

Esercizi del corso
Algebra Lineare
 Secondo semestre 2024/2025
Foglio 11: Autovalori e autovettori

Esercizio 1 (Diagonalizzabilità)

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$T(e_1 + e_2) = 6e_1 - 6e_2 + 4e_3, \quad T(e_1 - e_2) = 2e_1 - 2e_2, \quad T(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

- (a) Determinare la matrice A di rappresentazione di T rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- (b) Determinare gli autovalori e gli autovettori di T , e stabilire se T è diagonalizzabile.
- (c) Stabilire se esistono $t \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $(-2, t, -2)$ è un autovettore di T .

Esercizio 2 (Diagonalizzabilità)

Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su \mathbb{R} , su \mathbb{C} , o su nessuno dei due campi.

Esercizio 3 (Diagonalizzabilità)

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 5 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 (Calcolo di autovalori e autovettori)

Considerare le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trovare gli autovalori e gli autovettori delle matrici A, B, C, D, E .
- (b) Stabilire se le matrici sono diagonalizzabili, e in tal caso trovare la matrice S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale (con gli autovalori sulla diagonale).

Esercizio 5 (Autovettori).....

Dato $k \in \mathbb{R}$, considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice ammette $v = (1, 1, 2)$ come autovettore.
- (b) Scelto uno di questi valori, si dica se A è diagonalizzabile.