



利用滤波法消除拓扑优化中的棋盘格式

杨贵玉, 孙宝元, 李 震

(大连理工大学机械学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 介绍了连续体结构拓扑优化中的棋盘格式现象及其产生的原因, 并对目前解决这一问题的各种方法做了分析比较。将滤波法应用于结构拓扑优化中, 通过刚度结构和微小柔顺机构拓扑优化计算实例, 证明了这一方法的可行性和有效性。

关键词: 微机电系统; 棋盘格式; 拓扑优化; 柔顺机构; 滤波法

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-4776 (2004) 08-0038-04

Using filter to eliminate checkerboard in topology optimization

YANG Gui-yu, SUN Bao-yuan, LI Zhen

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Checkerboard in topology optimization of the continuum and the reason for the formation are introduced. Several methods to avoid this pattern are discussed. Filter method is applied to the structural topology optimization and the feasibility and efficiency of this method are testified through examples of topology optimization of stiff structures and compliant mechanisms.

Key words: MEMS; checkerboard; topology optimization; compliant mechanisms; filter method

1 引言

结构拓扑优化主要是指在特定的设计区域内, 满足给定的约束条件, 寻求目标函数最小(或最大)最优的材料分布形式, 从而确定结构中空洞的数量、位置及其连接形式^[1]。近年来, 拓扑优化被应用于微机电系统中微小型柔性机构的优化设计, 展示了其强大的应用前景。

棋盘格式是连续体结构拓扑优化中常见的一种现象。本文对棋盘格式出现的原因进行了分析, 并对目前解决这一问题的几种常用方法进行了分析比较, 在此基础上采用图像处理技术中的滤波方法解决这一问题, 通过计算实例证明了该方法的可行性和有效性。

2 棋盘格式

在对连续体进行拓扑优化时, 希望能获得一个边界清晰、光滑的优化结果, 但在实际的优化过程中总会出现棋盘格式现象。所谓棋盘格式, 是指结构优化过程中单元材质密度周期性高低分布的一种现象(图1)。

在拓扑优化过程中, 无论采用何种参数作为

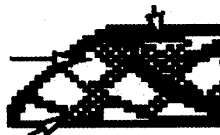


图1 棋盘格式

收稿日期: 2004-02-16

基金项目: 国家自然科学基金重点基金资助项目 (50135040)



优化设计变量, 也无论采用何种优化设计方法, 都会出现棋盘格式。在早期结构拓扑优化研究中, 有些学者误认为这是一种较为理想的结果, 但从制造角度来讲, 不但加工困难, 成本太高, 同时不适合实际应用, 也不符合材料的最优分布原则, 不是设计者希望得到的结果。归根结底, 棋盘格式是拓扑优化数值计算中的一种不稳定现象。流体力学中的 Strokes 流问题与其类似, 表现为流体压力正负相间分布, 而非光滑连续分布。利用有限元方法求解混合变分问题时也有类似的现象^[2], 在这类问题中棋盘格式的形成是由于违背了所谓的 Babuska-Brezzi 条件。

Jog^[3] 从理论上详细阐述了结构刚性拓扑优化设计时棋盘格式出现的原因, 他认为拓扑优化是密度变量 ρ 和位移变量 u 的混合变分问题, 并证明当 ρ 和 u 采用特定组合时可避免棋盘格式的出现。Diaz 和 Sigmund^[4] 指出, 拓扑优化时一般采用有限元方法对设计区域进行离散化, 正是由于有限元方法引入的数值逼近, 从而使棋盘格式排列的材料比其他的排列形式具有更高的“虚拟”刚度, 是应变能的稳态极值, 并通过对棋盘格式的刚度和均匀分布材料的刚度进行对比, 给出了数值上的证明。

Sigmund 和 Petersson^[5] 对拓扑优化中出现的各种数值不稳定现象, 包括棋盘格式、网格依赖型和局部极值, 进行了较为详细的阐述, 并将各种解决方法进行了对比。

近年来, 很多学者都致力于棋盘格式问题的解决, 提出了一些切实有效的避免棋盘格式的求解策略, 大致可分为三类即采用后处理技术将棋盘格式过滤掉; 采用较为稳定的有限元模型; 改变优化目标函数的泛函以使优化过程趋于稳定。

解决棋盘格式最简单的方法是采用高阶有限单元代替低阶有限单元, 增加单元自由度, 如采用 8 节点或 9 节点单元代替 4 节点单元, Diaz 和 Jog^[3,4] 的研究表明, 对于均匀化方法, 这种方法可在很大程度上避免棋盘格式的出现, 而对于 SIMP (solid isotropic material with penalization) 方法, 只有当惩罚因子足够小时, 采用高阶单元才可以避免棋盘格式, 但同时也使计算量急剧增

加。为节约计算时间, Kikuchi 等提出用 4 个相邻的单元组成一个“超单元”, 并且规定这 4 个单元可采取的组合方式, 通过排除可能出现棋盘格式的组合来避免棋盘格式的出现, 但这种方法并不能彻底消除棋盘格式。Haber^[6] 提出的周长约束法通过限制结构的周长来抑制棋盘格式的出现, 其周长为结构内外边界的长度和, 但周长的约束值事先难以确定, 只能通过试验方法得到, 给实际应用带来困难。Petersson^[7] 等提出局部梯度约束方法, 通过引入局部密度变分的梯度约束, 使相邻单元的密度变化相对平缓, 从而抑制棋盘格式的出现。Sigmund^[8] 提出了基于图像处理技术的“滤波”法, 通过调整算法每次循环迭代中的设计敏度可以有效地避免棋盘格式的出现, 这种方法还可以同时解决网格依赖性问题的。

3 拓扑优化中的滤波法

滤波法是图像处理技术中的常用方法, 其基本思想是将原函数与滤波函数进行卷积运算, 对原函数进行规整化处理, 提高函数光滑性。数学表达式为

$$\Psi(x) = F \times G = \int_{R^d} F(y) G(x-y) dy \quad (1)$$

式中 $F(y)$ 为原函数, $G(x-y)$ 为滤波函数 (又称卷积核)。卷积核的选取常满足 $\int_{R^d} G(x) dx = 1$, 以保证数值处理后能量的守恒。

假设设计区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 采用 SIMP 材料模型, 利用有限元法对设计区域进行离散化, 向量 ρ 表示当前设计的密度场, 每次迭代计算后对密度场进行滤波, 以滤波后的密度场作为下次迭代的初始值, 直至收敛。

通常采用应变能表征系统的刚度大小, 所以对于刚性结构的拓扑优化问题, 目标函数可以选择为结构在一定荷载作用下的系统应变能, 系统应变能越小表示系统的刚度越大。荷载 F 作用下, 系统的应变能表达式为^[9]

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u)^T D \varepsilon(u) d\Omega = \frac{1}{2} U^T K U \quad (2)$$

其中 E 表示系统应变能, u 表示荷载 F 作用下的位



移, $\varepsilon(u)$ 为荷载 F 作用下的系统的应变场, $\varepsilon(u)^T$ 表示应变的转置, D 为材料弹性矩阵, U 为节点位移向量, U^T 为其转置, K 为系统刚度矩阵。 D 与密度 ρ 的关系为^[8]

$$D = \rho(x)^p D_0 \quad (3)$$

D_0 为实体材料的弹性矩阵, 与材料的杨氏模量和泊松比有关, p 为惩罚因子。

加入滤波后的最小柔度问题的拓扑优化数学表达式为

$$(MC)^{F_1}: \begin{cases} \min C(\rho) = U^T K U \\ s.t. \int \rho^F(x) d\Omega \leq V^* \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中, $C(\rho)$ 定义为系统的柔度。对于柔顺机构的拓扑优化问题, 同样可以采用滤波法消除优化过程中出现的棋盘格式。本文采用机构的几何效益为目标函数, 优化问题数学表达式为

$$(CM)^{F_1}: \begin{cases} \min GA = -\frac{u_{out}}{u_{in}} \\ s.t. \int \rho^F(x) d\Omega \leq V^* \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

V^* 为体积约束值, $\rho^F(x)$ 为滤波后的密度场。

下面以二维平面应力问题为例具体介绍滤波法的计算过程。如图 2, 3×3 个相邻单元, 单元标号如图所示, 其单元密度为 ρ_i ($i=1, 2, \dots, 9$), 现计算 5 号单元滤波处理后的密度值。每个单元具有一个权重因子 λ_i ($i=1, \dots, 9$), λ_i 的大小与该单元和当前计算单元 (5 号单元) 的中心距离成反比, 且 $\lambda_i \geq 0$, 计算式如下

$$\lambda_i = \max(0, r - \text{dist}(i, j)) \quad (6)$$

r 表示滤波特征半径, $\text{dist}(i, j)$ 表示单元 i 和当前计算单元 j 的距离。5 号单元滤波后的密度值为

$$\rho_5^f = \frac{\sum_{i=1}^9 \rho_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^9 \lambda_i} \quad (7)$$

利用这种方法对设计区域中所有设计单元进行滤波, 形成滤波后的密度场, 作为下一次迭代的初始值, 如此循环直到得到最优拓扑形式。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

图 2 滤波算法图

4 计算

为验证滤波方法用于消除棋盘格式的有效性, 本文给出两个应用实例, 分别证明滤波法在刚性结构和柔顺机构拓扑优化设计中的可行性。

4.1 刚性结构算例

设计区域为矩形平面区域, 如图 3 所示。区域左侧边界固定, 右侧中部作用一垂直向下的集中荷载 $F_y=100$ N, 材料弹性杨氏模量 $E=2$ GPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 厚度 $t=5$ mm, 采用矩形 4 节点等参元进行有限元划分, 划分单元数为 60×40 。优化数学模型采用公式 (4), 其中 $V^*=0.4V_0$ 。未对密度进行滤波时得到的拓扑优化结果如图 4 (a), 从图中可见明显存在棋盘格式现象。

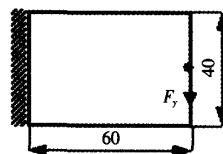


图 3 初始设计区域

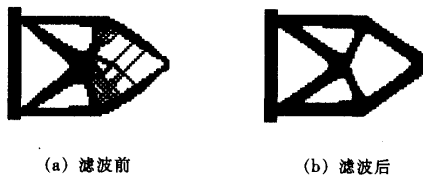


图 4 拓扑优化结果

优化过程中加入滤波算法, 优化结果如图 4 (b) 所示, 完全消除了棋盘格式现象, 得到了结构清晰的拓扑结果。图 5 为滤波前后拓扑优化过程中目标函数值的变化曲线。

未加入滤波算法时, 拓扑优化目标函数值从 154.98 减小到 23.34, 迭代 38 次; 加入滤波算法,

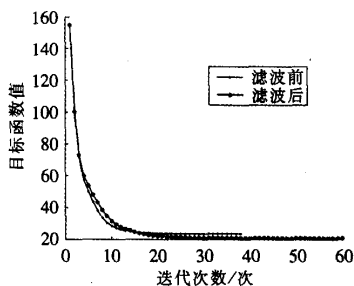


图5 滤波前后目标函数值变化曲线

目标函数值从 154.98 减小到 20.70, 迭代 60 次。可见, 加入滤波后, 优化结果更加趋于最优, 同时避免了棋盘格式, 但计算时间略有增加。

4.2 柔顺机构算例

本例设计一个力反向器机构, 初始设计区域如图 6 所示, 左侧中部点 A 处作用一水平方向集中荷载 $F_x=100\text{ N}$, 目的是寻求使右侧中部点 B 的水平输出位移和点 A 的输入位移比 u_{out}/u_{in} 最大的拓扑结构, 且 A 点和 B 点的位移方向相反。材料弹性模量 $E=2\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 厚度 $t=7\text{ mm}$, 根据设计区域的对称性, 只取上半部分进行计算分析, 用 4 节点矩形等参元对其离散化。优化数学模型表达式如公式 (5), 其中 $V^*=0.3V_0$ 。未对密度进行滤波时迭代 80 步得到的拓扑优化结果如图

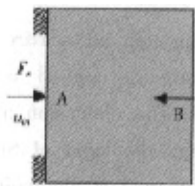


图6 初始设计区域



(a) 滤波前

(b) 滤波后

图7 拓扑优化结果

7 (a), 结构中明显存在棋盘格式现象。优化中加入滤波后迭代 200 步得到图 7 (b) 所示结构, 显然消除了棋盘格式, 最终结构边界清晰。

5 结 论

对于以刚度最大为目标的结构拓扑优化, 滤波法有效地避免了棋盘格式的出现, 使最终得到的拓扑结构边界清晰。

对于柔顺机构的拓扑优化, 由于其计算模型描述困难, 目标函数一般为非凸函数, 所以计算复杂, 迭代步数较多。滤波法用于柔顺机构拓扑优化, 同样有效地消除了棋盘格式。由于柔顺机构具有优良的特点, 其拓扑优化的研究是今后结构优化领域的研究重点。

参考文献:

- [1] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method [J]. Comp Meth Appl Mech Engng, 1988, 71: 197-224.
- [2] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and hybrid finite element methods [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1991.
- [3] JOG C S, HARBER R B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design [J]. Comp Meth Appl Mech Engng, 1996, 130: 203-226.
- [4] DIAZ A R, SIGMUND O. Checkerboard patterns in layout optimization [J]. Struct Optim, 1995, 10: 40-45.
- [5] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima [J]. Struct Optim, 1998, 16: 68-75.
- [6] HABER R B, JOG C S, BENDSOE M P. A new approach to variable topology, shape design using a constraint on perimeter [J]. Struct Optim, 1996, 11: 1-12.
- [7] PETERSSON J, SIGMUND O. Slope constrained topology optimization [J]. Int J Numer Meth Engng, 1998, 41: 1417-1434.
- [8] SIGMUND O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization [J]. Mech Struct Mach, 1997, 25: 495-526.
- [9] 张宪民. 柔顺机构拓扑优化设计 [J]. 机械工程学报, 2003, 39 (11): 47-51.

作者简介:

杨贵玉 (1977-), 男, 大连理工大学机械工程学院硕士研究生, 研究方向为微结构拓扑优化。