

Foglio di Esercizi 9 – Metodo di eliminazione di Gauss

NOTA BENE: in tutti gli esercizi, utilizzate il metodo di eliminazione (o algoritmo) di Gauss.

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x - y + z = -5 \\ y - x + 2z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Risolvere, al variare di $m \in \mathbb{R}$, il seguente sistema:

$$\begin{cases} mx + (m - 1)y = m + 2 \\ (m + 1)x - my = 5m + 3 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + kz = 1 \\ (1 + k)x - ky + z = 2 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Per tali valori determinare l'unica soluzione del sistema.

Esercizio 5. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = 1 \\ -kx + y + (1 + k)z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

Esercizio 6. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema di tre equazioni e quattro incognite:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ kx - ky + w = 0 \\ y + kz + w = 0 \end{cases}$$

Trovare poi la (o le infinite) soluzioni. Ripetere l'esercizio considerando questa volta il vettore di termini noti $b = (1, 1, 1)$.

Esercizio 7. Stabilire se esistono (e in caso quante sono) le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y + w = 1 \\ z - w = -1 \\ x - y + 2z - w = 1 \end{cases}$$

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ \alpha - 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è:

- *iniettiva*
- *suriettiva*
- *invertibile*
- *tale che $\text{Ker } T$ ha dimensione 1.*