邻接：

（a）4 邻接：如果点 q 在 $N_4(p)$中，并 q 和 p 具有 V 中的数值，则 q 和 p 是 4 邻接的；

（b）8 邻接：如果点 q 在 $N_8(p)$中，并 q 和 p 具有 V 中的数值，则 q 和 p 是 8 邻接的；

（c）m 邻接（混合邻接）：满足下列条件的任一个，则具有 V 中数值的 p 和 q 是 m 连接的。

（i）q 在中 $N_4(p)$

（ii）q 在 $N_D(p)$中，且集合 $N_4(p)\cap N_4(q)$中没有 V 值的像素。

灰度变换：

图像反转变换：s=L-1-r　对数变换：$s = c\,log(1+r)$　幂次变换：$s = cr^{\gamma}$

1）概率：$p_r(r_k)=\frac{n_k}{n}$，$k=0,1,2,\ldots,L-1$

2）累积分布函数：

$$P(r_k)=\sum_{j=0}^{k}p_r(r_j)=\sum_{j=0}^{k}\frac{n_j}{n},\quad k=0,1,2,\ldots,L-1$$

3）变换函数：

$$s_k=T(r_k)=(L-1)\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{n_j}{n},\quad k=0,1,2,\ldots,L-1$$

4）将 s_k"四舍五入"转换为标准灰度级别，如果有相同的$\lceil s_k\rceil$，则合并。

图像直方图 $h(r_k)=n_k$

rk 为第 k 级灰度，nk 为 rk 级灰度的像素点个数，归一化为 p(rk)。简单来说：　p(rk)是灰度级 rk 在图像中出现的概率估计　。归一化直方图的所有分量之和应该等于 1。若一幅图像的像素倾向于占据整个可能的灰度级并且分布均匀，则该图像会有高对比度的外观并展示灰色调的较大变动。

空间域线性滤波的基本公式：$g(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}w(s,t)f(x+s,y+t)$

一个 M × N 的滤波器 w(x,y)与图像 *f*(x, y)的相关操作定义为$w(x,y)\circ f(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}w(s,t)f(x+s,y+t)$

一个 M × N 的滤波器 w(x,y)与图像 *f*(x, y)的卷积定义为$w(x,y)*f(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}w(s,t)f(x-s,y-t)$

锐化空间滤波器：锐化的目的和平滑相反，是为了突出图像中的细节或者增强被模糊了的细节。

基于二阶微分的图像增强——**拉普拉斯算子**$\nabla^2 f=[f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)]-4f(x,y)$

$$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y)-\nabla^2 f, & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为负}\\ f(x,y)+\nabla^2 f, & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为正}\end{cases}$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

非锐化掩模和高提升滤波：

非锐化掩模一般公式：$f_s(x,y)=f(x,y)-\bar{f}(x,y)$

更普遍形式就是所谓的高提升滤波处理：$f_{hb}(x,y)=Af(x,y)-\bar{f}(x,y)$

基于拉普拉斯算子的高提升滤波：$f_{hb}(x,y)=\begin{cases}Af(x,y)-\nabla^2 f, & \text{拉普拉斯滤波中心系数为负}\\ Af(x,y)+\nabla^2 f, & \text{拉普拉斯滤波中心系数为正}\end{cases}$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

−1	0
0	1

0	−1
1	0

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

如何计算离散图像数据的梯度?

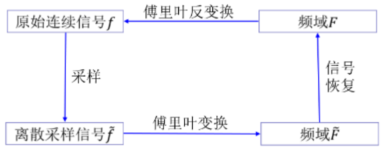
Robert 交叉梯度算子$G_x=(z_9-z_5)$，以及 $G_y=(z_8-z_6)$；$\nabla f=|z_9-z_5|+|z_8-z_6|$

在 3×3 的掩模上计算（**Sobel** 算子）：$\nabla f=|(z_7+2z_8+z_9)-(z_1+2z_2+z_3)|+|(z_3+2z_6+z_9)-(z_1+2z_4+z_7)|$

一维连续函数傅里叶变换及反变换$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{t})e^{-j2\pi ut}dt\overset{\text{欧拉公式}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{t})[\boldsymbol{cos}(2\pi ut)-j\,\boldsymbol{sin}(2\pi ut)]dt$

存在复数！显示用幅值(傅里叶谱/频谱):　$|F(u)|=[R^2(u)+I^2(u)]^{1/2}$

反变换：$f(\boldsymbol{t})=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{j2\pi ut}du$



卷积：$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$　**卷积定理：**$f(t)*h(t)\Leftrightarrow F(\mu)H(\mu)$ 且 $f(t)h(t)\Leftrightarrow F(\mu)*H(\mu)$

单变量离散傅里叶变换（DFT）周期为 M

$$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}\qquad u=0,1,\cdots,M-1$$

$$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}\qquad x=0,1,\cdots,M-1$$

$$\mathrm{F}\{f(t)*g(t)\}=F(s)G(s)$$

$$\mathrm{F}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$$

证明：由定义

$$\mathrm{F}\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(t-u)du e^{-j2\pi st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(t-u)e^{-j2\pi s(t-u)-j2\pi su}dtdu$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{-j2\pi s(v)}dv\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)^{-j2\pi su}du\qquad(\text{令}v=t-u)$$

$$=F(s)G(s)$$

二维傅里叶变换本质上是一维情形向两个方向的简单扩展.

$$F(\mu,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+vz)}dtdz$$

$$f(t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mu,v)e^{j2\pi(\mu t+vz)}d\mu dv$$

空间频率间隔关系: $\Delta u=\frac{1}{M\Delta x}$ $\Delta v=\frac{1}{N\Delta y}$

平移(不影响幅度): $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$

$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$

同角度旋转(不影响幅度): $f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\varphi_0)$

周期性: $F(\mu,v)=F(\mu+k_1M,v)=F(\mu,v+k_2N)=F(\mu+k_1M,v+k_2N)$

$f(x,y)=f(x+k_1M,y)=f(x,y+k_2N)=f(x+k_1M,y+k_2N)$

二维离散变换

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

傅里叶谱: $|F(u,v)|=[R^2(u,v)+I^2(u,v)]^{1/2}$

平均灰度/直流分量(DC): $F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

实函数的傅里叶变换是共轭对称的: $F^*(u,v)=F(-u,-v)$

虚函数的傅里叶变换是共轭反对称的: $F^*(-u,-v)=-F(u,v)$

频率域滤波

高频: 代表图像变化较快的部分, 细节丰富, 例如边缘等;

低频: 代表图像变化缓慢的部分, 图像总体信息和主要部分。

频率域滤波基础 $f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$

步骤:

(1) 用$(-1)^{x+y}$乘以输入图像, 做频谱中心化处理;

(2) 计算(1)结果的DFT, 即$F(u,v)$;

(3) 用滤波器函数$H(u,v)$乘以$F(u,v)$(在频谱域处理图像) - 滤波器函数下面讨论;

(4) 计算(3)中结果的反DFT;

(5) 得到(4)结果中的实部;

(6) 用$(-1)^{x+y}$乘以(5)中的结果

滤波和滤波器: 滤波顾名思义就是阻止或减少信号或图像中的某些频率成分. 滤波器(函数)就是能起到这样作用的函数. 一般表达式:

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

滤波后的结果图像可以从$G(u,v)$的反傅里叶变换得到.

$$g(x,y)=\Im^{-1}G(u,v)$$

频率域滤波是以如下处理为基础的: 修改傅里叶变换以达到特殊目的, 然后计算 IDFT(傅里叶反变换)返回到图像域 。一般平滑图像使用低通滤波器, 而锐化图像使用高通滤波器。理论上, 对于任意的空间域滤波器都有频率域滤波器与之对应。

理想低通滤波器(Ideal Lowpass Filters) $H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)\le D_0\\ 0 & D(u,v)>D_0\end{cases}$; $D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]^{1/2}$

D_0是一个非负数值, 称为滤波器的截止频率(Cutoff Frequency).

高斯低通滤波器(Gaussian Lowpass Filter): $H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

低通滤波器相反的操作即可得到高通滤波器: $H_{hp}(u,v)=1-H_{lp}(u,v)$

频率域的拉普拉斯算子

因此, 频率域的拉普拉斯算子可以由如下滤波器实现

$$H(u,v)=-(u^2+v^2)$$

若将原图乘以$(-1)^{x+y}$以期频谱域的中心化, 根据傅里叶变换的指数性质或平移性质, 滤波器也可以写成

$$H(u,v)=-[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]$$

高频加强滤波: 目的是锐化图像.

在高通滤波器函数前乘以一常数, 再增加一个常数偏移使零频率不被滤波去除掉.

$$H_{hfe}(u,v)=a+bH_{hp}(u,v)$$

其中a>=0且b>a.

1) **a的典型值在0.25—0.5; b的典型值在1.5—2.0。**
2) **当a=(A-1)且b=1时, 高频增强滤波转为高频提升滤波。**
3) **b>1时, 高频得到加强。**

4.4.5 频率域的高提升滤波

图象的平滑 $F_{lp}(u,v)=H_{lp}(u,v)F(u,v)$

图象的高频成分 $F_{hp}(u,v)=F(u,v)-F_{lp}(u,v)$

$=(1-H_{lp}(u,v))F(u,v)$

$=H_{hp}(u,v)F(u,v)$

图象的高频成分获得增加

$G(u,v)=F(u,v)+F_{hp}(u,v)$

$=(1+H_{hp}(u,v))F(u,v)$

1. 高频提升滤波器

$H_{hb}(u,v)=(A-1)+H_{hp}(u,v)$

其中, $A\ge 1$。

$f(x,y)*h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$

$f(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$

两个二维函数 f(x, y)和 h(x, y)的卷积定义为: $f(x,y)*h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$

$f(x,y)\circ h(x,y)\Leftrightarrow F^*(u,v)H(u,v)$

$f^*(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\circ H(u,v)$

二维函数 f(x, y)和 h(x, y)的相关函数定义: $g(x,y)=f(x,y)\circ h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$