

### 第三章 应力分析

在材料力学中，为了求得物体内的应力，常常采用切面法，即假想把物体切开，在一定的假设条件下，直接利用内力和外力的平衡条件求得切面上的应力分布。本书中则采用另一种方法，就是假想把物体切成无数个极其微小的六面体(在物体边界上也可以是四面体或五面体，叫做单元体或微元体。一个单元体可代表物体的一个质点。根据单元体的平衡条件写出平衡微分方程，然后考虑其他必要的条件设法求解。这种方法也是一般连续体力学的通用方法。

为了上述目的，首先需要研究两个问题，第一，上述方法是以物体的质点(单元体)为隔离体的，质点在各个方向上都受到应力的作用，这时显然不能仅仅以某一方向的应力来说明质点的受力情况，于是就需要引入一个能够完整地表示出质点受力情况的物理量，这就是“点应力状态”，它是一个要用九个分量表示的张量，叫做应力张量。本章的重点之二就是研究点应力状态，即应力张量的各种性质。第二，就是要推导出质点的平衡微分方程，这是本章的另一重点。

#### § 3.1 外力和内力

物体所承受的外力可以分成两类，一类是作用在物体表面上的力，叫做面力或接触力，它可以是集中力，但更一般的是分布力；第二类是作用在物体每个质点上的力，例如重力、磁力以及惯性力等等，叫做体力。塑性成形时，除了高速锻造、爆炸成形、磁力成形等少数情况外，体力相对面力而言是很小的，可以忽略不计。因此，在本书中一般都假定面力是静力平衡力系。

在外力作用下，物体各质点之间就会产生相互作用的力，叫做内力。单位面积上的内力叫做应力。图 3.1 表示一物体受外力系  $P_1, P_2, \dots$  的作用而处于平衡状态。设物体内有任意一点  $Q$ ，过  $Q$  作一法线为  $N$  的平面  $A$ ，将物体切开而移去上半部。这时  $A$  面即可看成是下半部的外表面， $A$  面上作用的内力应该与下半部其余的外力保持平衡。这样，内力的问题就可以当成外力来处理。在  $A$  面上围绕  $Q$  点取一很小的面积  $F$ ，设该面积上内力的合力为  $P$ ，则定义

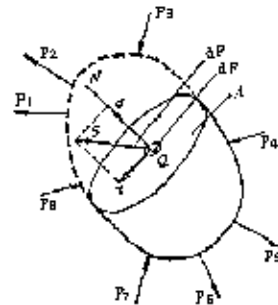


图 3.1 面力、内力和应力

$$S = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}$$

为  $A$  面上  $Q$  点的全应力。全应力  $S$  可以分割成两个分量，一个垂直于  $A$  面，叫做正应力，一般用  $\sigma$  表示，另一个平行于  $A$  面，叫做剪应力，用  $\tau$  表示。这时，面积  $dF$  可叫做  $Q$  点在  $N$  方向的微分面， $S$ 、 $\sigma$  及  $\tau$  则分别称为  $Q$  点在  $N$  方向微分面上的全应力、正应力及剪应力。通过  $Q$  点可以作无限多的切面。在不同方向的切面上， $Q$  点的应力显然是不同的。现以单向均匀拉伸为例(图 3.2)进行分析。设一断面积为  $F_0$  的匀截面棒料承受拉力  $P$ ，通过棒料内一点  $Q$  作一切面  $A$ ，其法线  $N$  与拉伸轴成  $\alpha$  角，将棒料切开而移去上半部。由于

是均匀拉伸,故 A 面上的应力是均布的。设 Q 点在 A 面上的全应力为 S, 则 S 的方向一定平行于拉伸轴,而大小则为

$$S = \frac{P}{\frac{F_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{F} \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta \quad (3.1)$$

式中  $\sigma_0$  即为垂直于拉伸轴的切面上的正应力。全应力 S 的正应力分量及剪应力分量可用下式求得

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= S \cos\theta = \sigma_0 \cos^2\theta \\ \tau &= S \sin\theta = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

在上述这种简单拉伸的情况下,只要知道 Q 点任意一个切面上的应力,就可以通过式 (3.2) 求得其他切面上的应力。但是,在多向受力的情况下,显然不能由一点任意切面上的应力求得该点其他方向切面上的应力。也就是说,仅仅用某一方切面上的应力并不足以全面地表示出一点所受应力的情况。为了全面地表示一点的受力情况,就需引入“点应力状态”的概念。

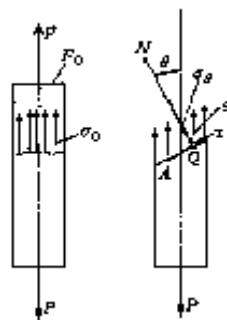


图 3.2 单向均匀拉伸时的应力

## § 3.2 直角坐标系中一点的应力状态

### 一、应力分量

设在直角坐标系中有一承受任意力系的物体,物体内有一任意点 Q,围绕 Q 切取一矩形六面体作为单元体,其棱边分别平行于三根坐标轴。取六面体中三个相互垂直的表面作为微分面,如果这三个微分面上的应力为已知,则该单元体任意方向上的应力都可以通过静力平衡求得(见本节二)。这就是说,可以用质点在三个相互垂直的微分面上的应力来完整地描述该质点的应力状态。或者说,点应力状态这一物理量要用三个应力矢量来表示。

上述三个微分面上的应力都可以按坐标轴的方向分成三个分量。由于每个微分面都与一坐标轴垂直而与另两坐标轴平行,故三个应力分量中必有一个是正应力分量,另两个则是剪应力分量。三个微分面共有九个分量。因此一般情况下,一点的应力状态应该用九个应力分量来描述,如图 3.3 所示。

为了清楚地表示出各个微分面上的应力分量,三个微分面都可用各自的法线方向命名,例如图 3.3 中 ABCD 面叫 X 面, CDEF 面叫 Y 面等。每个应力分量的符号都带有两个下角标。第一个角标表示该应

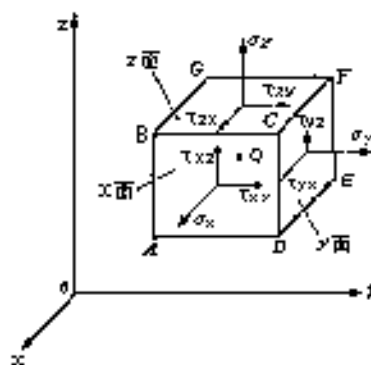
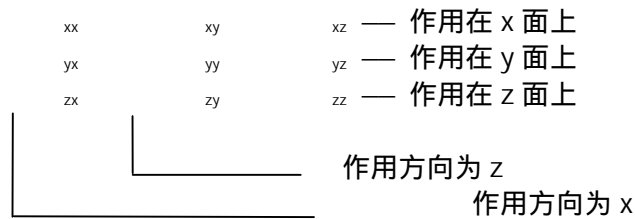


图 3.3 单元体上的应力分量

力分量的作用面，第二个角标则表示它的作用方向。很明显，两个下角标相同的是正应力分量，例如  $\sigma_{xx}$  即表示 x 面上平行于 x 轴的正应力分量，一般简写为  $\sigma_x$ ，两个下角标不同的是剪应力分量，例如  $\tau_{xy}$  即表示 x 面上平行于 y 轴的剪应力分量。为了清楚起见，可将九个分量表示如下：



应力分量的正、负号按以下方法确定，在单元体上，外法线指向坐标轴正向的微分面(图 3.3 中的前、右、上三个面)叫做正面，反之称为负面，在正面上，指向坐标轴正向的应力分量取正号，指向负向的取负号。负面上的应力分量则相反，指向坐标轴负向的为正，反之为负。按此规定，正应力分量以拉为正，以压为负，图 3.3 中画出的剪应力分量都是正的。

由于单元体处于静力平衡状态，故绕单元体各轴的合力矩必须等于零，由此可以导出(见 § 3.3)以下关系

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3.3)$$

式(3.3)叫做剪应力互等定律。它表明，为了保持单元体的平衡，剪应力总是成对出现的。由此，为了表示一点的应力状态，实际上只需要六个应力分量。

上述应力分量可以用符号  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) 表示。使下角标  $i, j$  分别依次等于  $x, y, z$ ，即可得到九个分量。例如  $i = x, j = x$ ，可得  $\sigma_{xx}$ ，也即  $\sigma_x$ ；如  $i = x, j = y$ ，则得  $\tau_{xy}$ ，也即  $\tau_{yx}$ 。将应力分量表示成矩阵形式，得

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

(3.4)

上述“ $\sigma_{ij}$ ”这种形式的符号叫角标符号，它可使书写大为简化，今后将经常碰到。

## 二、质点在任意方向切面上的应力和应力边界条件

如果通过一点的上述九个应力分量为已知，则可通过静力平衡求得该点任意方向上的应力。为此，在直角坐标系中任取一质点(单元体)Q，设其应力分量为  $\sigma_{ij}$ 。现有一任意方向的斜切微分面 ABC 把单元体切成一个四面体 QABC(图 3.4)，则该微分面上的应力就是质点在任意切面上的应力，它可通过四面体 QABC 的静力平衡求得。设 ABC 微分面的法线为  $N$ ， $N$  的方向余弦为  $l, m, n$  (或  $l_x, l_y, l_z$ )

$$l = \cos(N, x); \quad m = \cos(N, y); \quad n = \cos(N, z)$$

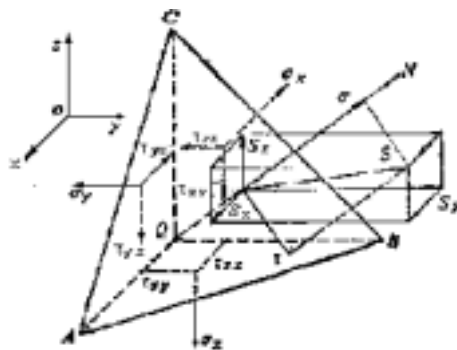


图 3.4 斜切微分面上的应力

z)

用角标符号可简记为

$$l_i = \cos(N, x_i)$$

设微分面 ABC 的面积为 dF，微分面 QBC(即 x 面)、QCA(即 y 面)、QAB(即 z 面)的面积分别为 dF<sub>x</sub>、dF<sub>y</sub> 及 dF<sub>z</sub>，则

$$dF_{x'} = l dF \quad dF_{y'} = m dF \quad dF_{z'} = n dF$$

设 ABC 面上的全应力为 S，它在三个坐标轴方向的分量为 S<sub>x</sub>、S<sub>y</sub>、S<sub>z</sub>。由静力平衡条件 P<sub>x</sub>=0，将有

$$\sum P_x = S_x dF - l dF - m dF - n dF = 0$$

可得

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

或记为

$$S_j = l_i \sigma_{ij}$$

(3.5a)

于是，斜切微分面 ABC 上的全应力为

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S_i S_i$$

通过全应力 S 及其分量 S<sub>i</sub>，即可方便地求得斜切微分面上的正应力和剪应力。正应力就是 S 在法线 N 上的投影，也就等于 S<sub>i</sub> 在法线 N 上的投影之和，即

$$= S_x l + S_y m + S_z n$$

(a)

将式(3.5)代入(a)式，并考虑到  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ，整理后可得

$$S^2 = l^2 \sigma_x^2 + m^2 \sigma_y^2 + n^2 \sigma_z^2 + 2(lm \tau_{xy} + mn \tau_{yz} + nl \tau_{zx}) \quad (3.6)$$

由于

$$S^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

所以，斜切微分面上的剪应力为

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2$$

(3.7)

如果质点处在物体的边界上，斜切微分面 ABC 就是物体的外表面，则该面上作用的就是外力 T<sub>j</sub> (j=x, y, z)。这时，式(3.5)所表示的平衡关系仍应成立。因此，用 T<sub>j</sub> 代替式(3.5a)中的 S<sub>j</sub>，即可得到

$$T_j = l_i \sigma_{ij}$$

(3.8)

这就是应力边界条件的表达。

### 三、应力张量

在一定的外力条件下，物体内存任意质点的应力状态应该是确定的。但是很明显，如果取不同的坐标系，则用来表示各质点应力状态的九个应力分量将有不同的值。因此，在不同坐标系的应力分量之间应该存在一定的关系。

让我们从另一角度分析式(3.6)的推导过程。如设想图 3.4 中任意斜切面法线 N 恰恰就是某一新坐标系 ox'y'z' 中的一根轴，例如 x' 轴，那么式(3.6)所示的就是该点应力状态在新坐标系中的  $\sigma_{x'}$ ，N 的方向余弦 l、m、n 就是新坐标轴 x' 在原坐标系中的方向余弦，可改写成  $l_{x'x}$ 、 $l_{x'y}$ 、 $l_{x'z}$ ，简记为  $l_{x'i}$ 。于是式(3.5a)可改写成

$$S_j = \sigma_{ij} l_{xi}$$

而式(a)则可改写成

$$\sigma_{x'x'} = S_j l_{jx'} + \sigma_{ij} l_{xi} l_{jx'}$$

(b)

将上式按求和约定(附录)展开,并考虑到  $i=j$  时,  $l_{x'i} = l_{jx'}$ , 即可得到式(3.6)。在式(3.7)中的剪应力  $\tau_{xy}$  没有按坐标方向分成两个分量,但如给出新坐标系另两坐标轴  $y'$ 、 $z'$  在原坐标系中的方向余弦  $l_{y'i}$  及  $l_{z'i}$ , 那么把  $S_j$  分别投影到  $y'$  及  $z'$  轴上,也即分别乘以  $l_{jy'}$  及  $l_{jz'}$ , 即可直接求得  $x'$  微分面上的两个剪应力分量:

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \sigma_{ij} l_{jy'} l_{xi} \\ &= \sigma_{ij} l_{xi} l_{jy'}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\tau_{x'z'} &= \sigma_{ij} l_{jz'} l_{xi} \\ &= \sigma_{ij} l_{xi} l_{jz'}\end{aligned}$$

(d)

(b)、(c)、(d)三式可合写成

$$\tau_{x'k} = \sigma_{ij} l_{xi} l_{jk} \quad (k = y', z')$$

对  $y'$  及  $z'$  方向的微分面上的应力作同样的推导,最后可得

$$\tau_{ik} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jk} \quad (i, k = x', y', z')$$

(e)

这就是该应力状态在  $ox'y'z'$  坐标系中的九个分量,它们可通过原坐标系  $oxyz$  中的应力分量  $\sigma_{ij}$  以及  $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$  轴的方向余弦求得。

在不同坐标系中的九个量可以用式(e)所示的线性关系来变换,那么这九个量就可构成一个特殊的物理量,叫做二阶张量,或简称张量(参看附录)。因此,点应力状态是张量,叫做应力张量。前面式(3.4)所示的矩阵可叫张量矩阵。由于剪应力互等,即  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , 该矩阵主对角线  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy}$ 、 $\sigma_{zz}$  的两边是对称的,所以应力张量是对称张量,也可表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

张量有许多特性(例如可以合并、分解、存在主方向、主值及不变量等等),它们对于进一步分析应力状态是很有用的。在后面的分析中,我们将引用这些特点,但把有些比较冗长的证明放在附录中。

#### 四、主应力和应力不变量

由公式(3.6)及(3.7)可知,如果点应力状态的应力分量已经确定,那么微分面 ABC 上的正应力  $\sigma_n$  及剪应力  $\tau_n$  都将随法线 N 的方向、也即  $l$ 、 $m$ 、 $n$  的数值而变。是否存在某些方向,在这些方向上的剪应力  $\tau_n = 0$ ? 回答是肯定的。根据张量的特性一个对称张量必然有三个互相垂直的方向,叫做主方向,在主方向上,下标不同 ( $i \neq j$ ) 的分量均为零,于是只剩下下标相同 ( $i = j$ ) 的分量,叫做主值。再应力张量中,主值就是主方向上的三个正应力,叫做主应力,与三个主方向垂直的微分面叫主平面,主平面上没有剪应力。和三个主方向一致的坐标轴叫主轴。上述结论的证明可参看附录或其他有关张量的专著。读者也可用线性代数方法自行证明。

下面讨论如何通过已知的  $\sigma_{ij}$  来求得主应力及主方向。为此,可以假定图 3.4 中法线方向余弦为  $l$ 、 $m$ 、 $n$  的斜切微分面 ABC 正好就是主平面,面上的剪应力  $\tau_n = 0$ , 由式(3.7)

可得  $S = S_i$ ，于是主应力  $S$  在三个坐标轴方向上的投影也就是  $S_x$ 、 $S_y$ 、及  $S_z$ ，即

$$S_x = l; S_y = m; S_z = n$$

将上列的  $S_i$  值代入式 (3-5)，整理后可得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

上式是以  $l$ 、 $m$ 、 $n$  为未知数的齐次线性方程组，其解就是应力主轴的方向。此方程组的一组解是  $l=m=n=0$ 。但由解析几何可知，方向余弦之间必须保持

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

(3.10)

它们不能同时为零，所以必须寻求非零解。齐次线性方程组(3.9)存在非零解的条件是方程组的系数所组成的行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开，整理后可得

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + [\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]\sigma \\ & - [\sigma_x\tau_{yz} + \sigma_y\tau_{zx} + \sigma_z\tau_{xy} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)] = 0 \end{aligned}$$

设：

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

于是上式即可写成

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0$$

这是一个以  $\sigma$  为未知数的三次方程式，叫做应力状态的特征方程，它必然有三个实根(证明方法参看附录)，也就是三个主应力，一般用  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  表示。将解得的每一个主应力代入式(3.9)并与式(3.10)联解，即可得到该主应力的方向余弦，这样就可以得到三个相互垂直的主方向。对于一个确定的应力状态，只能有一组(三个)主应力的数值，因此，特征方程式(3.12)的系数  $J_1$ 、 $J_2$  及  $J_3$  应该是单值的，不随坐标而变。可以得如下的重要结论：尽管应力张量的各分量随坐标而变，但按式(3.11)的形式组合起来的函数的值是不变的。因此我们把  $J_1$ 、 $J_2$  及  $J_3$  分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。存在不变量也是张量的特性之一。

如果取三个主方向为坐标轴，则一般用 1、2、3 代替  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，这时应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

(3.4a)

将上式中的各分量代入式(3-6)、(3-7)，即可得到主轴坐标系中斜切面上的正应力和剪应力公式

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

(3.6a)

$$S^2 = S^2 - \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (3.7a)$$

这时, 三个应力不变量为

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -\left( \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \right) \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.11a)$$

通过主轴坐标系, 我们还可以把点应力状态用几何图形形象化地表示出来。将主轴坐标系的应力分量式(3.4a)代入式(3.5), 可求得任意斜切面上全应力的三个分量  $S_1$ 、 $S_2$  及  $S_3$  :

$$S_1 = \sigma_1 l, \quad S_2 = \sigma_2 m, \quad S_3 = \sigma_3 n$$

或

$$l = \frac{S_1}{\sigma_1}, \quad m = \frac{S_2}{\sigma_2}, \quad n = \frac{S_3}{\sigma_3}$$

考虑到

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

于是可得

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (3.13)$$

对于一点的应力状态, 主应力  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  是确定的, 因此上式表示一个椭球面, 叫做应力椭球面, 它就是点应力状态任意斜切面全应力矢量  $S$  端点的轨迹(图 3.5), 其主半轴的长度分别等于  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 。还可以看到, 三个主应力中的最大者和最小者也就是一点所有方向的应力中的最大者和最小者。

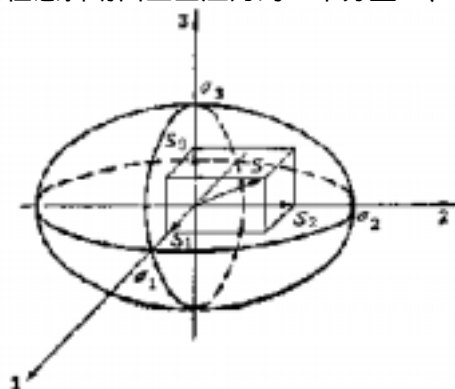


图 3.5 应力椭球面

人们还常常根据三个主应力的特点来区分各种应力状态。在三个主应力中, 如有两个为零, 就叫单向应力状态, 例如单向拉伸就是这种状态, 如有一个主应力为零, 就叫两向应力状态, 例如材料力学中讨论过的弯曲、扭转等就是这种状态, 塑性成形中的多数板料成形工序也可看成是两向应力状态, 如三个主应力都不为零, 就叫三向应力状态, 在锻造、轧钢等工艺中, 大多是这种状态。另外, 如果在三个主应力中有两个相等, 例如  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ , 则可叫圆柱形应力状态, 单向应力时,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , 所以也属于这种状态。在这种状态下, 与  $\sigma_1$  轴垂直的所有方向都是主方向, 而且这些方向上的主应力都相等。如三个主应力都相符, 则应力椭球面变成了球面, 故叫球应力状态, 由式(3.7)可知, 这时  $\tau = 0$ , 即所有方向都没有剪应力, 所以都是主方向, 而且所有方向的应力都相等。

用主应力表示的应力张量对于研究塑性成形有很大的用处。主应力状态只有三个分量, 可使运算大为简化, 用主应力图除能直观地分析质点的受力状态外, 还能用来衡量变形金属工艺塑性的优劣(见第三章), 这用一般应力状态是不易判断的。

**例题** 设某点应力状态如图(3.6)所示, 试求其主应力及主方向(应力单位:  $10\text{N/mm}^2$ )。

解 图(3-6)所示的应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

将各分量代入式(3.11), 得

$$J_1=15 \quad J_2=-60 \quad J_3=54$$

代入式(3.12)得

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 60\lambda - 54 = 0$$

分解因式:

$$(\lambda - 9)(\lambda^2 - 6\lambda + 6) = 0$$

解得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 9 \\ \lambda_2 &= 3 + \sqrt{3} \\ \lambda_3 &= 3 - \sqrt{3} \quad (10\text{N/mm}^2) \end{aligned}$$

为求主方向, 可将应力分量代入式(3.9), 并与式(3.10)一起写成

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)l + 2m + 3n &= 0 \\ 2l + (6 - \lambda)m + n &= 0 \\ 3l + m + (5 - \lambda)n &= 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned}$$

将解得的三个主应力值逐次代入上式, 并联解方程组(注: 上列方程组中的前三式是不定方程组, 可用其中两式与第四式联解, 或者求出不定方程的通解代入第四式求解), 得到三个主方向的方向余弦为

$$\begin{aligned} l_1=m_1=n_1 &= 1/\sqrt{3} = 0.57735 \\ l_2 &= +0.21132; \quad m_2 = -0.78867; \quad n_2 = +0.57735 \\ l_3 &= -0.78867; \quad m_3 = -0.21132; \quad n_3 = +0.57735 \end{aligned}$$

(注:  $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}} = 0.78867; \quad \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} = 0.21132$ )

## 五、主剪应力和最大剪应力

上节所述的主方向实际上就是正应力有极值的方向, 主应力就是极值。这一点可从图 3.5 的应力椭球中看出, 也可以对式(3.6)求极值来证明。剪应力同样随斜切平面的方向而变。一般把剪应力有极值的平面叫“主剪应力平面”, 面上作用的剪应力叫“主剪应力”。

取主轴为坐标轴, 则任意斜切面上的剪应力可由式 3.7a) 求得, 即

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2$$

三个方向余弦值不是独立的, 故以  $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ , 代入上式消去  $n$ , 可得

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2 \quad (a)$$

为求剪应力极值, 将上式分别对  $l$ 、 $m$  求偏导数并使之等于零, 得

$$\begin{cases} [(\sigma_1 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)m^2](\sigma_1 - \sigma_3)l = 0 \\ [(\sigma_2 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)m^2](\sigma_2 - \sigma_3)m = 0 \end{cases} \quad (b)$$

上列方程的一组解是  $l=m=0$ , 这时  $n=\pm 1$ , 是一对主平面, 剪应力为零, 不是我们所需

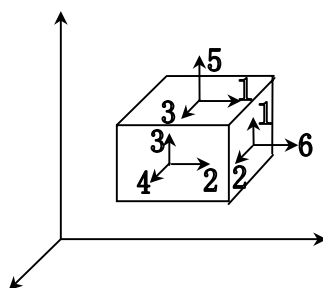


图 3.6 某点的应力状态



的解。如  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ，则上式无解。很明显，这时是球应力状态， $\tau = 0$ 。如  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ ，则从第一式解得  $l = \pm 1/\sqrt{2}$ 。这是圆柱应力状态。这时，与  $\sigma_1$  轴成  $45^\circ$  (或  $135^\circ$ ) 的所有平面都是主剪应力平面，单向拉伸就是如此。

对于  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  的一般情况，如  $l \neq 0, m \neq 0$ ，则上列两式的方括号内必须同时为零，因此将有  $\sigma_1 = \sigma_2$ ，这与前提条件  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  不符，所以这种情况下式(b)无解。如  $l = 0, m \neq 0$ ，也即斜切微分面始终平行于 1 轴(图 3.7a)，则由式(b)的第二式得

$$(\sigma_2 - \sigma_3)(1 - 2m^2) = 0$$

由此解得

$l = 0; m = \pm 1/\sqrt{2}$ ；从而  $n = \pm 1/\sqrt{2}$ 。如， $l \neq 0, m = 0$ ，则可由式(b)的第一式解得

$$l = \pm 1/\sqrt{2}; m = 0; n = \pm 1/\sqrt{2}$$

如最初从式(3.7a)消去  $l$  或  $m$ ，可同样求解。

除去重复的解，还可以得到一组解为

$$l = \pm 1/\sqrt{2}; m = \pm 1/\sqrt{2}; n = 0$$

上列的三组解各表示一对互相垂直的主剪应力平面，它们分别与一个主平面垂直并与另两个主平面成  $45^\circ$  角，如图(3.7b)所示。每对主剪应力平面上的主剪应力都相等。将上列三组方向余弦值代入式(3.7a)，即可求得三个主剪应力

$$\left. \begin{aligned} \tau_{23} &= \pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2 \\ \tau_{31} &= \pm(\sigma_3 - \sigma_1)/2 \\ \tau_{12} &= \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

主剪应力中绝对值最大的一个，也就是一点所有方向切面上剪应力的最大者，叫做最大剪应力，以  $\tau_{\max}$  表示。

$$\tau_{\max} = \pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (3.15)$$

将三组方向余弦值代入式(3.6a)，即可求得主剪应力平面上的正应力

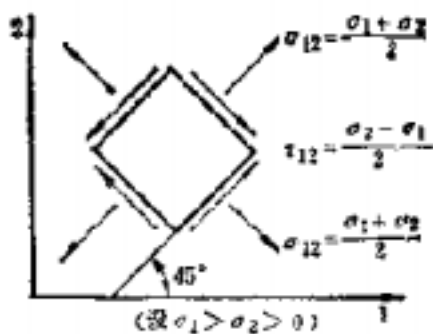


图 3.8 主剪应力平面上的正应力

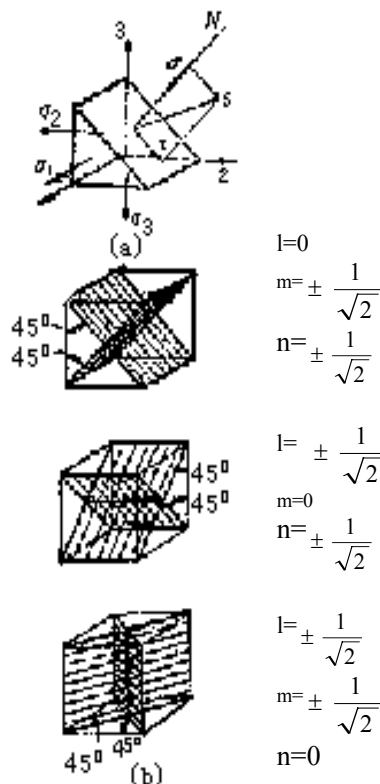


图 3.7 主剪应力平面

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{23} &= (\sigma_2 + \sigma_3)/2 \\ \sigma_{31} &= (\sigma_3 + \sigma_1)/2 \\ \sigma_{12} &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

应注意到，每对主剪应力平面上的正应力都是相等的，图 3.8 为  $\sigma_1 - \sigma_2$  坐标平面上的例子。

上面我们分析了六对特殊平面，现将结果列于表 3.1 中。

表 3.1

|     |            |            |            |                               |                               |                               |
|-----|------------|------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| L   | 0          | 0          | $\pm 1$    | 0                             | $\pm 1/\sqrt{2}$              | $\pm 1/\sqrt{2}$              |
| m   | 0          | $\pm 1$    | 0          | $\pm 1/\sqrt{2}$              | 0                             | $\pm 1/\sqrt{2}$              |
| n   | $\pm 1$    | 0          | 0          | $\pm 1/\sqrt{2}$              | $\pm 1/\sqrt{2}$              | 0                             |
| 剪应力 | 0          | 0          | 0          | $\pm (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ | $\pm (\sigma_3 - \sigma_1)/2$ | $\pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ |
| 正应力 | $\sigma_3$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1$ | $(\sigma_3 + \sigma_2)/2$     | $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$     | $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$     |

## 六．应力球张量和应力偏张量

应力张量和矢量一样，也是可以分解的。现设  $\sigma_m$  为三个正应力分量的平均值，

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.17)$$

$\sigma_m$  一般叫做平均应力，是不变量，与所取坐标无关，对一个确定的应力状态，它是单值的。

于是我们可将三个正应力分量写成如下形式，

$$\sigma_x = (\sigma_x - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_x + \sigma_m$$

$$\sigma_y = (\sigma_y - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_y + \sigma_m$$

$$\sigma_z = (\sigma_z - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_z + \sigma_m$$

将上式代入应力张量式(3-4)，即可将应力张量分解成两个张量。

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma'_x + \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y + \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z + \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

(3.18)

用张量符号可把上式简记为

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}$$

(3.18a)

式中的  $\delta_{ij}$  是一个常用的符号，叫克氏符号 (Kronecker delta)，是单位球张量的标记。当  $i=j$  时， $\delta_{ij}=1$ ；当  $i \neq j$  时， $\delta_{ij}=0$ 。例如  $\delta_{xx}=1$ ， $\delta_{xy}=0$  等等。使用克氏符号可将角标不同的元素去掉；引用求和约定时，还可把交错项去掉，因此它可使角标符号的应用范围扩大。

上式中的后一张量  $\sigma_m \delta_{ij}$ ，表示一种球应力状态，故称应力球张量。由前述可知，在球应力状态下，任何方向都是主方向，而且主应力相同，所以  $\sigma_m$  可看成是一种静水应力。再者，由于球应力状态在任何切面上都没有剪应力，所以它不能使物体产生形状变化和塑性变形，而只能产生体积变化。

上式中的前一张量  $\sigma'_{ij}$  叫做应力偏张量。它是由原应力张量减去球张量后得到的，即

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

由于应力球张量没有剪应力，任意方向都是主方向且主应力相同，所以，减去球张量后得到的  $\sigma'_{ij}$  的剪应力分量、主剪应力、最大剪应力以及应力主轴等等都与原应力张量相同。应力偏张量只能使物体产生形状变化，而不能产生体积变化。材料的塑性变形也主要与应力偏张量有关。

应力偏张量同样有三个不变量，可用  $J'_1$ 、 $J'_2$  及  $J'_3$  表示。将应力偏张量的分量代入式 (3.11)，可得

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0 \\ J'_2 &= -(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J'_3 &= \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

对于主轴坐标系，则

$$\begin{aligned} J'_1 &= 0 \\ J'_2 &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 6 \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$J'_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

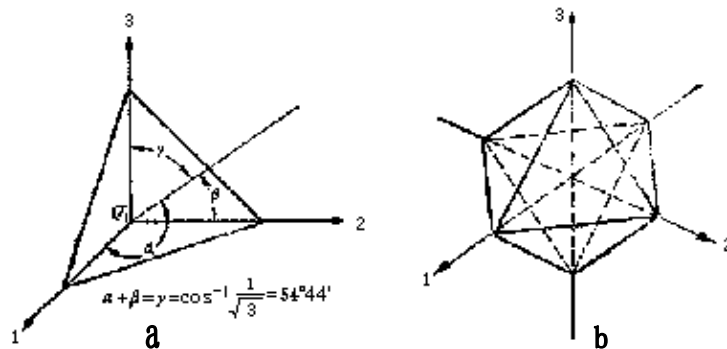
## 七、八面体应力和等效应力

前面我们曾分析过主平面及主剪应力平面等特殊平面，下面我们再讨论一组特殊平面---八面体平面以及面上的应力，并从而引出一个重要的概念---等效应力。

以物体内任意点  $O$  为原点，以该点的应力主轴为坐标轴，在无限靠近  $O$  点处作等倾斜微分面，其法线与三根坐标轴的夹角都相等，即  $|\mathbf{l}| = |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}|$ 。坐标空间八个象限的等倾，斜微分面可以形成一个正八面体(图 3.9)，所以这种微分面叫八面体平面。面上的应力叫八面体应力。

八面体平面的方向余弦为

$$\begin{aligned} l &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

将上列数值代入斜切面应力公式(3.6a)，可求得八面体正应力  $\sigma_8$ ，

$$\sigma_8 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{1}{3}J_1 \quad (3.20)$$

将八面体平面的方向余弦代入式(3.7a)，将有

$$\tau_8^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

整理后可得八面体剪应力为

$$\tau_8 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} J_2' \quad (3.21)$$

可见， $\sigma_8$ 就是平均应力或静水应力，是不变量。 $\tau_8$ 则是与应力球张量无关的不变量。对于一个确定的应力偏张量， $\tau_8$ 是确定的。上列两式中的  $J_1$  和  $J_2'$  分别用式(3.11)和式(3.19)中的函数式代大，即可得到以任意坐标系应力分量表示的八面体应力

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(3.20a)

$$\tau_8 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.21a)$$

将八面体剪应力  $\tau_8$  取绝对值，并乘以系数  $3/\sqrt{2}$ ，所得到的参量仍是一个不变量，我们把它叫做“等效应力”，也称广义应力或应力强度，在本书中以  $\bar{\sigma}$  表示。对于主轴坐标系，等效应力的表达式为

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_8 = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3.22)$$

对于任意坐标系，则为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (3.22a)$$

应指出，前面讨论过的主应力、主剪应力、八面体应力等都是在某些特殊微分面上实际存在的应力，而等效应力则是不能在某特定微分面上表示出来的，但是，等效应力可以在一定意义上“代表”整个应力状态中的偏张量部分，因此，它和塑性变形的关系是很密切的。

单向应力状态时，如设  $\sigma_1 = \sigma$ ， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ，代入式(3.22)即可得到

$$\bar{\sigma} = |\sigma_1|$$

在三向应力状态时，如  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则等效应力数值的变化范围为

$$\bar{\sigma} = (1 \sim \frac{\sqrt{3}}{2})(\sigma_1 - \sigma_2) = (2 \sim 1.732) \tau_{\max}$$

可见  $\bar{\sigma}$  和最大剪应力的二倍相差不大。

物体在变形过程中，一点的应力状态是会变化的，这时就需判断是加载还是卸载。在塑性理论中，一般是根据等效应力的变化来判断的：如  $\bar{\sigma}$  增大，即  $d\bar{\sigma} > 0$ ，就叫加载，其中如各应力分量都按同一比例增加，则叫比例加载或简单加载；如果  $\bar{\sigma}$  减小，即  $d\bar{\sigma} < 0$ ，就是卸载，如  $\bar{\sigma}$  不变，即  $d\bar{\sigma} = 0$ ，对理想塑性材料，变形仍会增加，因而是加载。而对于有硬化材料，则称中性变载。

## 八、应力莫尔圆

应力莫尔圆也是应力状态的一种几何表达。

设已知某应力状态三主应力  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。以应力主轴为坐标轴，作一斜切微分面，其方向余弦为  $l$ 、 $m$ 、 $n$ ，则可有如下三个熟知的方程：

$$\begin{aligned} &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2) \\ &l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{aligned}$$

上列二式可看成是以  $l^2$ 、 $m^2$ 、 $n^2$  为未知数的方程组。联解此方程组可得

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned}$$

将上列各式分子中含  $\sigma$  的括号展开并对  $\sigma$  配方，整理后可得

$$\left. \begin{aligned} \left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 &= l^2 \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) + \left( -\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau^2 &= m^2 \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) + \left( -\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 &= n^2 \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) + \left( -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

在  $\sigma$ - $\tau$  坐标平面上，上式表示三个圆，圆心都在  $\sigma$  轴上，距原点分别为  $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$ 、 $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$ 、 $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ ，它们在数值上就是主剪应力平面上的正应力，三个圆的半径随方向余弦值而变。对于每一组  $|l|$ 、 $|m|$ 、 $|n|$ ，都将有图 3.10 所示的三个圆。应注意到，式(3.23)的三个式子中，每个都只包含一个方向余弦值，表示某一方向余弦值为定值时  $\sigma$  和  $\tau$  的变化规律。例如第一式只含  $l$ ，故圆  $O_1$ ，即表示  $l$  为定值而  $m$ 、 $n$  变化时， $\sigma$  和  $\tau$  变化规律。对于一个确定的微分面， $l$ 、 $m$ 、 $n$  都是定值，因此三个圆必然有共同的交点，交点  $P$  的坐标即该面上的正应力和剪应力。

如用  $l=0$  代入式(3.23)的第一式,  $m=0$  代入第二式  $n=0$  代入第三式得到如下的三个圆方程:

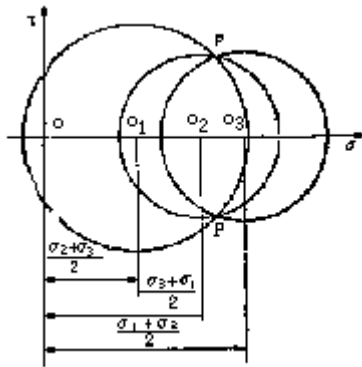


图 3.10  $l$ 、 $m$ 、 $n$  分别为定值时  $\sigma\tau$  的变化规律

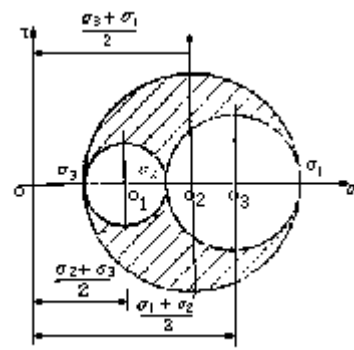


图 3.11 应力莫尔圆

$$\left. \begin{aligned} \left( -\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{4} \\ \left( -\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}{4} \\ \left( -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

这三个圆叫做应力莫尔圆(图 3.11), 它们的圆心位置与前述的三个圆相同, 半径分别等于三个主剪应力, 其中第一个圆  $O_1$ , 表示  $l=0$ 、 $m^2+n^2=1$  时, 也即微分面法线  $N$  垂直于  $\sigma_1$  轴且在  $\sigma_2\sigma_3$  平面上旋转时,  $\sigma$  和  $\tau$  的变化规律。圆  $O_2$ 、 $O_3$ , 也可同样理解。在  $l$ 、 $m$ 、 $n$  都不等于零时, 代表微分面上应力的点虽然不在三个圆上, 但它们将必然落在三个莫尔圆之间, 也即图 3.11 中画阴影线的部分。现证明如下, 因为式(3.23)所示三个圆的交点  $P$  的坐标就是任意微分面的应力, 现将式(3.23)与式(3.24)作对比, 可看出, 区别仅在于式(3.23)的等号后面多了第一项, 即只是半径不同。在  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  条件下, 式(3.23)等号后面的第一项具有如下性质

$$l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0 \quad (a)$$

$$m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0 \quad (b)$$

$$n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \leq 0 \quad (c)$$

由式(a)(c)可知, 式(3.23)第一、第三式所示的圆半径一定大于或等于莫尔圆  $O_1$ 、 $O_3$  的半径, 即  $P$  点一定不会在圆  $O_1$  及  $O_3$  的里面, 同样, 由式(b)可知,  $P$  点也不可能在莫尔圆  $O_2$  的外面。所以,  $P$  点只能在三个圆之间或圆周上, 于是上述绪论得到证明。另外,  $O_2$  上  $\tau$  的极值就是主剪应力  $\tau_{13} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , 由于所有的应力点不可能在圆  $O_2$  的外面, 自此  $\tau_{13}$  就是最大剪应力  $\tau_{\max}$ 。

### § 3.3 平衡微分方程

设物体(连续体)内有一点,其坐标为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 。以  $Q$  为顶点切取一个边长为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的平行六面体。六面体另一顶点  $Q'$  的坐标即为  $x+dx$ 、 $y+dy$ 、 $z+dz$ 。由于坐标的微量变化,各个应力分量也将产生微量的变化。

在一般情况下,我们都认为应力分量是坐标的连续函数,而且有连续的一阶偏导数。现设  $Q$  点的应力状态为  $\sigma_{ij}$ ,其  $x$  面上的正应力分量为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在  $Q'$  点的  $x$  面上,由于坐标变化了  $dx$ ,故其正应力分量将为

$$f(x+dx, y, z)$$

$$= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \dots \approx \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

图 3.12 单元体六个面上的应力分量

其余的八个应力分量也可同样推导,得到相类似的式子,如图 3.12 所示。

设图 3.12 所示的单元体处于静力平衡状态,且不考虑体力,则由平衡条件  $P_x=0$  有

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dzdx - \tau_{zx} dxdy = 0$$

简化整理后得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

按  $P_y=0$  及  $P_z=0$  还可以推得两个式子,于是直角坐标系中质点的平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(3.25)

简记为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

(3.25a)

下面考虑转矩的平衡。以过单元体中心且平行于  $x$  轴的直线为轴线取力矩,由  $M_x=0$ ,有

$$\left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

或

$$\tau_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{zy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz = 0$$

略去微量后可得

同理可得

这就是 § 3.2 中式 (3.3) 所示的剪应力互等定律。

式 (3.25) 所列的平衡微分方程中, 三个式子包含了六个未知应力分量, 所以是超静定的。为使方程能解, 还应寻找补充方程, 这将在后续章节中讨论。

### § 3.4 平面应力状态和轴对称应力状态

求解一般的三向问题往往是很困难的, 目前我们能处理的实际上都是一些比较特殊的问题, 例如平面应力问题、轴对称问题以及平面变形问题 (详见第五章)。这些在工程上是经常遇到的, 而且某些三向问题也往往可以近似地简化成这种类型的问题。在上述一些问题中, 应力张量和平衡微分方程可以得到某些简化。

#### 一、平面应力状态

平面应力状态的基本特征是: 1) 物体内部所有质点在与某一方向垂直的平面上都没有应力如取该方向为坐标的  $z$  轴, 则有  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ , 只留下  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  等应力分量。 $z$  向必为主方向, 所有质点都是两向应力状态; 2) 各应力分量都与  $z$  无关, 因此整个物体的应力分布可以在  $xy$  坐标平面上表示出来。材料力学中讨论过的一些问题, 例如梁的弯曲、薄壁管扭转等都是平面应力状态。另外, 薄壁容器承受内压以及塑性成形中的一些板料成形工序, 例如拉延等, 由于壁厚或壁厚方向的应力相对很小, 可以忽略, 所以一般也看成是平面应力状态。

平面应力状态的张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \text{ 或 } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

分析平面应力状态下的应力时, 可利用  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  应力平面内的莫尔圆 (假定  $\sigma_3=0$ )。该莫尔圆的方程即式 (3.24) 的第三式:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (3.24a)$$

上式利用应力不变量的关系, 可以另写成一般应力形式:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.27)$$

式 (3.27) 就是材料力学中讨论的平面应力状态下, 在  $\sigma$ 、 $\tau$  坐标平面内的莫尔圆表达式。式 (3.24a) 和式 (3.27) 表达的是同一个圆, 其圆心坐标为  $\left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$  或  $\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ ,

半径为最大剪应力  $\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$  (参看图 3.13)。

利用图 3.13a) 的莫尔圆, 可以很方便地写出平面应力状态下一般应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  与主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  之间的关系



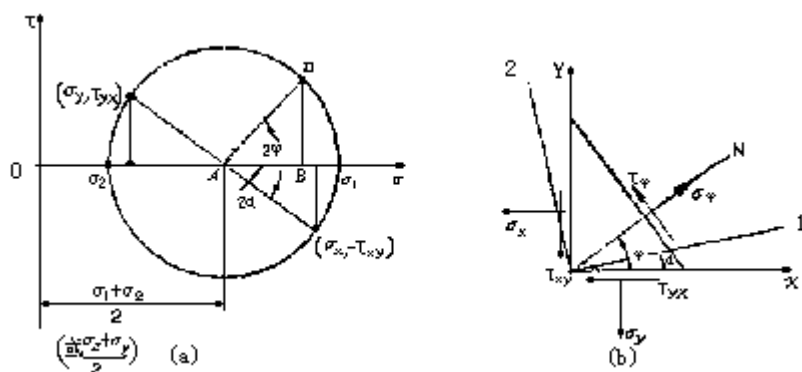


图 3.13 平面应力状态下的莫尔圆

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.28a)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (3.28b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.28c)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.27d)$$

这时主平面与 x 轴的夹角 为

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.28e)$$

对于和 x 轴成  $\varphi$  角的任意倾斜面上的应力 (图 3.13b), 在莫尔圆上其应力值分别为  $\varphi=OB$ ,  $\varphi=DB$ , 其表达式只需简单推导便可写出

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (3.28f)$$

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (3.28g)$$

在两向应力状态中有一种“纯剪”状态, 它的特点是在主剪平面上的正应力为零, 如图 (3.14 a) 所示。棒料或管料小变形扭转时就是这种状态。

按上述方法作出纯剪状态的应力莫尔圆如图 (3.14b) 所示。由图可以看出, 纯剪应力就是最大剪应力, 主轴与坐标轴成  $45^\circ$  角, 主应力的特点是  $\sigma_1 = -\sigma_2$ 。

平面应力状态时, 由于  $\sigma_z = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ , 所以其平衡微分方程为

$$(3.29) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

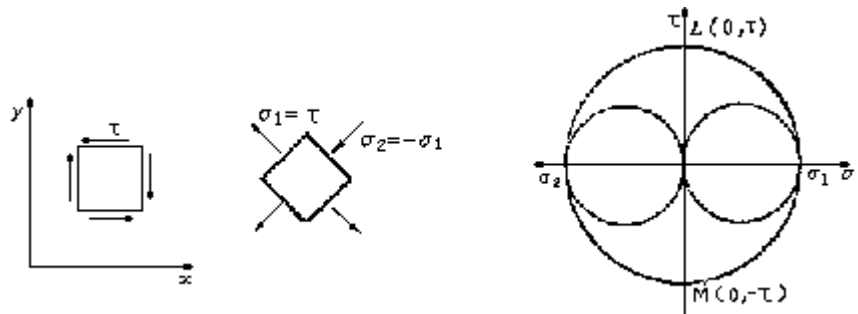


图 3.14 纯剪应力状态及其莫尔圆

## 二、轴对称应力状态

在塑性成形中经常遇到旋转体。当旋转体承受的外力为对称于旋转轴的分布力而且没有周向力时，则物体内的质点就处于轴对称状态。处于轴对称状态时，旋转体的每一个子午面都始终保持平面，而且子午面之间的夹角始终不变。

由于变形体是旋转体，所以采用圆柱坐标或球坐标更为方便。用圆柱坐标表示的单元体及应力状态如图 3.15 所示，其一般的应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\rho\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

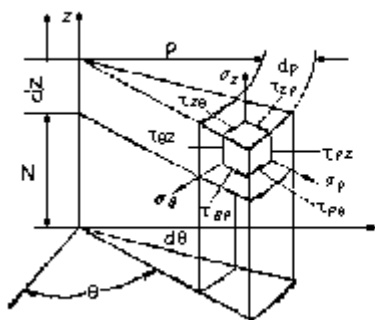


图 3.15 圆柱坐标中单元体上的应力分量

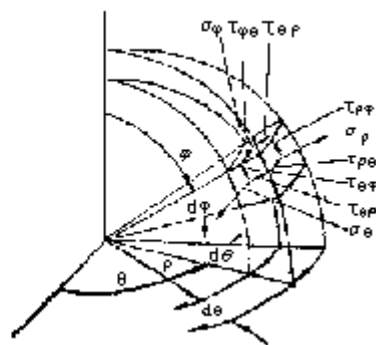


图 3.16 球坐标中单元体上的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta \rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z \rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z \theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho \theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

轴对称状态时，由于子午面（也即  $\theta = 0$  面）在变形过程中始终不会扭曲，所以其特点是：1) 在  $\theta = 0$  面上没有剪应力，即  $\tau_{\rho \theta} = \tau_{z \theta} = 0$ ，故应力张量只有  $\sigma_{\rho}$ 、 $\sigma_{\theta}$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{\rho z}$  等分量，而且  $\sigma_{\rho}$  是一个主应力；2) 各应力分量与  $\theta$  坐标无关，对  $\theta$  的偏导数都为零。所以，用圆柱坐标时的平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{z \rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

值得指出的是，在有些轴对称问题中，例如圆柱体的平砧均匀镦粗、锥孔均匀挤压和拉拔等，其径向正应力和周向正应力是相等的，即  $\sigma_{\rho} = \sigma_{\theta}$ ，这样就又减少了一个未知量。

用球坐标时的单元体及应力状态如图 3.16 所示，其应力分量为  $\sigma_{\rho}$ 、 $\sigma_{\theta}$ 、 $\sigma_{\varphi}$ 、 $\tau_{\rho \theta}$ 、 $\tau_{\rho \varphi}$ 、 $\tau_{\theta \varphi}$ 。一般的平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta \rho}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi \rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho \theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + \tau_{\varphi \rho} \operatorname{ctg} \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi \theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (3\sigma_{\rho \theta} + 2\tau_{\varphi \theta} \operatorname{ctg} \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho \varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta \varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{\rho \varphi}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

轴对称状态时， $\tau_{\theta \rho} = \tau_{\rho \theta} = 0$ ，各分量对  $\theta$  的偏导数都为零，故用球坐标时其微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi \rho}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + \tau_{\rho \varphi} \operatorname{ctg} \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho \varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{\rho \varphi}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

## 习 题

(应力单位均为  $10\text{N} / \text{mm}^2$ )

1 已知  $oxyz$  坐标系中物体内某点的坐标为  $(4, 3, -12)$ ，其应力分量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 40 & -20 \\ 40 & 50 & 30 \\ -20 & 30 & -10 \end{bmatrix}$$

- 将应力分量画在单元体上；
- 求出通过该点且方程为  $x+3y+z=1$  的平面上的正应力和剪应力；
- 求出其主应力，主轴方向，主剪应力，最大剪应力，应力偏张量及球张量；
- 现将直角坐标系改成圆柱坐标系，原点不变，取原  $x$  轴为极轴，试求其应力分量  $\sigma_{ik}(i, k = r, \theta, z)$ 。并判断它是否是轴对称状态。（提示： $\sigma_{ik}$  也就是原坐标系中  $r, \theta, z$  方向各微分面上的应力分量。）
- 设坐标系  $oxyz$  中某点的应力分量为  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。现设一新坐标系  $ox'y'z'$ ，其中三根轴在原坐标系中的方向余弦分别为  $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ 。试模仿式(3.6)的推导过程，推导  $\sigma_{x'y'}, \tau_{x'z'}$  的表达式。
- 试证明应力偏张量的主剪应力、应力主轴方向与原应力张量相同。
- 设某物体内的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -6xy^2 + c_1x^3 \\ \sigma_y &= -\frac{3}{2}c_2xy^2 \\ \tau_{xy} &= -c_2y^3 - c_3x^2y \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\}$$

试求系数  $c_1, c_2, c_3$ 。〔提示：应力场必须满足平衡方程。〕

- 某质点处于平面应力状态下，现已知其中的应力分量  $\sigma_x = 20, \sigma_y = -40, \tau_{xy} = -30$ ，其余未知，试利用应力莫尔圆求出其：主应力、主轴方向、主剪应力及最大剪应力。
- 试导出圆柱坐标的平衡微分方程式(3.31)中的第一式。
- 试举出塑性成形工艺中：平面应力、平面变形、轴对称及一般三向应力状态的例子各一个。