Esercizi del corso

Algebra Lineare

Secondo semestre 2024/2025

Foglio 10: Ripasso sulle matrici, diagonalizzabilità

Esercizio 1 (Applicazioni lineari)

Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & 1 \\ -1 & -k & -3 \\ k & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha rango 3.

(b) Per i valori di k per cui la matrice non ha rango 3, determinare $\operatorname{Ker} T_k$ e $\operatorname{Im} T_k$ (base e dimensione).

(c) Per $k = 0$ determinare $T_0^{-1}(1, 0, 0)$.

(d) Per i valori di k per cui la matrice non ha rango 3, determinare $T_k^{-1}(2, -4, 5)$.

Esercizio 2 (Sistemi lineari)

Si considerino le due equazioni $3x - y + z = 0$ e $x - 2y - 3z = 0$.

(a) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con la sola soluzione nulla.

(b) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con una unica soluzione non nulla. Trovare poi la soluzione.

(c) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con infinite soluzioni. É possibile ottenere infinite soluzioni dipendenti da due parametri?

Esercizio 3 (Applicazioni lineari e matrici)

Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T_a(x, y, z) = (x + ay, (1 - a)y + z, ax + y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice associata a T_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) (Difficile) Determinare la matrice associata a T_a rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, -1, 2)\}.$$

Esercizio 4 (Anti-immagine) . . . .

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato il vettore $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$, determinare $T^{-1}(u)$. L'applicazione T é invertibile?

Esercizio 5 (Diagonalizzabilità) . . . .

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad T(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \quad T(e_3) = e_1.$$

(a) Determinare la matrice A di rappresentazione di T rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e calcolare $T(1, 1, 1)$.

(b) Stabilire se T è iniettivo.

(c) Dimostrare che T è diagonalizzabile, e trovare esplicitamente una base di autovettori.

Esercizio 6 (Applicazioni lineari) . . . .

Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (2, 0, 1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 3).$$

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$T(v_1) = 3v_1, \quad T(v_2) = 2v_2 \quad \text{e} \quad T(v_3) = 2v_3 + 2v_2.$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica.

(b) Determinare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(c) Stabilire se T è invertibile e, in caso affermativo, determinare l'applicazione inversa T^{-1}.

(d) Determinare autovalori e autovettori di T.

Esercizio 7 (Applicazioni lineari) . . . .

Dimostrare che l' endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix}, \qquad \forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è diagonalizzabile, e trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori.