Diese Übungen sollen am **19. November 2019** in den Übungsgruppen vorgestellt werden. Die Aufgaben, die Sie bereit sind in den Übungen an der Tafel zu präsentieren, müssen in TUWEL bis zum **18. November 2019 um 23:30 Uhr** angekreuzt werden.

---

(1) **$z$-Test (mit R)** Zwei Informatiker haben ein Spiel entwickelt, bei dem ein BMX-Fahrer einen Parcours durchfahren muss. Es geht darum möglichst viel Strecke zu machen. Sie interessieren sich nun dafür wie viele Meter ein Laie, der das Spiel zum ersten mal spielt, im Schnitt zurück legt. Dazu lassen Sie das Spiel von einigen Probanden Probe spielen und notieren die gemachten Meter. Die Ergebnisse sind in Datei `dist.Rdata` abgelegt.

Testen Sie die Nullhypothese dass, die mittlere zurück gelegte Distanz einen halben Kilometer beträgt anhand eines zweiseitigen $z$-Tests. Nehmen Sie an, dass $\sigma = 200$ Meter beträgt. Das Signifikanzniveau sei $\alpha = 5\%$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Stellen Sie die Daten in einem Histogramm dar. Verteilen sie sich näherungsweise glockenförmig?

(b) Berechnen Sie die $z$-Statistik

(c) Berechnen Sie den $p$-Wert. Lehnen Sie die Nullhypothese ab?

(d) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis

(2) **$z$-Test (ohne R)**
Im Kontext eines zweiseitigen $z$-Tests sei $\bar{x} = 4/3$, $\sigma = 1$, $n = 9$ und $H_0 : \mu = 2/3$. Die $\alpha$-Quantile $q_\alpha$ von $N(0, 1)$ sind wie folgt

| $\alpha$ | 0.005 | 0.010 | 0.015 | 0.020 | 0.025 | 0.030 | 0.035 | 0.040 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_\alpha$ | -2.576 | -2.326 | -2.170 | -2.054 | -1.960 | -1.881 | -1.812 | -1.751 |

Wie entscheiden Sie bei einem Signifikanzniveau von (a) 1%, (b) 3%, (c) 6% und (d) 10%? (Nutzen Sie nur obige Informationen)

(3) **Interpretation von Testergebnissen**
Im Kontext eines statistischen Tests zum Niveau $\alpha$ liegt die Teststatistik im Ablehnungsbereich. Kommentieren Sie folgende Aussagen

(a) Die Nullhypothese wird auf dem $\alpha$-Niveau verworfen

(b) Die Nullhypothese wird auf dem $\alpha/2$-Niveau verworfen

(c) Die Nullhypothese wird auf dem $2\alpha$-Niveau verworfen

(d) Der $p$-Wert war mindestens $\alpha$

(e) Die Nullhypothese war signifikant

(f) Die Nullhypothese trifft nicht zu

(g) Die Nullhypothese trifft wahrscheinlich nicht zu

(4) **Testmacht im $z$-Test**
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariable mit $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, und $H_0 : \mu = \mu_0$.

(a) Geben Sie die Testmacht des linksseitigen $z$-Tests an. Drücken Sie diese durch die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$ Verteilung aus, abhängig von $\mu_0, \mu, \sigma, n$ und dem Signifikanzniveau $\alpha$.

(b) Erläutern sie den Einfluss von $\mu_0, \mu, \sigma, n$ und $\alpha$ auf die Testmacht.

(5) **Welche Aussage ist korrekt?**
Es seien $X_1, \ldots, X_{16}$ u.i.v. Zufallsvariable mit $X_1 \sim N(0, 4)$. Für eine Realisierung gelte $\bar{x} = 4$. Im Rahmen eines rechtsseitigen $z$-Tests sei $H_0 : \mu = 2$ und der Ablehnungsbereich $R = [3, \infty)$. Kommentieren sie die folgenden Aussagen.

(a) Wir werden den $\alpha$-Fehler begehen

(b) Wir werden den $\beta$-Fehler begehen

(c) Wir werden den $\beta$-Fehler nicht begehen

(d) Wenn wir das Signifikanzniveau des Tests höher ansetzen, dann ergibt sich eine höhere Testmacht

(6) **Zwei Stichproben**
Es seien $X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ unabhängige Zufallsvariable und die $(X_i)_i$ sowie die $(Y_i)_i$ je identisch verteilt mit $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_1 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\bar{Y} - \bar{X}$, standardisieren sie die Differenz und geben sie deren Verteilung an.

(7) **Gesetz der großen Zahlen**
Visualisieren Sie das Gesetz der großen Zahlen am Beispiel der Exponentialverteilung:
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariable und $X_1 \sim \exp(\lambda)$. Für $m = 1, 2, \ldots$ wird dann der Mittelwert der ersten $m$ Zufallsvariablen beschrieben durch

$$\bar{X}_m := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

Weiter wird für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Mittelwerten beschrieben durch $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$.
Nehmen Sie $\lambda = 0.5$ und $n = 200$ an und plotten Sie zwanzig realisierte Folgen von Mittelwerten in einer Grafik. Markieren Sie den Erwartungswert von $X_1$. Was sehen Sie?