definizione di limite destro e sinistro   pag. 10

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di D

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x < x_0$)

$\hookrightarrow$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| > \varepsilon \ \forall x : x_0 - \delta < x < x_0$

$x_0 - \delta$ x_0

definizione di limite (ε-δ)   pag 4

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 punto di accumulazione per D_f

diremo che ℓ è un limite di f per x tende a x_0

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(\ell, \varepsilon[\ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

Teorema di unicità   pag 7

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 di accum. in D_f

$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$

allora $\ell_1 = \ell_2$

Teorema di permanenza del segno   pag 8

$f: D_f \to \mathbb{R}$; x_0 accumu. di D_f

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ allora

$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell < 0$ allora

$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

pag. 11

teorema teorema del confronto (o dei carabinieri)   pag 12

f, g, h funzioni definite su intervallo I; x_0 di acc. per I

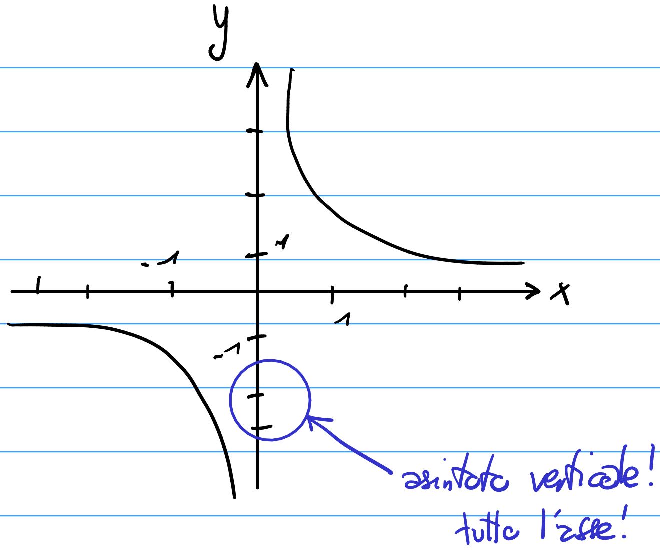
assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

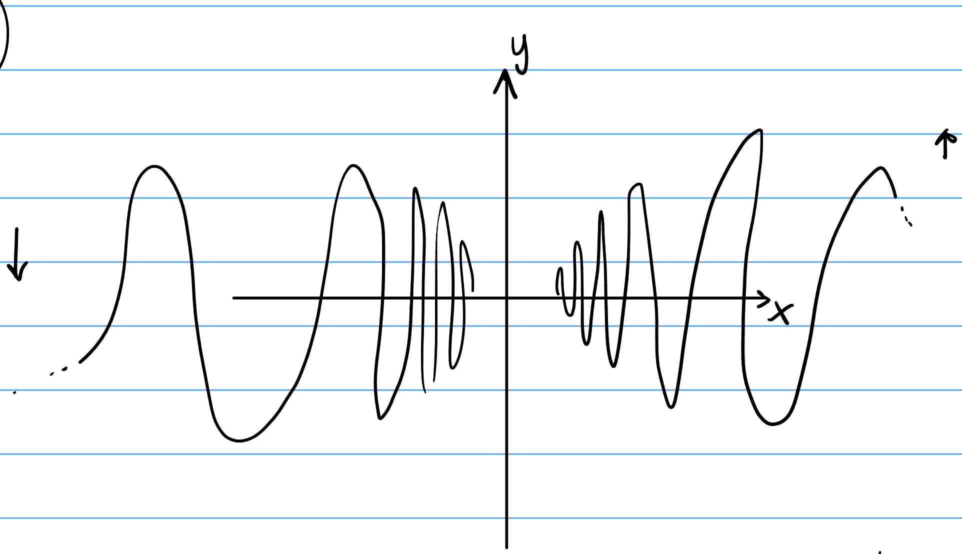
pag. 13 limiti di somma prodotto, rapporto

Limiti

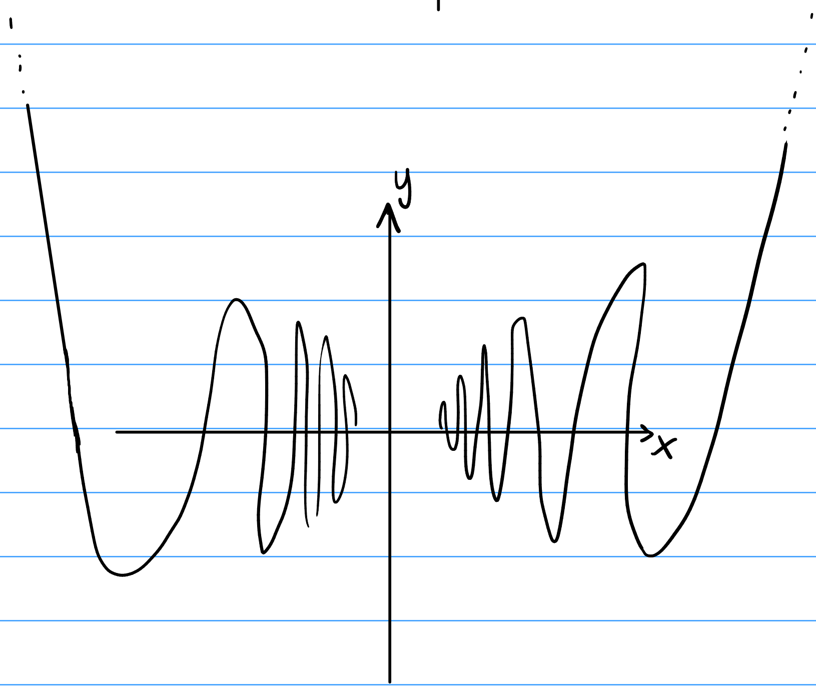
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



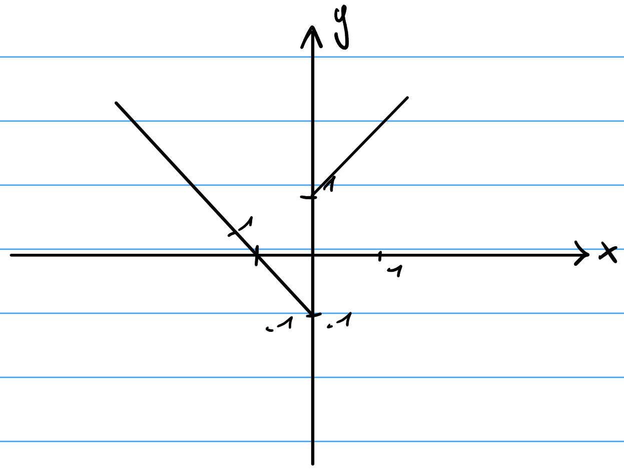
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

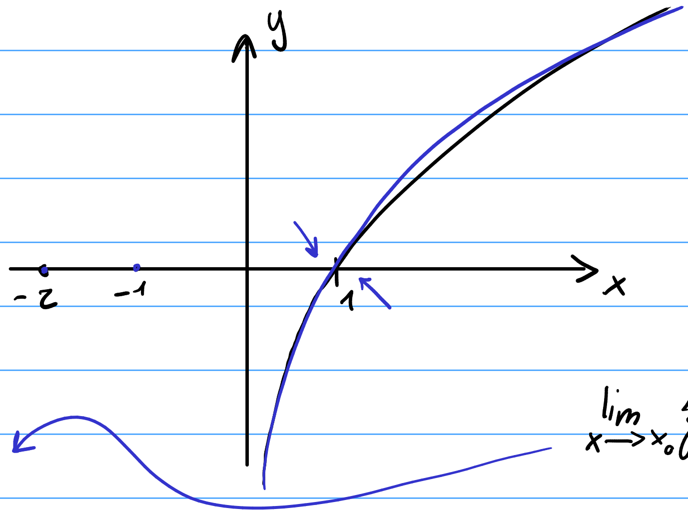


$$f(x) = \frac{x^2+x}{|x|}$$



$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=\{-1,-2\} \end{cases}$$

1. grafico



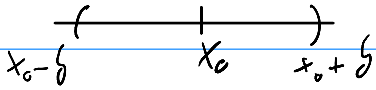
$\lim_{x \to x_0} f(x) = e$

possibili x_0 $\{x=0, x=+\infty, x=1\}$

$x_0 \in [0,+\infty[$ e limite a $+\infty$

↳ sono punti di accumulazione del D di $f(x)$!

$-2, -1$ sono invece isolati: non c'è nulla da calcolare prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; $\delta > 0$ raggio (intervallo circolare)



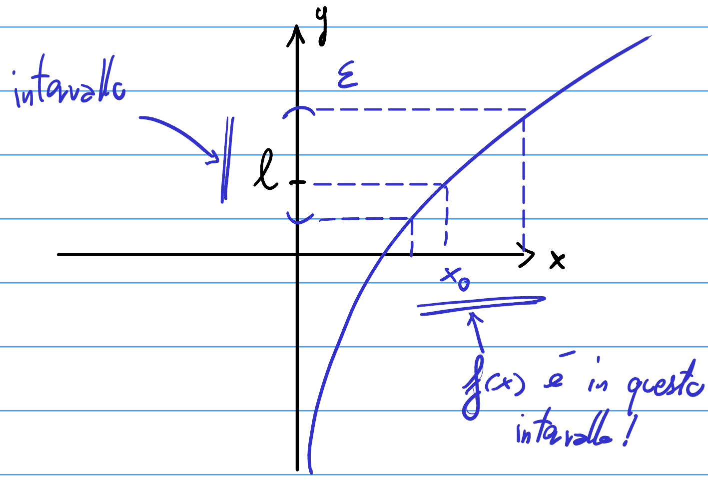
definizione di limite ($\varepsilon - \delta$)

$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 punto di accumulazione per D_f

diremo che l è un limite di f per x tende a x_0

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid f(x) \in B(l, \varepsilon[\ \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$

e scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$



$\forall \varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) \in B(l, \varepsilon[$

$\forall x \in B(l, \varepsilon[\cap D_f$ questo vuol dire

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad |x - x_0| < \delta$

inoltre $x \in D_f$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; verifichiamo che $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

(so il risultato, ma mi dedico alla verifica!)

(Dominio = (denom) = $x-1 \neq 0$; $x \neq 1$)

$]-\infty, 1[\ \cup \ ]1, +\infty[$

dobbiamo mostrare che fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad x \in D_f$$

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x : |x-1| < \delta \ ; \ x \neq 1$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right) < \varepsilon \iff \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\iff |x+1-2| < \varepsilon \iff |x-1| < \varepsilon$$

poniamo $\delta = \varepsilon$

$g(x) = 4x+5$; $\lim_{x \to 2} g(x) = 13$

$$|g(x) - 13| < \varepsilon \quad \forall x : |x-2| < \delta \quad \mathbb{R}$$

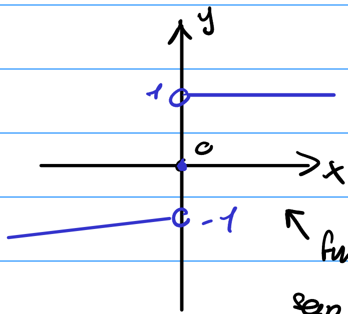
$$|4x+5-13|<\varepsilon$$

$$|4x-8|<\varepsilon$$

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$$ poniamo $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, allora va bene

esempio con limite che non esiste

$$\lim_{x\to 0} sgn(x) = \nexists$$ non esiste

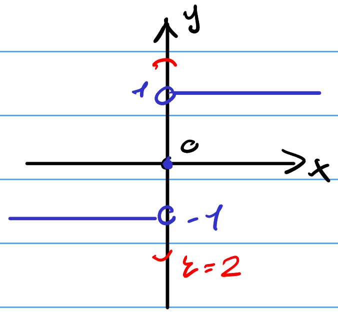


funzione sgn (segno)

Dim assumiamo che non può essere 0 (in maniera analoga, anche nessun altro numero)

basta trovare un $\varepsilon>0$ per cui non esista un $\delta>0$ che non rispetta la definizione di limite!

$$|x-0|<\delta \not\Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$$



se $\varepsilon=1/2$

$\forall\delta>0$ si ha che in $B(0,\delta[$ ci sono $x>0$, quindi $f(x)=1\in B(0,1/2[$

that's why

Teorema di unicità

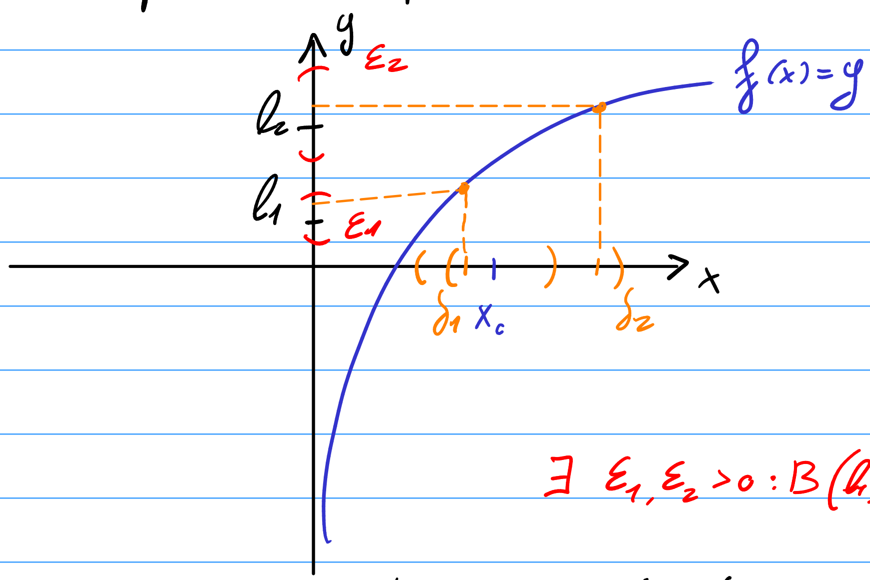
$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 di accum. in D_f

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

allora
$l_1 = l_2$

dimostriamo per assurdo, ponendo $l_1 \neq l_2$



$\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B(l_1, \varepsilon_1[\cap B(l_2, \varepsilon_2[= \emptyset$

dalla definizione di limite troviamo $\delta_1, \delta_2 > 0$
tali che

$$f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[\quad \forall\ x \in B(x_0, \delta_1[$$

$$\text{e} \quad f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[\quad \forall\ x \in B(x_0, \delta_2[$$

chiamiamo $J = B(x_0, \delta_1[\cap B(x_0, \delta_2[\neq \emptyset$

allora sia $x \in J : f(x) \in B(l_1, \varepsilon_1[$
e $f(x) \in B(l_2, \varepsilon_2[$ disgiunte!

assurdo, prima abbiamo scelto $B(l_1, \varepsilon_1[\cap B(l_2, \varepsilon_2[= \emptyset$
mentre ora diciamo il contrario!

Teorema di permanenza del segno

$f : D_f \to \mathbb{R}$; x_0 accumu. di D_f

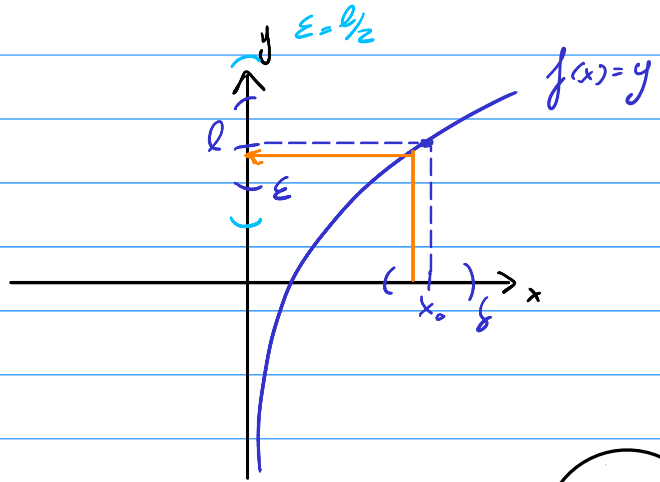
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ allora

$$\exists \delta > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta[\cap D_f$$

Dim



$\varepsilon < l$ allora sono sicuro sia positivo!

usiamo la definizione di limite prendendo $\varepsilon = l/2$

Limiti ad infinito

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m > 0 \mid f(x) - \ell < \varepsilon \quad \forall x \in \,]m, +\infty[\, \cap \, D_f$

$x > m$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m > 0 \mid f(x) - \ell < \varepsilon \quad \forall x \in \,]-\infty, m[\, \cap \, D_f$

$x < m$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in \,]L, +\infty[\quad \forall x : |x - x_0| < \delta$

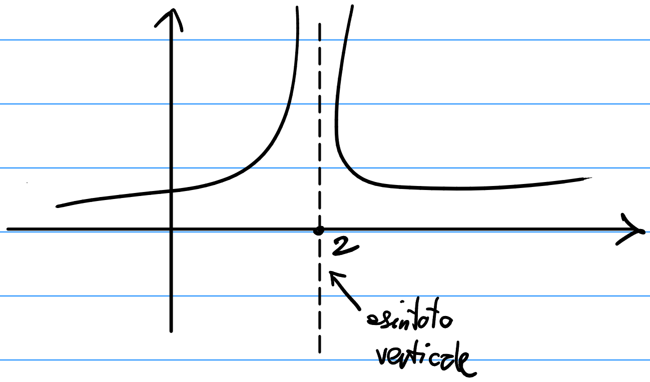
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in \,]-\infty, L[\quad \forall x : |x - x_0| < \delta$

prossima volta cerca definizioni di:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (separate) esercizio

verificare che $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$



fissato un $m > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $f(x) > m$

$\forall x \in B(2, \delta[\quad |x-2| < \delta$

molto simile

$f(x) > m \longrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > m \underset{\substack{m>0 \\ x \neq 2}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{m} > (x-2)^2$

$\downarrow$

$|x-2| < \frac{1}{\sqrt{m}}$

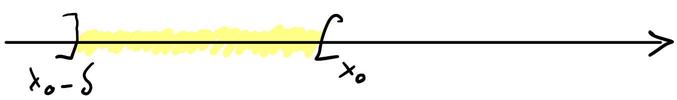
quindi fissiamo $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$ → noto come cresce m diminuisce δ!!

definizione di limite destro e sinistro

$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di $\mathbb{D}$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite sinistro $x < x_0$)

$\hookrightarrow$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| > \varepsilon \;\; \forall x : x_0 - \delta < x < x_0$

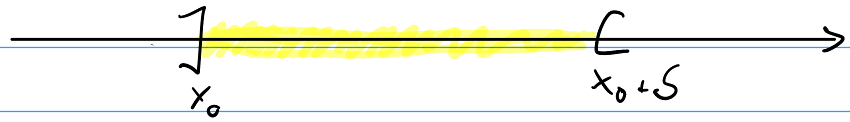


$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; x_0 accum. di D

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite destro $x > x_0$)

$\hookrightarrow$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta$

$x \neq x_0$

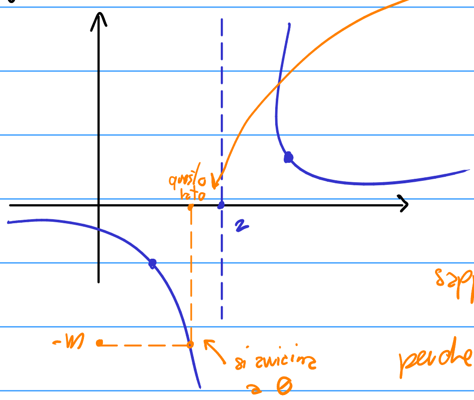


$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \ \text{e} \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l}$$

teorema

esempio

$f(x) = \frac{1}{x-2}$; verificare che $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



$\forall m > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$f(x) < m \quad \forall x : 2 - \delta < x < 2$

$\frac{1}{x-2} < -m$

sappiamo già che è negativa

perché $\underbrace{x < 2 \quad x \to 2^-}_{= \ x - 2 < 0 \ !!}$ (tende)

$\frac{1}{x-2} < -m$

$1 > -m(x-2)$

$\frac{1}{-m} > (x-2)$

$2 - \frac{1}{m} < x < 2$

poniamo $\delta = 1/m$

teorema del confronto (o dei carabinieri)

f, g, h funzioni definite su intervallo I; x_0 di acc. per I

assumiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

---

limite di una somma

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \ell + m$

dimostriamo che fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$f(x) + g(x) \in B(l+m, \varepsilon[\quad \forall x \in B(x_0, \delta[$ ↵

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

sappiamo che possiamo trovare δ_1 tale che $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x : |x - x_0| < \delta$
e inoltre troviamo δ_2 tale che $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x : |x - x_0| < \delta_2$

$$|f(x) + g(x) - l - m)| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)|$$

$$|=$$

$$\leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

proprietà usata

se $|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$

cioé se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$		m: $m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
l	$m \in \mathbb{R}$	$m + l$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F ind
	$-\infty$	$-\infty$	F ind	$-\infty$

F ind = $[\infty - \infty]$ (calcoli particolari da compiere)

limite del prodotto

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = l \cdot m$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$		m: <0	$=0$	>0	$+\infty$	$-\infty$
l	<0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$-\infty$	$+\infty$
	$=0$	0	0	0	F ind	F ind
	>0	$l \cdot m$	0	$l \cdot m$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	F ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	F ind	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

limite del rapporto

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

m interessa per $\lim_{x \to x_0^{\pm}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) \to l}{g(x) \to m}$		m (den.): <0	$0^{\pm}$	>0	$+\infty$	$-\infty$
(num) l	<0	l/m	$\mp\infty$ *	l/m	0	0
	$0^{\pm}$	0	$[0/0]$	0	0	0
	>0	l/m	$\pm\infty$	l/m	0	0
	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$
	$-\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^2}$ → denominatore tende a zero, il numero tenterà di crescere ma il risultato è $-\infty$

forme indeterminate

fattorizzazione!

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0} \;!!$$ forma indeterminata

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

x^2+2x+4

$$\lim_{x \to 2} \Big|= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$\Big|=$

$$x^2+2x+4 \to 2^2+2(2)+4 = 12$$

ecco a cosa punta!

2) $$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

D: $x^2-4>0 \qquad x^2>4 \qquad x>\pm 2 \;=\; x<-2 \wedge x>2$

$\Big|=$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(x-2)(\sqrt{x^2-4})}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2-4})}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$$ soluzione finale!

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$D \qquad x \neq 0 \qquad 4+x>0 \qquad x>-4$

$\Big|=$

$$\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \to 0} = \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{4}$$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}}{x(2+1/x)} = \frac{|x|\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}{x(2+1/x)}$

$D: x \neq -\frac{1}{2}$

$= \frac{\cancel{|x|}\, 1}{\cancel{x}\, 2} = -1/2$ ✓

$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \left[\frac{0}{0}\right]$

C.E $x>2$

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x}-\sqrt{2}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x^2-4}\,(\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{x-2})}$

$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2-(x-2)}{\sqrt{x^2-4}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2}-\sqrt{x-2})}$

$= \frac{x+2-2\sqrt{x-2}-x+2}{\quad}$

Controllo forum moodle, da finire calcol.

$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$

$\to 0 \qquad \to 1/2$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{(x^2-1)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \frac{x(x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$$(x^3+x)(x-1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \quad \nexists$$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \quad \nexists$ se è periodica, ma attenzione!

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{[-1,\, 1]}{\cos(x)} + x = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = |l|$$

forme indeterminate

$[\infty-\infty]$; $[0\cdot\infty]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $\left[\frac{0}{0}\right]$;

$[1^{\infty}] \to \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$[0^{0}] \to \lim_{x\to 0} x^{x}$

$[\infty^{0}] \to \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$

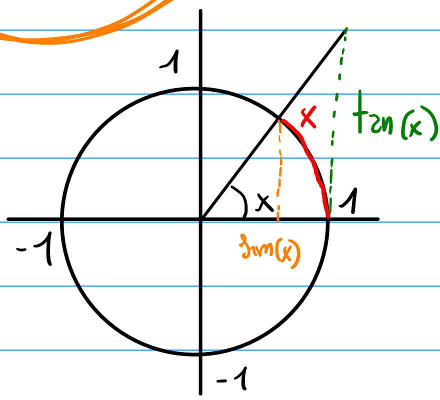
1) Riconosco la forma indet.

2) Usare i "trucchi" per risolvere (es. delopital)

limiti notevoli

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

DIM



x = angolo in rad

$\sin(x) < x < \tan(x)$

$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$

costante

$x\to 0$

$x\to 0$

1

per il teorema del confronto

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$x \to 1$

1

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \quad (\text{cambio di variabili}) \quad t = \arcsin(x) \quad x = \sin(t)$$

$$\lim_{t\to 0} = \frac{t}{\sin(t)} = 1$$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \quad t = \frac{x}{2} \quad x = 2t \quad \frac{2\sin^2(t)}{4t^2} = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{[1^\infty]}{=} e$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \underset{[1^\infty]}{=} e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = 1$$

e

$\ln e = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \; ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad t = e^x - 1$$

$$x = \ln(t+1)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)}$$

↳ reciproco di prima = 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot x\alpha} - 1}{x} = \frac{e^{x\alpha}-1}{x}$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$

$$\alpha \frac{e^{x\alpha}-1}{\alpha x} = \alpha$$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 0 !! $(x > \ln x)$

↳ ne consegue che: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x^b}{x^p}$ 0 $\forall a>0, a\neq 1$

$\wedge$

$p>0$

$\wedge$

$b\in\mathbb{R}$