

渐进优化法的一种高阶棋盘格式抑制方法^{*}

郭中泽¹, 陈裕泽¹, 张卫红², 邓克文¹

(1. 中国工程物理研究院 结构力学研究所, 四川 绵阳 621900; 2. 西北工业大学 中法并行工程联合实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:棋盘格现象是固定有限元网格的连续体结构在拓扑优化中一种常见的现象, 特别是用一阶有限单元建模时。已有的研究表明, 棋盘格现象是有限元分析误差所致。在渐进结构优化设计的各种优化判据下都存在这一现象。棋盘格的存在使优化结果的解释变得困难, 后处理时提取适合于加工的几何模型变得非常困难。为了避免棋盘格现象, 在文献[13]的灵敏度再分配的过滤技术基础上, 提出了一种灵敏度高阶再分配的过滤技术。这种高阶过滤技术不需要对有限元网格进行重新划分, 也不需要增加结构重分析的计算量。给出较多的算例, 证明了该方法的实用性。

关键词:有限元分析; 结构优化; 棋盘格式; 优化判据

中图分类号:TH122 **文献标识码:**A **文章编号:**1001-2354(2006)05-0001-04

棋盘格式(Checkerboard Patterns)是连续体结构拓扑优化中较为常见的一种不稳定现象。所谓棋盘格式, 是指优化过程中材质密度周期性高、低分布的一种现象。对于二维问题, 其表现形式类似于国际象棋中黑白相间的棋盘, 故得名棋盘格式。在拓扑优化中, 棋盘格式的出现与所采用的材质设计变量无关, 即不论是采用均匀化设计方法还是采用密度法, 均会出现棋盘格式。棋盘格的存在使优化结果变得非常不实用, 使得对优化结果变得难以理解, 后处理时提取适合于加工的几何模型变得非常困难。因此, 很多学者都对棋盘格式的解决进行了大量的研究, 主要包括以下两个方面: (1) 棋盘格式产生的原因; (2) 棋盘格式的抑制技术。主要方法有以下 4 类: (1) 后处理方法, 即在棋盘格式出现后, 采用模型后处理技术把棋盘格式部分滤除掉; (2) 采用较为稳定的有限元模式, 但绝对稳定的单元仍未发现; (3) 改变优化目标函数的泛函以使优化过程趋于稳定; (4) 灵敏度过滤技术。

文献[1]的光顺处理办法和文献[2, 3]形状优化积分算法等后处理方法不仅能消除棋盘格式, 而且能去除拓扑优化构形的锯齿边界(Jagged boundary)现象。Andres^[4]认为, 棋盘格式出现是因为当采用四边形单元进行网格剖分时, 在对角线方向上相邻单元间只能产生点接触, 而采用正六边形单元时, 不论在哪个方向上相邻单元都是线接触的, 采用正六边形单元则可以解决棋盘格式。但从 Andres 给出的算例来看, 仍然存在着棋盘格式。另外, 正六边形单元不能处理直线边界, 在采用单一正六边形单元进行网格剖分时存在着一定的困难, 可以说并未从本质上认识棋盘格式出现的原因并得到解决。棋盘格式在用位移有限元法解决拓扑优化问题时经常出现, 而有限元计算误差是其中一个原因, 但更主要的原因是单元形式及其设计变量的选择。基于上述思想, Bendsoe^[5]提出适当提高有限元单元插值函数的阶次(如采用 8 节点单元和 9 节点单元), 并且选择合适的有限元网格剖分方式, 可解决棋盘格式问题。该方法仅对某些较为简单的问题有效, 并未能从根本上解决棋盘格式, 而且计算量与 4 节点元相比呈指数型增长。Fujii 和

Kikuchin^[6]认为棋盘格式的出现是由于相邻单元间设计变量值变化过大引起的。由此提出了一种超级单元法, 其基本思想是把网格中相邻的 4 个线性单元组成一个超级 9 节点单元, 且这 4 个单元中的 4 个设计变量只有 3 个自由度。每个超级单元都有一个自由度受到限制, 可以预防棋盘格式的出现, 且数值计算结果比 9 节点单元网格的效果更好, 但是实例证明超单元法并不能完全消除棋盘格式。

Jog^[7]提出的周长约束法和 Zhang^[8]提出的二次型周长约束方法, 是通过限制结构的周长来抑制棋盘格式的出现, 其周长定义为固体结构内外边界的长度和。当设计允许的空洞数量逐渐增多时, 则易于出现棋盘格式。在规定孔洞面积的前提下, 限制其总的周长和可间接地起到抑制棋盘格式的作用。实际上, 周长约束项的取值须经过适当的调整才能达到最优值。因此, 周长约束法的优化结果可能落入局部极值点。

Sigmund^[9]提出在优化过程中对相邻单元的材质弹性张量变化给出一个限定范围, 使单元间的材质弹性张量变化较平滑, 以抑制棋盘格式的出现。但这一方法属于启发式算法(Heuristic Method), 其限制范围须根据具体情况而定。

Young 和 Park^[10]提出了一种密度再分配方法(Density Redistribution Method, DRM), 该方法能有效在拓扑优化过程中抑制棋盘格效应。首先用与节点相连的单元材料密度平均值作为该节点的密度, 再用与单元的节点密度平均值作为该单元的密度, 在拓扑优化过程中用二次分配后的单元密度值为材料删除判据。该方法对目标函数没有影响, 能够消除单元之间的密度呈现高低周期性分布的现象, 从而消除拓扑优化棋盘格式。Pedersen^[11]应用 DRM 方法对有预应力平板进行了拓扑优化, 证明这种简单的再分配格式具有较好的抑制棋盘格式能力。Qing 和 Steven^[12]在柔顺性最小设计中提出了应变能灵敏度的再分配格式, 基于性能指标的连续体最大刚度优化中得到应用, 能够较好地抑制棋盘格式。Li^[13]进一步扩展了这种再分配格式, 拓扑优化中对作为材料删除判据的灵敏度进行再分配, 可有效地改善由于数值不稳定造成的灵敏度在单元之间的

^{*} 收稿日期: 2005-10-08; 修订日期: 2005-12-06

作者简介: 郭中泽(1968-), 男, 四川绵阳人, 高级工程师, 硕士, 主要研究方向: 结构优化设计与阻尼减振设计技术。

高低分布现象,抑制材料删除后的拓扑构形中出现孔洞单元和实体单元呈周期性分布,从而有效地抑制棋盘格式。文中仅给出了一阶和二阶再分配格式,并指出二阶分配格式比一阶分配格式在抑制棋盘格式方面具有更好的效果。但文中给出一阶和二阶分配格式是以加权的形式给出的,且仅给出了二维平面优化的权重系数,而对三维优化的权重并未给出。为改善低阶单元的灵敏度或影响因子的质量,为扩大这种灵敏度再分配格式的适用范围,文中提出了一种适合于二维优化、三维优化的灵敏度或影响因子高阶再分配的过滤算法。

1 ESO 方法的进化设计判据简述

渐进结构优化方法目标是修改材料(删除)布局以寻求在一个和多个目标判据下的最优设计。通过有限元分析,材料的去除通过单元的删除来实现,单元的删除的依据是该单元对目标函数的贡献大小。

1.1 整体刚度最大化

结构的整体刚度最大等价于结构柔顺性或整体应变能最小,因此,在 ESO 中单元对整体刚度的贡献为该单元的应变能或应变能密度,通过逐步删除单元应变能贡献最小的单元,剩余的结构逐步趋于整体刚度最大。

第 i 个单元删除时,应变能变化量为该单元对整体刚度的贡献。第 i 个单元的应变能表达式如下:

$$\alpha_{si} = \Delta E_{ei} = \frac{1}{2} p^T \Delta u = -\frac{1}{2} u_i^T \Delta \mathbf{K}_i u_i \quad (1)$$

式中: u_i ——第 i 个单元的节点位移矢量;

$\Delta \mathbf{K}_i$ ——第 i 个单元刚度矩阵变化量, $\Delta \mathbf{K}_i = -\mathbf{K}_i$;

\mathbf{K}_i ——第 i 个单元刚度矩阵。

1.2 应力优化

在应力渐进拓扑优化设计优化迭代过程中,逐步将实体材料应力最小的单元删除,直至求得结构最优拓扑,材料删除判据以 Von Mises 等效应力作为单元的贡献值。

对于二维平面单元,第 i 个单元的应力矢量为 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_i^T$, 该单元的 Von Mises 等效应力的计算式如下:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2)$$

对于三维实体单元,第 i 个单元的应力矢量为 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}_i^T$, 该单元的 Von Mises 等效应力的计算式如下:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (3)$$

1.3 频率优化

为了避免结构共振,需要通过拓扑优化设计来移动结构的一阶和几阶频率,避开动态载荷的特定频率和更上一层次系统的固有频率。单元去除是依据某单元的频率灵敏度,有关频率灵敏度分析的相关公式如下:

$$\alpha_i = \Delta \omega_j = \frac{1}{2\omega_j m_j} u_{ij}^T (\Delta \mathbf{K}_i - \omega_j^2 \Delta \mathbf{M}_i) u_{ij} \quad (4)$$

式中: m_j ——结构的第 j 阶模态质量, $m_j = u_j^T M u_j$;

u_{ij} ——第 j 阶模态向量在第 i 个单元上的分量;

ω_j ——第 j 阶固有圆频率;

$\Delta \mathbf{M}_i$ ——第 i 个单元质量矩阵变化量, $\Delta \mathbf{M}_i = -\mathbf{M}_i$;

\mathbf{M}_i ——第 i 个单元质量矩阵。

在结构优化过程中,若想增加特定的频率,则逐步去除频率灵敏度(正数)最大的单元;若想降低特定阶的频率,则逐步去除频率灵敏度(负数)最小的单元;若想特定阶的频率基本不变,则逐步去除单元灵敏度绝对值最小的单元。

2 灵敏度高阶再分配格式

在 ESO 方法中,连续体常常采用四节点单元(2D)或四面体单元、六面体单元进行离散,各单元之间的灵敏度(式(1)~(4))存在着不连续的现象,文献[13]为改善各单元灵敏度的质量提出了如下的再分配格式:

(1) 计算与每个节点相连的单元灵敏度的平均值,见式(5),作为该节点的灵敏度。

$$\alpha_{nd} = \frac{\sum_{i=1}^M V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^M V_i} \quad (5)$$

式中: α_{nd} ——节点 d 的灵敏度,属于过渡量,不直接用于拓扑优化中单元删除的判定依据;

M ——与节点 d 相连的单元总数;

V_i ——第 i 个单元的体积;

α_i ——与节点 d 相连接的第 i 单元的灵敏度。

对于每一个单元的灵敏度能够由与该单元的各节点的灵敏度计算得到。

(2) 计算单元各节点的平均灵敏度,见式(6),作为该单元光顺后的灵敏度。

$$\alpha_e = \frac{1}{N} \sum_{d=1}^N \alpha_{nd} \quad (6)$$

式(5),(6)是一阶再分配格式。另外,文献[13]加权形式给出了一阶、二阶通用分配格式:

$$\alpha_e = \frac{\sum_{i=1}^m w_i V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^m w_i V_i} \quad (7)$$

式中: m ——与该单元所有相关的单元总数;

w_i ——权重系数, $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ 。

一阶、二阶分配格式的权重系数,分别见图 1a, b。

	1	2	1	
	2	4	2	
	1	2	1	

(a) 一阶再分配格式的权重系数 $16w_i$

	1	4	6	4	1
	4	16	24	16	4
	6	24	36	24	6
	4	16	24	16	4
	1	4	6	4	1

(b) 二阶再分配格式的权重系数 $256w_i$

图 1 文献[13]的再分配格式的权重系数

但文献[13]仅给出了二维优化的权重系数,而对三维优化

的权重和高阶分配格式并未给出。文中为改善低阶单元的灵敏度或影响因子的质量,扩展灵敏度再分配格式的适用范围,特给出适合于二维、三维渐进结构优化的灵敏度或影响因子高阶再分配格式。具体的方法如下:

a. 用式(5) 计算各节点的灵敏度;

b. 用式(6) 计算该单元的节点平均灵敏度,用节点灵敏度作为该单元的灵敏度;

c. 若 a, b 两步只进行一遍,则为一阶分配格式;若 a, b 两步骤进行 $N(N=2, 3, 4, \dots)$ 遍,则为灵敏度 N 阶再分配格式。

当 $N=1, 2$ 时,与文献[13] 给出二维问题的一阶、二阶灵敏度分配格式完全一致。该方法只需要在搜索与节点直接相连的单元和单元的相关节点信息基础上,重复进行 N 次灵敏度分配,便可方便地实现灵敏度的 N 阶分配格式。

当低阶再分配方法控制棋盘格式不理想时,能够方便地利用高阶再分配方法控制棋盘格式。若取定灵敏度的再分配阶次 N_0 ,灵敏度分配格式执行流程如图 2 所示。

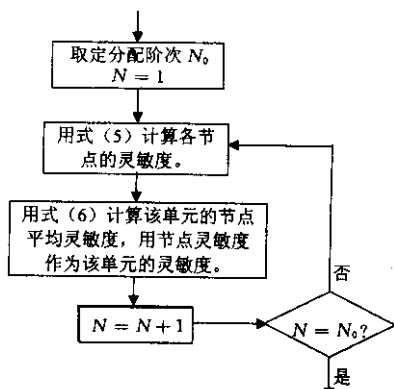


图 2 灵敏度高阶分配的执行流程

3 数值算例

Li, Steven 和 Xie^[14] 论证过,在 ESO 方法中应力优化和整体刚度优化是等效。因此文中仅给出整体刚度最大化和固有频率优化的相关算例。

3.1 最大刚度设计

3.1.1 2D 悬臂梁的最大刚度设计

载荷及边界固定条件如图 3 所示,设计区域 $160\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 2\text{ mm}$,划分为 30×20 的平面应力单元网格,材料用量 50%。假设所用材料弹性模量为 $1 \times 10^6\text{ MPa}$ 。在不进行 SRM 棋盘格式控制的优化结果见图 4,图中出现很明显的棋盘格式。采用一阶 SRM 棋盘格式控制方法,对同样的模型进行拓扑优化,优化结果见图 5,可以看出拓扑优化结构中的棋盘格现象已经去除,并且出现了非常清晰的拓扑形式。

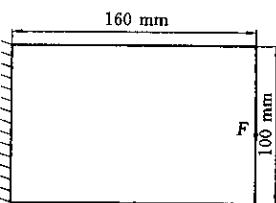


图 3 悬臂梁拓扑优化设计区域、载荷及边界条件

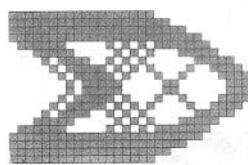


图 4 不加棋盘格式控制方法的优化结果

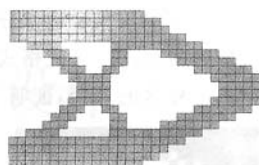


图 5 采用一阶 SRM 棋盘格式控制方法的优化结果

3.1.2 3D 悬臂梁的最大刚度设计

一悬臂梁结构允许的最大设计区域为 $160\text{ mm} \times 3\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 的空间,一端固支,另一端中心作用一个 100 N 的向下集中力,并承受加速度过载 288 m/s^2 ,用六面体单元进行划分 $30 \times 1 \times 20$ 网格,见图 6。以体积比 50% 为约束条件。在迭代过程中,材料从结构中逐渐去除,结构的整体刚度也比较缓慢的增加,直到满足体积约束,优化结果见图 7、图 8,与 3.1.1 节的 2D 悬臂梁整体刚度最大化优化结构一致。

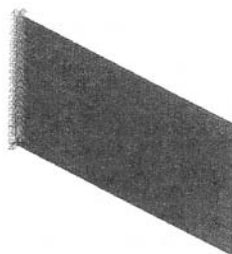


图 6 3D 悬臂梁设计区域、边界、载荷条件

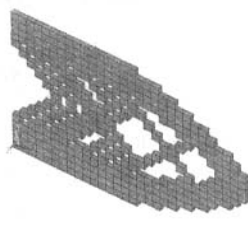


图 7 3D 悬臂梁无棋盘格式控制优化结果

3.2 频率优化设计

一悬臂梁,在自由端上部,安放一个 10 kg 的马达,该马达以一定频率工作作为集中质量处理^[15]。悬臂梁的尺寸为 $300\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 10\text{ mm}$,用 4 节点平面应力单元划分 30×20 网格,见图 9。悬臂梁的材料杨氏模量为 200 GPa ,泊松比为 0.3 。初始结构的一阶频率为 443.7 Hz ,在材料用量为初始结构的 50% 约束下,逐步删除单元灵敏度绝对值最小的单元,经优化后结构分别见图 10~图 12。经过一阶再分配,棋盘格式控制方法的优化结果(图 11)不很理想;采用二阶灵敏度再分配格式,棋盘格式完全消除,结构的拓扑构形与一阶棋盘格式控制方法的结果是基本一致的。

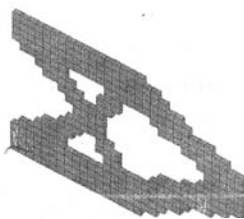


图 8 3D 悬臂梁采用一阶 SRM 棋盘格式控制优化结果

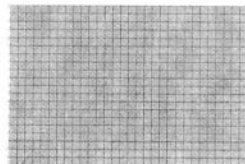


图 9 悬臂梁频率优化设计区域、边界、载荷条件

4 结论

在文献[13]的灵敏度再分配的过滤技术基础上提出了一种灵敏度高阶再分配的过滤技术。这种高阶过滤技术不需要对有限元网格进行重新划分,也不需要增加结构的重分析计算量。适合于用 ESO 方法进行二维、三维结构优化设计,不需要

用复杂的权重系数表达再分配格式,只需要多次重复一阶分配格式即可得到高阶分配格式,在计算程序上非常容易实现。文中给出了较多的算例,证明了该方法的实用性。

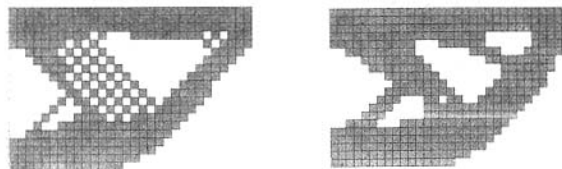


图 10 无棋盘格控制的结果 ($f=398.5 \text{ Hz}$)

图 11 一阶 SRM 棋盘格控制优化结果 ($f=397.3 \text{ Hz}$)

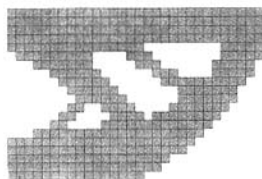


图 12 二阶 SRM 棋盘格控制优化结果 ($f=396.7 \text{ Hz}$)

参考文献

- [1] Maute K, Ramm E. Adaptive topology optimization [J]. Struct. Optim., 1995, 10(2):100—112.
- [2] Papalambros P, Chirehdast M. An integrated environment for structural configuration design [J]. J. Engrg. Des., 1990, 1: 73—96.
- [3] Olhoff N, Bendsoe MP, Rasmussen J. On CAD-integrated structural topology and design optimization [J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1991, 89:259—279.
- [4] 刘震宇. 微型及小型机械结构的拓扑优化设计方法 [D]. 大连:大连理工大学, 2000.
- [5] Bendsoe MP. Optimization of structural topology, Shape and material [M]. springer; Berlin, 1995.
- [6] Fujii D, Kikuchi N. Improvement of numerical instabilities in topology optimization using SLP method [J]. Stryuct. Multidisc. Optim., 2000, 19(2): 113—121.
- [7] Jog S, Harber B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design [J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1996, 130(8): 203—226.
- [8] WH Zhang, Duysinx P. Dual approach using a variant perimeter constraint and efficient sub-iteration scheme for topology optimization [J]. Computers & Structures, 2003, 81(22~23): 2 173—2 181.
- [9] Petersson J, Sigmund O. Slope constrained topology optimization [J]. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 1998, 41(1):417—1 434.
- [10] Young SK, Park SH. A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenized material [J]. Computers & Structures, 1997, 62(3):527—538.
- [11] Pedersen NL. Topology optimization of laminated plates with prestress [J]. Computers & Structures, 2002, 80(7~8):559—570.
- [12] Qing QL, Steven GP. A performance-based method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints [J]. Comput. Meth. Appl. Engrg., 2002, 191(13~14):1 471—1 489.
- [13] Li Q, Steven G P, Xie Y M. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization [J]. Struct. Multidisc. Optim, 2001, 22(13): 230—239.
- [14] Li Q, Steven GP, Xie YM. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization [J]. Structural optimization, 1999, 18:67—76.
- [15] Chongbin Zhao, Steven GP, Xie YM. Evolutionary natural frequency optimization of two-dimensional structures with additional non-structural lumped masses [J]. Engineering Computation, 1997, 14(2): 233—251.

A kind of high ordered checkerboard pattern suppressing algorithm of progressive optimization method

GUO Zhong-ze¹, CHEN Yu-ze¹, ZHANG Wei-hong², DENG Ke-wen¹

(1. Research Institute of Structural Mechanics, China Research Institute of Engineering Physics, Mianyang 621000, China; 2. Sino-France Joint Laboratory of Concurrent Engineering, Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The phenomenon of checkerboard is a kind of common phenomenon in structural topologic optimization of continuous body of fixed finite element lattice especially when modeling with the first ordered finite element. The existed research shows that the checkerboard phenomenon is caused by the analytical error of finite element. This phenomenon is all existed under various kinds of optimization criterion of the progressive structural optimization design. The existence of checkerboard lattice let the interpretation of the optimal results become difficult, and let the collection of geometric model suitable for processing during post-treatment become very difficult. For the sake of avoiding the phenomenon of checkerboard lattice, a kind of filtration technique for the high ordered redistribution of sensitivity was put forward on the basis of filtration technique of sensitivity redistribution in document^[13]. This kind of high ordered filtering technique needs neither carrying out re-differentiation to the finite element lattice nor increasing the amount of calculation for reanalysis of structure. More computational examples have been presented and the practicality of this algorithm was verified.

Key words: finite element analysis; structural optimization; checkerboard pattern; optimized criterion

Fig 12 Tab 0 Ref 15

“Jixie Sheji”5620