PROGRAMMATION LINEAIRE NOTIONS DE BASE

Amina ELJABRI

FSTM
Département Informatique

Référence

Michel Minoux : PROGRAMMATION MATHEMATIQUE ROSEAUX : EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS DE RECHERCHE OPERATIONNELLE
Tome 3 : Programmation linéaire et extensions . Problèmes classiques

Exemple Introductif

Une usine fabrique deux types d'écrous. L'équipement utilisé dans la fabrication est composé de :

- 2 machines pour couper les barres
- 4 machines pour percer.
- 17 machines à fileter.

une journée de production étant de 8 heures, combien d'écrous de chaque type devraient être produits par jour pour maximiser les profits de la compagnie?

Exemple Introductif

les temps de production et les profits associés à la production d'une unité de chaque type d'écrou sont donnés dans le tableau suivant :

Opération	Type 1	Type 2
couper	2 secondes	2 secondes
percer	5 secondes	3 secondes
fileter	10 secondes	20 secondes
profit	3	4

Modélisation du problème

Soit x_1 le nombre d'écrous à produire de type 1 et x_2 le nombre d'écrous à produire de type 2 pendant une journée.

x_1 et x_2 sont appelées variables de décision

La capacité disponible de chaque ressource est :

Opération	capacité disponible
couper	$2 * 8 * 60 * 60 = 57600$ secondes
percer	$4 * 8 * 60 * 60 = 115200$ secondes
fileter	$17 * 8 * 60 * 60 = 489600$ secondes

Modélisation du problème

D'autre part, le temps mis pour produire x_1 écrous de type 1 et x_2 écrous de type 2 par chaque ressource est :

Opération	temps de production réel
couper	$2x_1 + 2x_2$ secondes
percer	$5x_1 + 3x_2$ secondes
fileter	$10x_1 + 20x_2$ secondes

Modélisation du problème

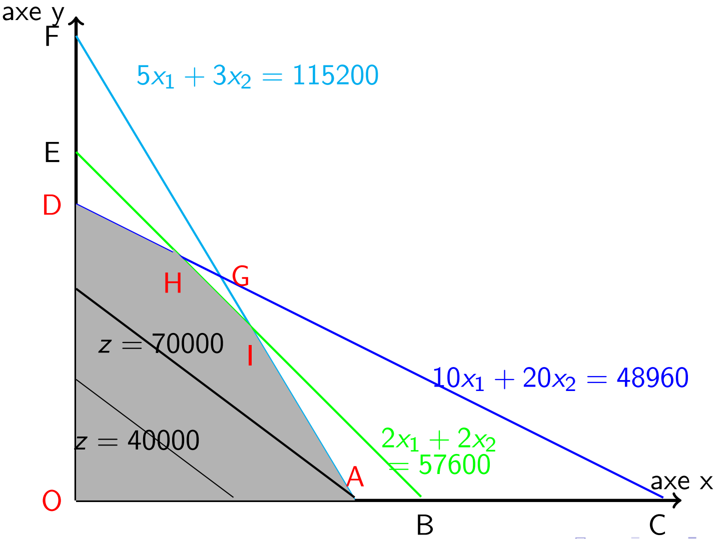
Le problème de production posé consiste alors à maximiser le profit qui est $3x_1 + 4x_2$ sous certaines contraintes.
Ces contraintes expriment le fait que le temps de production réel doit être inférieur à la capacité disponible de chaque ressource.
De plus une contrainte s'ajoute c'est que x_1 et x_2 doivent être non négatifs.
La modélisation du problème de production peut être effectuée à l'aide d'un problème linéaire qui est le suivant :

Position du problème

Le problème à résoudre est :

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} maximiser\ z & = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 57600 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 115200 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & \leq & 489600 \\ x_1 & , x_2 & \geq 0 & & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

z est appelée fonction économique ou fonction objectif
Dans le cas de deux variables, l'ensemble des solutions vérifiant les contraintes peut être représenté graphiquement : c'est l'ensemble des solutions réalisables (on dit aussi faisables).


axe y
F
$5x_1 + 3x_2 = 115200$
E
D
G
H
$z = 70000$
I
$10x_1 + 20x_2 = 48960$
$z = 40000$
$2x_1 + 2x_2 = 57600$
A
axe x
O
B
C

Définition

Un problème de programmation linéaire consiste à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire sous des contraintes linéaires.

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) & \\ s/c & \left\{ \begin{array}{lllr} g_i(x) & \leq & b_i & \forall i \in I_1 \\ g_i(x) & = & b_i & \forall i \in I_2 \\ g_i(x) & \geq & b_i & \forall i \in I_3 \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1 \ldots n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où f,$g_i \forall i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ sont des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Remarques

On peut toujours supposer que les variables $(x_j)_{j=1\ldots n}$ ne peuvent prendre que des valeurs positives ou nulles.
Si les variables sont astreintes à être entières, on a un programme linéaire en nombres entiers(PLNE).
Un programme linéaire en 0-1 est un cas particulier de la programmation linéaire en nombres entiers dont les variables de décision ne peuvent prendre que des valeurs 0 ou 1.

Un programme linéaire peut être écrit sous forme canonique :

$$PL \left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & \leq & b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou sous forme standard :

$$PL \left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & = & b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Formes matricielles

Les deux formes matricielles correspondantes

forme canonique

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = cx \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

forme standard

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = cx \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où A est une matrice d'ordre (m,n)
b est un vecteur colonne d'ordre m
et c est un vecteur ligne d'ordre n

Remarques

On peut toujours supposer que la matrice est de rang m car, dans le cas contraire une ou plusieurs lignes de A peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires des autres.
Selon les valeurs des coefficients b_i, les contraintes en question sont soit redondantes, et donc elles peuvent être éliminées, soit incompatibles avec les autres et dans ce cas le problème $Ax = b$ n'a pas de solution.

Remarques

Dans la réalité un PL peut comporter à la fois des égalités et des inégalités. On peut facilement convertir les inégalités en égalités. Pour celà, il suffit d'introduire des variables d'écart:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + e_i = b_i \text{ avec } e_i \geq 0$$

A l'optimum, pour une inégalité $\leq$ exprimant la consommation d'une ressource i, la valeur de cette variable indique la quantité inutilisée de la ressource.

D'autres conversions sont possibles; ainsi, on peut passer d'une maximisation à une minimisation car maximiser z revient à minimiser -z

Exemple

forme canonique

$$\begin{cases} \max \quad z = 5x_1 - 3x_2 \\ s/c \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 7 \\ x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

forme standard

$$\begin{cases} \max \quad z = 5x_1 - 3x_2 \\ s/c \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 7 \\ x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Définition 1

Un sous ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1]$$
$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in E$$

Exemple

Le demi-espace fermé V de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall x \in V$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \beta$ est un ensemble convexe.
L'hyperplan frontière du demi-espace fermé défini par l'équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta$ est convexe.

propriété 1

L'intersection d'un nombre fini de sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe.

Définition 2

Un polytope de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces convexes fermés. Un polyèdre est un polytope convexe borné.

Définition 3

1. Etant donnés les points $X^1, X^2, \ldots, X^k \in \mathbb{R}^n$, on appelle combinaison linéaire convexe des points $(X^j)_{j=1}^k$ un point :

$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^j \ tq \ \lambda_j \geq 0 \ et \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

2. On appelle point extrême d'un polyèdre ou d'un polytope convexe V, un point X ∈ V tel que X ne peut être exprimé comme combinaison linéaire d'autres points Y ∈ V (Y ≠ X)

Considérons un (PL) écrit sous forme canonique.
Un n-uplet x $=(x_1, ..., x_n)$ est dit solution de (PL) si et seulement si Ax $\leq$ b.
Un n-uplet x $=(x_1, ..., x_n)$ est dit solution réalisable de (PL) si et seulement si Ax $\leq$ b et x $\geq$ 0.
Une solution optimale de (PL) est une solution réalisable qui maximise la fonction objectif z $=$ cx.
L'ensemble des solutions réalisables de (PL) est soit un polytope convexe, soit un polyèdre convexe.

Définition 1

On appelle base toute sous-matrice carrée régulière d'ordre m extraite de A (matrice d'ordre (m,n)). Soit B une base de A, alors en permutant les colonnes de A, on peut toujours mettre A sous la forme A = [B, N] où N est la matrice constituée des colonnes $\notin$ B.

Considérons un (PL) écrit sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ s/c & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Soit B une base de A, on peut partitionner x en x_B et x_N et c en c_B et c_N. On peut écrire :
Ax = Bx_B + Nx_N = b et cx = $c_B x_B + c_N x_N$

Définition 2

- On appelle solution de base (associée à la base B), la solution particulière obtenue en faisant $x_N = 0$. x_B est alors déterminé par la résolution du système de Cramer Bx_B = b ($x_B = B^{-1}$b)
- Une solution de base est dite réalisable si $x_B \geq 0$ (c.à.d. B^{-1}b) $\geq$0.
  Une base associée à une solution de base réalisable est appelée base réalisable.
- Une solution de base est dite dégénérée si le vecteur $x_B = B^{-1}$b a des composantes nulles.

théorème 1

Soit V le polytope convexe des solutions réalisables d'un PL, alors, l'ensemble des points extrêmes de V correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

théorème fondamentale de la programmation linéaire

L'optimum d'une fonction linéaire f(x) sur $V \subset \mathbb{R}^n$, un polyèdre convexe, est atteint en au moins un point extrême. S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point combinaison linéaire de ces points extrêmes.

Soit B une base réalisable. On a:

$c_B x_B + c_N x_N = z(\max)$

$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

On peut écrire :

$z = c_B\ B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$ Soit $\pi = c_B B^{-1}$. On peut écrire :

$z = c_B\ B^{-1}b + (c_N - \pi N)x_N$

théorème 3

Une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une base optimale (en cas de non dégénérescence) d'un (PL) écrit sous forme standard est que :

$\bar{c_N} = c_N - \pi N \leq 0 \quad$ avec $\pi = c_B B^{-1}$.

Le vecteur π est appelé vecteur des multiplicateurs. les composantes $\bar{c_j}$ de $\bar{c_N}$ sont appelés coûts marginaux ou coûts réduits

Corollaire

Soit B une base quelconque et x_0 la solution de base correspondante.
S'il existe une variable hors base x_j tq $\bar{c}_j > 0$ alors :

- ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_j sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables. Dans ce cas z est non bornée.
- ou bien on met en évidence une autre base $\hat{B}$ et une solution de base réalisable $\hat{x}$ telle que $z(\hat{x}) > z(x_0)$

L'Algorithme du simplexe est basé sur ce corollaire.

Algorithme du simplexe

L'algorithme du simplexe inventé par l'américain Dantzig, construit une suite de solutions de base réalisables de profits croissants jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de gain possible.
Géométriquement, il visite une suite de sommets (points extrêmes) adjacents du polyèdre des solutions réalisables.
Le passage d'une base à une autre se fait par des opérations de pivotage.
La solution de base de départ est la solution de base évidente (matrice identité) formée par les variables d'écart.

Prenons l'exemple introductif :

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} max\ z & = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 57600 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 115200 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & \leq & 489600 \\ x_1 & , x_2 & \geq 0 & & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qu'on écrit sous forme standard:

$$\left\{ \begin{array}{ll} max\ z & = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcrcccrr} 2x_1 & + & 2x_2 & +x_3 & & & = & 57600 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & & +x_4 & & = & 115200 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & & & +x_5 & = & 489600 \\ (x_j)_1^5 & \geq 0 & & & & & & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Solution initiale

Le point de départ est le point origine. la base de départ est la matrice d'identité.
Pour une base choisie, on exprime le système Ax = b d'une manière équivalente.
Le système équivalent est tout simplement une expression des variables de base en fonction des variables hors base.
C'est ce qu'on appelle les dictionnaires :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 57600 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
x_4 & = & 115200 & - & 5x_1 & - & 3x_2 \\
x_5 & = & 489600 & - & 10x_1 & - & 20x_2 \\
z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & &
\end{array}$$

Choix des variables entrante et sortante

Reprenons le dictionnaire précédent :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 57600 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 115200 & - & 5x_1 & - & 3x_2 \\ x_5 & = & 489600 & - & 10x_1 & - & 20x_2 \\ z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & & \end{array}$$

Une variable hors base actuellement nulle, va être choisie pour entrer en base et augmenter jusqu'à annuler une variable de base. A la suite de cette opération de pivotage, la variable hors base qu'on augmente dite entrante remplace, dans la solution de base, celle qui s'annule dite sortante.

Choix des variables entrante et sortante

La variable entrante est choisie telle que son coût réduit est positif et ce pour améliorer la fonction objectif. Pour assurer une évolution rapide de l'algorithme du simplexe, on choisit celle qui a le plus grand coût réduit.Pour l'exemple on choisit x_2.
Pour garder le caractère réalisable de la nouvelle solution de base, des contraintes s'imposent sur x_2.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_3 & = & 57600 & - & 2x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \leq & \frac{57600}{2} & = & 28800 \\
x_4 & = & 115200 & - & 3x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \leq & \frac{115200}{3} & = & 38400 \\
x_5 & = & 489600 & - & 20x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \leq & \frac{489600}{20} & = & 24480
\end{array}$$

On prend le minimum des ratios donc c'est x_5 qui sort de la base

Nouvelle base/Nouveau dictionnaire

Reprenons le dictionnaire précédent :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 57600 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
x_4 & = & 115200 & - & 5x_1 & - & 3x_2 \\
x_5 & = & 489600 & - & 10x_1 & - & 20x_2 \\
z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & &
\end{array}$$

x_2 entre et x_5 sort, on doit exprimer le nouvelles variables de base : x_2, x_3, x_4 et la fonction (z) en fonction des nouvelles variables hors base x_1 *et* x_5. On obtient un nouveau dictionnaire :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 8640 & - & x_1 & + & \frac{1}{10}x_5 \\
x_4 & = & 41760 & - & \frac{7}{2}x_1 & + & \frac{3}{20}x_5 \\
x_2 & = & 24480 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{20}x_5 \\
z & = & 97920 & + & x_1 & - & \frac{1}{5}x_5
\end{array}$$

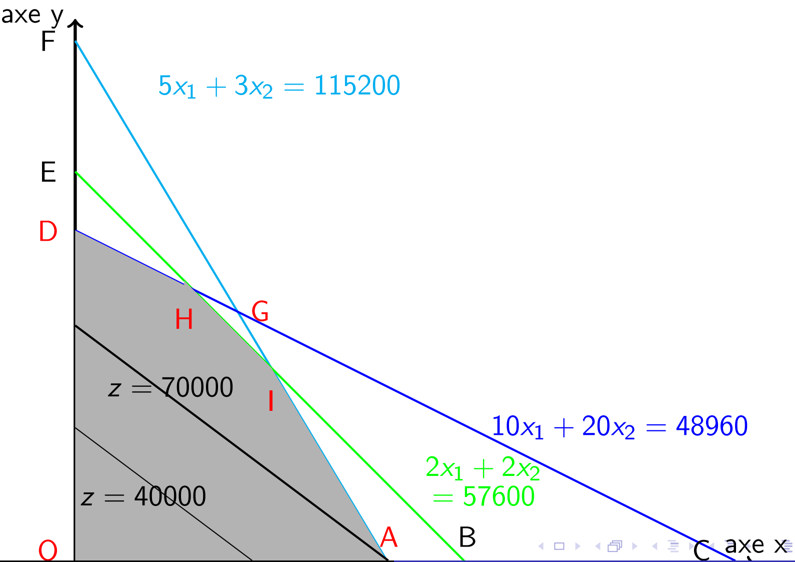
Calcul de la solution de base

$$\begin{array}{rclclcl}
x_3 & = & 8640 & - & x_1 & + & \frac{1}{10}x_5 \\
x_4 & = & 41760 & - & \frac{7}{2}x_1 & + & \frac{3}{20}x_5 \\
x_2 & = & 24480 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{20}x_5 \\
z & = & 97920 & + & x_1 & - & \frac{1}{5}x_5
\end{array}$$

La solution de base peut être lue directement à partir de ce système :
$\hat{x} = \{0,24480,8640,41760,0\}$
la valeur de la fonction économique est $z(\hat{x}) = 97920$;
Sur le graphique, ça correspond au point D.

Remarques

Remarquons au passage que si on fait sortir x_3 de la base au lieu de x_5 on va se retrouver sur le point E(0, 28800) qui est hors l'ensemble des solutions réalisables (SR).
De même, si on fait sortir x_4 de la base, on se retrouve sur le point F(0, 38400) $\notin$ (SR).
(Voir graphique)


axe y
F
$5x_1 + 3x_2 = 115200$
E
D
G
H
$z = 70000$
I
$10x_1 + 20x_2 = 48960$
$2x_1 + 2x_2$
$= 57600$
$z = 40000$
O
A
B
C
axe x

Maintenant, regardons comment on peut améliorer la fonction objectif. On a :

$z = 97920 + x_1 - \frac{1}{5}x_5$

La seule variable qui a un coût réduit positif est la variable x_1. Faisons donc entrer x_1 dans la base et cherchons la variable qui va sortir elle de la base. x_5 va garder la valeur 0 et c'est x_1 qui entre dans la base et pour garder le caractère réalisable de la solution, la variable x_1 doit vérifier

$$\begin{array}{lllllllllll} x_3 & = & 8640 & - & x_1 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_1 & \leq & 8640 \\ x_4 & = & 41760 & - & \frac{7}{2}x_1 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_4 & \leq & \frac{83520}{7} & \simeq & 11931 \\ x_2 & = & 24480 & - & \frac{1}{2}x_1 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_1 & \leq & 48960 \end{array}$$

Le minimum des ratios est 8640 donc c'est x_3 qui sort de la base. Là aussi, si on fait sortir x_4 de la base $x_4 = 0 = x_5$ correspond au point G $\notin$ (SR), de même si on fait sortir x_2 avec $x_5 = 0$ on se retrouve sur le point C $\notin$ (SR).

Entre parenthèses

La nouvelle solution de base peut être calculée en utilisant le dictionnaire précédent :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 8640 & - & x_1 & + & \frac{1}{10}x_5 \\
x_4 & = & 41760 & - & \frac{7}{2}x_1 & + & \frac{3}{20}x_5 \\
x_2 & = & 24480 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{20}x_5 \\
z & = & 97920 & + & x_1 & - & \frac{1}{5}x_5
\end{array}$$

avec $x_5 = 0$, en annulant x_3, on tire x_1 et on calcule en conséquence x_2 et x_4.
$x_1 = 8640$; $x_4 = 11520$; $x_2 = 20160$;
Cette solution correspond au point H(8640,20160)
Regardons si cette solution est optimale ou si on peut améliorer encore la fonction objectif.

Nouvelle solution de base/Nouveau dictionnaire

Ecrivons le nouveau dictionnaire : (on exprime les nouvelles variables de base en fonction des nouvelles variables hors base)

x_1 entre et x_3 sort

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 8640 & - & x_3 & + & \frac{1}{10}x_5 \\ x_4 & = & 11520 & + & \frac{7}{2}x_3 & - & \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 & = & 20160 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{10}x_5 \\ z & = & 106560 & - & x_3 & - & \frac{1}{10}x_5 \end{array}$$

Stop. on a atteint l'optimum puisque tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls. La solution optimale est :

$x_1 = 8640$; $x_2 = 20160$; $x_3 = 0$; $x_4 = 11520$; $x_5 = 0$;

$z^* = 106560$ (valeur optimale de la fonction économique)

c'est bien le point H(8640,20160).

Réflexions

Soit

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{20} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{20} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{20} \\ 1 & -\frac{1}{10} \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{20} \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 24480 \\ 8640 \\ 41760 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \pi N = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$c_N - \pi N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad c_B B^{-1} b = 97920$$

Réflexions

Soit

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{20} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8640 \\ 41760 \\ 24480 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \pi N = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$c_N - \pi N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad c_B B^{-1} b = 97920$$

Algorithme du simplexe forme tableau

Reprenons le programme linéaire écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} max\ z & = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c & \begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & +x_3 & & & = & 57600 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & & +x_4 & & = & 115200 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & & & +x_5 & = & 489600 \\ (x_j)_1^5 & \geq 0 & & & & & & \end{cases} \end{cases}$$

Tableau du simplexe

Le tableau du simplexe est une présentation des coefficients du système des contraintes et de la fonction économique relativement à B une base réalisable c.à.d. les coefficients apparents dans :

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$z - c_B B^{-1}b = \bar{c_N} x_N$$

avec

$$\bar{c_N} = c_N - \pi N \quad et \quad \pi = c_B B^{-1}$$

Premier tableau du simplexe

Pour notre problème, la base B avec laquelle nous allons débuter l'exécution de l'algorithme du simplexe est l'identité. Les variables de base sont x_3, x_4 et x_5 et les variables hors base sont x_1 et x_2. Ce qui donne ce premier tableau du simplexe.

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratios
x_3	2	2	1	0	0	57600	28800
x_4	5	3	0	1	0	115200	38400
x_5	10	20	0	0	1	489600	24480
	3	4	0	0	0	z-0	

NB.la première colonne et la dernière colonne ne font en fait pas partie du tableau du simplexe mais sont mis pour les besoins de compréhension.

Opération de pivotage

L'opération de pivotage consiste tout d'abord à choisir la colonne du pivot qui correspond à la variable entrante et la ligne du pivot qui est associée à la variable de base sortante. (voir Algorithme)
Notons i_0 la ligne du pivot et j_0 la colonne du pivot.
Notons pivot $= a_{i_0,j_0}$ (le coefficient pivot).
Pour obtenir le nouveau tableau du simplexe, on applique les techniques de pivotage relatives à la méthode de Gauss:

- Chaque ligne l_i $(i \neq i_0)$est transformée de la manière suivante :

$$l_i = l_i - \frac{a_{i,j_0}}{pivot} * l_{i_0}$$

- La ligne du pivot l_{i_0} est divisée, elle, par le pivot.

On obtient le nouveau tableau :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratios
x_3	1	0	1	0	$\frac{-1}{10}$	8640	8640
x_4	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$\frac{-3}{20}$	41760	11931
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{20}$	24480	48960
	1	0	0	0	$\frac{-1}{5}$	z-97920	

La solution de base est lue directement à partir du tableau du simplexe : les variables de base $x_3 = 8640$, $x_4 = 41760$, $x_2 = 24480$ et les variables hors base $x_1 = 0 = x_5$
c'est bien le point D(0,24480) trouvé avant. Nous ne sommes pas encore à l'optimum, x_1 a un coût réduit > 0, donc on décide de le faire entrer dans la base. Regardons la colonne des ratios, c'est x_3 qui va sortir. (NB. $11931 = \frac{41760*2}{7}$)

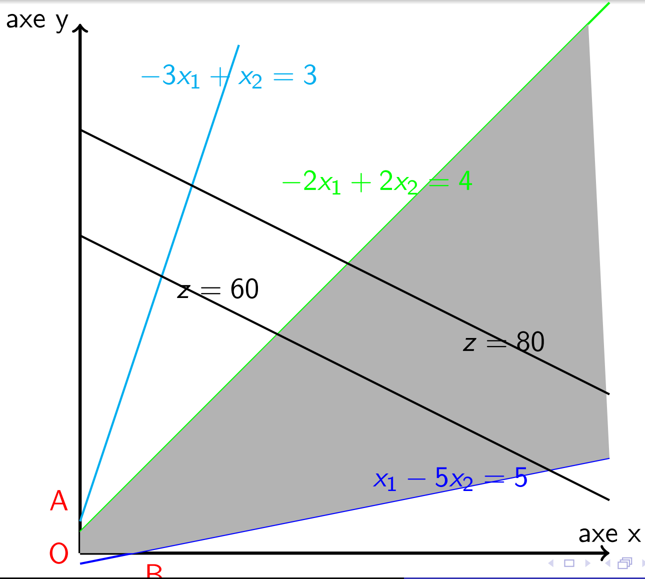
↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	$\frac{-1}{10}$	8640
x_4	0	0	$\frac{-7}{2}$	1	$\frac{1}{5}$	11520
x_2	0	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	20160
	0	0	-1	0	$\frac{-1}{10}$	z-106560

Tous les coûts réduits étant négatifs ou nuls, on a atteint donc l'optimum. La solution de base optimale est :
$x_1 = 8640$; $x_2 = 20160$; $x_3 = 0$; $x_4 = 11520$; $x_5 = 0$;
c'est le point H.
La valeur optimale de la fonction économique est :
$z^* = 106560$.

Cas d'un problème non borné

Soit le programme linéaire suivant écrit sous sa forme canonique :

$$\begin{cases} max\ z = x_1 + 2x_2 \\ s/c \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1,\ x_2,\ \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$


axe y
$-3x_1 + x_2 = 3$
$-2x_1 + 2x_2 = 4$
$z = 60$
$z = 80$
$x_1 - 5x_2 = 5$
A
O
B
axe x

Cas d'un problème non borné

D'après le graphique, on remarque que le problème est non borné.
Ecrivons ce programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{cases} max\ z = x_1 + 2x_2 \\ s/c \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 5 \\ (x_j)_1^5 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Revenons aux dictionnaires

Le premier dictionnaire est :

$x_3 = 3 + 3x_1 - x_2$

$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2$

$x_5 = 5 - x_1 + 5x_2$

La variable entrante est x_2. La variable sortante est donnée par:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_3 & = & 3 & - & x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \leq & 3 \\ x_4 & = & 4 & - & 2x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \leq & 2 \\ x_5 & = & 5 & + & 5x_2 & \geq & 0 & \Longrightarrow & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

On remarque que la troisième contrainte ne met pas de restrictions sur x_2, on peut l'augmenter comme on veut sans mettre en cause le signe de x_5

Les deux premières contraintes, par contre, obligent la variable x_2 à ne pas dépasser un certain seuil. La variable sortante est choisie entre x et x

Algorithme du simplexe forme tableau

Au niveau du tableau du simplexe, nous ne devons donc pas calculer de ratios relativement aux cases de signe négatif ou nul de la colonne du pivot

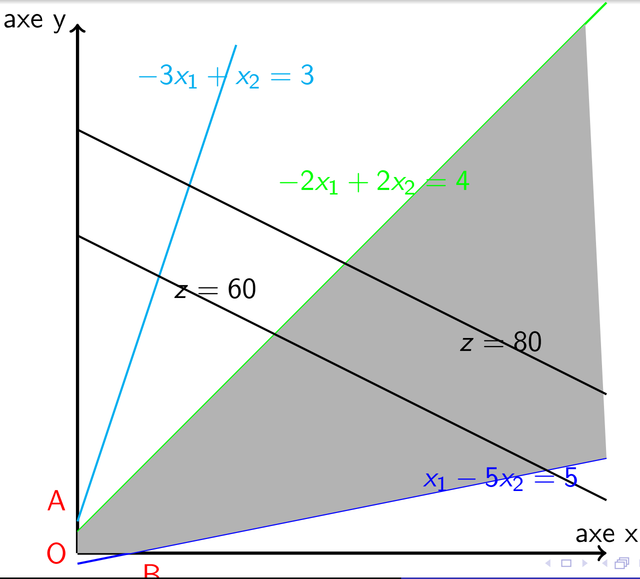
↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratios
x_3	-3	1	1	0	0	3	3
x_4	-2	2	0	1	0	4	2
x_5	1	-5	0	0	1	5	–
	1	2	0	0	0	z-0	

On doit choisir la variable sortante entre x_3 et x_4 , c'est x_4 qui sort de la base.

Le tableau du simplexe suivant est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratios
x_3	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	–
x_2	-1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2	–
x_5	-4	0	0	$\frac{5}{2}$	1	15	–
	3	0	0	-1	0	z-4	

D'après ce tableau, on remarque que toute la colonne du pivot ne contient que des valeurs négatives c.à.d. qu'on peut augmenter la variable x_1 comme on veut tout en restant dans l'ensemble (SR). Ce tableau représente la solution de base relative au point A sur le graphique. Géométriquement, augmenter x_1 à partit de A, en gardant toujours $x_4 = 0$ c'est se déplacer sur la droite $-2x_1 + 2x_2 = 4$. On voit bien qu'on reste dans (SR) et que la fonction économique augmente aussi.


axe y
$-3x_1 + x_2 = 3$
$-2x_1 + 2x_2 = 4$
$z = 60$
$z = 80$
$x_1 - 5x_2 = 5$
A
O
B
axe x

Algorithme du simplexe

On part d'un programme linéaire écrit sous forme canonique :

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = cx \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où A est une matrice réelle d'ordre (m,n), b est un vecteur colonne d'ordre m dont toutes les composantes sont supposées positives, et c est un vecteur ligne d'ordre n.

Algorithme du simplexe

On écrit le problème sous forme standard.

$$P \begin{cases} \max & z = \tilde{c}x \\ s/c & \begin{cases} \tilde{A}x & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases} \end{cases}$$

où $\tilde{A} = [\mathrm{A}, \mathrm{Im}]$(Im est l'identité d'ordre m)
$\tilde{c} = [\mathrm{c},0, \ldots, 0]$(on ajoute m fois 0)
et soit z_0 la valeur de la fonction économique pour le point de départ.

Algorithme du simplexe

On note

T la matrice d'ordre (M, N) avec M = m+1 et N = n+m+1.

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{A} & b \\ \tilde{c} & -z_0 \end{pmatrix}$$

T représente le tableau du simplexe à une itération donnée.

Début

répéter

1. choix de la variable entrant dans la base : j_0

   $T_{M,j_0} = \max\limits_{1 \leq j \leq N-1} (T_{M,j})$

   Si $T_{M,j_0} \leq 0$ alors

   stop écrire(la solution est optimale)

   Sinon aller en 2.

Algorithme du simplexe

1.
2. choix de la variable sortant de la base : i_0
   E $= \{$i / 1 $\leq$ i $\leq$ m, $T_{i,j_0} > 0\}$
   Si E $= \emptyset$ alors stop écrire(problème non borné)
   Sinon
   $\frac{T_{i_0,N}}{T_{i_0,j_0}} = \min_{i \in E}\{\frac{T_{i,N}}{T_{i,j_0}}\}$
   pivot $= T_{i_0,j_0}$//c'est le pivot de la matrice T
   aller en 3.
3. Pour j allant de 1 à N faire // on met à jour T
   $T_{i_0,j} = \frac{T_{i_0,j}}{pivot}$
   Pour j allant de 1 à N faire
   $\forall$ (i $\neq i_0$) $\quad T_{i,j} = T_{i,j}$ - $T_{i,j_0} * T_{i_0,j}$

tant que (vrai) FIN.

Algorithme du simplexe

Pour des raisons de stabilité de calculs, on procède dans la mise à jour de la matrice T ainsi :

Pour i allant de 1 à M faire

Si (i $\neq i_0$)

Pour j allant de 1 à N faire

$$T_{i,j} = \frac{T_{i,j} * pivot - T_{i,j_0} * T_{i_0,j}}{pivot}$$

Pour j allant de 1 à N faire

$$T_{i_0,j} = \frac{T_{i_0,j}}{pivot}$$

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} max\ z & = 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ s/c & \begin{cases} & & & & 2x_3 & \leq & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & \leq & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 2 \\ x_1, & x_2, & \geq 0 & & & & \end{cases} \end{cases}$$

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le programme écrit sous forme standard est :

$$\left\{\begin{array}{ll} max\ z & = 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ s/c & \left\{\begin{array}{llllllll} & & 2x_3 & +x_4 & & & = 1 \\ 2x_1 & -4x_2 & +6x_3 & & +x_5 & & = 3 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & & +x_6 & = 2 \\ x_j^5 & \geq 0 & & & & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le premier tableau du simplexe est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	ratio
x_4	0	0	2	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_5	2	-4	6	0	1	0	3	$\frac{1}{2}$
x_6	-1	3	4	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$
	2	-1	8	0	0	0	0	

On remarque que les ratios sont tous les mêmes, le choix de la variable sortante peut être arbitraire. Mais, on peut appliquer la règle de BLAND :

Règles de BLAND

Règles de BLAND

- Entre dans la base la variable d'indice le plus petit parmi celles de coût réduit strictement positif.
- Sort de la base la variable d'indice le plus petit parmi celles ayant pour valeur de ratio la valeur minimum.

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le tableau du simplexe suivant est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	ratio
x_4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	0
x_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	−
x_6	$-\frac{7}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	0
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	0	$\frac{-4}{3}$	0	-4	

D'après ce tableau, on remarque que certaines variables de base sont nulles. On dit que la solution de base est dégénérée.
Quand à une itération donnée, on trouve une base dégénérée, aucune amélioration n'est perçue, à l'itération suivante, dans la fonction objectif

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le tableau du simplexe suivant est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	ratio
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{4}$	-$\frac{1}{4}$	0	0	–
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	–
x_6	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{-17}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	0
	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-13}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	-4	

Encore la solution de base trouvée à cette itération est dégénérée. Alors si pour plusieurs itérations, on trouve des solutions de base dégénérées il y a risque que l'algorithme cycle et qu'il ne finit donc pas.

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le tableau du simplexe suivant est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	ratio
x_2	0	1	0	$\frac{-7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	–
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
x_1	1	0	0	$\frac{-17}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	0	–
	0	0	0	$\frac{19}{2}$	$\frac{-5}{2}$	-3	-4	

Une nouvelle solution de base dégénérée!!!
Toutes les itérations de l'algorithme qui résultent sur des solutions de base dégénérées sont dites dégénérées.

Cas où plus d'une variable peut sortir de la base : dégénérescence

Le tableau du simplexe suivant est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	ratio
x_2	0	1	7	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	
x_4	0	0	2	1	0	0	1	
x_1	1	0	17	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{17}{2}$	
	0	0	-19	0	$\frac{-5}{2}$	-3	$\frac{-27}{2}$	

Arrêt de l'algorithme.

Solution optimale est : $x_1 = \frac{17}{2}$; $x_2 = \frac{7}{2}$; $x_3 = 0$;

Dégénérescence

REMARQUES

- La dégénérescence d'un modèle linéaire a le potentiel d'engager l'algorithme du simplexe dans un cyclage sans fin.
- Le phénomène de cyclage est peu fréquent et semble se rencontrer dans les modèles de grande taille trés dégénérées.
- Il n'a pas été facile d'inventer de petits modèles où ce phénomène se présente.
  On peut trouver dans la littérature certains modèles qui cyclent tels que celui de BEALE et celui de KLEE et MINTY.
- L'utilisation des règles de BLAND permet d'éviter que l'algorithme du Simplexe cycle.

Problème de BEALE

$$\left\{\begin{array}{ll} max\ z & = \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4 \\ s/c & \left\{\begin{array}{lllllll} \frac{1}{4}x_1 & -8x_2 & -x_3 & +9x_4 & & \leq & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & -12x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +3x_4 & & \leq & 3 \\ & & x_3 & & & \leq & 1 \\ x_j & \geq & 0 & \forall & j = 1 \ldots 4 & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Problème de KLEE et MINTY

$$\begin{cases} max\ z & = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & & & & & \leq & 5 \\ 4x_1 & +x_2 & & & & \leq & 25 \\ 8x_1 & +4x_2 & +x_3 & & & \leq & 125 \\ 16x_1 & +8x_2 & +4x_3 & +x_4 & & \leq & 625 \\ x_j & \geq & 0 & \forall & j = 1...4 \end{cases} \end{cases}$$

Introduction

Les programmes linéaires étudiés jusqu'ici sont tels que les contraintes sont des inégalités inférieure ou égale et les membres droits sont positifs. Ainsi, la construction du tableau initial s'exécute aisément : à la contrainte numéro i, on ajoute une variable d'écart e_i qui sera une variable de base.
La solution initiale de l'algorithme du simplexe est la solution de base associée à la matrice Identité figurant dans ce tableau.
Seulement, dans les problèmes réels, il n'est pas toujours aussi simple de trouver une solution de base initiale qui soit réalisable.

Exemple

Soit le Programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} max\ z & = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & \leq & \frac{8}{3} \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \geq & \frac{7}{3} \\ x_1, & x_2, & x_3, & \geq 0 & & \end{cases} \end{cases}$$

Pas de base initiale évidente

Mettons ce programme sous sa forme standard. Le simplexe exige une forme standard avec b $\geq$ 0. Il faut donc soustraire une variable d'écart à la deuxième contrainte car une variable d'écart doit, comme toute autre variable être non négative.

$$\begin{cases} max\ z & = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & \frac{8}{3} \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_5 & = & \frac{7}{3} \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

On n'a plus la matrice identité habituelle qui nous fournissait une base initiale évidente. D'ailleurs, l'origine n'est plus réalisable.

Comment démarrer l'algorithme du simplexe?

Pour démarrer l'algorithme du simplexe, on utilise en pratique deux méthodes basées sur l'emploi de variables artificielles. Essayer de trouver une base B convenable et calculer le tableau du simplexe correspondant demanderait un effort de calcul considérable.
L'introduction des variables artificielles permet de mettre en évidence une base initiale. Elle s'effectue de la manière suivante :
Pour une inégalité supérieur

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j - x_{n+i} + y_i = b_i$$

et pour une égalité :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + y_i = b_i$$

Méthode des deux phases

Cette méthode permet de résoudre un problème linéaire quand la solution de base initiale n'est pas évidente.
La phase I consiste à résoudre un problème linéaire qu'on appelle problème auxiliaire (PA):
Ce problème est déduit du problème d'origine de la façon suivante :

- on garde les mêmes contraintes du problème d'origine auxquels on a ajouté les variables artificielles.
- La fonction est la somme des variables artificielles qu'il s'agit de minimiser.

Remarques

- Si la solution de (PA) est nulle et que les variables artificielles sont hors base, la solution obtenue après résolution est valide. On commence alors la phase II par le tableau trouvé à la fin de la phase I, auquel on élimine les colonnes des variables artificielles devenues inutiles et où on remplace la ligne des coûts par ceux de la fonction objectif du problème d'origine.
- Si la solution de (PA) est nulle mais quelques variables artificielles sont restées dans la base, on peut montrer que les contraintes associées à ces variables sont redondantes. On peut donc les éliminer et commencer la phase II.
- Si la solution du (PA) n'est pas nulle, le (PL) d'origine n'a pas de solution réalisable.

PhaseI : écriture du problème auxiliaire

$$\begin{cases} min\ w & = y \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = & \frac{8}{3} \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_5 & +y & = & \frac{7}{3} \\ y & \geq 0 & (x_j)_1^5 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Comme la variable artificielle est dans la base (identité), son coefficient doit être nul dans la fonction économique (w) pour pouvoir commencer la résolution par l'algorithme du simplexe. (ce coefficient n'est autre que le coût réduit).
Pour cela, il suffit d'exprimer la variable artificielle y en fonction des variables hors base et de la remplacer dans (w) par l'expression obtenue.

Résolution

on a d'après le modèle :

$y = \frac{7}{3} - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5;$

$w = y = \frac{7}{3} - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5;$

$\Leftrightarrow$

$w - \frac{7}{3} = - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5;$

Le tableau du simplexe initial pour le problème auxiliaire est :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b	ratio
x_4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$	
y	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$	
	-1	-2	-3	0	1	0	$w-\frac{7}{3}$	

Résolution

Ce qu'on pouvait obtenir à l'aide d'une opération de pivotage sur la dernière ligne du tableau :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b	ratio
x_4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$	
y	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$	
	0	0	0	0	0	1	w	

Après pivotage

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b	ratio
x_4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$	
y	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$	
	-1	-2	-3	0	1	0	$w-\frac{7}{3}$	

Résolution

Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, la variable entrante (et donc la colonne de pivot) choisie est celle qui a le plus petit coût réduit négatif.
Quand à la recherche de la variable sortante (ligne du pivot), le processus est le même que pour le problème de maximisation.

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b	ratio
x_4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$
y	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{9}$
	-1	-2	-3	0	1	0	w-$\frac{7}{3}$	

Deuxième du tableau du simplexe

Après une opération de pivotage, on obtient le tableau du simplexe suivant :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b	ratio
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{10}{9}$	
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	
	0	0	0	0	0	1	w-0	

Tous les coûts réduits étant positifs ou nuls (C'est un Pb. de minimisation), l'optimum est donc atteint avec :

$$w^* = 0$$

la solution optimale est ;$x_1 = x_2 = x_5 = y = 0$: variables hors base;variables de base : $x_3 = \frac{7}{9}$; $x_4 = \frac{10}{9}$

Le fait de trouver une solution optimale pour le problème auxiliaire avec une valeur de la fonction économique nulle, prouve l'existence d'une solution optimale pour (PA) où toutes les variables artificielles sont nulles et donc l'existence d'une solution réalisable pour le problème d'origine.
Pour le vérifier, il suffit de remplacer les variables dans le système des contraintes du problème d'origine, par leurs valeurs dans la solution optimale trouvée lors de la résolution de (PA).
Pour l'exemple $x_1 = x_2 = x_5 = 0$; $x_3 = \frac{7}{9}$; $x_4 = \frac{10}{9}$; est la solution de base initiale du problème d'origine.
Les variables de base sont x_3 et x_4.

PhaseII : Initiation

L'écriture du premier tableau du simplexe pour le problème d'origine est déduit du tableau du simplexe optimal trouvé à la phaseI duquel on élimine les colonnes des variables artificielles. La ligne des coûts est remplacée par celle relative au problème d'origine sur laquelle on applique une opération de pivotage pour exprimer la fonction économique du problème d'origine en fonction des variables hors base uniquement.

PhaseII : Premier tableau du simplexe

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{9}$	
	3	4	1	0	0	z	

On applique l'opération de pivotage sur la ligne des coûts. On obtient le premier tableau du simplexe :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{9}$	
	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	z-$\frac{7}{9}$	

Deuxième tableau du simplexe

A partir du premier tableau du simplexe,

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{6}$
	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	z-$\frac{7}{9}$	

on obtient le deuxième tableau du simplexe :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_4	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{7}{6}$	−
	1	0	-5	0	2	z-$\frac{14}{3}$	

Troisième et quatrième tableaux du simplexe

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$	–
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$
	1	0	-3	-2	0	z-$\frac{16}{3}$	

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	ratio
x_5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$	
x_1	1	2	2	1	0	$\frac{8}{3}$	
	0	-2	-5	-3	0	z-8	

Stop. La solution optimale est :
$z^* = 8$; $x_1 = \frac{8}{3}$; $x_2 = x_3 = 0$.

Introduction

Dans la méthode du grand M, l'introduction des variables artificielles dans le système des contraintes s'effectue de la même manière que pour la méthode des deux phases. Seulement, pour la fonction coût, on garde la même fonction du problème d'origine à laquelle on ajoute un terme pour chaque variable artificielle. Dans chacun de ces termes, on associe un coefficient fictif arbitrairement grand ($M > 0$) lorsqu'il s'agit de minimiser la fonction objectif ou un arbitrairement petit (-M) lorsqu'il s'agit de maximiser la fonction objectif.

La résolution du problème s'effectue en une seule phase.

Exemple

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} min\ z & = 3x_1 + 2x_2 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 10 \\ x_1 & & \geq & 4 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \end{cases}$$

Il n'admet pas de base initiale évidente. En effet, (0,0) n'est pas solution.

Introduisons les variables artificielles, le problème devient :

$$\begin{cases} min\ z & = 3x_1 + 2x_2 + My_1 + My_2 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +x_2 & +y_1 & & = & 10 \\ x_1 & & & +y_2 & \geq & 4 \\ x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \geq 0 & \end{cases} \end{cases}$$

Introduisons les variables d'écart :

$$\begin{cases} min\ z & = 3x_1 + 2x_2 + My_1 + My_2 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & +x_2 & +y_1 & & = & 10 \\ x_1 & & -x_3 & +y_2 & = & 4 \\ x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Nous devons résoudre ce problème par la méthode du simplexe. On va appliquer l'algorithme du simplexe puisque le problème est écrit sous forme standard et que le second membre est positif. La base initiale est évidente, elle contient les variables artificielles. Il reste une seule affaire : exprimer la fonction coût en fonction des variables hors base.

Initiation de la résolution

↓base↓	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	ratio
y_1	1	1	0	1	0	10	
y_2	1	0	-1	0	1	4	
	3	2	0	M	M	z	

Ci-dessus, le tableau relatif au modèle, qu'on transforme par pivotage pour annuler le coefficient de la fonction objectif en y_2.

↓base↓	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	ratio
y_1	1	1	0	1	0	10	
y_2	1	0	-1	0	1	4	
	3-M	2	M	M	0	z	

Premier tableau du simplexe

on refait de même pour la V.A. y_1, on obtient le premier tableau du simplexe :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	ratio
y_1	1	1	0	1	0	10	10
y_2	1	0	-1	0	1	4	4
	3-2M	2-M	M	0	0	z-14M	

C'est un problème de minimisation, donc la variable entrante est celle qui a le coût réduit négatif le plus petit. C'est x_1.
La variable sortante est celle qui correspond au minimum des ratios. C'est y_1.

Deuxième tableau du simplexe

x_1 entre à la place de y_1 dans la base.
En effectuant l'opération de pivotage sur le tableau précédent, on obtient le deuxième tableau du simplexe :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	ratio
y_1	0	1	1	1	-1	6	6
x_1	1	0	-1	0	1	4	–
	0	2-M	3-M	0	2M-3	z-12-6M	

Maintenant, x_2 entre et c'est y_1 qui va sortir. On obtient le troisième tableau du simplexe.

Troisième tableau du simplexe

↓base↓	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	ratio
x_2	0	1	1	1		6	
x_1	1	0	-1	0		4	
	0	0	1	M-2		z-24	

Tous les coûts étant positifs ou nuls (Pb min), arrêt de l'algorithme:
La solution optimale de notre problème est :

$z^* = 24$

$x_1 = 4;\ x_2 = 6;\ x_3 = 0;$

Motivation : trouver une borne pour la fonction objectif

Soit le Programme linéaire suivant :

$$
PL \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 & \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

$\forall y_1, y_2, y_3 \geq 0$ l'inéquation suivante est vérifiée :
$y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + y_2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \ \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$
$\Leftrightarrow$
$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + 3y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \ \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$

Motivation : trouver une borne pour la fonction objectif

Maintenant si les y_i vérifient le système de contraintes :

$$\begin{cases} y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 & +3y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq & 3 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 & \end{cases}$$

alors, on peut conclure :

$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq w = y_1 + 55y_2 + 3y_3$

En particulier, cette inégalité est vérifiée par la solution optimale de (PL) :

$z^* \leq w = y_1 + 55y_2 + 3y_3$

Motivation : trouver une borne pour la fonction objectif

Pour trouver la meilleure borne, il suffit de résoudre le problème qu'on appelle Problème dual de (PL):

$$\mathbb{D} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{minimiser} & w = y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rrrcl} y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 & +3y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq & 3 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Définition : Problème Dual

Soit le programme linéaire :

$$PL \left\{ \begin{array}{lcl} \max z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & \leq & b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On définit le problème dual du problème primal défini ci-dessus par :

$$\mathrm{D} \left\{ \begin{array}{lcl} \min w & = & \sum_{i=1}^{m} b_i * y_i \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i & \geq & c_j & \forall j = 1..n \\ y_i & \geq & 0 & \forall i = 1..m \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Relation Primal Dual

Propriété 1

Pour toute solution réalisable x= $(x_1, .., x_n)$ du problème primal et toute solution réalisable y= $(y_1, .., ym)$ du dual, la propriété suivante est vérifiée :

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \leq yb = \sum_{i=1}^{m} y_i * b_i$$

Preuve

$$\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i * x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j * y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i * y_i$$

Corollaire

Si x^*, y^* sont deux solutions réalisables du primal et du dual tels que

$$cx^* = \sum_{j=1}^{n} c_j * {x_j}^* = \sum_{i=1}^{m} {y_i}^* * b_i = y^* b$$

alors elles sont optimales.

Preuve :

Soit x^* et y^* deux solutions vérifiant les hypothèses du corollaire et x et y deux solutions réalisable Primal et du Dual.

on a d'après la propriété 1 : c x $\leq y^* b = cx^*$. x^* est donc solution optimale du primal.

de même $cx^* \leq yb$ or $cx^* = y^* b$ donc

$y^* b \leq yb$

d'où $y*$ est solution optimale du dual.

Prenons le modèle linéaire du problème introductif :

$$PL \left\{ \begin{array}{l} maximiser\ z \ = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 57600 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 115200 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & \leq & 489600 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 & & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le problème Dual est :

$$D \left\{ \begin{array}{l} minimiser\ w \ = 57600y_1 + 115200y_2 + 489600y_3 \\ s/c \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2y_1 & + & 5y_2 & + & 10y_3 & \geq & 3 \\ 2y_1 & + & 3y_2 & + & 20y_3 & \geq & 4 \\ y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Relation Primal Dual

la résolution du (PL) par la méthode du simplexe a donné le tableau final suivant :

$\downarrow$base$\downarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	$\frac{-1}{10}$	8640
x_4	0	0	$\frac{-7}{2}$	1	$\frac{1}{5}$	11520
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{20}$	20160
	0	0	-1	0	$\frac{-1}{10}$	z-106560

Relation Primal Dual

Posons $\forall\ i = 1..m\ y_i = -\bar{c}_{n+i}$
$y_1 = 1;\ y_2 = 0;\ y_3 = 0.1;$
On peut vérifier que :

$$2y_1 + 5y_2 + 10y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + 20y_3 \geq 4$$

En plus, yb $= 57600y_1 + 115200y_2 + 489600y_3 = 106560 = z^*$
y = (1,0,0.1) est donc une solution réalisable du dual qui vérifie

$$yb = z^*$$

Donc, d'après le corollaire y est solution optimale du Dual.

Relation Primal Dual

Théorème de la Dualité

Si le problème linéaire primal admet une solution optimale x^*, alors son problème dual admet une solution optimale y^* tel que :

$$cx^* = y^* b$$

Relation Primal Dual

Dans ce qui suit, nous allons montrer que le Dual du Dual est le Primal. En effet, Le Dual peut être écrit :

$$D \left\{ \begin{array}{l} \max w \;=\; \sum_{i=1}^{m} -b_i * y_i \\ s/c \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} * y_i & \leq & -c_j & \forall j = 1..n \\ y_i & \geq & 0 & \forall i = 1...m \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Son dual est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min z \;=\; \sum_{j=1}^{n} -c_j * x_j \\ s/c \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} * x_j & \geq & -b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1..n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Relation Primal Dual

Ce qui est équivalent au problème Primal :

$$PL \left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & \leq & b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut conclure de cette observation et du théorème de la dualité que le problème Primal admet une solution optimale si et seulement si le problème Dual en admet aussi.
Notons aussi que si le Primal est non borné, le Dual est non réalisable (et vice versa).

Relation Primal Dual

Le Primal et le Dual peuvent être non réalisables tous les deux.
Exemple :

$$PL \begin{cases} maximiser\ z & = 2x_1 - x_2 \\ s/c & \begin{cases} x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ce problème est non réalisable, son dual aussi

$$PL \begin{cases} minimiser\ w & = y_1 - 2y_2 \\ s/c & \begin{cases} y_1 & - & y_2 & \geq & 2 \\ -y_1 & + & y_2 & \geq & -1 \\ y_1, & y_2 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Deux théorèmes importants

Théorème 1 : Théorème des écarts complémentaires

Soit x^* une solution réalisable du problème primal, et y^* une solution réalisable du dual. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux solutions soient optimales est :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * {x_j}^* = b_i \; ou \; {y_i}^* = 0 \; \forall i = 1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} * {y_i}^* = c_j \; ou \; {x_j}^* = 0 \; \forall j = 1..n$$

Preuve

Soient x^* une solution réalisable du Primal et y^* une solution réalisable du Dual.
D'après le théorème de la dualité, une condition pour que les deux solutions soient optimales est :

$$cx^* = y^* b$$

et elle est suffisante d'après le corollaire de la propriété.
or on a :
$\sum_{j=1}^{n} c_j * {x_j}^* \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * {y_i}^* * {x_j}^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * {x_j}^* * {y_i}^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i * {y_i}^*$
Pour avoir l'égalité $\sum_{j=1}^{n} c_j * {x_j}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i * {y_i}^*$
Il est nécessaire et suffisant d'avoir des égalités partout dans la ligne avant.

Preuve

ce qui équivaut à avoir :

$$c_j * {x_j}^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * {y_i}^* * {x_j}^* \quad \forall\ j = 1..n$$

et

$$b_i * {y_i}^* = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} * {x_j}^* * {y_i}^* \quad \forall\ i = 1..m$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * {x_j}^* = b_i \ ou\ {y_i}^* = 0\ \forall i = 1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} * {y_i}^* = c_j \ ou\ {x_j}^* = 0\ \forall j = 1..n$$

Deux théorèmes importants

Théorème 2

Une solution réalisable $(x_1{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ du Primal est optimale si et seulement si il existe des nombres $y_1{}^*, \ldots, y_m{}^*$ vérifiant les conditions :

$$(a) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i{}^* = c_j \ si \ x_j{}^* > 0 \\ y_i{}^* = 0 \ si \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j{}^* < b_i \end{cases}$$

et

$$(b) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i{}^* \geq c_j \ \forall \ j = 1..n \\ y_i \geq 0 \ \forall \ i = 1..m \end{cases}$$

Preuve

(CN) si x^* est solution optimale du Primal, alors d'après le théorème de la dualité, il existe une solution y^* optimale du Dual. y^* vérifie les conditions (b). et d'après le théorème des écarts complémentaires, les conditions (a) sont vérifiées.
(CS) soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ une solution réalisable du Primal et $y^* \in \mathbb{R}^m$ vérifiant les conditions (b). y^* est donc une solution réalisable du Dual. Si en plus les conditions (a) sont vérifiées donc d'après le théorème des écarts complémentaires x^* est solution optimale du Primal et y^* est solution du Dual.

Application

Soit le problème linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} max\ z & = 18x_1 - 7x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 8x_6 \\ s/c & \left\{\begin{array}{rrrrrrcr} 2x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +7x_4 & +3x_5 & +8x_6 & \leq & 1 \\ -3x_1 & -x_2 & +4x_3 & -3x_4 & +x_5 & +2x_6 & \leq & -2 \\ 8x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & \leq & 4 \\ 4x_1 & & +8x_3 & +7x_4 & -x_5 & +3x_6 & \leq & 1 \\ 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +6x_4 & -2x_5 & -x_6 & \leq & 5 \\ x_j & \geq & 0 & \forall & j = 1 \ldots 6 & & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

et soit $x^* = (2,4,0,0,7,0)$.
x^* est elle solution optimale de ce problème?

Exemple 2

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} max\ z = 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5 \\ s/c \begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +3x_5 & \leq & 1 \\ x_1 & +7x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & \leq & 1 \\ 5x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 22 \\ x_j & \geq & 0 & \forall & j = 1...5 \end{cases} \end{cases}$$

Soit $x^* = (0,2,0,7,0)$.
x^* est elle solution optimale de ce problème?

Interprêtation économique des variables duales

Théorême 3

Si le problème Primal écrit sous forme canonique admet une solution de base optimale non dégénérée alors il existe une valeur positive ε telle que :
$\forall\ t \in \mathbb{R}^m$ tel que $\forall\ i = 1..m \ \mid t_i \mid \leq \varepsilon$ alors le problème :

$$PL \left\{ \begin{array}{ll} \max z & = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c & \left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & \leq & b_i + t_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

a une solution optimale et sa valeur optimale est : $z^* + \sum^{m} {y_i}^* t_i$

Modification d'une composante du second membre

Soit le premier tableau du simplexe de la résolution du Problème des écrous :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	t
x_3	2	2	1	0	0	57600	1
x_4	5	3	0	1	0	115200	0
x_5	10	20	0	0	1	489600	0
	3	4	0	0	0	z	

où on a apporté une petite modification dans la première composante du second membre.

Modification d'une composante du second membre

Soit le tableau final du simplexe de la résolution du Problème des écrous :
Les modifications subies par la colonne t sont les mêmes que celle de la colonne x_3

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	t
x_1	1	0	1	0	$\frac{-1}{10}$	8640	1
x_4	0	0	$\frac{-7}{2}$	1	$\frac{1}{5}$	11520	$\frac{-7}{2}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	20160	$\frac{-1}{2}$
	0	0	-1	0	$\frac{-1}{10}$	z-106560	-1

Modification d'une composante du second membre

Pour que la solution donné par ce tableau soit optimale, il faut que soient vérifiées ces équations appelées équations d'ajustement.

$8640 + \mathrm{t} \geq 0$

$11520 - \frac{7}{2}\mathrm{t} \geq 0$

$20160 - \frac{1}{2}\mathrm{t} \geq 0$

ce qui donne un intervalle de variation de b_1 où ce tableau est optimal.

$48960 \leq b_1 \leq 60891$ la valeur optimale de la fonction objectif est : $z^* = 106560 + 1 * t$

${y_1}^* = 1$: c'est bien la valeur de la composante 1 de la solution optimale du Dual.

Ce qu'on a fait pour b_1, on peut le faire pour b_2 et b_3

la valeur optimale de la fonction objectif du problème Primal avec variation du second membre est : $z^* = 106560 + 1 * t_1 + 0 * t_2 +$

y_1^* est la valeur marginale de la ressource 1. C'est ce que vaut selon l'objectif poursuivi par l'usine, une unité de production ajoutée à celles déjà disponibles dans l'atelier de découpage. En adoptant un raisonnement analogue, une unité de production soustraite aux heures disponibles dans le même atelier impliquerait une chute de profit $= y_1^*$.

Dans plusieurs problèmes de la programmation linéaire, les données peuvent être sujets à des fluctuations. Il est possible aussi que des contraintes s'ajoutent au problème d'origine pour résoudre le nouveau problème original. Comment est-il possible d'exploiter les résultats du problème d'origine pour résoudre le nouveau problème sans avoir recours à appliquer l'algorithme du simplexe depuis le début. C'est l'objet de l'analyse post-optimale.

Soit le problème linéaire :

$$PL \left\{ \begin{array}{lcl} \max z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\ s/c & & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j & \leq & b_i & \forall i = 1..m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1...n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le premier dictionnaire lui correspondant est un système d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \quad \forall i = 1..m \\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \end{array} \right.$$

Un dictionnaire est un système d'équations tel que chacune de ses solutions est solution du système ci-dessus.

$$\begin{cases} x_r = \bar{b_r} - \sum_{s \notin B} \bar{a_{rs}} * x_s & \forall r \in B \\ z = \bar{d} + \sum_{s \notin B} \bar{c_s} * x_s \end{cases}$$

Un dictionnaire peut ne pas être réalisable. dans ce cas il existe r dans B tel que $\bar{b_r} < 0$.

Le problème dual associé à PL est :

$$\mathrm{D} \quad \begin{cases} \min w & = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i * y_i \\ s/c & \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i & \geq & c_j & \forall j = 1..n \\ y_i & \geq & 0 & \forall i = 1...m \end{cases} \end{cases}$$

Le premier dictionnaire lui correspondant est :

$$\begin{cases} y_{m+j} = -c_j + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} * y_i & \forall j = 1..n \\ w = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i * y_i \end{cases}$$

On peut faire les correspondances suivantes entre variables primales et duales :

$x_{n+i} \leftrightarrow y_i \quad \forall i = 1..m$

$x_j \leftrightarrow y_{m+j} \quad \forall j = 1..n$

Prenons le problème linéaire introductif et le premier dictionnaire lui correspondant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 57600 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 115200 & - & 5x_1 & - & 3x_2 \\ x_5 & = & 489600 & - & 10x_1 & - & 20x_2 \\ z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & & \end{array}$$

Le premier dictionnaire du problème dual est :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_4 & = & -3 & + & 2y_1 & + & 5y_2 & + & 10y_3 \\ y_5 & = & -4 & + & 2y_1 & + & 3y_2 & + & 20y_3 \\ -w & = & -57600y_1 & + & -115200y_2 & + & -489600y_3 & & \end{array}$$

Prenons le deuxième dictionnaire :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 24480 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{20}x_5 \\
x_3 & = & 8640 & - & x_1 & + & \frac{1}{10}x_5 \\
x_4 & = & 41760 & - & \frac{7}{2}x_1 & & \frac{3}{20}x_5 \\
z & = & 97920 & + & x_1 & - & \frac{1}{5}x_5
\end{array}$$

Le dictionnaire lui correspondant dans le dual est :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_4 & = & -1 & + & y_1 & + & \frac{7}{2}y_2 & + & \frac{1}{2}y_5 \\
y_3 & = & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{10}y_1 & - & \frac{3}{20}y_2 & + & \frac{1}{20}y_5 \\
-w & = & -97920 & - & 8640y_1 & - & 41760y_2 & - & 24480y_5
\end{array}$$

Les deux dictionnaires sont tels que l'un est miroir de l'autre en ce sens que les coefficients apparaissant dans une ligne de l'un se trouvent en signe opposé dans une colonne de l'autre et vice versa.

En changeant les indices des variables primales et duales : Les variables d'écart sont notés $x_i \leftrightarrow y_i \forall i = 1..m$
Les variables duales sont notés $x_j \leftrightarrow y_j \forall j = m+1..m+n$
On montre que : si

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_r = \bar{b_r} - \sum_{s \notin B} \bar{a_{rs}} * x_s & \forall r \in B \\ z \;= \bar{d} + \sum_{s \notin B} \bar{c_s} * x_s & \end{array} \right.$$

est un dictionnaire du primal avec $x_r (r \in B)$ de base et $x_s (s \in N)$ hors base alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_s = -\bar{c_s} + \sum_{r \in B} \bar{a_{rs}} * y_r & \forall s \in N \\ -w \;= -\bar{d} - \sum_{r \in B} \bar{b_r} * y_r & \end{array} \right.$$

est un dictionnaire du dual avec $y_s (s \in N)$ de base et $y_r (r \in B)$ hors base

Remarques

Les variables hors base de l'un correspondent aux variables de base de l'autre.
Les valeurs des variables de base de l'un sont les opposés des coûts marginaux des variables hors base correspondantes de l'autre.
Toute base réalisable non optimale de l'un correspond à une base non réalisable de l'autre. Toute base réalisable non optimale de l'un correspond à une base non réalisable de l'autre. Toute base réalisable optimale de l'un (si possible) correspond à iune base réalisable optimale de l'autre.

Etant donné les relations qui existent entre problème primal et problème dual, nous pouvons résoudre un problème linéaire écrit sous forme standard en appliquant la méthode du simplexe à son dual. En fait, cette stratégie peut être implémentée sur les tableaux du simplexe du problème primal sans faire référence au problème dual.
La séquence des dictionnaires réalisables créés par la méthode du simplexe appliquée au problème dual peut être représentée par une séquence de dictionnaires dual réalisables associés au primal.
L'algorithme inventé par C.E.Lemke (1954) et connu sous le nom de méthode duale du simplexe (dual simplex method) constitue un outil valable pour l'analyse de la sensibilité. La méthode duale du simplexe se base sur le fait qu'une variable duale y_k est de base si et seulement si la variable qui lui correspond dans le problème primal est hors base.

Ainsi un dictionnaire dual provenant d'une opération de pivotage avec y_i entrant dans la base et y_j sortant de la base correspondra à une opération de pivotage sur le primal faisant sortir x_i de la base et faisant entrer x_j dans la base.

Le choix de y_i est motivé par le désir d'augmenter -w et le choix de y_j est dicté par le besoin de préserver la dual réalisabilité en augmentant y_i. Formellement, on choisit $i \in B$ tel que $\bar{b_i} < 0$ et $j \in N$ tel que :

$$\bar{a_{ij}} < 0 et \frac{\bar{c_j}}{\bar{a_{ij}}} \leq \frac{\bar{c_s}}{\bar{a_{is}}} \forall s \in N$$

Ainsi, une itération de l'algorithme dual du simplexe commençant avec un dictionnaire dual réalisable consiste à choisir $i \in B$ tel que $\bar{b_i} < 0$ et trouver par la suite l'indice j satisfaisant les conditions ci-dessus puis appliquer une opération de pivotage avec x_i entrant dans la base et x_j sortant de la base.

Application

Soit le tableau du simplexe d'un problème de maximisation suivant :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	11	-1	1	-3	-4
x_1	1	-3	2	0	1	3
	0	-1	-1	0	-4	z-12

Pour choisir la variable sortante (et donc entrante dans le dual) dans le primal, nous examinons le second membre. la première composante étant négative, la variable sortante est donc $x_k = x_4$. Pour trouver la variable entrante (et celle sortante dans le dual), on examine les ratios $\frac{\bar{c_s}}{\bar{a_{ks}}} \forall s \in N : \bar{a_{ks}} < 0$
Le plus petit des ratios étant le deuxième, la variable entrante est x_3. Nous obtenons le tableau du simplexe suivant :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	-11	1	-1	3	4
x_1	1	19	0	2	-5	-5
	0	-12	0	-1	-1	z-8

L'algorithme continue de la manière suivante :
Si $\forall i \in B \bar{b_i} \geq 0$ arrêt;
La solution est optimale puisque la base est réalisable et dual réalisable.
Si par contre $\exists k$: $\bar{b_k} < 0$ et si $\forall s \in N \bar{a_{ks}} \geq 0$, on peut conclure que le problème dual est non borné et donc le problème primal est non réalisable.
Sinon, on améliore la solution comme précédemment.

Continuons la résolution :
On fait sortir x_1 et on fait entrer x_5. On obtient le tableau du simplexe suivant :

↓base↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	1
x_5	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-19}{5}$	0	$\frac{-2}{5}$	1	1
	$\frac{-1}{5}$	-15-$\frac{4}{5}$	0	$\frac{-7}{5}$	0	z-7

L'analyse de la sensibilité consiste à exploiter les résultats trouvés lors de la résolution par la méthode du simplexe d'un problème linéaire pour trouver la solution du même problème dont on a modifié quelques données.
Si les changements se restreignent à la fonction objectif, la solution optimale trouvée x^* reste réalisable pour le problème modifié et peut être utilisée comme point de départ pour la résolution par la méthode du simplexe du nouveau problème. L'avantage d'une telle démarche est la réduction du nombre d'itérations restant à effectuer par la méthode du simplexe. Dans certains cas, la solution initiale peut être dual réalisable et donc optimale pour le nouveau problème impliquant 0 itérations de l'algorithme du simplexe.

Si les changements concernent le second membre, alors, on peut encore utiliser la solution optimale du problème d'origine pour entreprendre la méthode duale du simplexe sur le nouveau. L'avantage ici encore est que si les fluctuations concernant le second membre ne sont pas très importantes, alors le nombre d'itérations se trouve réduit par rapport à l'application de l'algorithme du simplexe directement au problème modifié qui nécessiterait même l'application de la méthode des deux phases. Ces techniques restent valables même si les changements concernent en plus les variables elles mêmes c'est à dire si de nouvelles variables s'ajoutent au problème.

Dans le cas où les changements concernent la fonction coût, ces nouvelles variables seront considérées hors base et on peut initier ainsi la méthode du simplexe sur le nouveau problème.
D'une manière similaire, la technique adoptée pour la prise en compte des changements au niveau du second membre peut être encore employée si de nouvelles contraintes s'ajoutent au problème d'origine.
Les changements peuvent parfois concerner la matrice A. Dans ce cas on distingue les deux cas suivants: le changement n'affecte pas la base de la solution optimale trouvée pour le problème d'origine et le cas contraire.

Parfois, dans le premier cas la solution calculée comme point de départ pour le problème modifié n'est ni réalisable ni dual réalisable, on peut alors combiner les deux méthodes : la méthode du simplexe et la méthode duale du simplexe pour pouvoir résoudre le problème modifié. L'astuce employée est de poser un problème intermédiaire entre le problème d'origine et le problème modifié. Le problème intermédiaire sera résolu en utilisant la méthode du simplexe, puis la transformation du problème intermédiaire en le problème modifié peut être résolue par la méthode duale du simplexe.
Pour plus de détails voir le livre intitulé Linear Programming de Vasek Chvatal.