

Analisi Matematica - Mod. 1

Primo semestre 2024/2025

Foglio 5: Funzioni continue e limiti notevoli**Esercizio 1 (Limiti notevoli)**

Usando i limiti notevoli (vedere sezioni 5.1 e 5.2 delle dispense), calcolare i seguenti limiti.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ S: 1
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$ S: $\frac{3}{5}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$ S: $\frac{2}{3}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin x}{x^3}$ S: $\frac{1}{2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ S: $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ S: $\frac{1}{e}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$, (dove $\alpha \in \mathbb{R}$) S: e^α
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+3}$ S: e^2
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\alpha x)}{x}$, (dove $\alpha \in \mathbb{R}$) S: α
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$, (dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) S: $\alpha - \beta$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x}$ S: 2
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}$ S: 1
- (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \log(x) - x^{25}}{x^3}$ S: $+\infty$

Esercizio 2 (Continuità e derivabilità)Dire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a, & \text{se } x < 1, \\ bx^2 + 1, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} .