

Srovnání SVD a randomizovaného SVD

Kaldybayeva Assel , KAL0324

1 Úvod

Rozklad singulárních hodnot (SVD) je běžně používán pro aproximaci matic nízkého ranku. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má tvar

$$A = U\Sigma V^T,$$

kde Σ obsahuje singulární hodnoty. Klasický výpočet SVD je však pro větší matice výpočetně náročný. Randomizované SVD nabízí rychlejší aproximaci využívající náhodné projekce.

Cílem projektu je porovnat klasické zkrácené SVD a randomizované SVD z hlediska času výpočtu, paměťové náročnosti a přesnosti aproximace.

2 Použité metody

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uvažujeme rozklad singulárních hodnot

$$A = U\Sigma V^T.$$

Klasické zkrácené SVD poskytuje aproximaci ranku k , která minimalizuje chybu ve Frobeniově normě. Pro řídké matice je tato metoda realizována pomocí funkce `svds` z knihovny SciPy.

Randomizované SVD využívá náhodnou projekci

$$Y = A\Omega,$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ je náhodná matice. Pro zvýšení přesnosti je projekce iterativně zpřesňována pomocí vztahu

$$Y = A(A^T Y),$$

který je v implementaci aplikován q -krát.

Z ortonormální báze Q prostoru generovaného maticí Y je následně vytvořena menší matice

$$B = Q^T A,$$

na které je spočítáno klasické SVD.

3 Výsledky

Testování bylo provedeno na syntetických maticích s různým poklesem singulárních hodnot a na reálných řídkých maticích ze SuiteSparse Matrix Collection. Byla měřena doba výpočtu, relativní chyba

$$\frac{\|A - A_k\|_F}{\|A\|_F},$$

a změna paměťové náročnosti (RSS).

Výsledky ukazují, že randomizované SVD s jednou nebo dvěma power iteracemi dosahuje srovnatelné přesnosti s klasickým SVD, avšak s výrazně kratším výpočetním časem. Bez power iterací je přesnost nižší zejména u matic s pomalým poklesem singulárních hodnot.

4 Závěr

Randomizované SVD je efektivní metodou pro aproximaci matic s nízkým efektivním rankem nebo rychlým poklesem singulárních hodnot. V těchto případech poskytuje významné zrychlení výpočtu při zachování dobré přesnosti. Pro matice s pomalým spektrálním poklesem je nutné použít power iterace nebo zvolit klasické zkrácené SVD.