

第五章 图像复原

- 图像复原是利用退化现象的某种先验知识来重建被退化的图像，是一个客观的过程。
- 图像增强是为了人类视觉系统的生理接受特点而设计的一种改善图像的方法，是一个主观的过程。

一. 图像退化与复原过程模型

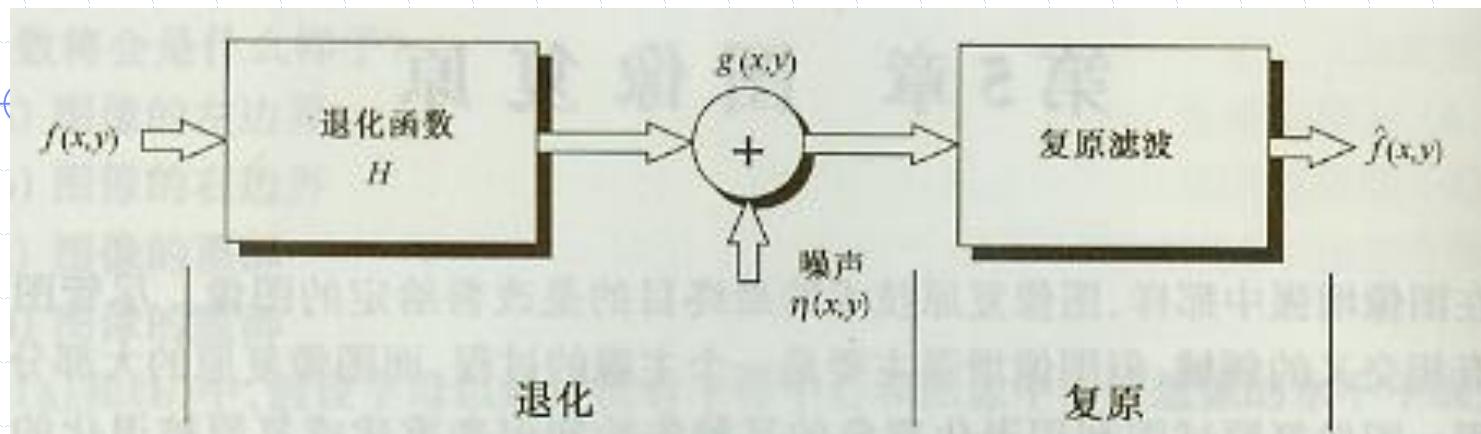


图 5.1 图像退化/复原过程的模型

➤ 图像退化模型：

➤ 空间域：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

➤ 频域：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

二. 噪声模型

- 噪声来自光照强度、传感器温度和灰尘等。
- 当噪声的Fourier谱是常量时，该噪声成为白噪声。
- 通常把噪声看作来自某个样本集的随机变量。该随机变量可以由一个概率密度函数（PDF）刻画。
- 噪声模型有：高斯噪声、瑞利噪声、伽马噪声、指数分布噪声、均匀分布噪声、脉冲（椒盐）噪声。

1. 高斯噪声

高斯随机变量z的PDF由下式给出：

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

其中z表示灰度值， μ 表示z的平均或均值， σ 叫做标准差。单位面积的高斯函数。

其值有70%落在 $[(\mu - \sigma), (\mu + \sigma)]$ ，且有95%落在 $[(\mu - 2\sigma), (\mu + 2\sigma)]$

2. 椒盐噪声

椒盐随机变量z的PDF由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如果 $b > a$ ，则灰度值 b 和 a 分别显示一个亮
点和暗点。

瑞利噪声

瑞利噪声的概率密度函数由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z - a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

概率密度的均值和方差由下式给出：

$$\mu = a + \sqrt{\pi b / 4}$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4}$$

伽马(爱尔兰)噪声

伽马噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

其中, $a > 0$, b 为正整数且“!”表示阶乘。其密度的均值和方差由下式给出：

$$\mu = \frac{b}{a}$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

指数分布噪声

指数噪声的 PDF 可由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

其中, $a > 0$ 。概率密度函数的期望值和方差是:

$$\mu = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

均匀分布噪声

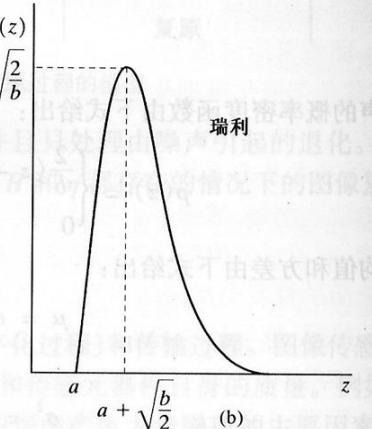
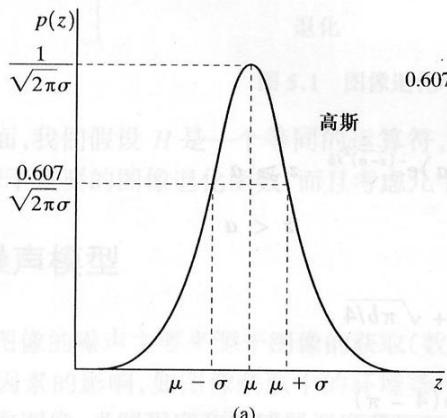
均匀分布噪声的概率密度,可由下式给出:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

概率密度函数的期望值和方差可由下式给出:

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$



几乎每个模型都又a和b两个参数确定，a和b又与直方图的均值与方差有关。

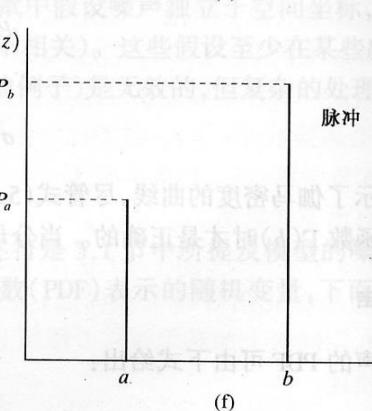
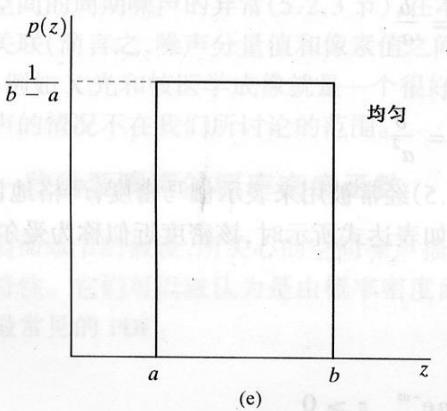
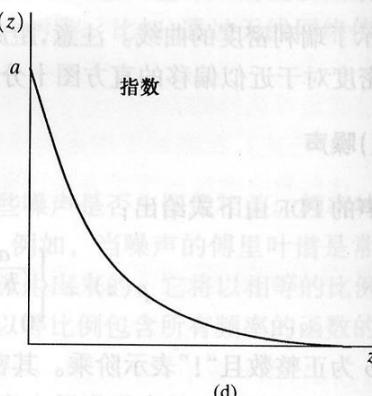
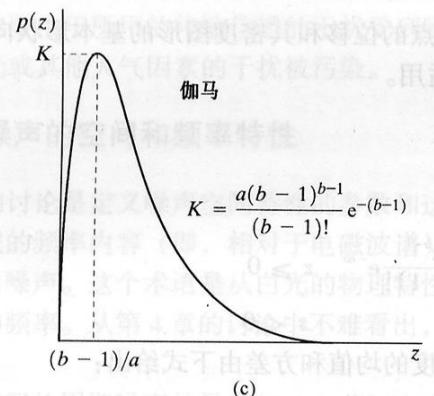


图 5.2 某些重要的概率密度函数



图 5.3 用于说明示于图 5.2 的噪声 PDF 特性的测试图

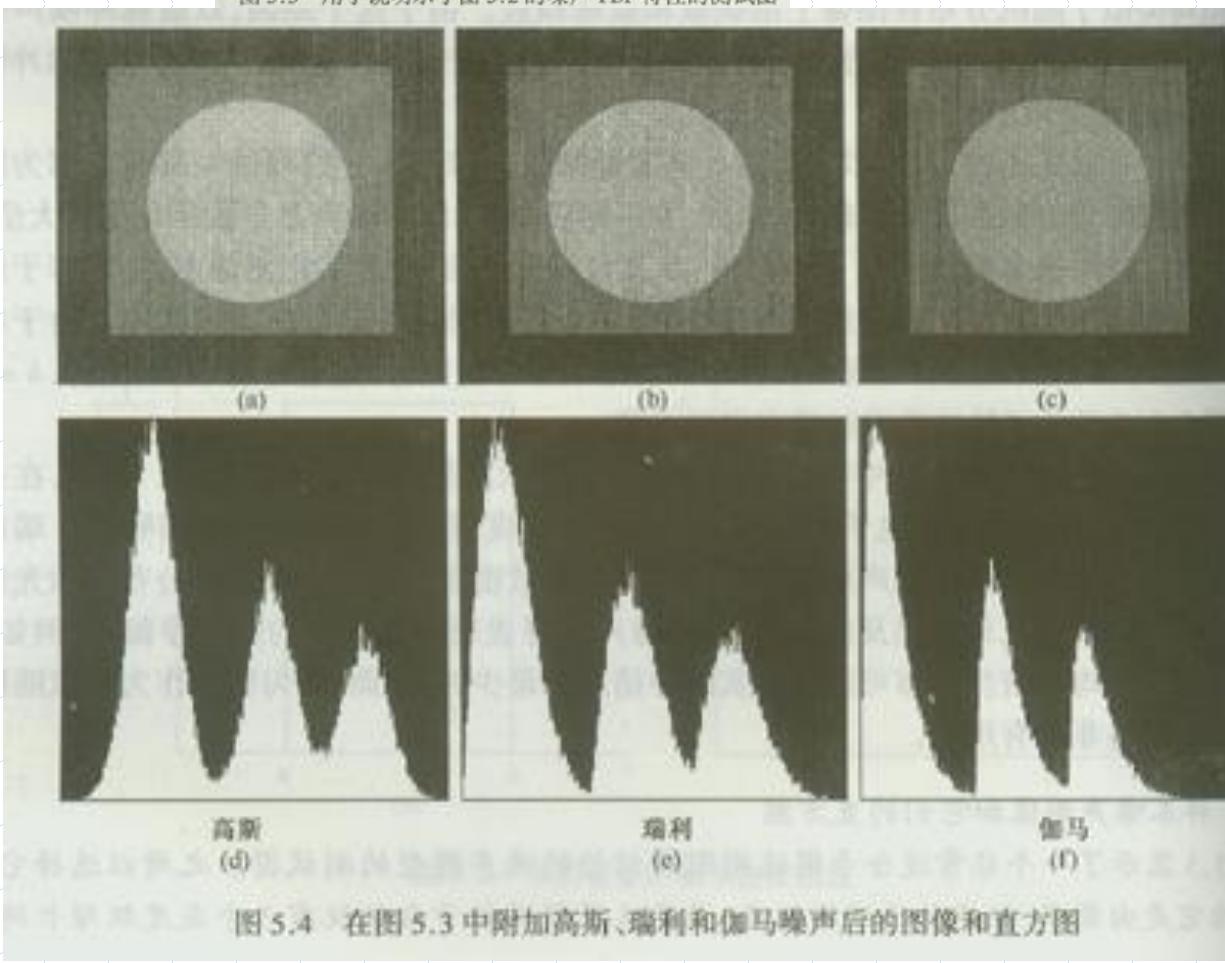


图 5.4 在图 5.3 中附加高斯、瑞利和伽马噪声后的图像和直方图

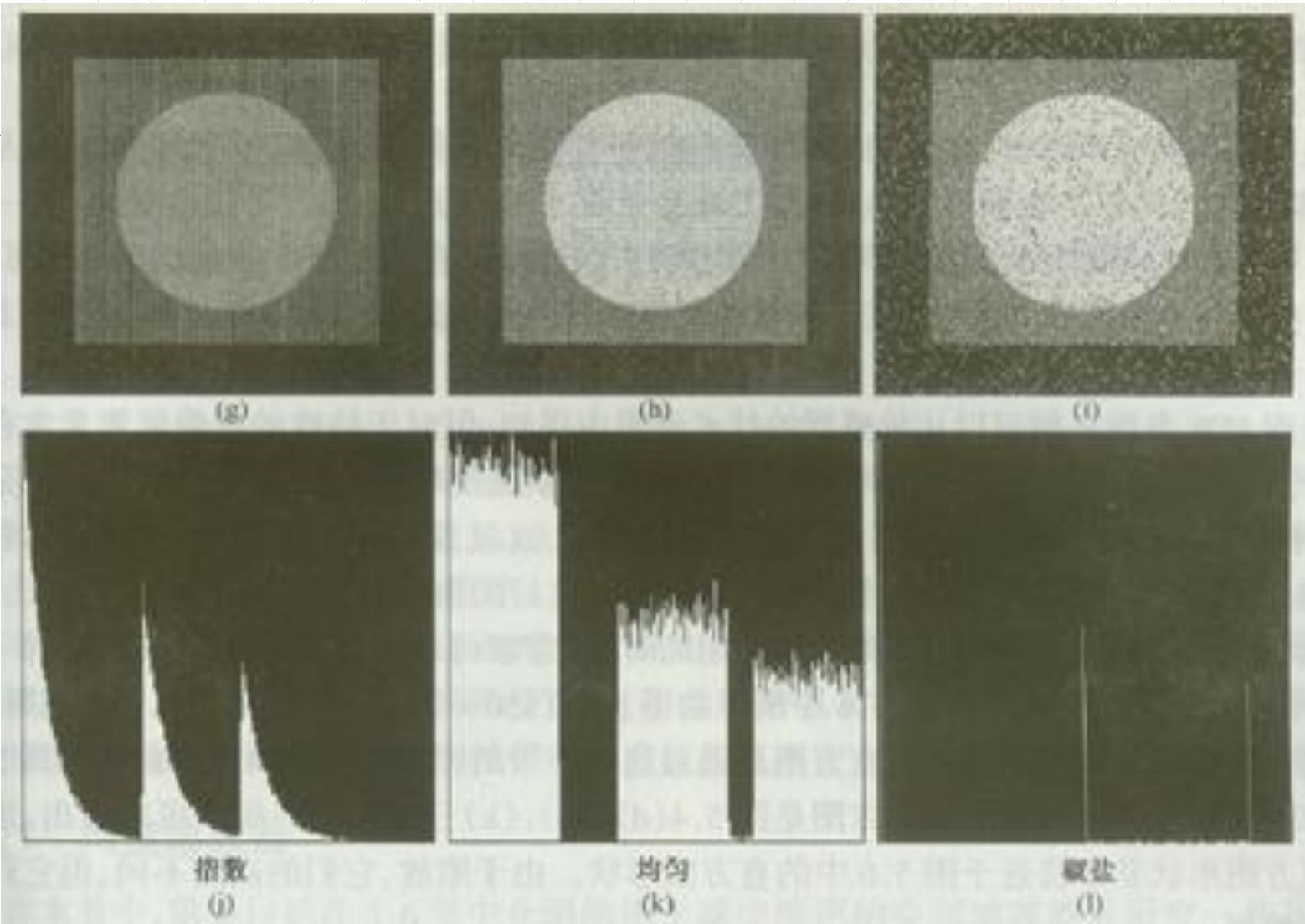


图 5.4(续) 在图 5.3 中附加指数、均匀和椒盐噪声的图像和直方图

3. 周期噪声

周期噪声是空间依赖型的噪声，可以通过频域滤波抑制。

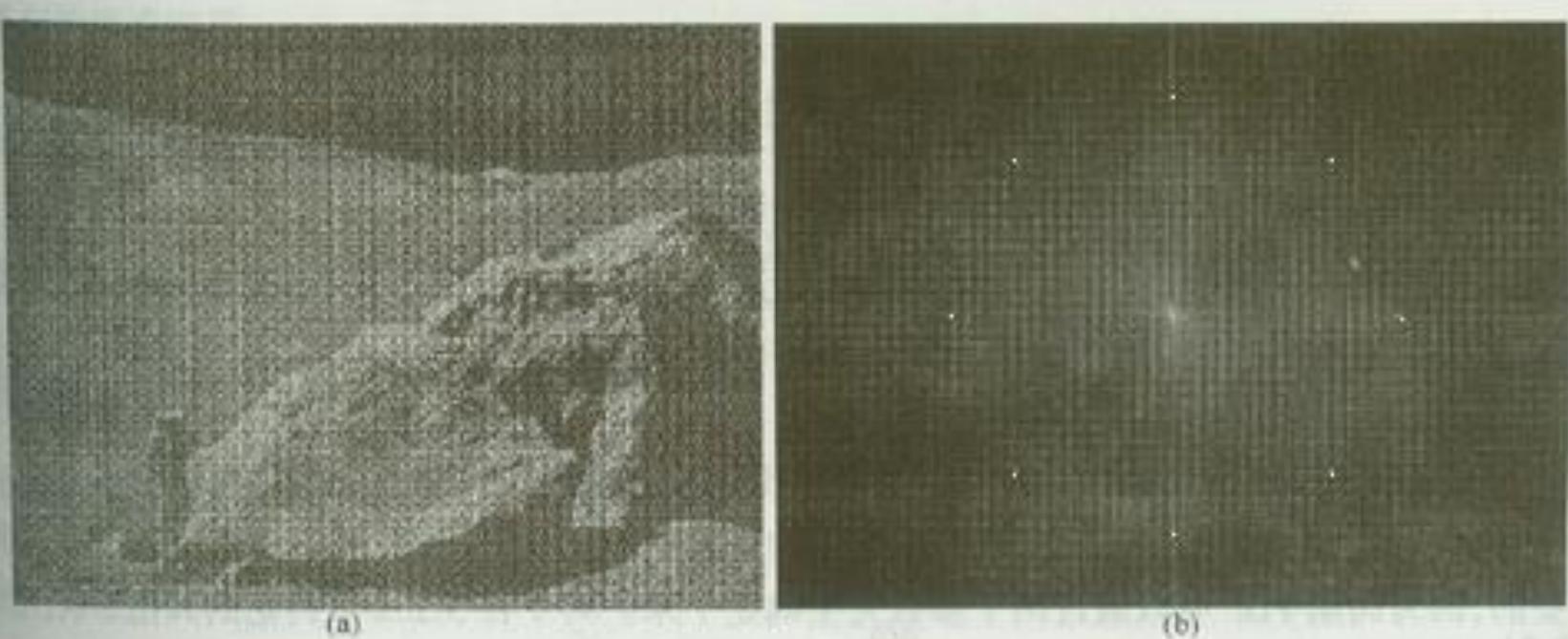


图5.5 (a)由正弦噪声污染的图像,(b)谱(与一个正弦波相对应的每一对共轭脉冲)(原图像由 NASA 提供)

4. 参数估计

几乎每个模型都由a和b两个参数确定，a和b又与直方图的均值与方差有关。因此为了确定噪声模型，我们通常需要估计测试图象的均值与方差。

$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

其中， z_i 值是S中像素的灰度值，且 $p(z_i)$ 表示相应的归一化直方图。

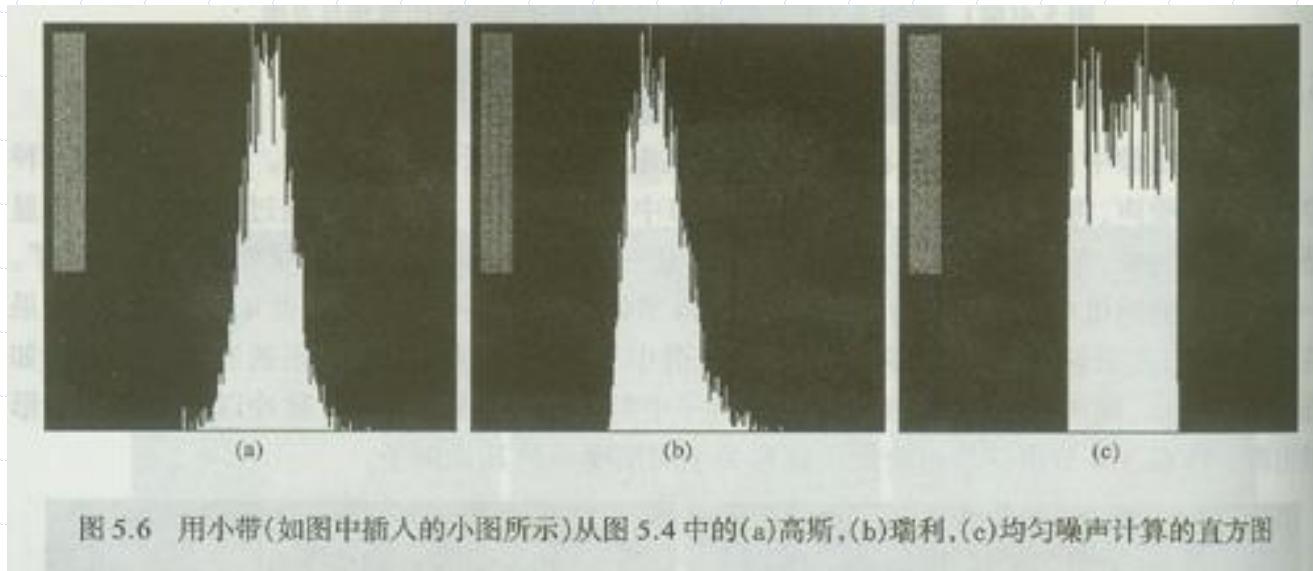


图 5.6 用小带(如图中插入的小图所示)从图 5.4 中的(a)高斯,(b)瑞利,(c)均匀噪声计算的直方图

估计椒盐噪声

要求估值黑、白像素的尖峰高度 P_a 和 P_b 。

要求图象中有相对恒定的中等灰度区域。

三. 噪声存在下的空间滤波复原

➤ 当图像的退化模型如下：

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

或

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

一般的空间滤波方法：

1. 均值滤波器
2. 排序统计滤波器
3. 自适应滤波器

1. 均值滤波器

➤ 假设 S_{xy} 表示中心在 (x, y) 点, 尺度为 $m \times n$ 的矩形子图象窗口的坐标组.

算术均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

几何均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

谐波均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

逆谐波均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

结论：

- 几何均值滤波器与算术均值滤波器相比,更少模糊细节.
- 谐波均值滤波器对”盐”噪声效果好,而不适应”胡椒”噪声.
- 逆谐波均值滤波器当 Q 为正时,用于消除”胡椒”噪声,
当 Q 为负时,用于消除”盐”噪声.
- 当 $Q=0$ 时,退化为算术均值滤波器;
当 $Q=-1$ 时,退化为谐波均值滤波器.

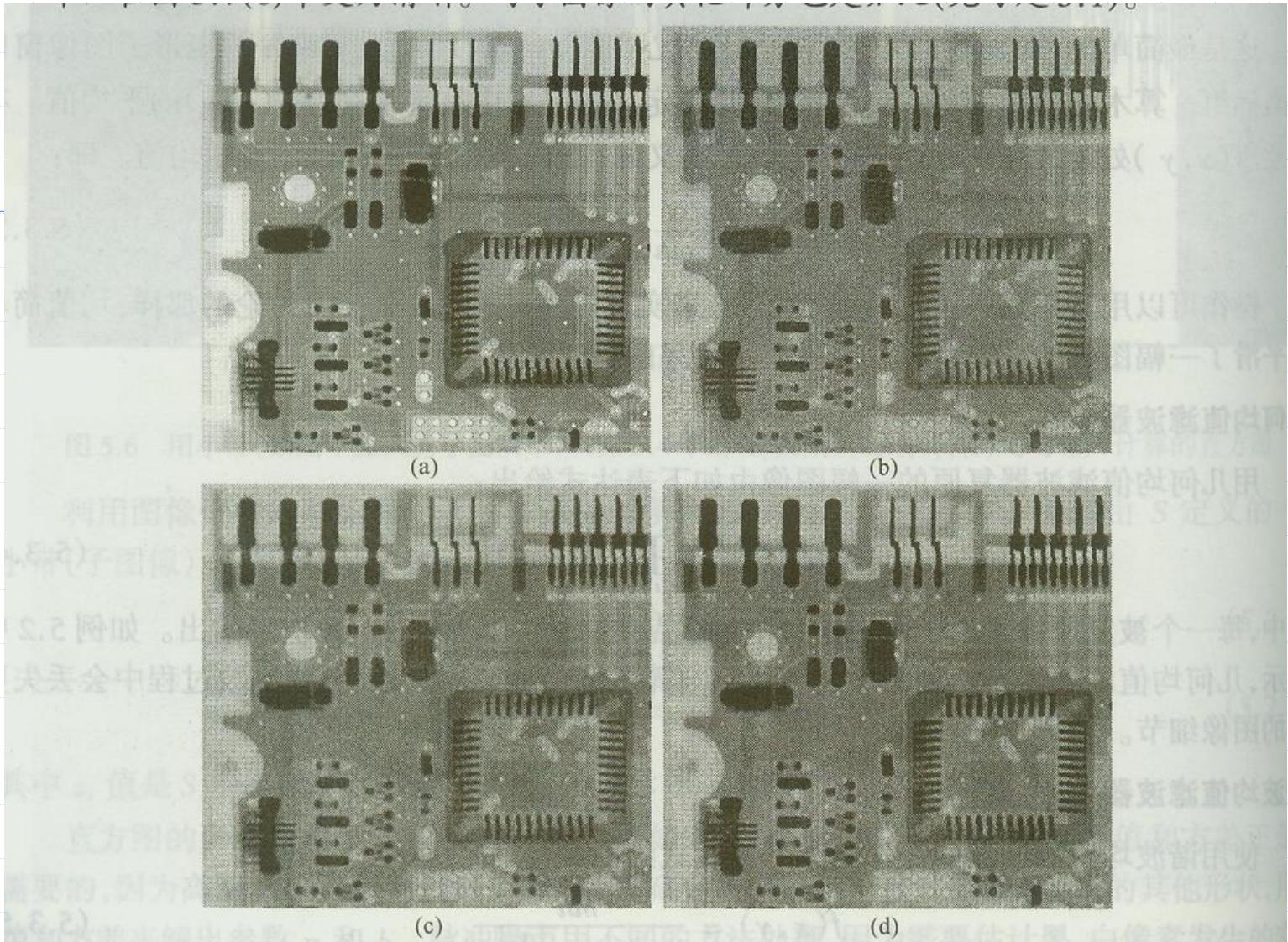


图 5.7 (a)X 射线图像,(b)由附加高斯噪声污染的图像,(c)用 3×3 算术均值滤波器滤波的结果,(d)用相同尺寸的几何均值滤波器滤波的结果(原图像由 Lixi 公司的 Joseph E. Pascente 先生提供)

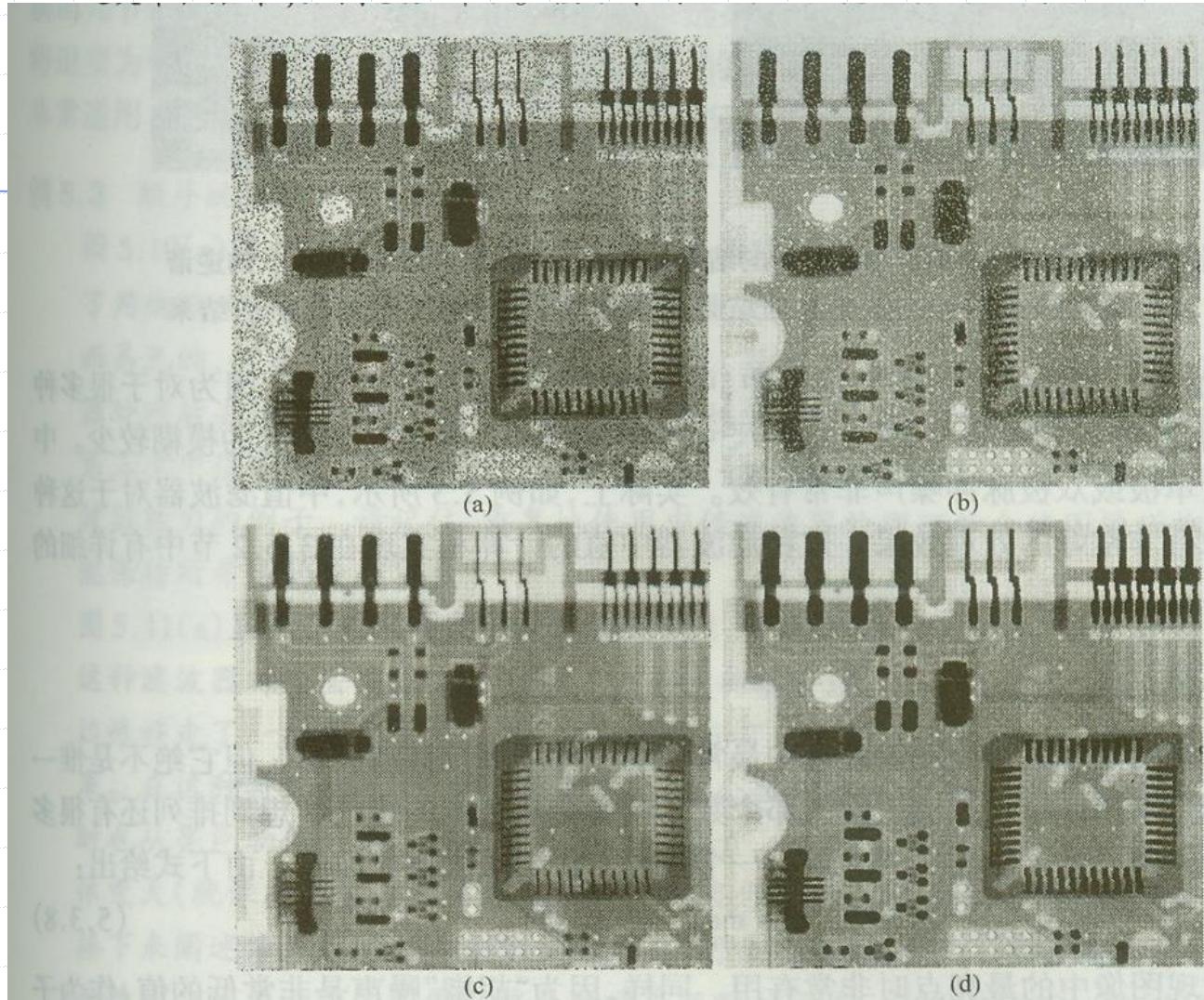


图 5.8 (a)以 0.1 的概率被“胡椒”噪声污染了的图像,(b)以相同概率被“盐”噪声污染的图像,
(c)用 3×3 大小、阶数为 1.5 的逆谐波滤波器滤波的结果,(d)用 $Q = -1.5$ 滤波(b)的结果

2. 顺序统计滤波器

最大滤波器: $\hat{f}(x, y) = \max_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$

最小滤波器: $\hat{f}(x, y) = \min_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$

中点滤波器: $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} [\max_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}]$

修正后的阿尔法均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s, y) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

修正后的阿尔法均值滤波器对多种噪声的图像去噪有效.
其中去掉d/2个最大值和d/2个最小值.

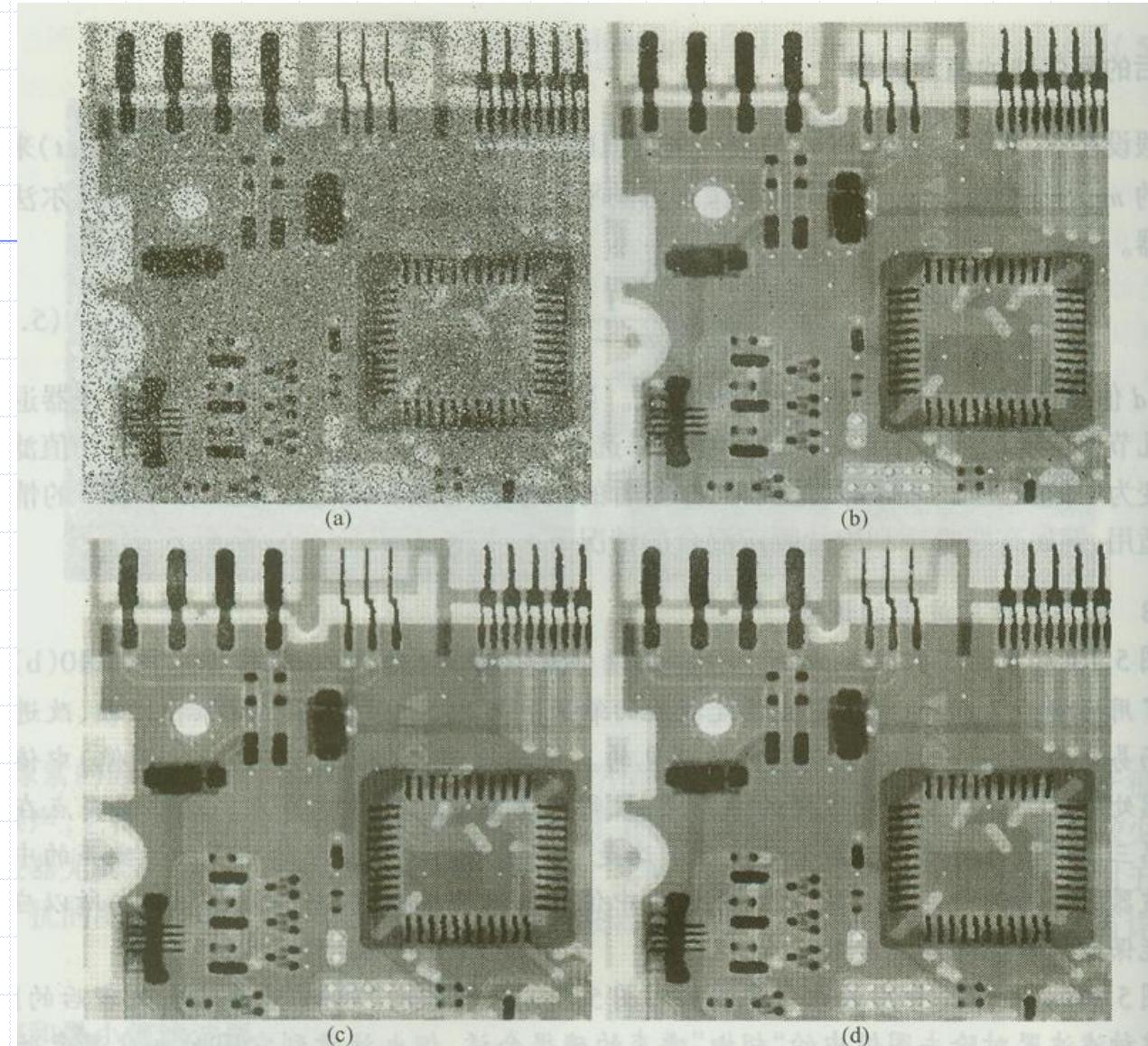


图 5.10 (a)由概率为 $P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声污染的图像,(b)用尺寸为 3×3 的中值滤波器处理的结果,(c)用该滤波器处理(b)的结果,(d)用相同的滤波器处理(c)的结果

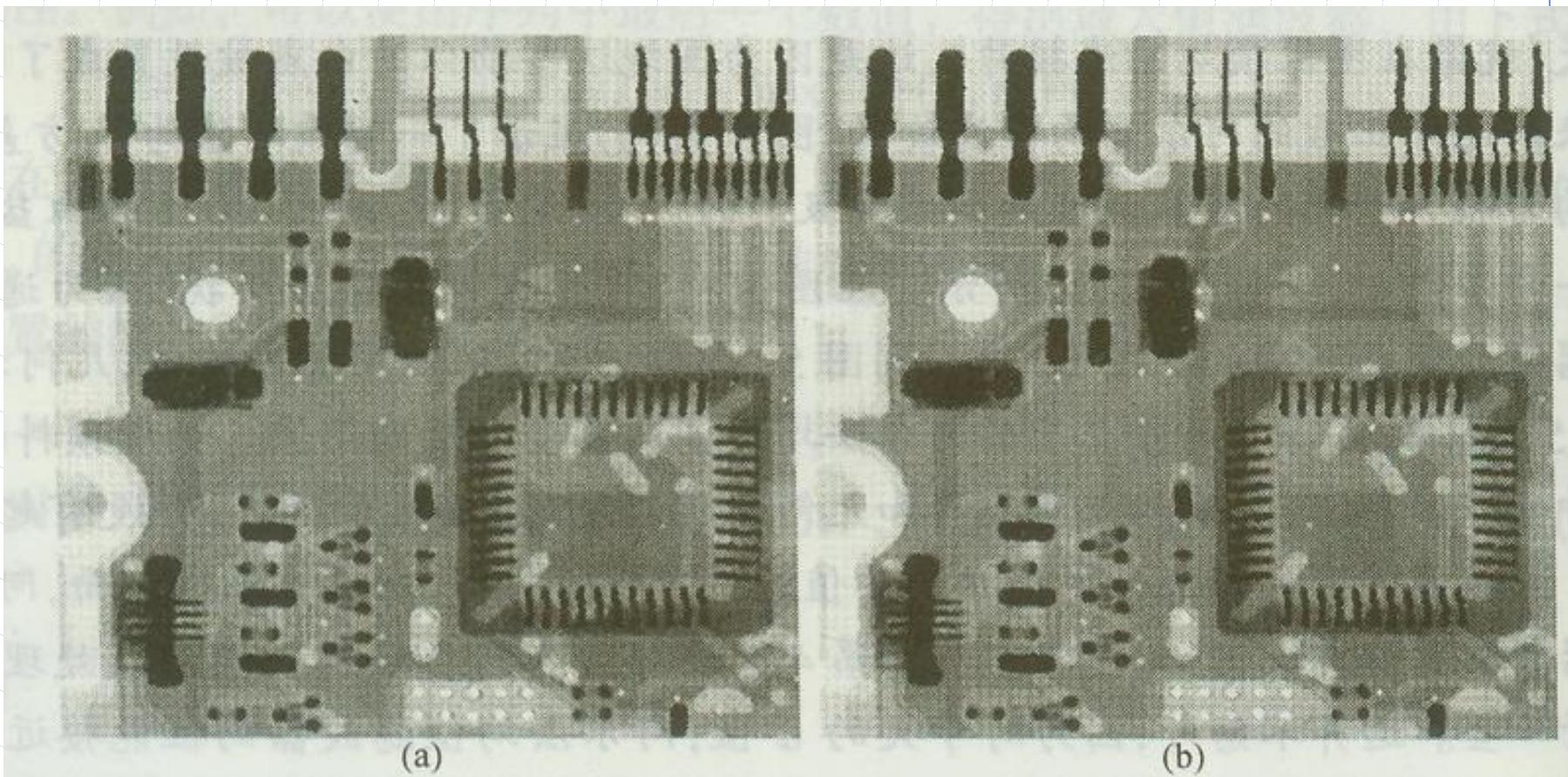


图 5.11 (a)用大小为 3×3 的最大值滤波器对图 5.8(a)滤波
的结果,(b)用最小值滤波器对图 5.8(b)滤波的结果

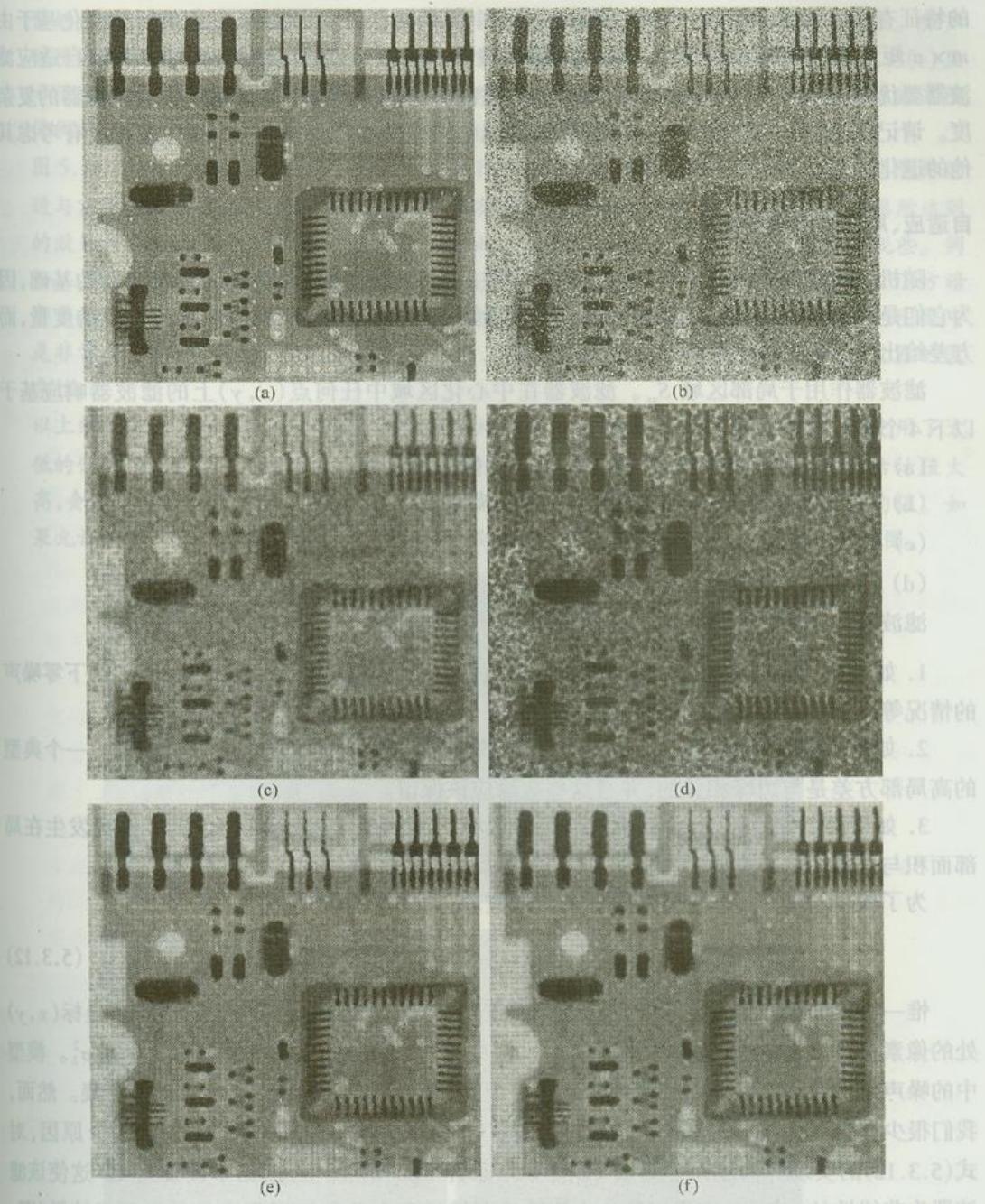


图 5.12 (a)由加性均匀噪声污染的图像,(b)由加性椒盐噪声污染的图像。图(b)中的图像用如下的 5×5 滤波器滤波:(c)算术均值滤波器,(d)几何均值滤波器,(e)中值滤波器,(f) $d=5$ 的修正后的阿尔法均值滤波器

3. 自适应滤波器

➤ 自适应去噪滤波器：

滤波器作用于局部区域 S_{xy} 。滤波器在中心化区域中任何点 (x, y) 上的滤波器响应基于以下 4 个量：

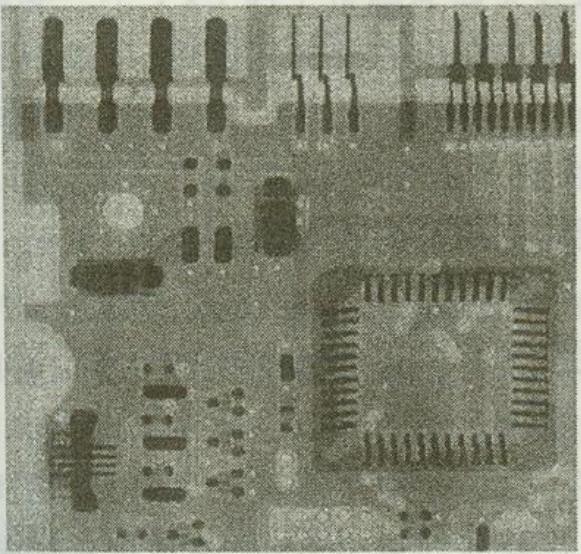
- (a) $g(x, y)$ 表示噪声图像在点 (x, y) 上的值；
- (b) σ_η^2 , 干扰 $f(x, y)$ 以形成 $g(x, y)$ 的噪声方差；
- (c) m_L , 在 S_{xy} 上像素点的局部均值；
- (d) σ_L^2 , 在 S_{xy} 上像素点的局部方差。

滤波器的预期性能如下：

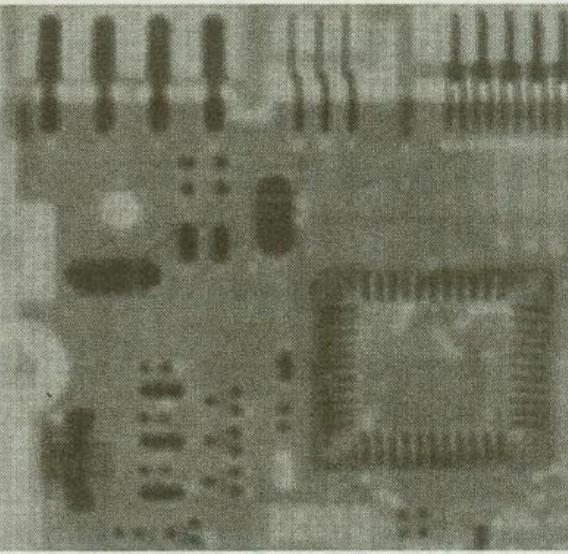
1. 如果 σ_η^2 为零, 滤波器应该简单地返回 $g(x, y)$ 的值。这无关紧要, 在 $g(x, y)$ 下零噪声的情况等同于 $f(x, y)$ 。
2. 如果局部方差与 σ_η^2 是高相关的, 那么滤波器要返回一个 $g(x, y)$ 的近似值。一个典型的高局部方差是与边缘相关的, 并且这些边缘应该保留。
3. 如果两个方差相等, 希望滤波器返回区域 S_{xy} 上像素的算术均值。这种情况发生在局部面积与全部图像有相同特性的条件下, 并且局部噪声简单地用求平均来降低。

为了获得 $\hat{f}(x, y)$, 基于这些假定的自适应表达式可以写成:

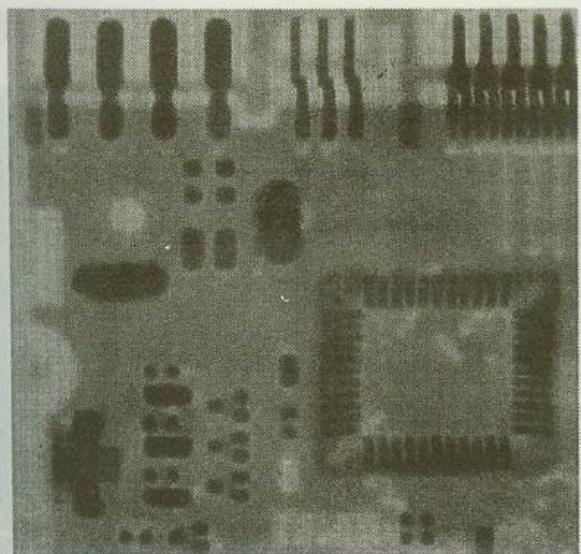
$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L] \quad (5.3.12)$$



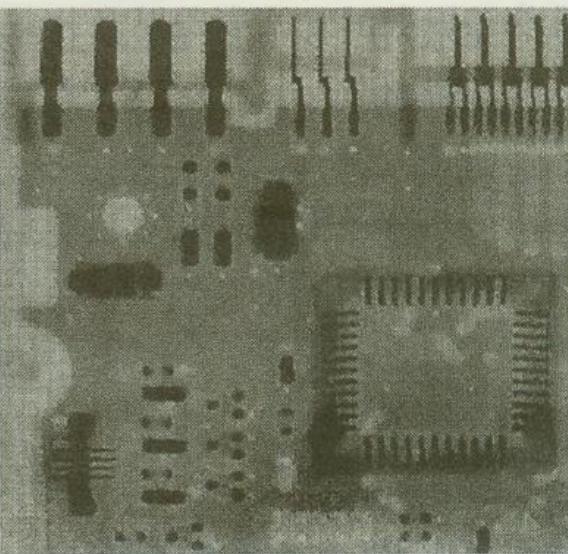
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5.13 (a)由零均值和方差为 1 000 的加性高斯噪声污染的图像,(b)算术均值滤波的效果,(c)几何均值滤波效果,(d)自适应噪声削减滤波的效果。所有滤波器的大小为 7×7

自适应中值滤波器

自适应中值滤波器的处理有三个目的：除去“椒盐”噪声，平滑其他非椒盐噪声，并减少诸如物体边界细化或粗化的失真。

优点：

自适应中值滤波器对噪声密度大时更有效，并且平滑非冲激噪声时可以保存细节。

➤ 自适应中值滤波器:

考虑如下符号:

$z_{\min} = S_{xy}$ 中灰度级的最小值

$z_{\max} = S_{xy}$ 中灰度级的最大值

$z_{\text{med}} = S_{xy}$ 中灰度级的中值

z_{xy} = 在坐标 (x, y) 上的灰度级

$S_{\max} = S_{xy}$ 允许的最大尺寸

自适应中值滤波器算法工作在两个层次, 定义为 A 层和 B 层, 如下所示:

A 层: $A1 = z_{\text{med}} - z_{\min}$

$$A2 = z_{\text{med}} - z_{\max}$$

如果 $A1 > 0$ 且 $A2 < 0$, 转到 B 层

否则增大窗口尺寸

如果窗口尺寸 $\leq S_{\max}$ 重复 A 层

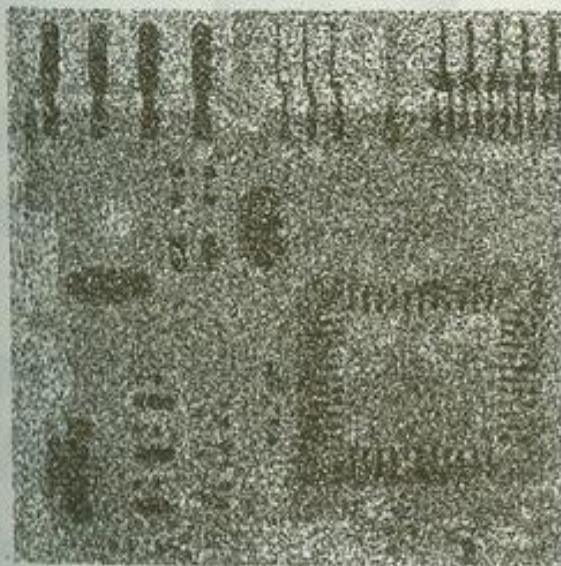
否则输出 z_{xy}

B 层: $B1 = z_{xy} - z_{\min}$

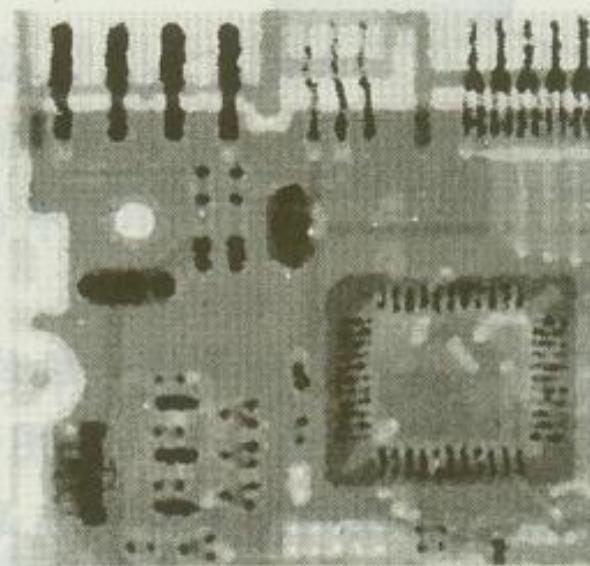
$$B2 = z_{xy} - z_{\max}$$

如果 $B1 > 0$ 且 $B2 < 0$, 输出 z_{xy}

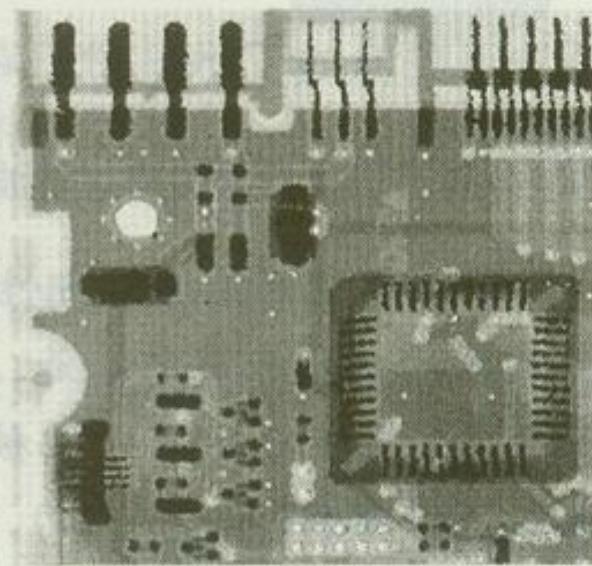
否则输出 z_{med}



(a)



(b)



(c)

图 5.14 (a) 被概率 $P_a = P_b = 0.25$ 的椒盐噪声污染了的图像,(b) 7×7 中值滤波器的滤波效果,(c) $S_{\max} = 7$ 的自适应中值滤波器的效果

四. 通过频域滤波抑制噪声

1 二维带阻滤波器:

➤ 理想带阻滤波器:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0, & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

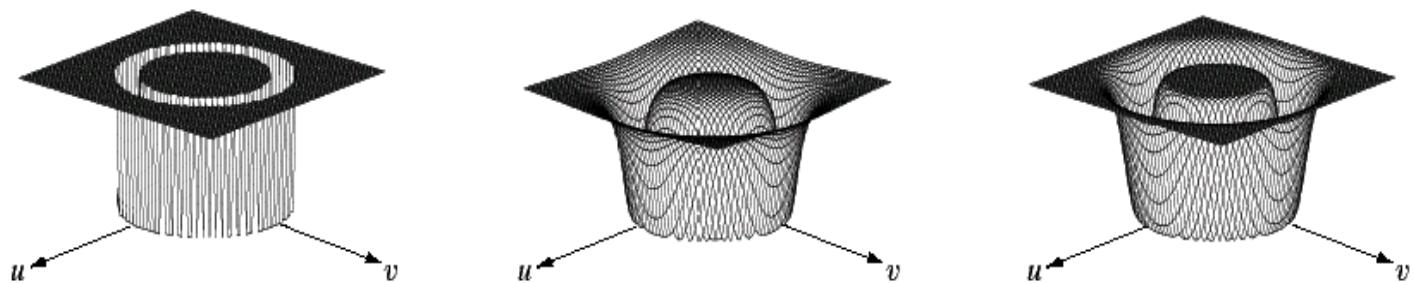
$D_0 > 0$ 为频谱中心半径, W是频带的宽度.

➤ 二维n阶巴特沃斯带阻滤波器:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

➤ 二维高斯带阻滤波器:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^2}$$

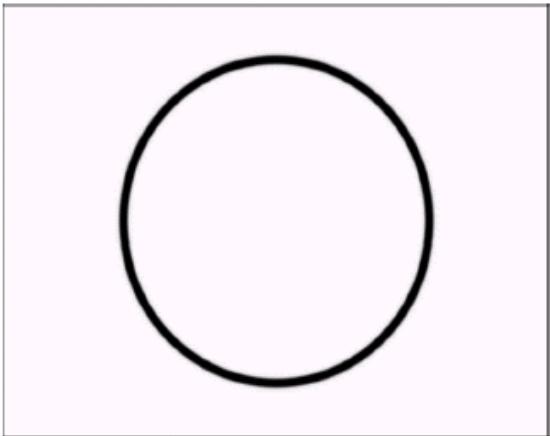
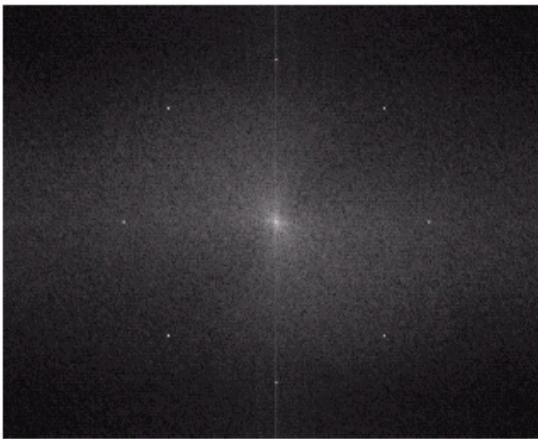
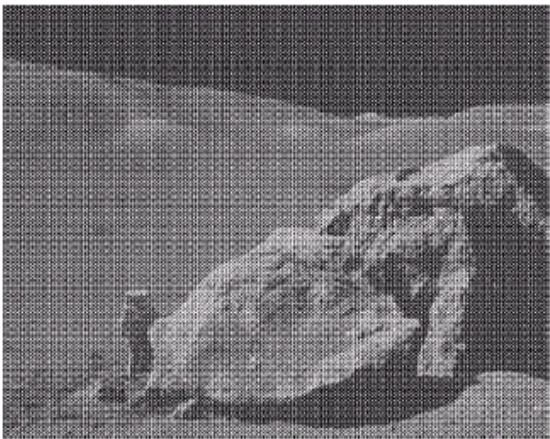


a b c

FIGURE 5.15 From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters.



利用带阻滤波器消除周期性噪声



a	b
c	d

FIGURE 5.16

(a) Image corrupted by sinusoidal noise.
(b) Spectrum of (a).
(c) Butterworth bandreject filter (white represents 1). (d) Result of filtering. (Original image courtesy of NASA.)

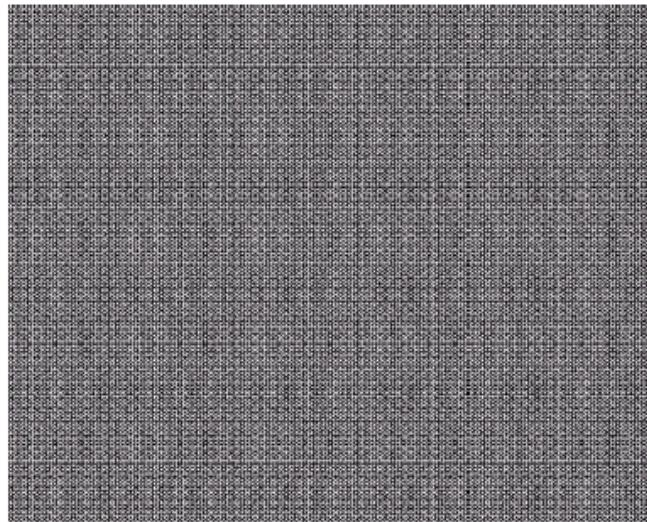
2 二维带通滤波器:

- 带通滤波器的传递函数 $H_{bp}(u, v)$ 可根据相应的带阻滤波器传递函数 $H_{br}(u, v)$ 定义.

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$

- 利用带通滤波器提取噪声模式:

FIGURE 5.17
Noise pattern of
the image in
Fig. 5.16(a)
obtained by
bandpass filtering.



3 陷波滤波器：

- 陷波滤波器阻止(或通过)事先定义的中心频率邻域内的频率。
- 陷波滤波器分陷波带阻滤波器和陷波带通滤波器两大类。
- 陷波带阻滤波器又分为理想\巴特沃斯\高斯陷波带阻滤波器等。
- 陷波带通滤波器又分为理想\巴特沃斯\高斯陷波带通滤波器等。

陷波带阻滤波器:

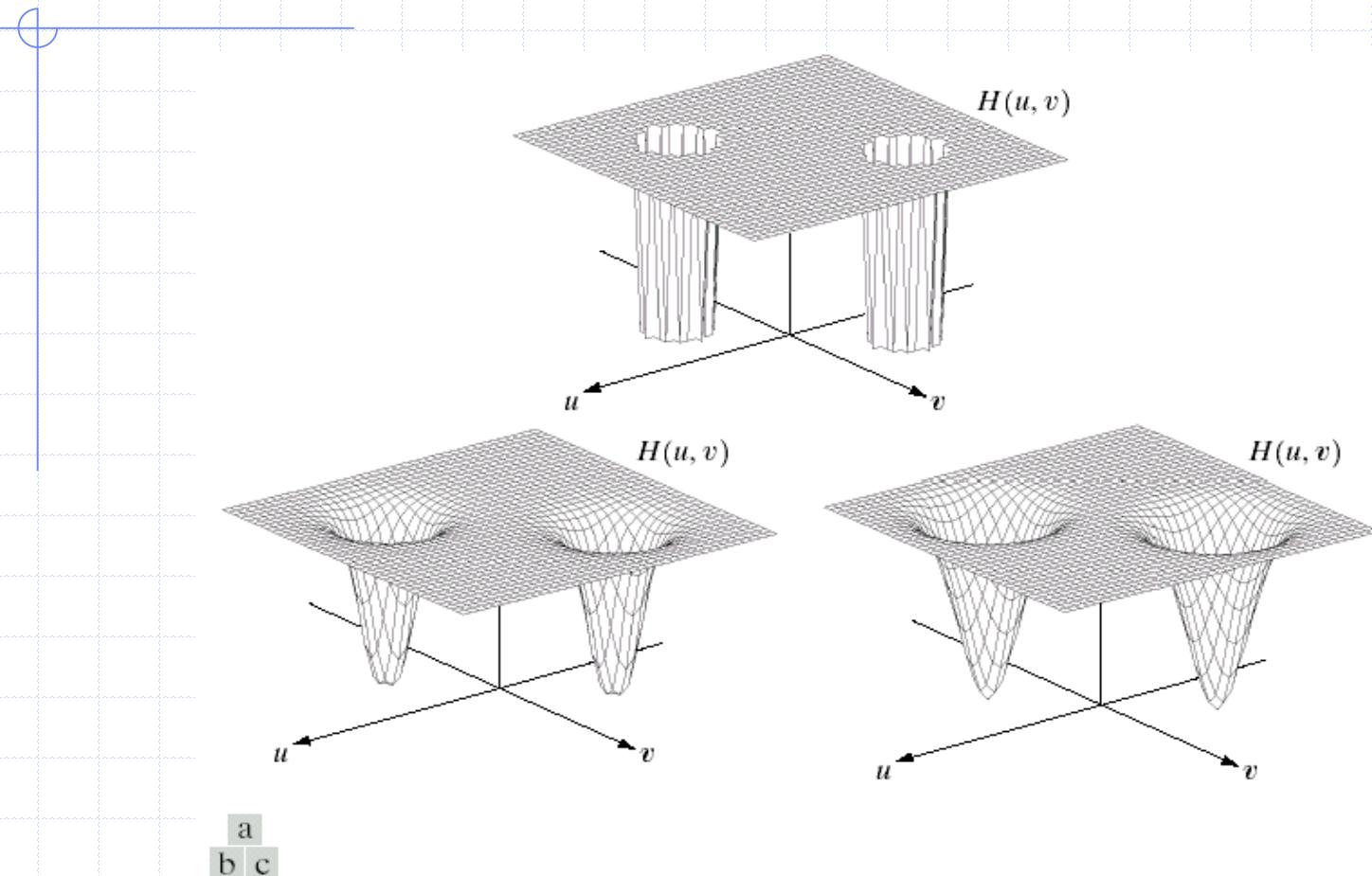


FIGURE 5.18 Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的理想陷波带阻滤波器传递函数为：

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$$

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的 n 阶巴特沃斯陷波带阻滤波器传递函数为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$

$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的高斯陷波带阻滤波器传递函数为：

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$$

当 $u_0 = v_0 = 0$ 时, 上述三个滤波器变为高通滤波器。

➤ 陷波带通滤波器的传递函数 $H_{np}(u, v)$ 可根据相应的陷波带阻滤波器传递函数 $H_{nr}(u, v)$ 定义.

$$H_{np}(u, v) = 1 - H_{nr}(u, v)$$

当 $u_0 = v_0 = 0$ 时, 陷波带通滤波器变为低通滤波器.

➤ 利用陷波滤波器消除周期性噪声

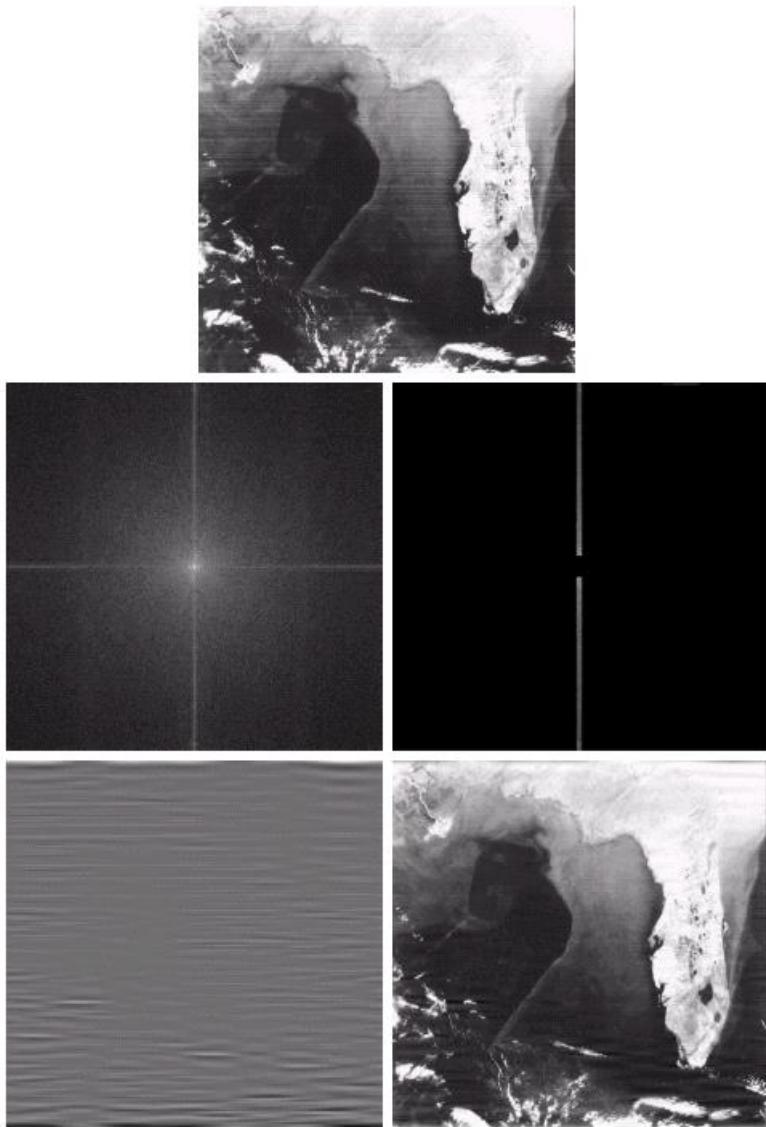


FIGURE 5.19 (a) Satellite image of Florida and the Gulf of Mexico (note horizontal sensor scan lines). (b) Spectrum of (a). (c) Notch pass filter shown superimposed on (b). (d) Inverse Fourier transform of filtered image, showing noise pattern in the spatial domain. (e) Result of notch reject filtering. (Original image courtesy of NOAA.)

4 最佳陷波滤波器

➤ 当 $G(u, v)$ 存在几种干扰时, 可以采用下面的方法:

1. 提取干扰模式的主频率成分.

对每个尖峰点, 设计一个陷波带通滤波器 $H(u, v)$

因此, $N(u, v) = H(u, v)G(u, v)$ 或

$$\eta(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)G(u, v)\}$$

2. 去除噪声:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y) \quad (5.4.13)$$

其中, $w(x, y)$ 为调制函数.

一种 $w(x, y)$ 的估计方法：

选取 $w(x, y)$ 使估计值 $\hat{f}(x, y)$ 在每一点 (x, y) 指定的邻域上方差最小.

考虑 (x, y) 的尺寸为 $(2a+1) \times (2b+1)$ 的邻域,
 $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差为:

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b [\hat{f}(x+s, y+t) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2 \quad (5.4.14)$$

其中 $\bar{\hat{f}}(x, y)$ 是 $\hat{f}(x, y)$ 在其邻域内的平均值,即:

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x+s, y+t) \quad (5.4.15)$$

将公式(5.4.13)代入公式(5.4.14)中,得

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x+s, y+t)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - \bar{w}(x, y)\eta(x, y)] \}^2 \quad (5.4.16)$$

假设 $w(x, y)$ 在整个邻域内保持不变，则当 $-a \leq s \leq a$ 和 $-b \leq t \leq b$ 时，给出近似式：

$$w(x+s, y+t) = w(x, y)$$

⊕ 这一假设也可以在邻域内得出如下表达式：

$$\overline{w(x, y)\eta(x, y)} = w(x, y)\bar{\eta}(x, y)$$

由近似值，(5.4.16)变成：

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) &= \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x, y)\eta(x, y)] \\ &\quad - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\bar{\eta}(x, y)] \}^2 \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

将 $\sigma^2(x, y)$ 最小化，解： $\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0$

对于 $w(x, y)$ ，解为：

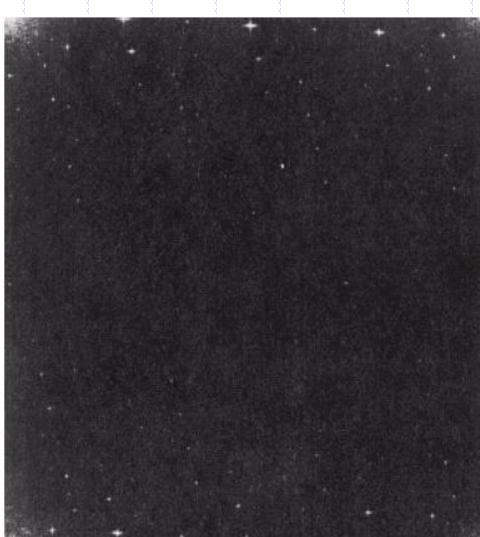
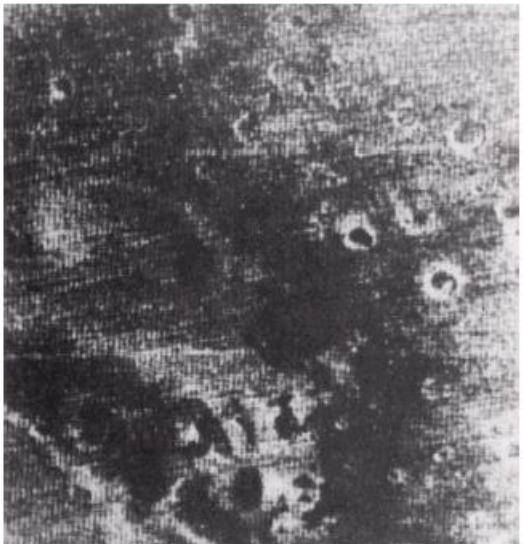
$$w(x, y) = \frac{g(x, y)\eta(x, y) - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}^2(x, y)} \quad (5.4.21)$$

作业：由(5.4.19)推导出(5.4.21)。

a b

FIGURE 5.20

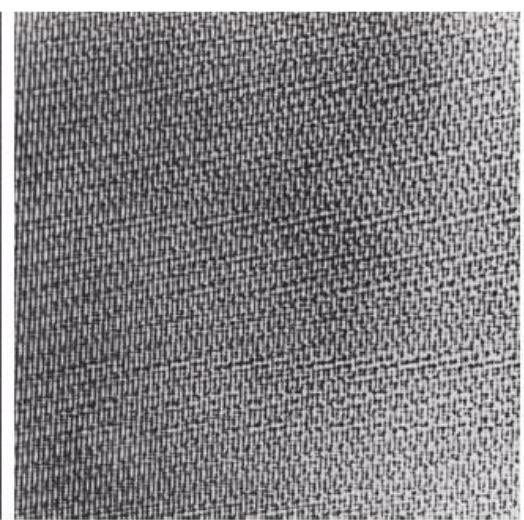
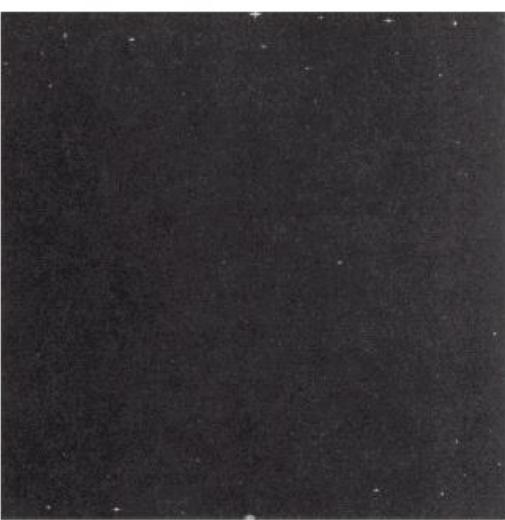
(a) Image of the Martian terrain taken by *Mariner 6*.
(b) Fourier spectrum showing periodic interference.
(Courtesy of NASA.)



a b

FIGURE 5.21 Fourier spectrum (without shifting) of the image shown in Fig. 5.20(a).
(Courtesy of NASA.)

FIGURE 5.22 (a) Fourier spectrum of $N(u, v)$, and (b) corresponding noise interference pattern $\eta(x, y)$. (Courtesy of NASA.)



五 线性、移不变的退化

假设系统的退化模型为：

$$g(x, y) = H(f(x, y)) + \eta(x, y)$$

如果H是线性移不变的，则存在 $h(x, y)$ 使

$$H(f(x, y)) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

由于 $H(\delta(x, y)) = \delta(x, y) * h(x, y) = h(x, y)$

因此， $h(x, y)$ 称为系统H的冲激响应.

- 也就是说 $h(x, y)$ 是系统H对坐标 (x, y) 处强度为1的冲激的响应.
- 在光学中，冲激为一个光点，所以 $h(x, y)$ 也称为点扩散函数(PSF).
- 所有光学系统都一定程度模糊光点.

因此对于线性移不变系统的退化模型为：

- 空间域: $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$
- 频域: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$
- 对这类模型复原的本质是去卷积的过程. 该滤波器也称为去卷积滤波器.

六 估计退化函数

有三种估计退化函数的方法：

(1). 观察法; (2). 实验法; (3). 数学建模法;

(1). 观察估计法:

用 $g_s(x, y)$ 定义观察子图像, 用 $\hat{f}_s(x, y)$ 表示构建子图
像

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

由 $H_s(u, v)$ 推断 $H(u, v)$.

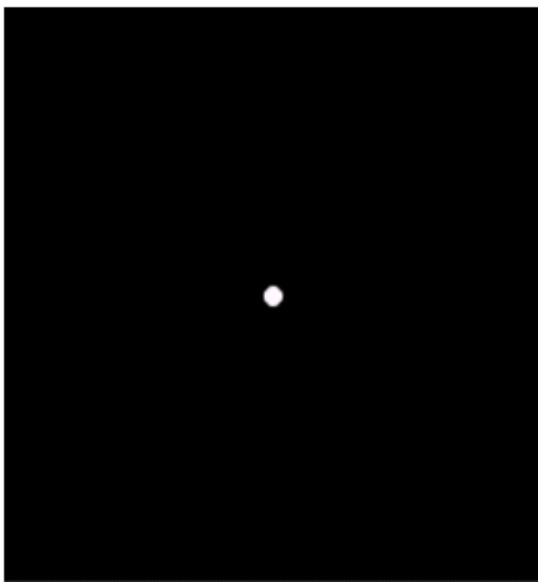
例如, 习题**5.20**

(2). 实验估计法:

获取与退化图像类似的装置, 由成像一个亮点得到退化的冲激响应.

$$A\delta(x, y) \rightarrow g(x, y) \Leftrightarrow A \rightarrow G(u, v)$$

故 $H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$



a b

FIGURE 5.24
Degradation
estimation by
impulse
characterization.
(a) An impulse of
light (shown
magnified).
(b) Imaged
(degraded)
impulse.

(3). 模型估计法:

假设图像 $f(x, y)$ 进行平面运动, $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是在x和y方向上的运动速度. 图像系统曝光时间为T, 则

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

$g(x, y)$ 为模糊图像.

于是

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T [f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \\ &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \end{aligned}$$

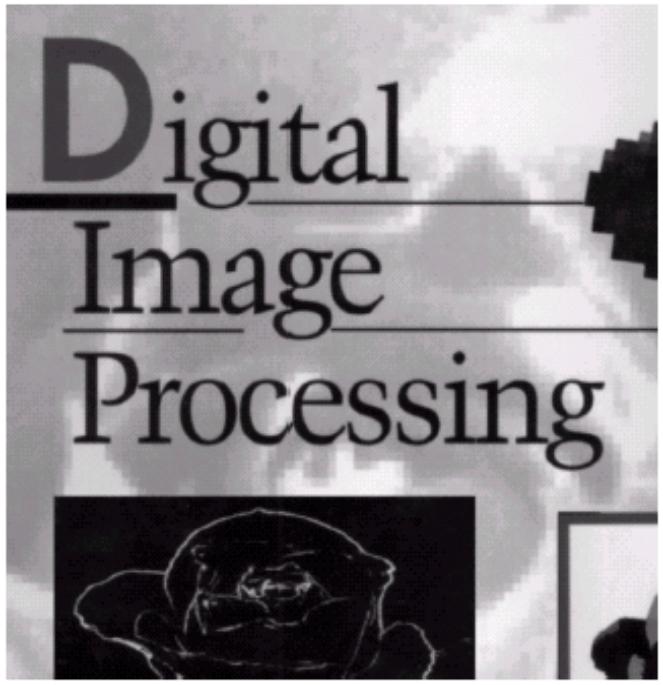
令

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

则 $H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$

如果图像在x和y方向上分别以 $x_0(t) = at/T$ 和 $y_0(t) = bt/T$ 做均匀直线运动，则当 $t=T$ 时

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \\ &= \int_0^T e^{-j2\pi(ua+vb)t/T} dt \\ &= \frac{T}{\pi(ua+vb)} \sin[\pi(ua+vb)] e^{-j\pi(ua+vb)} \end{aligned}$$



a b

FIGURE 5.26 (a) Original image. (b) Result of blurring using the function in Eq. (5.6-11) with $a = b = 0.1$ and $T = 1$.

七 逆滤波

对于线性移不变系统的退化模型为:

➤ 频域: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$

如果知道 $H(u, v)$, 则

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

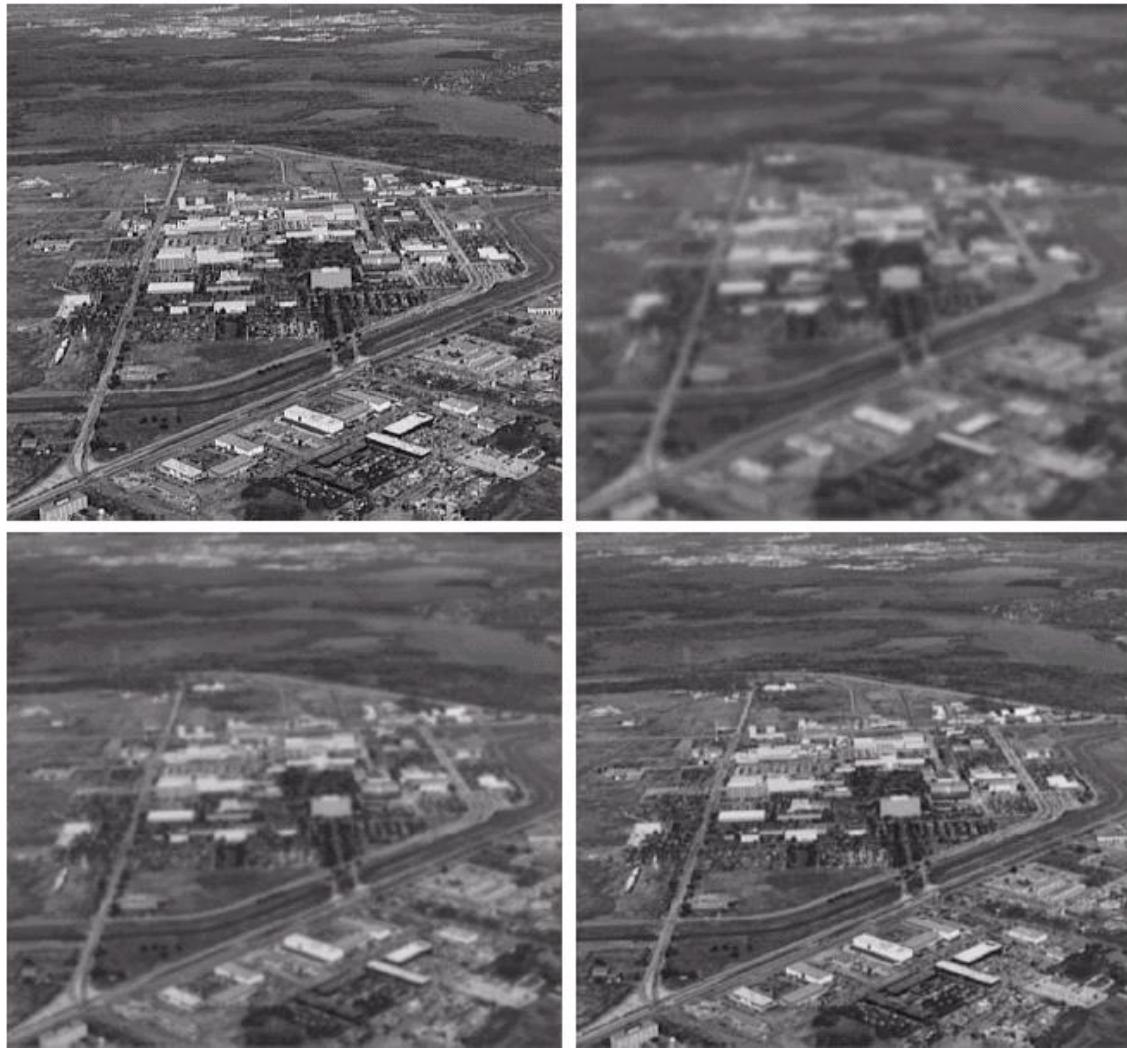
如果 $H(u, v)$ 的值很小, 则 $\frac{N(u, v)}{H(u, v)}$ 的值将很大, 估计就会失败.

➤ 注意, $H(0, 0)$ 的频域值最大.

例如：假设图5.25是滤波器 $H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}}$ 滤波的结果，其中K与大气湍流的性质有关。

a b
c d

FIGURE 5.25
Illustration of the atmospheric turbulence model.
(a) Negligible turbulence.
(b) Severe turbulence, $k = 0.0025$.
(c) Mild turbulence, $k = 0.001$.
(d) Low turbulence, $k = 0.00025$.
(Original image courtesy of NASA.)



如果采用逆滤波的方法去模糊, $\frac{G(u, v)}{H(u, v)}$ 的选择效果

a
b
c
d

FIGURE 5.27
Restoring
Fig. 5.25(b) with
Eq. (5.7-1).
(a) Result of
using the full
filter. (b) Result
with H cut off
outside a radius of
40; (c) outside a
radius of 70; and
(d) outside a
radius of 85.



九 最小均方误差滤波(维纳去卷积)

一般逆滤波(去卷积)的方法没有考虑噪声

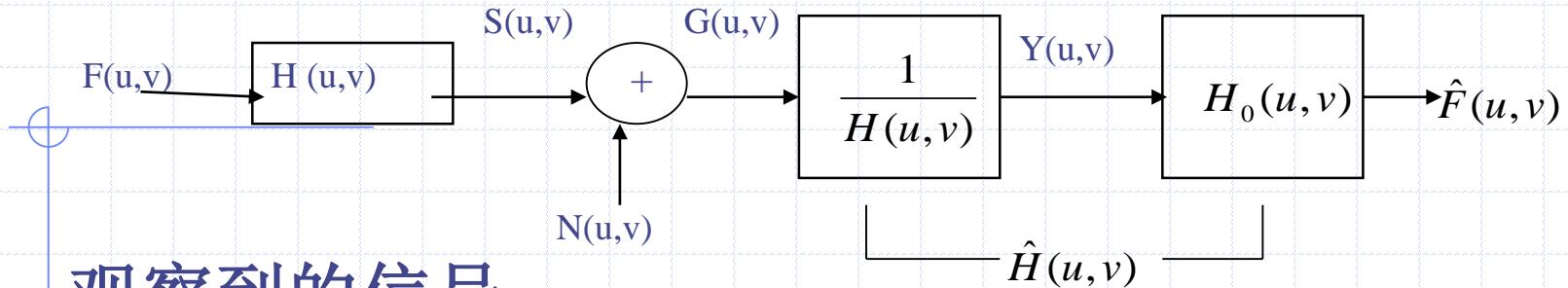
对于频域滤波: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$

如果知道 $H(u, v)$, 则

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

如果 $H(u, v)$ 的值很小, 则 $\frac{N(u, v)}{H(u, v)}$ 的值将很大, 估计就会失败.

考慮如下的去卷積模型：



觀察到的信号：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

首先去卷积，则

$$Y(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)} = F(u,v) + K(u,v)$$

然后对去卷积的结果 $Y(u,v)$ 做维纳滤波：

$$H_0(u,v) = \frac{P_f(u,v)}{P_f(u,v) + P_k(u,v)} = \frac{P_f(u,v)}{P_f(u,v) + \left| \frac{N(u,v)}{H(u,v)} \right|^2}$$

去卷积+维纳滤波：

$$\begin{aligned}\hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v)P_f(u, v)}{P_f(u, v)|H(u, v)|^2 + P_\eta(u, v)} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + P_\eta(u, v)/P_f(u, v)} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + P_\eta(u, v)/P_f(u, v)} \right] G(u, v)\end{aligned}$$

其中， $H(u, v)$ 退化函数， $H^*(u, v) = H(u, v)$ 的复共轭。

$P_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ = 未退化函数功率谱。

$P_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ = 噪声功率谱。

当噪声为白噪声，则

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$



a b c

FIGURE 5.28 Comparison of inverse- and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.

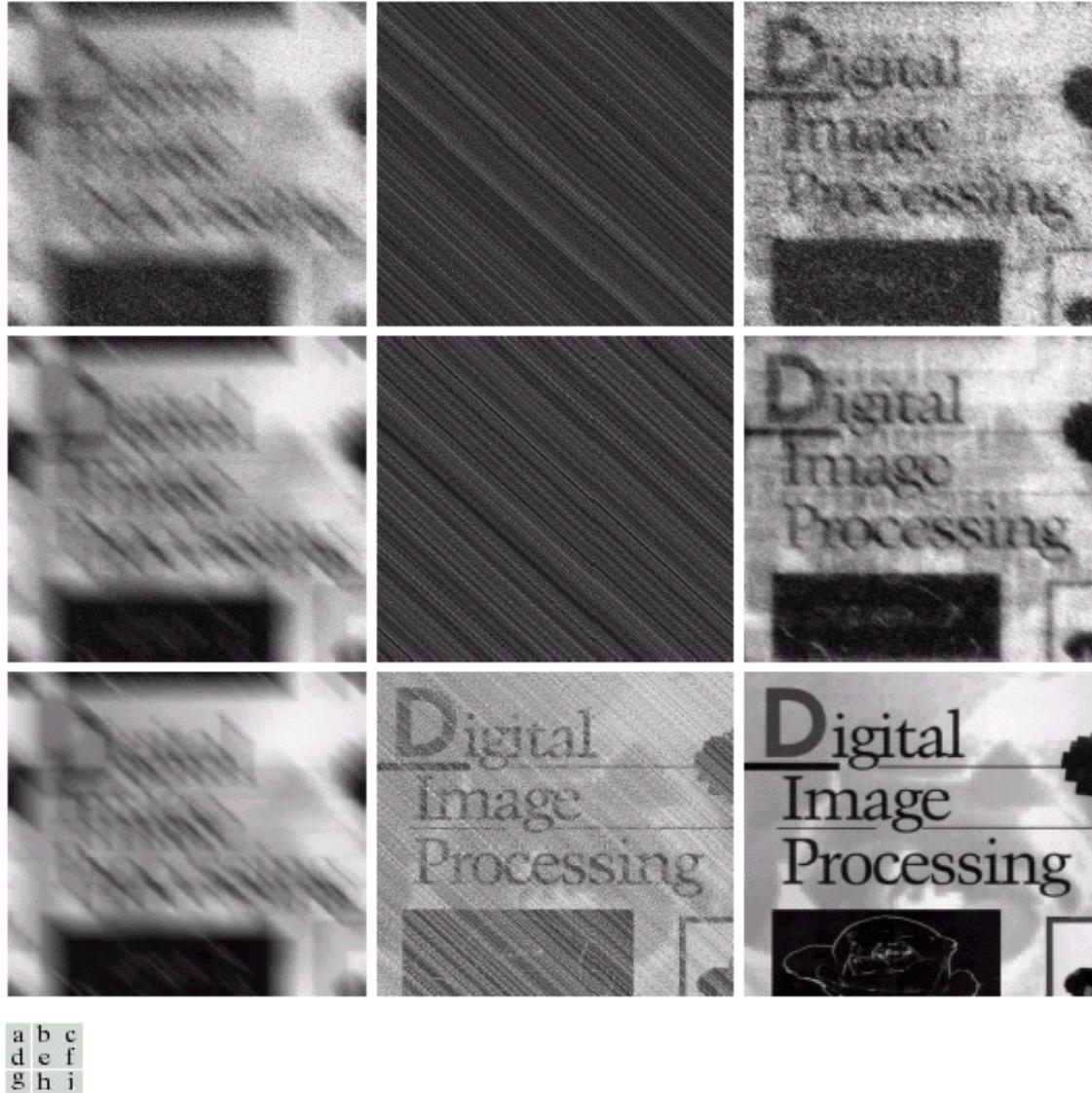


FIGURE 5.29 (a) Image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.

十 约束最小二乘方滤波器

考虑离散退化模型如下：

$$g = Hf + \eta$$

在平滑约束下，等同于找最小的准则函数：

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 \hat{f}(x, y)]^2$$

其约束为： $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$

其中： $\|w\|^2 = w^T w$, \hat{f} 是未退化图像的估计值.

其最优解为： $\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + r|P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$

其中 r 为参数, $r=0$ 时, 上式退化为逆滤波器.

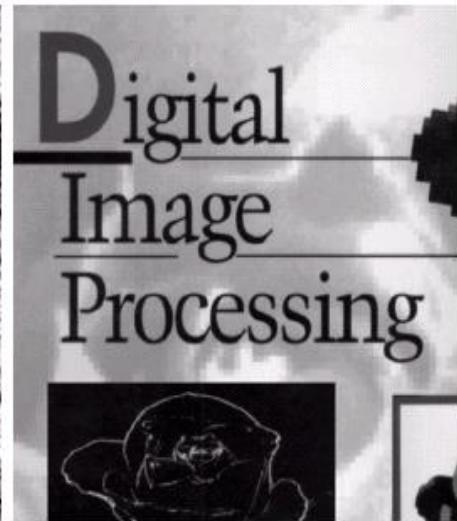
由于拉普拉斯算子是线性算子。

$$\nabla^2 f(x, y) = [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y)$$

因此拉普拉斯算子的变换核为：

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P(u, v)$ 是 $p(x, y)$ 的 Fourier 变换.



a b c

FIGURE 5.30 Results of constrained least squares filtering. Compare (a), (b), and (c) with the Wiener filtering results in Figs. 5.29(c), (f), and (i), respectively.

参数r估计方法:

令 $\|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2$

n是r的单调递增函数.

估计参数r, 使 $\|n\|^2 = \|\eta\|^2 \pm a$ (*)

其中, a为给定的精度因数.

具体算法:

- 1). 给定r值,
- 2). 计算 $\|n\|^2$
- 3). 如果(*)满足, 则停止. 否则如果 $\|n\|^2 < \|\eta\|^2 - a$, 增加r;
如果 $\|n\|^2 > \|\eta\|^2 + a$, 减小r, 并回到步骤2).

参数 $\|\eta\|^2$ 估计方法：

由于 $\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$

其中 $m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y)$

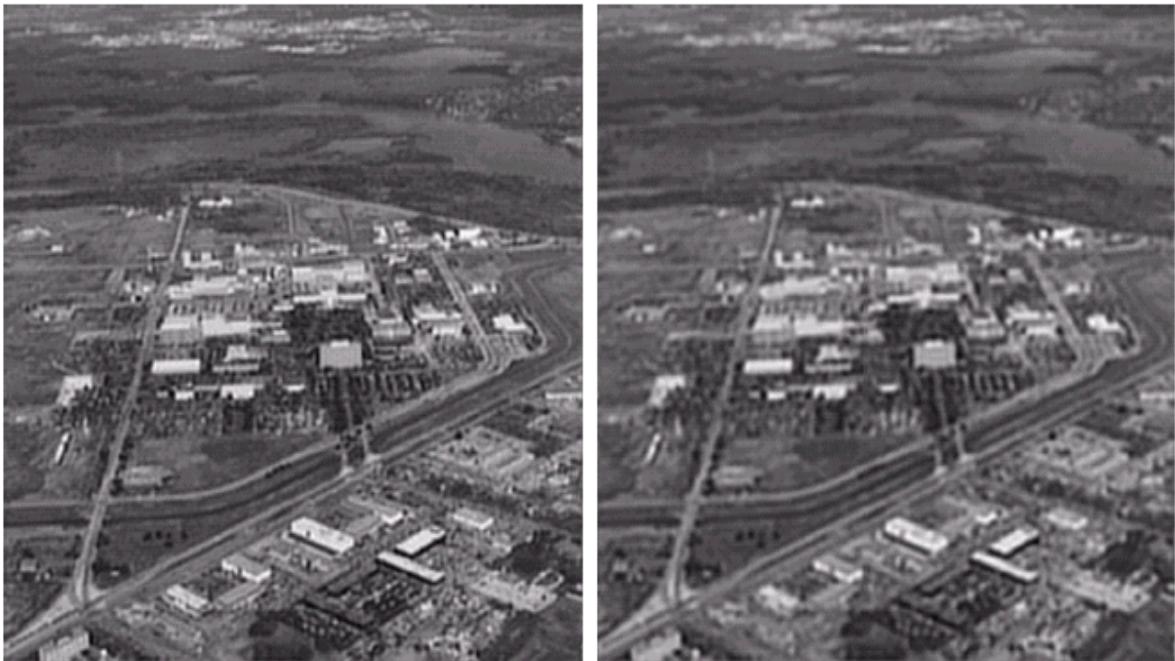
因此
$$\begin{aligned}\sigma_\eta^2 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta^2(x, y) - 2\eta(x, y)m_\eta + m_\eta^2] \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta^2(x, y) - \frac{2m_\eta}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y) + m_\eta^2 \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta^2(x, y) - m_\eta^2\end{aligned}$$

于是

$$\|\eta\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + m_\eta^2]$$

a b

FIGURE 5.31
(a) Iteratively determined constrained least squares restoration of Fig. 5.16(b), using correct noise parameters.
(b) Result obtained with wrong noise parameters.



十一. 几何均值滤波

通用滤波器的形式：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^a \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + b \left[\frac{P_\eta(u, v)}{P_f(u, v)} \right]} \right]^{1-a}$$

其中a和b为实参数.

当**a=1**时, 滤波器退化为逆滤波器.

当**a=0**时, 滤波器退化为参数维纳滤波器.

当**a=0, b=1**时, 滤波器退化为标准维纳滤波器.

当**a=1/2**, 滤波器为几何均值滤波器.

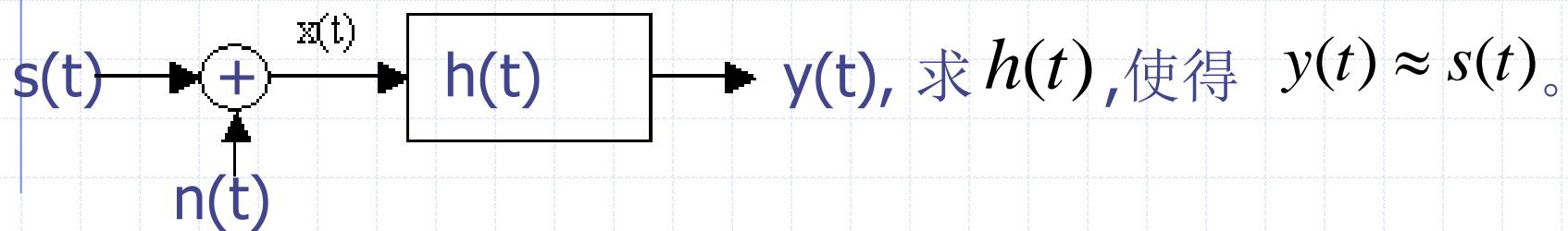
当**b=1, a减到1/2以上**, 它接近逆滤波器.

当**b=1, a减到1/2以下**, 它接近维纳滤波器.

当**b=1, a=1/2**, 它被称为谱均衡滤波器.

八、维纳滤波器(Wiener filter)设计

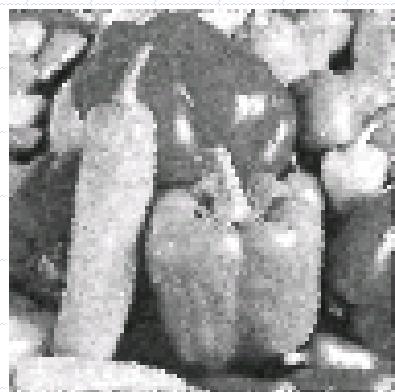
- 首先建立一套性能指标，然后通过选择合适的冲激响应（或传递函数）来最大化这些性能指标。



$s(t)$



$x(t)$



$y(t)$

1、随机变量

- 假定信号受加性噪声的影响 $x(t) = s(t) + n(t)$
- 噪声是随机噪声。随机是缺乏知识的委婉说法。
- 知道噪声的来源、大概如何，但没有函数表达式，不知道细节。

① 随机噪声：

考虑一个无限多个函数成员构成的样本集 $A = \{n_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ，当我们记录信号时，其中的一个成员函数出现了并污染了信号，但是我们无法知道是哪一个成员函数，然而，我们可以对样本集整体作一些总体描述，用这种方法来表示我们对造成污染的噪声信号的“部分”知识。

② 遍历性随机变量

时间均值: $A = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$

样本均值: 给定 $t = t_0$, $\varepsilon\{x(t)\}$ ($= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(t)$)

定义: 一个随机变量是遍历性的, 当且仅当①所有成员函数的时间均值是相等的。②样本集均值不随时间而改变, ③时间均值和样本集均值在数量上是相等的, 即

$$\varepsilon\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

① 最优准则

选择 $h(t)$, 使误差信号均方误差最小:

$$MSE = \mathcal{E}\{e^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt \quad (1)$$

其中, $e(t) = s(t) - y(t)$ 。

② 均方误差

由(1)式,

$$\begin{aligned} MSE &= \mathcal{E}\{e^2(t)\} = \mathcal{E}\{[s(t) - y(t)]^2\} \\ &= \mathcal{E}\{s^2(t) - 2s(t)y(t) + y^2(t)\} \\ &= \mathcal{E}\{s^2(t)\} - 2\mathcal{E}\{s(t)y(t)\} + \mathcal{E}\{y^2(t)\} \\ &= T1 + T2 + T3 \end{aligned}$$

③通过最优化求解，可得：

$$H_0(s) = \frac{P_{xs}(s)}{P_x(s)} \quad (2)$$

④ 维纳滤波器设计

由(2)式，只要知道：

输入一个信号 $s(t)$ ，录得 $x(t)$ ，知道 $P_{xs}(s)$ 和 $P_x(s)$ 的函数形式，则可以计算 $H_0(s)$ ，从而可计算最优线性估值器的冲激响应 $h_0(t)$ ，即：

$$h_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0(s) e^{j2\pi st} ds$$

⑤ 如果信号与噪声不相关

即 $\mathcal{E}\{s(t)n(t)\} = \mathcal{E}\{s(t)\}\mathcal{E}\{n(t)\}$ (3)

(2) 式的分子变换为:

$$\begin{aligned} R_{xs}(\tau) &= \mathcal{E}\{(x(t)s(t+\tau)\}) = \mathcal{E}\{[s(t)+n(t)]s(t+\tau)\} \\ &= \mathcal{E}\{s(t)s(t+\tau)\} + \mathcal{E}\{n(t)s(t+\tau)\} \\ &= R_s(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} n(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)dt \end{aligned} \quad (4)$$

于是, $R_{xs}(\tau) = R_s(\tau) + N(0)S(0)$ (5)

其中, $N(0) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)e^{-j2\pi 0t} dt, \quad S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi 0t} dt$

公式 (2) 分母作类似变换:

$$R_x(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau) + 2S(0)N(0) \quad (6)$$

于是公式 (2) 变为:

$$H_0(s) = \frac{P_s(s) + N(0)S(0)\delta(s)}{P_s(s) + P_n(s) + 2N(0)S(0)\delta(s)} \quad (7)$$

或者,

$$H_0(s) = \begin{cases} \frac{P_s(s)}{P_s(s) + P_n(s)}, & s \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & s = 0 \end{cases} \quad (8)$$

因为, $\delta(s) = 0, s \neq 0$; $\delta(0)$ 无限大。 $N(0) \neq 0, S(0) \neq 0$