文章编号：1004－132X(2000)06－0704－03

利用窗函数解决连续体结构拓扑优化中的棋盘格式问题

刘震宇　王晓明　郭东明

摘要：介绍了连续体结构拓扑优化中的棋盘格式问题，以及目前解决这一问题常用的几种方法。在此基础上提出了采用高斯窗函数解决棋盘格式问题的新方法，并从理论上证明了这一方法的可行性，数值计算结果较理想。

关键词：拓扑优化；棋盘格式；高斯窗函数；软化核

中图分类号：TH112.5；O242.1　　文献标识码：A

刘震宇　博士研究生

随着科技水平的日益发展，人们对工程中所使用的各种零部件提出了更高的使用要求。如何在满足约束条件的基础上，更好地对结构进行优化设计，一直是工程界不断努力追求的目标。同时，结构优化的设计方法也已从较为简单的尺寸、形状优化发展到较为先进的拓扑优化。单纯依靠工程设计人员的经验和模拟实验的传统优化设计方式已难以胜任诸如飞机、汽车中的复杂部件及大型工程设计问题，因此如何完善拓扑优化方法使之胜任于工程实际应用，已成为近年来结构拓扑优化设计研究的重点。

1　棋盘格式

结合各种较为成熟的有限元软件，拓扑优化方法可同时对结构的拓扑形式及边界形状进行优化。为得到较为光顺的结构形式，有限元网格需根据具体情况细分到一定程度。但随之也带来在各种拓扑优化方法中普遍存在的一个问题——棋盘格式（见图 1）。所谓棋盘格式，是指优化过程中材质密度周期性高低分布的一种现象。对于二维问题，其表现形式类似于国际象棋中的棋盘，故得名棋盘格式。在早期的拓扑优化设计中，人们并未重视这一问题，误认为这是一种较为理想的优化结果。其实棋盘格式是数值计算中的一种不稳定现象，类似情况在处理流体力学中的 Stokes 流问题时也出现过，其表现形式为流体的压力为正负相间分布，而非实际情况中的光滑连续分布。

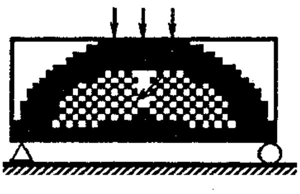

图 1　棋盘格式

近年来，人们对于拓扑优化中出现的这种情况已引起了足够的重视，并有大量算例表明这种现象广泛存在于各种类型的拓扑优化问题中。Jog 等人[1]把拓扑优化问题归结为一个极大极小问题，证明了对于某些类型的拓扑优化问题，棋盘格式的出现是由于未能保证目标函数二阶变分的负定性，并指出在有限元计算中，采用高阶单元取代低阶单元的方法，只能在一定程度上解决棋盘格式问题。

如果从具体的优化过程分析，产生棋盘格式的一个主要原因是，拓扑优化中广泛采用的连续化方法。为得到较为光滑的边界形状，有限元网格数必须达到一定数量。若采用整数规划法，其设计计算量已使现有的计算机难以胜任，因此连续化方法成为一种普遍采用的方法。然而在优化过程中人们发现大部分单元的 E_i 介于 0、E_0 之间，而非所期望的 0 或 E_0。为解决上述问题而采取的各种方法的基本思想是，利用各种形式的惩罚项以使 E_i 趋近于整数规划中的 0 或 E_0，正是这一方法使优化过程中出现计算不稳定现象，即棋盘格式问题。

目前已出现了几种方法试图解决这一难题。最为直观、简单的方法是后处理方法，即在优化过程中把存在棋盘格式的部分去除掉。显而易见，这种处理方法的效果不很理想，目前几种比较有效的方法均是改善优化模型以期得到稳定的数值优化结果。Bendsoe 等[2]结合均匀化方法，采用周期分布的带孔微单元在一定程度上抑制了棋盘格式的产生。Kikuchi 等提出用 4 个相邻的单元组成一个“超参元”，并且规定这 4 个单元可采取的组合方式，通过排除可能出现棋盘格式的组合以避免棋盘格式的出现。但迄今还未证明出哪一种有限元模式能完全避免棋盘格式的出现。Haber 等[3]通过引入

收稿日期：1999—01—04

基金项目：国家自然科学基金资助项目(59775065)

结构的总周长惩罚项以减少优化结果中孔洞的数量，使优化所得结果趋近于光滑解。但周长惩罚项的选取将影响最终所得的拓扑优化结果。Eschenaner 等[4]提出一个较为有趣的解决方法——冒泡法。其基本思想是在设计区域内设置一定数量的孔洞（气泡），每加入一个新孔洞就导致拓扑形式的改变。通过优化各个气泡的形状（一般采用样条函数法）可达到优化结构的目的，而限制气泡的总数及相互位置可避免棋盘格式的产生。但这一方法有些繁琐，不适于灵活处理各种实际问题。Sigmund[5,6]提出在优化过程中对相邻单元的密度变化给出一个限制范围，使单元间的密度变化较平缓，抑制棋盘格式的出现。这一方法属于启发式算法，其限制范围需根据具体情况而定。

2　解决棋盘格式问题的窗函数方法

棋盘格式问题的实质是原问题数值解的非惟一性造成的，即物理解与一高频函数的叠加可任意逼近原问题的精确解，所以一个有效的寻求物理解的方法是限制数值解空间，提高所求解的光滑性。数学上提高函数光滑性的一种常用方法是将原函数 $F(x)$ 与另一函数 $G(x)$（通常称为卷积核）做卷积

$$I(x)=F*G=\int_{R^n}F(x)G(x)(x-y)\mathrm{d}y$$

例如

$$\text{取 } G(x)=\begin{cases}1 & y\leqslant 0\\ 0 & y>0\end{cases}$$

$$\text{则 } I(x)=\int_{-\infty}^{x}F(y)\mathrm{d}y$$

其卷积相当于对原函数的积分。

$$\text{取 } G(x)=\begin{cases}1 & x\in[-T/2,T/2]\\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{则 } I(x)=\int_{x-T/2}^{x+T/2}F(y)\mathrm{d}y$$

其卷积相当于对原函数在$[-T/2,T/2]$内的均值。取$G(x)=\delta(x)$，则$I(x)=F(x)$。其卷积结果仍为原函数。取$G(x)=\delta'(x)$，则$I(x)=F'(x)$，其卷积相当于对原函数求一阶导数。

可见，只要所选卷积核的光滑阶数高于或等于$\delta(x)$，卷积运算必将提高原函数的光滑性。物理上，卷积核的选取常满足$\int_{R^n}G(x)\mathrm{d}x=1$，以保持数值处理后能量的守恒。

如果将函数$F(x)$视为依时间x变化的数字信号，则棋盘格式可视为多元数字信号中的噪声。对于不同形式、不同种类的噪声，数字信号处理技术中都有相应的降噪方法以提高信号的光滑性，限制信号所在的空间。窗函数法相当于采用不同的窗函数作为卷积核与原有数字信号做卷积，其物理意义较直观，且可根据原数值解的具体情况灵活选择窗函数的尺度参数，易于编程实现，因此，我们认为窗函数法是消除棋盘格式的一种有效方法。

在数字信号处理技术中有多种经典的窗函数可供选择，如余弦窗、Hanning 窗、Hamming 窗、Blackman 窗、Gaussain 窗等[7]。通常窗函数的选取应遵循①窗函数频率响应的主瓣宽度要小，其中包含的能量占全部能量的比例尽可能大；②窗函数频率响应的旁瓣所含能量随着ω趋向π而迅速减小，其中高斯窗函数

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\tau^2}\right) & |x|<\tau\\ 0 & |x|\geqslant\tau\end{cases}$$

式中，τ为标准离差。

具有许多优良的性质，尤其适于处理结构拓扑优化中的棋盘格式问题。

（1）由高斯函数可构造出C_0^∞软化核函数

设$c=\int_{R^n}G(x)\mathrm{d}x$，记$\alpha(x)=\dfrac{1}{C}G(x)$，显然有$\alpha(x)\in C_0^\infty(R^n)$，如果$\varepsilon>0$，定义函数$\omega_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha(x/\varepsilon)$，则由$\alpha(x)$的性质易知$\omega_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(R^n)$，且有$\int_{R^n}\omega_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$，$\omega_\varepsilon(x)$为$C_0^\infty$软化核函数。这一软化核函数与任意$\Psi\in C_0^\infty(R^n)$的卷积$\Psi^*\omega_\varepsilon$在$\varepsilon\to 0$时一致收敛于$\Psi$。

（2）2 个高斯函数的卷积仍为一高斯函数

$$A\exp\left[-\frac{(x-\alpha)^2}{2\tau_1^2}\right]*B\exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2\tau_2^2}\right]=$$

$$AB\exp\left[-\frac{(x-c)^2}{2\tau_3^2}\right]$$

$$c=a+b;\tau_3^2=\tau_1^2+\tau_2^2$$

由卷积运算性质有

$$F(x)*G_1(x)*G_2(x)=F(x)*G_3(x)$$

由上述可知，当高斯函数的标准离差$\tau\to 0$时，高斯函数收敛于δ函数。同时，它与任一算子的卷积可一致逼近原算子。采用不同的高斯卷积核多次对原数值信号进行处理后，仍能保持高斯窗函数所具有的良好性态，这是一般窗函数所不具备的。正因如此，我们采用高斯窗函数处理结构拓扑优化中的棋盘格式。结合拓扑优化设计中有限元网格划分的实际情况，本文使用的二维高斯窗函数采用 2 个一维高斯函数的张量积形式

$$G(x,y)=G_1(x)*G_2(y)$$

3　算例

为论证上述优化方法的可行性，本文给出了一

个刚性结构优化算例，设计区域为矩形平面区域，见图 2。矩形区域左侧为固定边界。在右侧中部有一铅直向下的输入力 $F_{in}=200$ N，材料弹性模量 $E_0=3$ GPa，泊松比 $\nu=0.4$，矩形板厚 $t=10$ mm，采用矩形 4 点等参元，所取单元数为 600。优化数学模型为

$$\begin{aligned} &\min \quad -\mathrm{Uout}Y \\ &\mathrm{s.t} \quad KU=f \\ &\quad V(x)\leqslant 0.3V \end{aligned}$$

式中，UoutY 为输入点位移值；V 为初始设计区域的体积；$KU=f$ 为平衡方程。
优化结果见图 3。

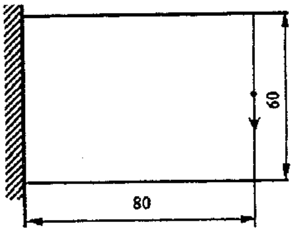

图 2

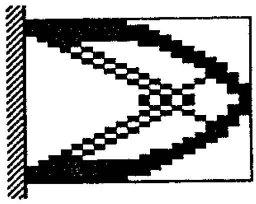

图 3

若在优化过程中利用高斯窗函数（见图 4）对优化中间结果进行处理，并且随着优化结果趋近于最优点而减小高斯窗函数的标准离差值得图 5 的优化结果。

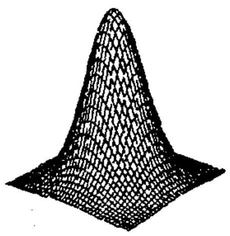

图 4

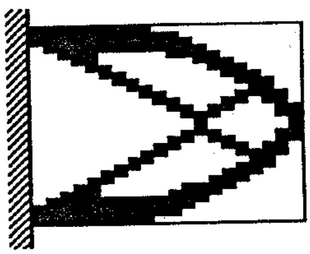

图 5

4 结论

窗函数法，尤其是高斯窗函数可比较有效地解决结构拓扑优化问题中的棋盘格式问题，但在实际优化过程中我们注意到标准离差的选取不是越小越好，这与数学物理反问题中正则化因子的选取有相似之处。对于不同的问题如何选取最优标准离差是我们下一步研究的方向。

参考文献：

[1] Jog C S, Haber R B. Stability of Finite Element Models for Distributed Parameter Optimization and Topology Design. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ,1996,130:203～226

[2] Bendsoe M P. Optimization of Structure Topology, Shape and Material. Berlin:Springer,1995:34～42

[3] Haber R B, Jog C S, Bendsoe M P. A New Approach to Variable Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter. Structure Optimization, 1996,11:1～12

[4] Eschenaner H A, Kobelev V V. Schumacher A. Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structure. Structure Optimization,1994,8:42～51

[5] Sigmund A D O. Checkerboard Patterns in Layout Optimization. Structure Optimization,1995,10:40～45

[6] Sigmund O, Petersson J. Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards. Mesh Dependencies and Local Minima. Structural Optimization, 1998,16:68～75

[7] Harris F J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with Discrete Fourier Transform. Proceedings of the IEEE ,1978,66(1):53～76

（编辑　马尧发）

作者简介：刘震宇，男，1972 年生。大连理工大学（辽宁省大连市 116024）机械工程学院博士研究生。主要研究方向为机电控制、微机械及结构拓扑优化设计等。王晓明，男，1965 年生。大连理工大学机械工程学院副教授。郭东明，男，1959 年生。大连理工大学机械工程学院教授、博士研究生导师。

2000 ASME 国际机械工程会议暨博览会将于 2000 年 11 月 5～10 日在美国佛罗里达州奥兰多举行。会议的主题是“超越传统界限”。会议将集结工业界和学术界人士，探讨如何运用我们的实力和专业经验面向新世纪之初不同的技术背景。会议议题包括可靠耐用产品的工程材料；交替的燃料源；流体机械；制造业；安全可持续的工商业等。除技术会议和座谈会外，还安排了参观工厂、展览和技术旅游。有关会议和博览会的更多信息，可通过下面途径获取：

（1）会议

电话：800—843—2763、212－591－7795 或 973－882－1167

传真：212－591－7856

E-mail:imece @ asme. org;

http:www. asme. org/conf/congress00

（2）博展会

电话：212—591—7100

传真：212—591—7059

E-mail:smithd @ asme. org

（工作总部）

A New Approach Solving the Checkerboard Patterns with Gaussian Window

LIU Zhenyu (Dalian University of Technology, Dalian, China) WANG Xiaomin GUO Dongmin p 704-706

Abstract: The checkerboard patterns and some resolve methods are discussed. By use of numerical filter technique, such as Gaussian window, a new approach to solve the checkerboard patterns is proposed. Theoretical analyses and numerical experiments are presented.

Key words: topology optimization checkerboard patterns Gaussian window soft kernel