Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 1 - *Prof. D. Pasetto*

18/06/2021; Tema A
Tempo a disposizione: 2h e 30 min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (15 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log\left(x^2 - 2x\right) - |0.5x + 2|$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto).

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$.

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni distinte.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \frac{3}{(3x-1)^3} = -\infty$$

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \mathrm{e}^{-2\tan(2x)}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

3.2 Calcolare il polinomio di Taylor di primo grado di g rispetto al punto $x_0 = \pi/6$.

3.3 Calcolare il seguente l'integrale indefinito di $\dfrac{g(x)}{(1 - 2\sin^2(x))^2}$

Problema 4 (5 punti)

Considerare la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 4, \quad \text{con} \quad x \in]0, 1]$$

Disegnare il grafico di h e calcolare, se possibile:

4.1 l'area della regione del piano compresa tra il grafico di h e l'asse delle ascisse;

4.2 il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di h attorno all'asse y.

Soluzioni

Problema 1 (15 punti)

Considerare la funzione

$$f(x) = \log\left(x^2 - 2x\right) - |0.5x + 2|$$

1.1 Determinarne il dominio ed evidenziare eventuali simmetrie. Calcolare, se possibile, l'intersezione di f con l'asse delle ordinate (lo studio del segno NON è richiesto). (1 punto)

La funzione si può riscrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log(x^2 - 2x) - \frac{x}{2} - 2 & \text{per } x \geq -4 \\ f_2(x) = \log(x^2 - 2x) + \frac{x}{2} + 2 & \text{per } x < -4 \end{cases}$$

Dominio: bisogna imporre $x^2 - 2x > 0$ e quindi il dominio è:

$$D ==]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non è né pari né dispari. L'intersezione con l'asse y non si può calcolare perché $x = 0$ non appartiene al dominio.

1.2 Studiare l'andamento di $f(x)$ agli estremi del dominio. Trovare eventuali asintoti. Discutere la continuità di $f(x)$. (4 punti)

$$\lim_{x\to 0^-} \log(x^2 - 2x) - \frac{x}{2} - 2 = -\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a zero. Quindi $x = 0$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 2^+} \log(x^2 - 2x) - \frac{x}{2} - 2 = -\infty$$

dove si è usato il fatto che logaritmo tende a $-\infty$ quando l'argomento tende a zero. Quindi $x = 2$ è asintoto verticale.

Limiti ad infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \log(x^2 - 2x) - \frac{x}{2} - 2 = \lim_{x\to+\infty} x(\frac{\log(x^2 - 2x)}{x} - \frac{1}{2} - \frac{2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2 - 2x) + \frac{x}{2} + 2 = \lim_{x\to-\infty} x(\frac{\log(x^2 - 2x)}{x} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} m: &\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-2x)}{x} - \frac{1}{2} - \frac{2}{x} = -\frac{1}{2} \\ q: &\lim_{x\to+\infty} \log(x^2-2x) - 2 = +\infty \end{aligned}$$

Quindi f NON ha un asintoto obliquo a $+\infty$

Cerchiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned} m: &\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2-2x)}{x} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \\ q: &\lim_{x\to-\infty} \log(x^2-2x) + 2 = +\infty \end{aligned}$$

Quindi f NON ha un asintoto obliquo a $-\infty$

f è continua perché somma e composizione di funzioni continue

1.3 Discutere la derivabilità di $f(x)$. Calcolare $f'(x)$ e studiarne il segno. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi. Senza fare ulteriori conti, spiegare perché l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni distinte. (6 punti)

Derivabilità: Il valore assoluto potrebbe non essere derivabile quando l'argomento è zero (quindi per $x = -4$) e la derivabilità in tale punto va discussa separatamente. Negli altri punti del dominio la funzione è derivabile perché composizione e somma di funzioni derivabili.

Derivata per $x > -4$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= D[\log(x^2-2x) - \frac{x}{2} - 2] = \frac{2x-2}{x^2-2x} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{4x-4-x^2+2x}{2x^2-4x} = \frac{-x^2+6x-4}{2x^2-4x}, \quad x > -4 \end{aligned}$$

Studio del segno:

$$\begin{aligned} N \geq 0 &\iff -x^2+6x-4 \geq 0 \implies 3-\sqrt{5} \leq x \leq 3+\sqrt{5} \\ D > 0 &\iff 2x^2-4x \geq 0 \implies x < 0 \ \vee \ x > 2 \end{aligned}$$

Tenendo conto del dominio e di $x > -4$ si ha

$$\begin{aligned} N/D \geq 0 &\iff 2 < x \geq 3+\sqrt{5} \\ N/D < 0 &\iff -4 < x < 0 \ \vee x > 3+\sqrt{5} \end{aligned}$$

Derivata per $x < -4$:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= D[\log(x^2-2x) + \frac{x}{2} + 2] = \frac{2x-2}{x^2-2x} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{4x-4+x^2-2x}{2x^2-4x} = \frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x}, \quad x < -4 \end{aligned}$$

Studio del segno:

$$\begin{aligned} N \geq 0 &\iff x^2 + 2x - 4 \geq 0 \implies -1 - \sqrt{5} \leq x \leq -1 + \sqrt{5} \\ D > 0 &\iff 2x^2 - 4x \geq 0 \implies x < 0 \ \vee \ x > 2 \end{aligned}$$

Tenendo conto del dominio e di $x < -4$ si ha

$$\begin{aligned} N/D \geq 0 &\iff x < -4 \\ N/D < 0 &\iff \text{ mai in }]-\infty, -4[\end{aligned}$$

Unendo i due studi del segno si ha

- f decresce in $]-4, 0[\, \cup \,]3 + \sqrt{5}, +\infty[$
- f cresce in $]-\infty, -4[\, \cup \,]2, 3 + \sqrt{5}[$

In $x = 3+\sqrt{5}$ la funzione è derivabile ed ha un massimo relativo, $P_1 = (3+\sqrt{5}, \log(8+4\sqrt{5}) - \frac{7}{2}) - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx (5.23, -1.78)$.

In $x = -4$ la funzione ha un massimo relativo (cuspide), $P_2 = (-4, \log(24)) \approx (-4, 3.17)$.

Si può vedere che la funzione non è derivabile in $x = -4$ in quanto $f_1'(-4) = -44/48$ e $f_2'(-4) = 4/48$

Zeri di $f(x)$:

- In $]-\infty, -4[$ la funzione ha un unico zero per teorema degli zeri e per il fatto che la funzione è strettamente crescente.
- In $]-4, 0[$ la funzione ha un unico zero per teorema degli zeri e per il fatto che la funzione è strettamente decrescente.
- In $]2, +\infty[$ la funzione non ha zeri in quanto $f(3 + \sqrt{5}) < 0$ è il valore massimo assunto dalla funzione in questo intervallo.

1.4 Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno e determinare se esistono punti di flesso di f. Discutere la concavità di f. (2 punti)

Per $x < -4$

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= \frac{2(x^2 - 2x) - (2x - 2)^2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 4x^2 - 4 + 8x}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 + 4x - 4}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

Per $x > 4$, f_1'' ha la stessa espressione.

Il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è positivo nel nominio, quindi $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D \setminus \{-4\}$. f è concava nel suo dominio. Non ci sono punti di flesso.

1.5 Disegnare qualitativamente il grafico di $f(x)$, evidenziando eventuali punti di massimo, minimo, flesso ed asintoti. Trovare l'immagine di f.

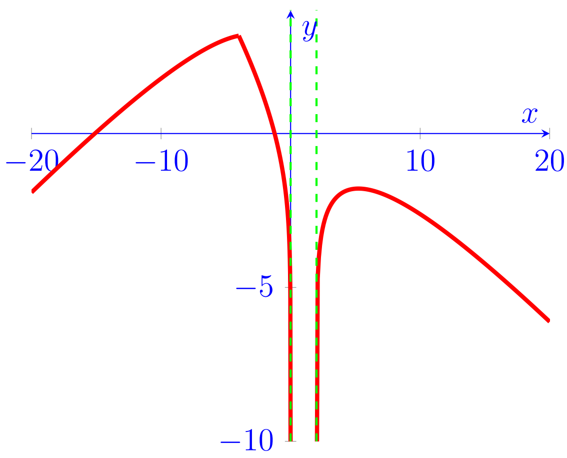

Figura 1: Grafico di $f(x)$; L'immagine è $]-\infty, +\log(24)]$.

Problema 2 (3 punti)

Verificare la seguente identità utilizzando la definizione di limite:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \frac{3}{(3x-1)^3} = -\infty$$

Bisogna mostrare che per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$-\delta < x - \frac{1}{3} < 0 \implies \frac{3}{(3x-1)^3} < -M$$

Cerchiamo δ partendo dall'ultima equazione e assumendo $x - \frac{1}{3} < 0$:

$$\frac{3}{(3x-1)^3} < -M \iff (3x-1)^3 > -\frac{3}{M} \iff 3x-1 > -\sqrt[3]{\frac{3}{M}} \iff x - \frac{1}{3} > -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{M}}$$

Basta prendere $\delta = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{M}}$.

Problema 3 (7 punti)

Considerare la funzione

$$g(x) = \mathrm{e}^{-2\tan(2x)}$$

3.1 Calcolarne il dominio e trovarne gli zeri. Verificare se la funzione è simmetrica e/o periodica e, in caso, determinarne il periodo.

Il dominio è data da $2x \neq \pi/2 + k\pi$, quindi:

La funzione non ha zeri

La funzione non è nè pari nè dispari.

La funzione è periodica con periodo $\tau = \frac{\pi}{2}$.

3.2 Calcolare il polinomio di Taylor di primo grado di g rispetto al punto $x_0 = \pi/6$.

$$g(x_0) = \mathrm{e}^{-2\tan(\pi/3)} = \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}$$
$$g'(x) = -4\mathrm{e}^{-2\tan(2x)}\frac{1}{\cos^2(2x)}$$
$$g'(x_0) = -16\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}$$

Polinomio di Taylor di primo grado in x_0:

$$P(x) = \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}} - 16\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6})$$

3.3 Calcolare il seguente l'integrale indefinito di $\dfrac{g(x)}{(1-2\sin^2(x))^2}$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-2\tan(2x)}}{(1-2\sin^2(x))^2}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^{-2\tan(2x)}}{\cos^2(2x)}\,dx = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\tan(2x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Problema 4 (5 punti)

Considerare la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 4, \quad \text{con} \quad x \in]0,1]$$

Disegnare il grafico di h e calcolare, se possibile:

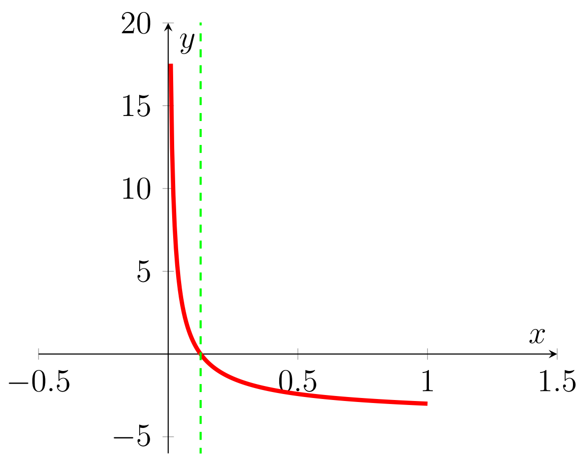

Figura 2: Grafico di $h(x)$

1. l'area della regione del piano compresa tra il grafico di h e l'asse delle ascisse; L'area si ottiene dall'integrale di:

$$\text{Area} = \int_0^1 |h(x)|\,dx = \int_0^{1/8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 4\,dx + \int_{1/8}^1 -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 4\,dx$$

Il primo integrale è improprio e converge siccome, per $x > 0$ e sufficientemente piccolo, si ha $x^{-2/3} < x^{-1}$.

$$\text{Area} = \lim_{t\to 0^+} [3\sqrt[3]{x} - 4x]_t^{1/8} + [-3\sqrt[3]{x} + 4x]_{1/8}^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 3$$

2. il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di h attorno all'asse y. Per prima cosa scriviamo x in funzione di y:

$$x = f(y) = 1/\sqrt{(y+4)^3} \quad \text{con } -3 \le y$$

Il volume è dato da:

$$\int_{-3}^{+\infty} \pi f^2(y)\,dy = \pi \lim_{t\to\infty} \int_{-3}^{t} \frac{1}{(y+4)^3}\,dy = \pi \lim_{t\to\infty} [-\frac{1}{2}\frac{1}{(y+4)^2}]_{-3}^{t} = \frac{1}{2}\pi$$