnato va scritto il nome e il numero di pagina.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.

Esercizio 1 (Studio di funzione) .... **14 punti**

Considerare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}\ .$$

(a) Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare l'intersezione di f con gli assi e studiarne il segno.

(b) Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.

(c) Discutere la continuità e derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi.

(d) Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Soluzione ....

(a) Dividiamo per punti:

- Per definire il dominio dobbiamo richiedere che $\frac{x^3-1}{x} \geq 0$ e che $x \neq 0$. Il numeratore $x^3 - 1$ ha un unico zero in $x = 1$, ed è negativo per $x < 1$ e positivo per $x > 1$. Il denominatore è negativo per $x < 0$ e positivo per $x > 0$. Quindi abbiamo $\frac{x^3-1}{x} \geq 0$ se e solo se $x \leq 1$ oppure $x > 0$ (vedere anche Tabella 2). Il dominio di f è quindi $A =]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$.

		0		1	
$x^3 - 1$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
$(x^3 - 1)/x$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Tabella 2: Studio del segno di $(x^3 - 1)/x$.

- La funzione non può essere ne' pari ne' dispari perchè il suo dominio non è simmetrico. Non può essere periodica perchè il suo dominio non lo è.
- Abbiamo che $0 \notin A$, quindi la funzione non interseca l'asse y. Invece abbiamo $f(x) = 0$ se e solo se $x^3 - 1 = 0$, cioè $x = 1$. Per tutti gli altri valori di $x \in A$ abbiamo $f(x) > 0$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty, 0, 1$. Usando il confronto fra termini di ordine massimo, abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = +\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

In $x = 1$ il limite si calcola per sostituzione, cioè

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = 0.$$

In $x = 0$ abbiamo invece una forma $1/0$, quindi

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = +\infty,$$

e quindi la retta $x = 0$ è l'unico asintoto verticale.

Dobbiamo ora verificare la presenza di asintoti obliqui (visto che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$). Osserviamo che

$$\sqrt{x^3 - 1} = \sqrt{x^2(x - 1/x^2)} = |x|\sqrt{x - 1/x^2},$$

e quindi abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x - 1/x^2}{x}} = \lim_{x \to -\infty} -1 \cdot \sqrt{\frac{x - 1/x^2}{x}} = -1 \cdot 1 = -1,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x - 1/x^2}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 1 \cdot \sqrt{\frac{x - 1/x^2}{x}} = 1 \cdot 1 = 1,$$

e quindi gli eventuali asintoti obliqui hanno $m = -1$ a $-\infty$ e $m = +1$ a $+\infty$. Procediamo e calcoliamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} + x = \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{\frac{x - 1/x^2}{x}} + x = \lim_{x \to -\infty} |x| \cdot 1 + x = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} - x = \lim_{x \to +\infty} |x| \cdot 1 - x = 0.$$

Abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y = -x$ a $-\infty$, mentre $y = x$ a $+\infty$.

(c) La funzione è continua in $]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$ e derivabile in $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ perchè è data da somme, rapporti e composizioni di funzioni continue e derivabili.

Calcoliamo la derivata prima per $x \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ usando le formule di derivazione della funzione composta e del rapporto di funzioni, ottenendo

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}} \left(\frac{x^3 - 1}{x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}} \left(\frac{3x^3 - (x^3 - 1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}} \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2f(x)} \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2}\right).$$

Abbiamo quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^3 + 1 = 0$, cioè $x = -1/\sqrt[3]{2} \approx -0.79$.

Il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $2x^3 + 1$ (visto che $f(x)$ e x^2 sono strettamente positivi in $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$), quindi abbiamo che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq -1/\sqrt[3]{2}$. Ne segue che f è descrescente in $]-\infty, -1/\sqrt[3]{2}[$, e crescente in $]-1/\sqrt[3]{2}, 0[\cup]1/\sqrt[3]{2}, +\infty[$. In particolare il punto $x = -1/\sqrt[3]{2}$ è di minimo relativo per f, con

$$f(-1/\sqrt[3]{2}) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}} = \sqrt{\frac{3}{2^{2/3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1.37.$$

(d) Il grafico di f è abbozzato in Figura 1. L'immagine di f è $[0, +\infty[$, visto che $f(x) \geq 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

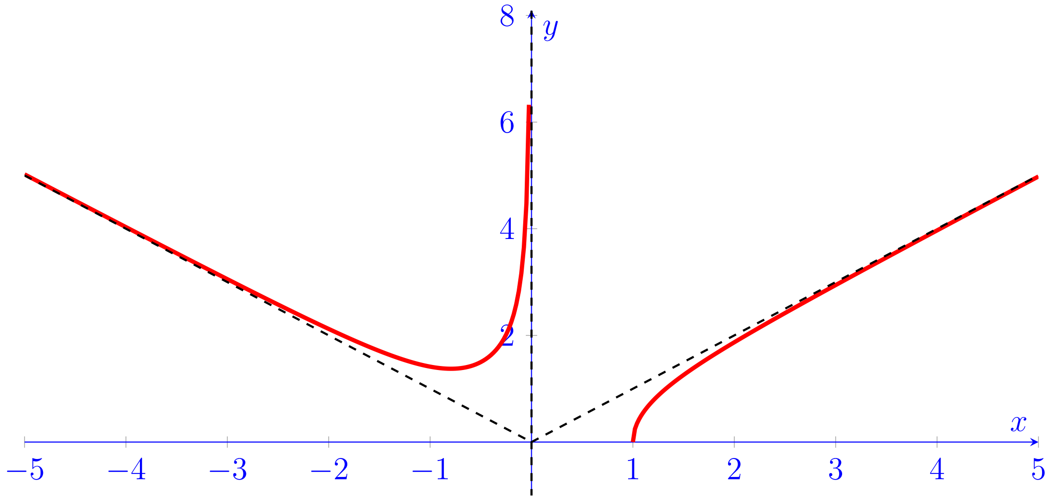

Figura 1: Grafico della funzione f.

Esercizio 2 (Continuità e derivabilità) .... **5 punti**

Dati $p, q \in \mathbb{R}$, considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+p)^2} & \text{se } x \leq 0 \\ (\log(x+e))^q & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $\log = \log_e$.
Discutere per quali valori di $p, q \in \mathbb{R}$ la funzione f è di classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Soluzione ....

Analizziamo prima le due parti separatamente:

- La funzione $\dfrac{1}{(x+p)^2}$ è continua e derivabile per $x + p \neq 0$, cioè per $x \neq -p$. Quindi è continua per ogni $x \leq 0$ se e solo se $p < 0$.
- La funzione $(\log(x+e))^q$ è continua e derivabile per ogni $x > 0$ e $q \in \mathbb{R}$.

Ci resta da controllare il punto di giunzione $x = 0$:

- Per la continuità abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \frac{1}{p^2}, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\log(x+e))^q = \log(e)^q = 1^q = 1,$$

quindi la funzione è continua in 0 (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $1/p^2 = 1$, cioè $p^2 = 1$. Siccome abbiamo trovato che $p < 0$, abbiamo solo la soluzione $p = -1$.

- Assumiamo adesso che $p = -1$ (visto che la funzione deve essere continua per essere derivabile). Abbiamo che f è derivabile per $x \neq 0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)' & = -\frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}, \quad x < 0, \\ ((\log(x+e))^q)' & = q\log(x+e)^{q-1}\frac{1}{x+e}, \quad x > 0. \end{cases}$$

Per verificare la derivabilità in $x = 0$ calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{(x-1)^3} = 2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} q\log(x+e)^{q-1}\frac{1}{x+e} = q\log(e)^{q-1}\frac{1}{e} = \frac{q}{e},$$

e quindi abbiamo che f è derivabile in $x = 0$ (e quindi in tutto $\mathbb{R}$) se e solo se $2 = \frac{q}{e}$, cioè se $q = 2e$.

Esercizio 3 (Derivate e retta tangente) . . . . **6 punti**

Considerare la funzione $g(x) = \exp\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right)$.

(a) Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in tal caso, determinarne il periodo.

(b) Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione . . . .

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\cos(x)^2 \neq 0$, cioè $\cos(x) \neq 0$, cioè per ogni $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre non abbiamo mai $g(x) = 0$ perchè la funzione esponenziale assume sempre valori positivi. Per verificare la simmetria usiamo il fatto che $\cos(-x)^2 = \cos(x)^2$, e quindi calcoliamo

$$g(-x) = \exp\left(\frac{1}{\cos(-x)^2} - 1\right) = \exp\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right) = g(x),$$

e quindi la funzione è pari. La funzione è anche periodica di periodo $\tau = \pi$, visto che $\cos(x+\pi)^2 = \cos(x)^2$, e non può avere periodo inferiore.

(b) L'equazione della retta tangente in x_0 è data dal polinomio di Taylor di grado $n = 1$ centrato in x_0, che ha equazione[1]

$$T_{1,x_0}(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = g(x_0) + g'(x_0)\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Usando la formula di derivazione della funzione composta, otteniamo che

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right)' = \exp\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right)\left(\frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^4}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1\right)\left(\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}\right) = g(x)\left(\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}\right). \end{aligned}$$

Ora, ricordando che $x_0 = \pi/4$ e che $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, e che quindi $\sin(\pi/4)^2 = 1/2$, $\sin(\pi/4)^3 = 1/(2\sqrt{2})$, possiamo calcolare i valori

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \exp\left(\frac{1}{\cos(x_0)^2} - 1\right) = \exp\left(\frac{1}{1/2} - 1\right) = \exp(1) = e, \\ g'(x_0) &= g(x_0)\left(\frac{2\sin(x_0)}{\cos(x_0)^3}\right) = e\left(\frac{2/\sqrt{2}}{1/(2\sqrt{2})}\right) = 4e. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione della retta tangente è

$$T_{1,x_0}(x) = e + 4e\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 4 (Integrali) .... **5 punti**

Considerare le funzioni

$$h_1(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x, \quad h_2(x) = 3x - x^2.$$

(a) Semplificare l'espressione delle due funzioni e abbozzarne il grafico nell'intervallo $[-1, 4]$.

(b) Determinare l'area delle due regioni limitate comprese fra i grafici di h_1 e h_2.

Soluzione ....

(a) Osserviamo che possiamo fattorizzare le due funzioni come

$$h_1(x) = -x(x^2 - 4x + 3) = -x(x-1)(x-3), \quad h_2(x) = -x(x-3),$$

e quindi i loro grafici possono essere abbozzati come in Figura 2.

[1] Si può anche usare direttamente questa formula, senza scriverla come polinomio di Taylor

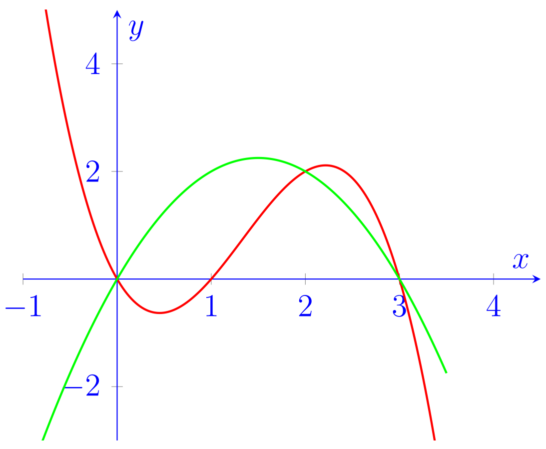

Figura 2: I grafici delle funzioni h_1 (in rosso) e h_2 (in verde).

(b) Le regioni limitate fra le due funzioni sono quelle nell'intervallo $[0, 3]$, e l'area di queste regioni è data dall'integrale definito

$$\int_0^3 |h_1(x) - h_2(x)| \, dx.$$

Dal punto precedente osserviamo che possiamo scrivere

$$h_1(x) - h_2(x) = -x(x-1)(x-3) + x(x-3) = -x(x-3)((x-1)-1) = -x(x-3)(x-2),$$

e studiando il segno di questa espressione abbiamo immediatamente che

$$|h_1(x) - h_2(x)| = \begin{cases} -(h_1(x) - h_2(x)), & \text{se } x \in [0, 2] \\ \quad h_1(x) - h_2(x), & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

come si vede anche dai grafici in Figura 2.

Ne segue che possiamo spezzare l'integrale in due parti, e calcolarlo come

$$\begin{aligned} \int_0^3 |h_1(x) - h_2(x)| \, dx &= \int_0^2 (-(h_1(x) - h_2(x))) \, dx + \int_2^3 (h_1(x) - h_2(x)) \, dx \\ &= -\int_0^2 (h_1(x) - h_2(x)) \, dx + \int_2^3 (h_1(x) - h_2(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Usando il fatto che $h_1(x) - h_2(x) = -x(x-2)(x-3) = -x^3 + 5x^2 - 6x$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int (h_1(x) - h_2(x)) \, dx = \int \left(-x^3 + 5x^2 - 6x\right) dx &= -\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chiamiamo la primitiva $F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 3x^2$. Possiamo quindi calcolare l'integrale definito come

$$\begin{aligned}\int_0^3 |h_1(x) - h_2(x)|\,dx &= -\int_0^2 (h_1(x) - h_2(x))\,dx + \int_2^3 (h_1(x) - h_2(x))\,dx \\ &= -\left[F(x)\right]_0^2 + \left[F(x)\right]_2^3 \\ &= -(F(2) - F(0)) + (F(3) - F(2)) \\ &= -2F(2) + F(0) + F(3),\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}&F(2) = -\frac{16}{4} + \frac{5}{3}\cdot 8 - 3\cdot 4 = -4 + \frac{40}{3} - 12 = \frac{-12+40-36}{3} = -\frac{8}{3} \\ &F(0) = 0 \\ &F(3) = -\frac{81}{4} + \frac{5}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = -\frac{81}{4} + 45 - 27 = \frac{-81+180-108}{4} = -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^3 |h_1(x) - h_2(x)|\,dx = -2F(2) + F(0) + F(3), = \frac{16}{3} - \frac{9}{4} = \frac{64-27}{12} = \frac{37}{12}.$$