Diese Übungen sollen am **14. Jänner 2020** in den Übungsgruppen vorgestellt werden. Die Aufgaben, die Sie bereit sind in den Übungen an der Tafel zu präsentieren, müssen in TUWEL bis zum **13. Jänner 2020 um 23:30 Uhr** angekreuzt werden.

---

(1) **Multinomialkoeffizient**

(a) Zeigen Sie, dass sich der Multinomialkoeffizient

$$\binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_d} := \frac{n!}{x_1! \cdots x_d!}$$

als Produkt von $d-1$ Binomialkoeffizienten darstellen lässt.

(b) Es werden n Objekte nacheinander einer von d Kategorien zugeordnet. Beschreiben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung des Multinomialkoeffizienten (in Worten).

(2) **Multinomialverteilung**
10 Objekte werden unabhängig voneinander und mit gleicher Wahrscheinlichkeit einer von d Kategorien $(1, 2, \ldots, d)$ zugeordnet. Der assoziierte Vektor der Treffwahrscheinlichkeiten sei $p = (1/4, p_2, 0.25, 1/8)^t$.

(a) Was ist d?

(b) Was ist p_2?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt folgender Ausgang auf: $1, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1$?

(d) Wie lautet der Vektor x der Besetzungszahlen für den Ausgang aus (c)?

(e) Welcher Verteilung folgt der Zufallsvektorvektor $\mathfrak{X}$ der Besetzungszahlen (der die Realisierung aus (d) hervorgebracht hat)?

(f) Wie wahrscheinlich ist der Ausgang x?

(g) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Wahrscheinlichkeiten aus (d) und (f)?

(3) χ^2**-Verteilung**
Es sei $X \sim \chi^2(d)$. Zeigen Sie, dass

(a) $X \geq 0$

(b) $\mathbb{E}[X] = d$

(c) $\mathbb{V}ar(X) = 2d$ (Nutzen Sie, dass das 4. Moment der $N(0,1)$-Verteilung 3 ist)

(d) Realisieren Sie 10000 mal die Summe der Quadrate von 4 unabhängigen und $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen, stellen Sie diese in einem Histogramm der Fläche 1 dar und fügen Sie die Dichte der Summe hinzu.

(4) χ^2**-Anpassungstest (ohne R)**
Ein Marktforschungsunternehmen interessiert sich für das Design der Verpackung eines Kaffees. Lässt der Konsument sich von der Verpackung beeinflussen? 60 Testtrinkern wurden dreierlei Kaffeesorten angepriesen - jeder Kaffee in einer eigens designten Verpackung. Sie probierten die drei Kaffees und hatten sich dann für ihren Favoriten zu entscheiden. (Was Sie nicht wussten: es handelte sich dabei immer um den selben Kaffee). Die Häufigkeiten der Entscheidungen waren: Verpackung A: $x_A = 10$, Verpackung B: $x_B = 30$. Testen Sie die Nullhypothese, dass sich der Konsument nicht von der Verpackung beeinflussen lässt.

(a) Wie häufig wurde sich für Verpackung C entschieden?

(b) Wie verteilt sich der Vektor der Besetzungszahlen $\mathfrak{X} = (X_A, X_B, X_C)^t$ (im Rahmen des Modells des χ^2-Tests)?

(c) Was sind die Erfolgswahrscheinlichkeiten, falls die Verpackung keinen Einfluss hat (H_0)

(d) Welche Besetzungen werden unter H_0 erwartet?

(e) Wie lautet die χ^2-Statistik x^2 basierend auf den Daten?

(f) Wie verteilt sich die χ^2-Statistik X^2 basierend auf dem Zufallsvektor $\mathfrak{X}$ unter H_0?

(g) Würden Sie sagen, dass x^2 ein extremer Wert ist, wenn Sie etwa den Erwartungswert und die Standardabweichung von X^2 (unter H_0) bedenken?

(h) Die Werte der Verteilungsfunktion der $\chi^2(d)$-Verteilung bei y sind

	$y =$ 5	10	15	20
$d =$ 1	0.9747	0.9984	0.9999	1.0000
2	0.9179	0.9933	0.9994	1.0000
3	0.8282	0.9814	0.9982	0.9998

Lesen Sie aus der Tabelle den P-Wert ab.

(i) Können Sie die Nullhypothese auf dem 1%-Niveau verwerfen?

(5) **Würfel Teil 1**
Ein d-seitiger Würfel mit farbigen Seiten wurde n mal geworfen. Die Ausgänge sind in der Datei `wuerfel.Rdata` hinterlegt. (Jede Seite wurde mindestens einmal geworfen.)

(a) Was ist n?

(b) Was ist d?

(c) Stellen sie die relativen Häufigkeiten in einem farbigen barplot dar und zeichnen Sie für jede Häufigkeit den Standardfehler ein

(d) Wie stehen Sie auf dieser Basis zur Behauptung: 'Der Würfel ist fair'?

(6) **Würfel Teil 2**
Testen Sie die Nullhypothese, dass der Würfel fair ist, mit einem χ^2-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau (ohne `chisq.test()`)

(a) Was sind die beobachteten (absoluten) Häufigkeiten?

(b) Was sind die unter der Nullhypothese erwarteten Häufigkeiten?

(c) Was ist der Wert x^2 der χ^2-Statistik?

(d) Wie verteilt sich die χ^2-Statistik X^2 (im Rahmen des assozierten Modells) unter der Nullhypothese

(e) Geben Sie den Ablehnungsbereich R an

(f) Lehnen Sie die Nullhypothese ab?

(g) Geben Sie den P-Wert an

(h) Interpretieren Sie ihr Ergebnis

(7) **Würfel Teil 3**
Testen Sie die Nullhypothese, dass die Seite 'orange' doppelt häufig fällt wie die anderen drei Seiten (und die Anderen drei mit gleicher Wahrscheinlichkeit) auf dem 10%-Signifikanzniveau.

(a) Was sind die behaupteten Wahrscheinlichkeiten?

(b) Lesen Sie in der Ausgabe von `chisq.test()` die χ^2-statistik und den P-Wert ab.

(c) Können Sie die Nullhypothese verwerfen?

(d) Auf Basis Ihrer Berechnungen behauptet jemand, dass der Würfel nicht gezinkt sei. Was antworten Sie dieser Person?

(e) Eine andere Person behauptet, dass der Würfel gezinkt sei. Was antworten Sie jener Person?