PROBLEMES DE FLOTS

Amina ELJABRI

FSTM
Département Informatique

Exemple Introductif

On désire acheminer une ressource depuis 2 sites A1, A2 dont les quantités disponibles sont respectivement a1, a2 vers 3 sites B1, B2, B3 de demandes respectifs b1, b2, b3.
On suppose qu'il y a des contraintes de capacité relatives aux moyens de transport.
Le problème posé est le suivant : est-il possible de satisfaire les demandes des Bj à partir des disponibilités des Ai et des possibilités de transport ?

Réseau de transport

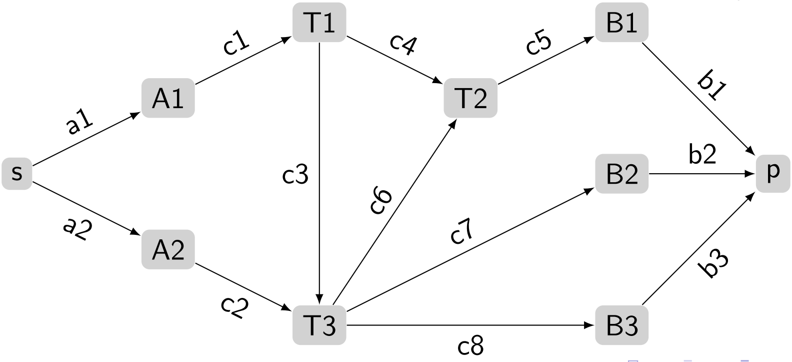
Définition : réseau de transport

Un réseau de transport noté $R = (G = (X, U), s, p, c)$ est formé de :

- $G = (X, U)$ un graphe orienté
- $s \in X$ appelé sommet source
- $p \in X$ appelé sommet destination ou puits
- $c : U \to R+$ fonction capacité (à chaque arc $(i\ j) \in U$ est associée une capacité $c(i\ j) \geq 0$).

Modélisation

On modélise un tel problème à l'aide d'un réseau de transport : on attribue à un arc une capacité ; c'est la quantité qu'on peut acheminer à travers le tronçon lui correspondant.On relie un sommet fictif s aux sites Ai et un autre p aux destinations Bj.



Modélisation

Pour résoudre le problème, on considère une fonction f définie sur les arcs et à valeur dans R+ telle que :
f((s Ai)) = quantité de ressource enlevée au site Ai.
f((Bj p)) = quantité de ressource amenée au site Bj.
f((x y)) = quantité de ressource acheminée à travers l'arc (x y).
La valeur de f sur un arc représente un flux et doit satisfaire les conditions de conservation (ou lois de kirchoff) en tout nœud du réseau.

$$\forall x \neq s, p \sum_{z \in \Gamma^{-}(x)} f(z, x) = \sum_{y \in \Gamma^{+}(x)} f(x, y) \qquad (1)$$

Position du problème

De plus, la condition de capacité doit être respectée :

$$\forall u \in U, f(u) \leq c(u) \tag{2}$$

où c(u) est la capacité de l'arc u.
Une telle fonction s'appelle flot (car vérifie les contraintes (1)) compatible ou réalisable (car vérifie les contraintes (2)).

La résolution du problème ci-dessus revient à chercher, parmi les flots compatibles un flot de valeur maximum c'est-à-dire acheminant la plus grande quantité de ressource du sommet source s au sommet puits p.

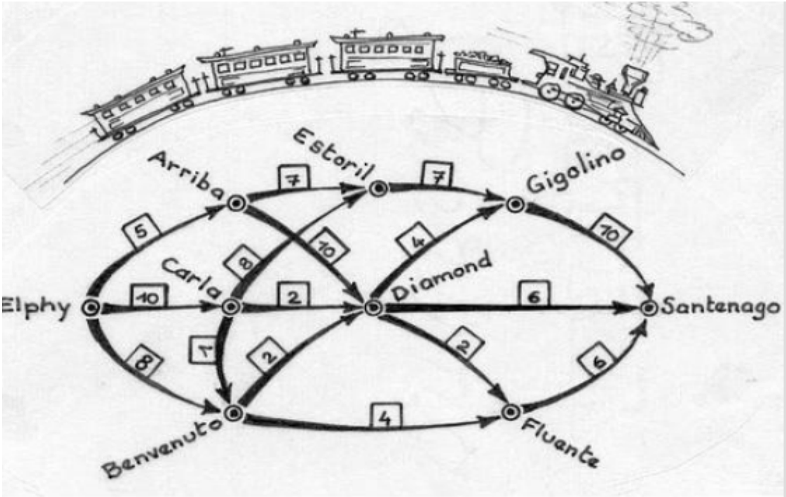
Intérêt de la théorie des flots

- intérêt théorique : outil de démonstration de théorèmes importants, justification de divers algorithmes relatifs à des problèmes spécifiques.
- intérêt pratique
  La théorie des flots fournit un modèle général pour un grand nombre de problèmes réels.
  1. logistique : transport de marchandises : routier, aérien ou ferroviaire (le but est de déterminer la dimension de la flotte pour assurer le trafic)
  2. distribution d'eau (canalisations)
  3. transport de pétrole : réseaux de pipelines
  4. énergie : réseau EDF (Electricité de France : 1er producteur et fournisseur d'Electricité en France), centrales $\rightarrow$ clients
  5. information : réseau téléphonique, réseau d'entreprises, internet.

Exemple : Capacité journalière d'un réseau ferroviaire

Sur le réseau ferroviaire, on a indiqué sur chaque tronçon entre 2 villes le nombre maximum de trains qui peuvent passer par jour dans le sens indiqué.
Etant donné qu'aller de Elphy à Santenago prend moins d'un jour et que chaque jour, il peut partir au plus 23 trains d'Elphy, combien de ces trains, au maximum, peuvent parvenir dans la journée à Santenago ? (D'après "La vie du rail", 1998.)

Capacité journalière d'un réseau ferroviaire



on distingue 3 catégories de problèmes de flots :

- Problème de flot maximum
- Problème de flot maximum canalisé
- Problème de flot de coût minimum

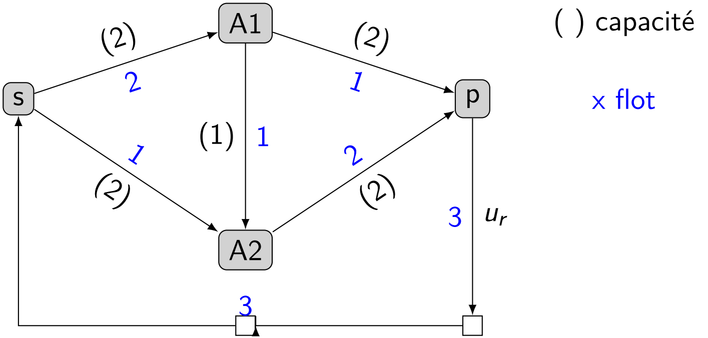
Définition 1

Soit G = (X, U, c) un graphe orienté connexe de racine s et d'anti-racine p muni de l'application c :U $\rightarrow \mathbb{R}+$.
Soit u_r = (p s) un arc spécial dit arc de retour à capacité infinie ($u_r \notin$ U).
Un flot sur le réseau G est une fonction f sur U à valeurs dans R+ vérifiant les lois de Kirchoff.

$$\forall x \neq s, p \sum_{z \in \Gamma^-(x)} f(z,x) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} f(x,y)$$

Un flot compatible est tel que $\forall u \in U, f(u) \leq c(u)$.
Le problème du flot maximum consiste à chercher un flot compatible tel que f(u_r) soit maximum.

Flot compatible: exemple

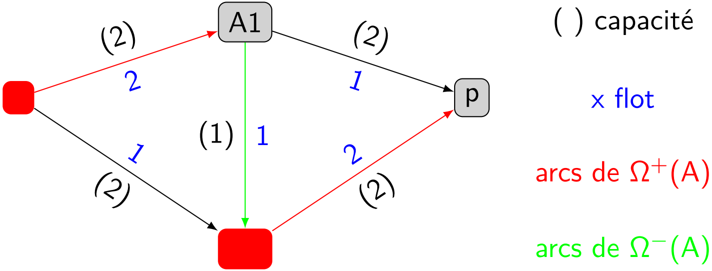


Il s'agit bien d'un flot : les lois de kirchof sont bien vérifiées :
au point A1 : 2 = 1+1; au point A2 : 1+1 = 2
compatible : les contraintes de capacité sont bien vérifiées:

Notations

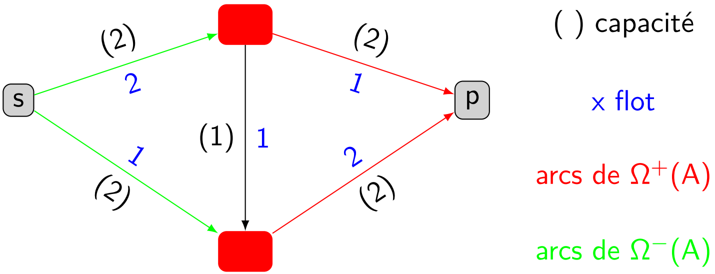
Soit $A \subset X$, on note :
$\Omega^+(\mathrm{A}) = \{ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{U} \,/\, \mathrm{x} \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{y} \notin \mathrm{A}\}$: ens. d'arcs sortants de A.
$\Omega^-(\mathrm{A}) = \{ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{U} \,/\, \mathrm{x} \notin \mathrm{A}$ et $\mathrm{y} \in \mathrm{A}\}$: ens. d'arcs entrants dans A.
$f^S(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \Omega^+(A)} f(u) =$ flux sortant de A.
$f^E(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \Omega^-(A)} f(u) =$ flux entrant dans A.
$C^S(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \Omega^+(A)} c(u)$.
$C^E(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \Omega^-(A)} c(u)$.

Flot compatible: exemple



- Prenons A $=\{$s, A2$\}$;
- $\Omega^+(A) = \{(A2\ p), (s\ A1)\}$; $\Omega^-(A) = \{(A1\ A2)\}$;
- $f^S(A) = 4$; $f^E(A) = 1$; $C^S(A) = 4$; $C^E(A) = 1$

Flot compatible: exemple



- Prenons A={A1, A2};
- $\Omega^+(A)$ = {(A1 p), (A2 p)}; $\Omega^-(A)$ = {(s A1), (s A2)};
- $f^S(A) = 1+2=3$; $f^E(A) = 1+2=3$; $C^S(A) = 4$; $C^E(A) = 4$

Définition 2 : valeur d'un flot compatible

La valeur d'un flot compatible est la quantité de flot envoyée de s à p : $\nu(f) = f^S$(s) flux sortant de la source s.

Proposition :

Soit A $\subseteq$ X et f un flot :
Si s $\notin$ A alors f^S(A) – f^E(A) $= 0$.
Si s $\in$ A alors f^S(A) - f^E(A) $= \nu$(f).

Corollaire

Soit f un flot : on a ν(f) $=$ f^S(s) $=$ f^E(p) $=$ f(u_r).

Soit A $\subseteq$ X et f un flot : (On suppose que p $\notin$ A)

Si s $\notin$ A alors $\forall$ x $\in$ A $\sum_{z\in\Gamma^-(x)} f(z\ x) = \sum_{y\in\Gamma^+(x)} f(x\ y)$

$$\sum_{x\in A}\ \sum_{z\in\Gamma^-(x)} f(z\ x) = \sum_{x\in A}\ \sum_{y\in\Gamma^+(x)} f(x\ y)$$

on peut écrire :

$$\sum_{x\in A}\ \sum_{z\in\Gamma^-(x)} f(z\ x) = \sum_{x\in A}\ \sum_{z\in A} f(z\ x) + \sum_{x\in A}\ \sum_{z\notin A} f(z\ x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x\in A}\ \sum_{z\in\Gamma^-(x)} f(z\ x) = \sum_{xz\in A} f(z\ x) + f^E(A)$$

de même

$$\sum_{x\in A}\ \sum_{y\in\Gamma^+(x)} f(x\ y) = \sum_{x,y\in A} f(x\ y) + f^S(A)$$

d'où f^S(A) - f^E(A) = 0.

Supposons maintenant que s $\in$ A

Soit A' = A $\setminus\{s\}$ on a :

$$f^S(A) = \sum_{\substack{x\in A \\ y\notin A}} f(x\ y)$$

$$f^S(A) = \sum_{\substack{x\in A' \\ y\notin A}} f(x\ y) + \sum_{y\notin A} f(s\ y)$$

en supposant qu'il n'y a pas d'arc arrivant à s, on peut écrire :

$$f^S(A) = f^S(A') + \sum_{y\notin A} f(s\ y) = f^S(A') + \sum_{y\notin A'} f(s\ y) \text{ (car } y \neq s)$$

$$f^E(A') = \sum_{\substack{x\in A' \\ y\notin A'}} f(y\ x)$$

$$f^E(A') = \sum_{\substack{x\in A' \\ y\notin A}} f(y\ x) + \sum_{x\in A'} f(s\ x) = \sum_{\substack{x\in A \\ y\notin A}} f(y\ x) + \sum_{x\in A'} f(s\ x)$$

$$f^E(A') = f^E(A) + \sum_{y\in A'} f(s\ y)$$

d'où le résultat :
puisque $f^S(A') = f^E(A')$ on a
$$f^S(A') = f^E(A') = f^E(A) + \sum_{y \in A'} f(s\ y)$$
or $f^S(A') = f^S(\mathrm{A})$ - $\sum_{y \notin A'} f(s\ y)$ d'après ce qui précède
d'où
$$f^S(\mathrm{A}) - \sum_{y \notin A'} f(s\ y) = f^E(A) + \sum_{y \in A'} f(s\ y)$$
$$\Longrightarrow f^S(\mathrm{A}) - f^E(A) = \sum_{y \notin A'} f(s\ y) + \sum_{y \in A'} f(s\ y)$$
$$\Longrightarrow f^S(\mathrm{A}) - f^E(A) = \sum_{y \neq s} f(s\ y)$$
$$\Longrightarrow f^S(\mathrm{A}) - f^E(A) = \nu(f)$$

Définition 3

On appelle coupe du réseau tout ensemble d'arcs $\Omega^+(\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ avec $\mathrm{s} \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{p} \notin \mathrm{A}$. la quantité $C^S(\mathrm{A})$ s'appelle la capacité de la coupe $\Omega^+(\mathrm{A})$.

Le lemme suivant est le principe de base de l'algorithme de calcul du flot maximum.

Lemme :

Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ avec $\mathrm{s} \in \mathrm{A}$ et f un flot compatible. On a l'inégalité :

$$\nu(f) \leq C^S(A).$$

Ce lemme s'énonce encore sous la forme suivante : "la valeur de tout flot compatible est inférieure ou égale à la capacité de toute coupe"

Corollaire :

$$\max_{f \ \ flot \ \ compatible} \nu(f) \leq \min_{A \subseteq X / s \in A} C^S(A)$$

Théorème de la coupe minimum

la valeur maximum de f(u_r) pour un flot compatible est égale à la capacité minimum de coupe séparant s de p.

$$\max_{f \ \ flot \ \ compatible} \nu(f) = \min_{A \subseteq X / s \in A} C^S(A)$$

En particulier, f est infini s'il n'existe pas de coupe de capacité finie.

Ce résultat de dualité est connu sous le nom de théorème de FORD-FULKERSON et sa preuve repose sur la construction explicite, par un algorithme, d'un flot φ et d'une coupe $\Omega^+(A)$ tel que $\nu(\varphi) = C^S$(A).

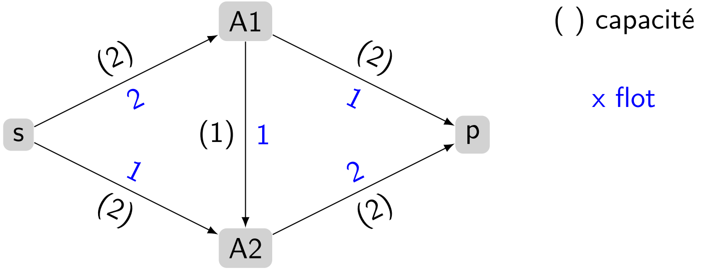
Chaîne augmentante

Définition 4 :

Etant donné un flot compatible:

un arc u est dit saturé par f si f(u) = c(u).

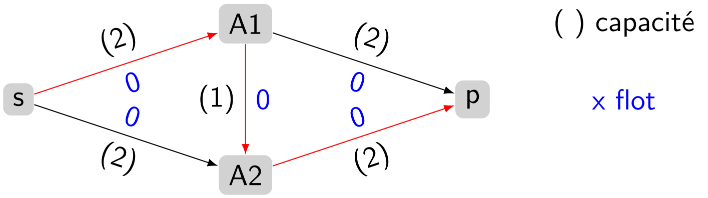
(s A1), (A1 A2) et (A2 p) sont saturés. (s A2) et (A1 p) sont non saturés.



Chaine augmentante

Exemple

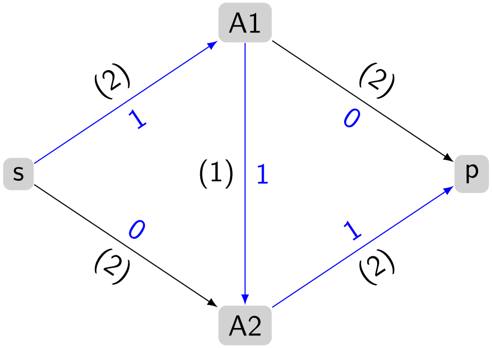
Pour entamer la recherche d'un flot maximum, on peut partir d'un flot nul, puis commencer par envoyer un flot d'une unité sur un chemin de s à p par exemple : {(s A1),(A1 A2),(A2 p)}.



Chaine augmentante

Exemple

On obtient le flot suivant :



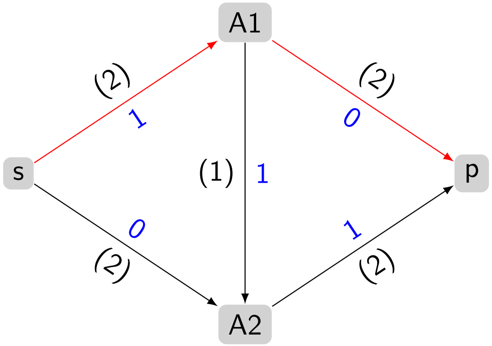
( ) capacité

x flot

Chaine augmentante

Exemple

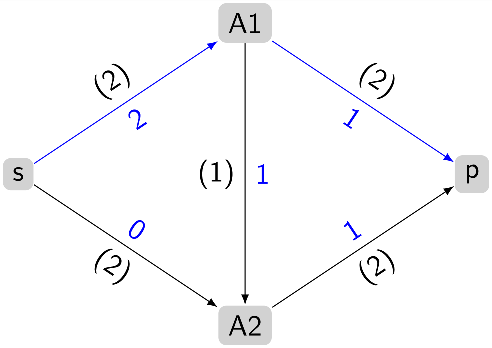
Puisque les arcs du chemin {(s A1),(A1 p)} ne sont pas saturés, On peut augmenter le flot en y envoyant une unité supplémentaire.



Chaine augmentante

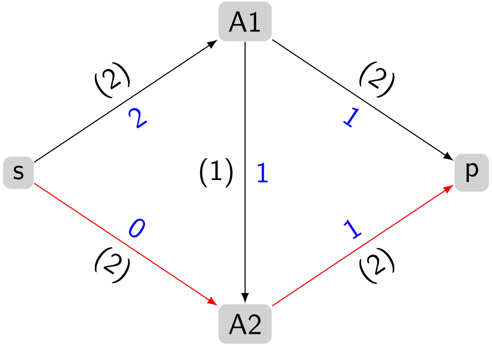
Exemple

On obtient un flot nouveau f de valeur $\nu(f) = 2$:



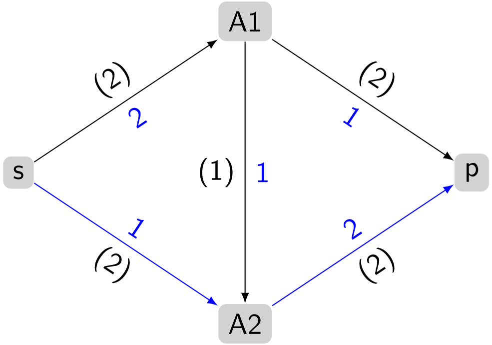
Chaîne augmentante

On peut encore augmenter la valeur du flot en envoyant plus de flot sur le chemin {(s A2),(A2 p)}.



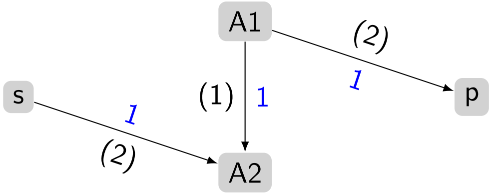
Chaîne augmentante

On obtient un flot f de valeur $\nu(f) = 3$.



Mais est-ce la valeur du flot maximum?

Chaîne augmentante



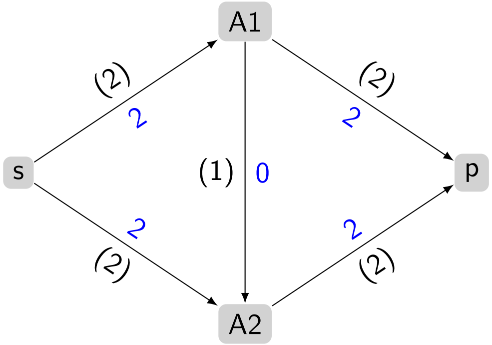
Considérons la chaine {(s A2),(A1 A2),(A2 p)}.On peut :

1. augmenter le flot de 1 sur (s A2)
2. diminuer le flot de 1 sur (A1 A2)
3. augmenter le flot de 1 sur (A1 p)

On aura un flot compatible

Chaîne augmentante

On obtient un flot meilleur :



Chaîne augmentante

Définition : chaîne augmentante

Une chaîne C entre s et p est dite augmentante par rapport à un flot f compatible sur un réseau (X,U,c) si :

- $\forall$ (i j) $\in C^+$, f((i j)) $<$ c((i j)) (l'arc est non saturé)
- $\forall$ (i j) $\in C^-$, f((i j)) $>$ 0

où C^+ est l'ensemble des arcs de C rencontrés dans le bon sens et C^- est l'ensemble des arcs de C rencontrés dans le sens contraire lors du parcours de C en partant de la source s.

Chaîne augmentante et flot maximum

Lemme :

Soit R =(X,U,c) un réseau et f un flot compatible sur R entre s et p.
S'il existe une chaîne C augmentante par rapport à f entre s et p alors f n'est pas le flot maximum.

En envoyant une quantité de flot supplémentaire

$$= min \left\{ \min_{u \in C^+} (c(u) - f(u)), \min_{u \in C^-} (f(u)) \right\}$$

dans la chaine C, on obtient un flot de valeur plus élevée.

Principe de l'algorithme :

Partant d'un flot compatible f, on cherche à augmenter f(u_r) (si possible)
Première idée :
Trouver un chemin C de s à p dont tous les arcs sont non saturés.
Γ = C $\cup \{u_r\}$ est un circuit.
On augmente la valeur du flot de la manière suivante :

$$f = f + \varepsilon \ * \gamma \quad avec \quad \varepsilon = \min_{u \in C}(c(u) - f(u))$$

et

$$\gamma \text{ est le vecteur}(\Gamma) \text{ défini par : } \gamma(\text{u}) = 1 \text{ si u} \in \Gamma \text{ et 0 sinon}$$

Principe de l'algorithme :

Deuxième idée :

Trouver une chaine augmentante C joignant s et p.

Γ = C $\cup\{u_r\}$ est un cycle. (le sens de parcours sur Γ est défini par le sens de u_r).

On pose : $\varepsilon 1 = \min_{u \in C^+} (c(u) - f(u))$; (f(u) < c(u))

$\varepsilon 2 = \min_{u \in C^-} (f(u))$; (f(u) > 0)

$$f = f + \varepsilon \ * \gamma \ avec \ \varepsilon = min(\varepsilon 1, \varepsilon 2)$$

où γ est le vecteur de Γ défini par :

$$\begin{cases} \gamma(u) = 1 \ si \ \ u \in \Gamma^+ \\ \gamma(u) = -1 \ si \ \ u \in \Gamma^- \\ \gamma(u) = 0 \ sinon \end{cases}$$

Algorithme de Ford et Fulkerson

L'algorithme de Ford et Fulkerson est un processus itératif partant d'une solution réalisable (un flot compatible généralement nul) où il détermine à chaque itération (tant qu'on n'a pas atteint l'optimum) une chaine augmentante qui améliore le flot courant. L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus de chaîne augmentante. Le processus de détermination de la chaîne augmentente est basée sur deux opérations de marquage dits : marquage direct et marquage inverse.

Marquage direct

Si pour un arc (i j), on a :

- f((i j)) $<$ c((i j))
- i marqué
- j non marqué

on marque j et on pose δ(j) $=$ min($\delta(i)$, c((i j))-f((i j))); δ(j) est la quantité maximale avec laquelle on peut augmenter le flot de s à j. (δ(s) est initialisé à l'infini pour s)

Marquage indirect

Si pour un arc (i j), on a :

- f((i j)) $>$ 0
- j marqué
- i non marqué

on marque i et on pose δ(i) $=$ min($\delta(j)$, f((i j)));

Algorithme de Ford et Fulkerson

Données : G = (X, U, c) , u_r = (s,p)
On note E : X $\rightarrow$ U; δ : X $\rightarrow$ R+ ; A $\subseteq$ X
Initialisation :
f un flot compatible (on peut prendre f = 0)

0) A = $\{s\}$; et δ(s) = $+\infty$;
$\forall x \in X$ E(x) = $\emptyset$;
1) Si p $\in$ A aller en 2) Sinon on essaie d'étendre A par l'un des deux processus de marquage suivants : dire qu'on marque un sommet c'est qu'on l'intègre à l'ensemble A

a) Processus direct :
si $\exists$ u = (x y) avec x $\in$ A et y $\notin$ A et f(u) < c(u) alors faire :
A = A $\cup \{y\}$; E(y) = u ;
δ(y) = min($\delta(x)$, c(u)-f(u));
aller en 1)
Finsi
b) Processus inverse :
si $\exists$ u = (y x) avec x $\in A$ et y $\notin$ A et f(u) > 0 alors faire
A = A $\cup \{y\}$; E(y) = u ;
δ(y) = min($\delta(x)$, f(u)) ;
aller en 1)
Finsi
Si on n'arrive pas à augmenter A stop on est à l'optimum.

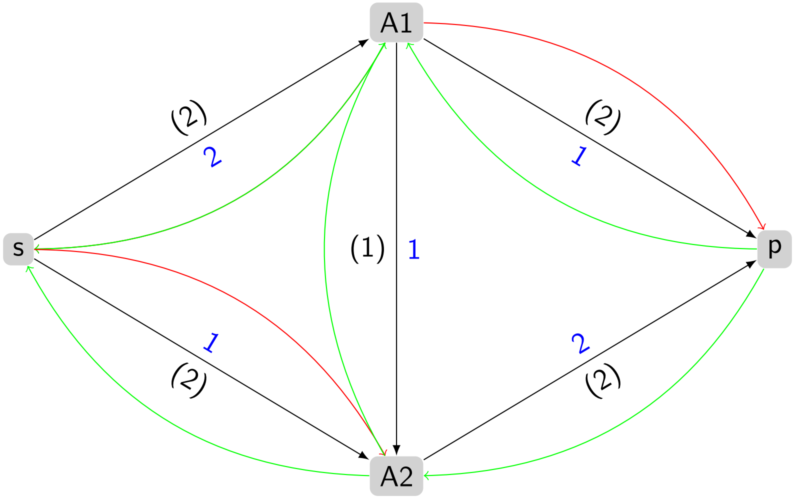
2) Poser $\Gamma^+ = \{u_r\}$; x = p ;
répéter
Si (x = s) break aller en 3)
Sinon
  u = E(x) ;
  Si (x = T(u)) alors
    $\Gamma^+ = \Gamma^+ \cup \{u\}$; x = I(u) ;
  Sinon
    $\Gamma^- = \Gamma^- \cup \{u\}$; x = T(u) ;
Tant que(c'est vrai)
3) Poser $\delta = \delta$(p)
f(u) = f(u) + δ si u $\in \Gamma^+$;
f(u) = f(u) - δ si u $\in \Gamma^-$;
f(u) = f(u) sinon
retourner en 0)

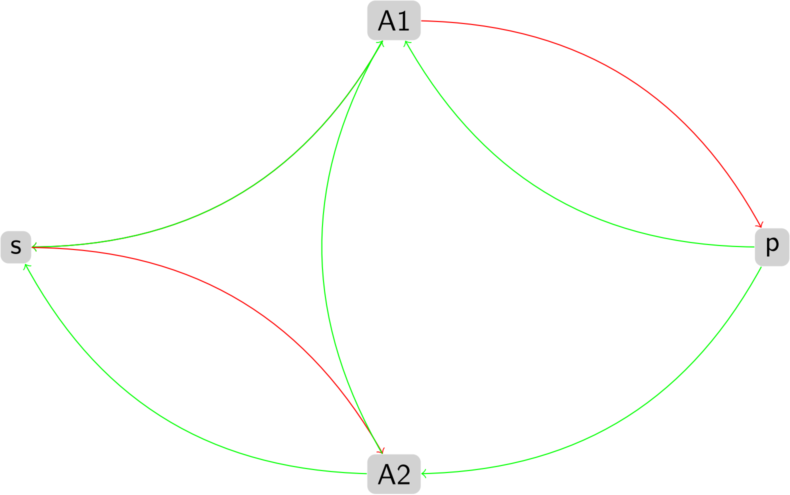
Graphe d'écart

Définition 5

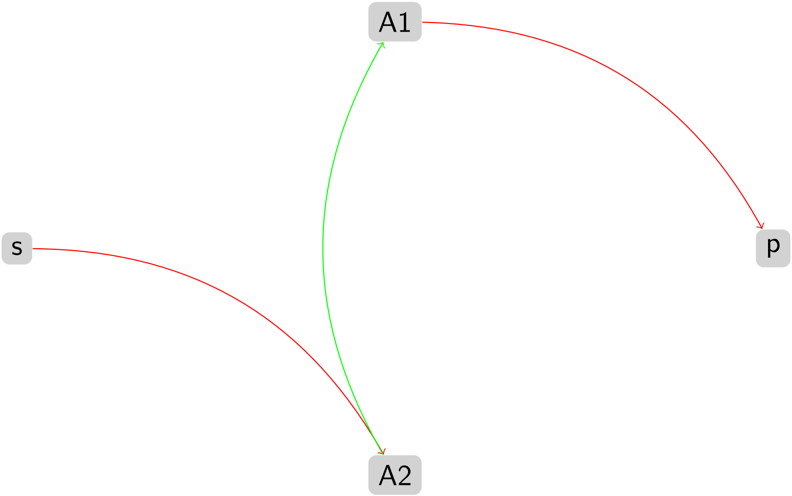
Soit R = (X,U,c) un réseau et deux sommets s(source) et p(puits).
Soit f un flot compatible sur R.
G_f = (X, U_f) le graphe d'écart associé à f est tel que :
u = (i j) ∈ U si f(u) < c(u) alors u = (i j) ∈ U_f
si f(u) > 0 alors v = (j i) ∈ U_f

La recherche d'une chaîne augmentante se ramène à un parcours en profondeur dans le graphe d'écart à partir de s.

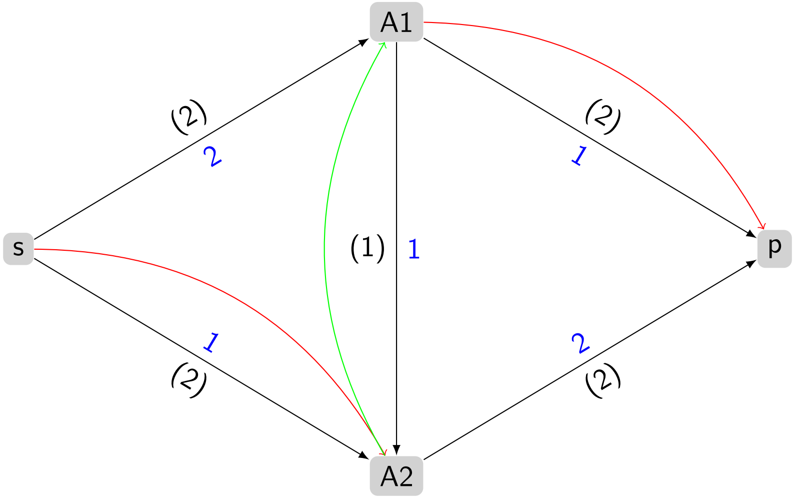

A1
s
p
A2
(2)
2
(2)
1
(1)
1
1
(2)
2
(2)


A1
s
p
A2

chaine augmentante



chaine augmentante



Complexité

Complexité d'une itération
O(m) pour le parcours en profondeur - le parcours et la restitution de la chaine.
Calcul du flot O(n) y compris la recherche du minimum des capacités résiduelles
Nombre d'itérations dépend de la valeur du flot. Supposons qu'on augmente d'une unité à chaque itération et que les capacités sont entières alors le nombre d'itérations est la valeur du flot Fmax. Si cmax la capacité maximum des capacités des arcs sortant du sommet s, alors Fmax $\leq$ (n-1)$*$cmax.
d'où la complexité est en O(nm)

Définition

Soient G = (X, U) un graphe orienté et b et c deux applications sur U:
b : U $\rightarrow$ R$\cup\{-\infty\}$; c : U $\rightarrow$ R $\cup\{+\infty\}$
tels que b(u) $\leq$ c(u) $\forall$ u $\in$ U.
et u_r = (p s) un arc de retour.
Le problème du flot canalisé maximum de s à p consiste à déterminer un vecteur f $\in R^U$ tel que :

1. f soit un flot sur R
2. $\forall$ u $\in$ U b(u) $\leq$ f(u) $\leq$ c(u)
3. f(u_r) soit maximum sous les conditions 1) et 2)

Remarque

Le problème de flot canalisé maximum peut être résolu facilement en adaptant l'algorithme de Ford et Fulkerson. En effet, si on dispose initialement d'un flot canalisé sur le réseau R = (X,U,b,c), alors il suffit de modifier le processus du marquage inverse dans l'algorithme pour aboutir au canalisé maximisant f(u_r).
La modification de l'algorithme s'effectue comme suit :
b) Marquage inverse :
si ($\exists$ u = (y x) avec x $\in A$ et y $\notin$ A et f(u) $>$ b(u)) alors faire
  A = A $\cup\{y\}$;
  E(y) = u ;
  δ(y) = min(δ(x), f(u)-b(u)) ;
  aller en 1)
Finsi

Pb Comment initialiser?

théorème d'Hoffman :

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un flot canalisé sur R = (X, U, b,c) est que :
pour tout cocycle $\Omega(Y)$ on ait :

$$\sum_{u \in \Omega^-(Y)} b(u) \leq \sum_{u \in \Omega^+(Y)} c(u) \tag{3}$$

Preuve: CN⇒)
soit f un flot canalisé et $Y \subset X$ on a:

$$\sum_{u \in \Omega^-(Y)} b(u) \leq \sum_{u \in \Omega^-(Y)} f(u) = \sum_{u \in \Omega^+(Y)} f(u) \leq \sum_{u \in \Omega^+(Y)} c(u)$$

d'où

$$\sum_{u \in \Omega^-(Y)} b(u) \leq \sum_{u \in \Omega^+(Y)} c(u)$$

CS⇒)Démonstration algorithmique
L'algorithme met en évidence un flot canalisé s'il en existe et un Y ne vérifiant pas (3) sinon

Principe : on part d'un flot non nécessairement réalisable. On associe à R un réseau $\tilde{R}$ en modifiant certaines capacités de façon à rendre f réalisable dans $\tilde{R}$ et à pouvoir améliorer f en utilisant Ford Fulkerson modifié sur $\tilde{R}$

Définition de $\tilde{R}$

on pose $\tilde{b}(u) = b(u)$ si $f(u) \geq b(u)$
$\tilde{b}(u) = f(u)$ sinon
$\tilde{c}(u) = c(u)$ si $f(u) \leq c(u)$
$\tilde{c}(u) = f(u)$ sinon

f n'étant pas réalisable, il existe au moins un arc $u = (x\ y)$ tel que $\tilde{b}(u) \neq b(u)$ ou $\tilde{c}(u) \neq c(u)$

Premier cas :

$$\tilde{b}(u) \neq b(u)$$

on cherche à augmenter f sur u jusqu'à concurrence de b(u).
On ajoute à U l'arc $\tilde{u}_r$ = (x y) tel que :

- $\tilde{b}(\tilde{u}_r) = 0$
- $\tilde{c}(\tilde{u}_r) =$ b(u) - f(u)

f est réalisable sur $\tilde{R} =$ (X, U $\cup\{\tilde{u}_r\}$,$\tilde{b}$, $\tilde{c}$)
on applique Ford et Fulkerson modifié pour maximiser f($\tilde{u}_r$)
Remarque L'optimum est fini car majoré par $\tilde{c}(\tilde{u}_r)$
soit donc $\tilde{f}$ un flot optimal sur $\tilde{R}$

2 scénarios sont possibles :
scénario 1 :
$\tilde{f}(\tilde{u}_r) = \tilde{c}(\tilde{u}_r)$
on met à jour le flot sur R en posant :

- $\mathrm{f(v)} = \tilde{f}(\mathrm{v})$ si $\mathrm{v} \neq \mathrm{u}$
- $\mathrm{f(u)} = \mathrm{f(u)}\{initial\} + \tilde{f}(\tilde{u}_r)$
  $\Rightarrow$
  $\mathrm{f(u)} = \mathrm{f(u)}\{initial\} + \mathrm{b(u)} - \mathrm{f(u)}\{initial\}$
  $\Rightarrow$
  $\mathrm{f(u)} = \mathrm{b(u)}$

f est certainement un flot et le nombre d'arcs violant les contraintes de capacité a diminué strictement (de 1 au moins)

scénario 2 :
$\tilde{f}(\tilde{u}_r) < \tilde{c}(\tilde{u}_r)$
on a s = y et p = x
soit Y l'ensemble des sommets marqués à la dernière itération de Ford et Fulkerson modifié
si v $\in \Omega^+(Y)$ f(v) = $\tilde{c}$(v) $\geq$ c(v)
si v $\in \Omega^-(Y)$ f(v) = $\tilde{b}$(v) $\leq$ b(v)
f(u) < b(u) (u $\in \Omega^-(Y)$) d'où :

$$\sum_{v \in \Omega^-(Y)} b(v) > \sum_{v \in \Omega^-(Y)} f(v) = \sum_{v \in \Omega^+(Y)} f(v) \geq \sum_{v \in \Omega^+(Y)} c(v)$$

Contradiction

Deuxième cas :

$$\tilde{c}(u) \neq c(u) \quad (f(u) > c(u))$$

on cherche à diminuer le flot f sur u jusqu'à concurrence de c(u).
On ajoute à U l'arc $\tilde{u}_r$ = (y x) tel que

- $\tilde{b}(\tilde{u}_r) = 0$
- $\tilde{c}(\tilde{u}_r)$ = f(u) - c(u)

f est réalisable sur $\tilde{R}$ = (X, U $\cup\{\tilde{u}_r\}$,$\tilde{b}$, $\tilde{c}$)
on applique Ford et Fulkerson modifié pour maximiser f($\tilde{u}_r$)
Remarque L'optimum est fini car majoré par $\tilde{c}(\tilde{u}_r)$
soit $\tilde{f}$ est un flot optimal.

2 scénarios sont possibles :
scénario 1 :
$\tilde{f}(\tilde{u}_r) = \tilde{c}(\tilde{u}_r)$
on met à jour le flot sur R en posant :

- $f(v) = \tilde{f}(v)$ si $v \neq u$
- $f(u) = f(u)\{initial\} - \tilde{f}(\tilde{u}_r)$
  $\Rightarrow \quad f(u) = f(u)\{initial\} - f(u)\{initial\} + c(u)$
  $\Rightarrow \quad f(u) = c(u)$

f est certainement un flot et le nombre d'arcs violant les contraintes de capacité a diminué strictement (de 1 au moins)
Dans les deux cas, on continue de la manière suivante :
Si f est réalisable stop
Sinon : On reconstruit $\tilde{R}$ à partir du nouveau flot et on réitère

scénario 2 :
$\tilde{f}(\tilde{u}_r) < \tilde{c}(\tilde{u}_r)$
$\tilde{u}_r$ = (y x) ; p = y et s = x
soit Y l'ensemble des sommets marqués à la dernière itération de Ford et Fulkerson modifié
si v $\in \Omega^-(Y)$ f(v) = $\tilde{b}$(v) $\leq$ b(v)
si v $\in \Omega^+(Y)$ f(v) = $\tilde{c}$(v) $\geq$ c(v)
f(u) > c(u) (u $\in \Omega^+(Y)$) d'où :

$$\sum_{v \in \Omega^+(Y)} c(v) < \sum_{v \in \Omega^+(Y)} f(v) = \sum_{v \in \Omega^-(Y)} f(v) \leq \sum_{v \in \Omega^-(Y)} b(v)$$

Contradiction

Remarque

Le théorème de la coupe minimale s'étend de la manière suivante :
Soit $Y \subset X$ tel que $s \in Y$ et $p \notin Y$
On appelle cocycle séparant s de p $\Omega(Y)$ ensemble des arcs adjacents aux sommets de Y
La capacité de $\Omega(Y)$ est $\hat{C}(\Omega(Y)) = c(\Omega^+(Y))$ - $b(\Omega^-(Y))$
On a alors sous réserve de réalisabilité, la valeur maximale de flot sur R est égale à la capacité minimale d'un cocycle séparant s de p

Définition

Soient G = (X, U) un graphe orienté et a, b et c des applications sur U:
a : U $\rightarrow$ R (définit un coût)
b : U $\rightarrow$ R$\cup\{-\infty\}$ (capacité inférieure)
c : U $\rightarrow$ R $\cup\{+\infty\}$ (capacité supérieure)
tels que b(u) $\leq$ c(u) $\forall$ u $\in$ U.
Le problème du flot de coût minimum consiste à déterminer un vecteur f $\in R^U$ tel que :

1. f soit un flot sur le réseau R = (X, U, a, b, c)
2. $\forall$ u $\in$ U   b(u) $\leq$ f(u) $\leq$ c(u)
3. $\sum\limits_{u \in U} a(u)f(u)$ soit minimum sous les conditions 1) et 2)

Théorème de caractérisation d'un flot de coût minimum

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un flot réalisable f sur un réseau R soit solution optimale du P.F.C.M est que pour tout cycle Γ et pour tout sens de parcours sur Γ tel que :

$$\delta = min\{\min_{u \in \Gamma^+}(c(u) - f(u), \min_{u \in \Gamma^-}(f(u) - b(u)\} > 0$$

on ait :

$$a\gamma \geq 0$$

avec :

$$a\gamma = \sum_{u \in \Gamma^+} a(u) - \sum_{u \in \Gamma^-} a(u)$$

$\Rightarrow$) On démontre par la contraposée.
Supposons qu'il existe Γ tel que $\delta > 0$ et $a\gamma < 0$.
Soit f' $=$ f $+ \delta\gamma$. On a alors :
af' $=$ af $+ \delta a\gamma < af$. Donc f est non optimale.
$\Leftarrow$) Démontrons cette implication par la contraposée :
Soit f réalisable mais non optimale. Il existe alors un flot f' réalisable tel que af' $<$ af. Soit f" $=$ f' - f. f" peut être décomposé selon le théorème suivant ainsi : $f" = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\gamma_i$
On peut écrire : $af" = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a\gamma_i$
Or af" $=$ a(f-f') $=$ af - af' $<$ 0. Donc :
$\exists i$ tel que $\alpha_i a\gamma_i < 0 \Rightarrow \exists i$ tel que $a\gamma_i < 0$
et $\forall u \in \Gamma_i^+$ f"(u) >0$\Rightarrow$f'(u) - f(u) $> 0 \Rightarrow$ f'(u) $>$ f(u) $\Rightarrow$ c(u) $>$ f(u).
$\forall u \in \Gamma_i^-$ f"(u) <0$\Rightarrow$f'(u) - f(u) $< 0 \Rightarrow$ f'(u) $<$ f(u) $\Rightarrow$ b(u) $<$ f(u).

La démonstration du théorème précédent repose sur le théorème qui suit :

Théorème de décomposition conforme d'un flot T.D.C.F.

Etant donné un flot f sur G = (X, U), on peut trouver des cycles $\Gamma_1 \ . \ . \ . \ \Gamma_q$ et des réels positifs $\alpha_1 \ . \ . \ . \ \alpha_q$ tel que :

$$f = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \gamma_i$$

où

γ_i est le vecteur représentatif de Γ_i avec le sens de parcours défini ainsi :

u $\in \Gamma_i$ et f(u) $> 0 \Longrightarrow$ u $\in \Gamma_i^+$

u $\in \Gamma_i$ et f(u) $< 0 \Longrightarrow$ u $\in \Gamma_i^-$

on utilise un procédé algorithmique pour montrer ce théorème.
(0) $G_1 \leftarrow$ G; $f_1 \leftarrow$ f;
(1) A G_i on associe le graphe ${G_i}^*$ obtenu à partir de G_i en supprimant les arcs u tels que f_i(u) $=$ 0; (f_i flot sur ${G_i}^*$)
Posons $\alpha_i = \min\limits_{u \in {G_i}^*} (\mid f_i(u) \mid)$
Soit ${u_i}^* \in {G_i}^*$tq $\mid f_i({u_i}^*) \mid = \alpha_i$
f_i étant un flot, il est combinaison linéaire de vecteurs représentatifs de cycles.
Soit Γ_i un cycle contenant l'arc ${u_i}^*$. Le sens de parcours sur Γ_i est celui de ${u_i}^*$ si $f_i({u_i}^*) > 0$ et lui est opposé sinon.
$f_{i+1} \leftarrow f_i - \alpha_i \gamma_i$
Si $f_{i+1} = 0$ stop sinon i $\leftarrow$i+1 et aller en 1;
(Rq. $f_i(u) > 0 \Leftrightarrow f_{i+1}(u) > 0$)

Théorème

Un flot réalisable f sur un réseau R est solution optimale du P.F.C.M si et seulement si il existe une fonction potentielle π sur l'ensemble des sommets telle que :
$\forall$ u = (x y) $\in$ U

$$\begin{cases} \pi(y) - \pi(x) < a(u) \Rightarrow f(u) = b(u) \\ \pi(y) - \pi(x) > a(u) \Rightarrow f(u) = c(u) \end{cases}$$

Le problème de flot de coût minimum peut se formuler comme un problème linéaire en variables bornées

$$\begin{cases} Af = 0 \\ b \leq f \leq c \\ af = w(min) \end{cases}$$

où A est la matrice d'incidence aux arcs de G = (X, U)

Ce modèle inclut :

- Le P.P.C.C. de s à p dans R = (X, U, d) on ajoute l'arc de retour u_r = (p s)
  - $\forall$ u $\in$ U a(u) = d(u); b(u) = 0; c(u) = 1
  - a(u_r) = 0; b(u_r) = 0; c(u_r) = 1;
- Le problème de flot max de s à p dans R = (X, U, c) on ajoute l'arc de retour u_r = (p s)
  - $\forall$ u $\in$ U a(u) = 0; b(u) = 0; c(u) = c(u);
  - a(u_r) = -1; b(u_r) = 0
- Le problème de transport : (défini dans la partie programmation linéaire)
- Le problème de flot max de coût min de s à p en fixant la capacité inférieure et supérieure de u_r à la valeur du flot max de s à p.