Задача: Определить точку пересечения отрезка и треугольника в 3D пространстве. Отрезок задан координатами концов, треугольник задан координатами всех углов.

Алгоритм решения задачи:

1) Найти уравнение плоскости к которой принадлежит треугольник.
2) Найти уравнение прямой
3) Определение положения координат концов отрезка относительно плоскости
4) Найти точку пересечения прямой и плоскости
5) Проверить принадлежность точки пересечения к области треугольника

Нахождение уравнения плоскости

Пусть заданы 3 точки $P_i(x_i, y_i, z_i)\, i = 1..3$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки определяется следующим образом:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Произведем следующие алгебраические преобразования:

1) Из всех строк вычтем вторую строку
2) Разложим данный определитель по 4 столбцу

Тогда:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{4+2}\cdot\det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = 0$$

где $\vec{A} = P_2 - P_1, \vec{B} = P_3 - P_1$

Раскроем определитель по 1 строке

$$\det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (x-x_1)\left[A_yB_z - B_yA_z\right] - (y-y_1)\left[A_xB_z - B_xA_z\right] + (z-z_1)\left[A_xB_y - B_xA_y\right] = 0$$

Пусть:

$$\left[A_yB_z - B_yA_z\right] = M_1$$
$$\left[A_zB_x - B_zA_x\right] = M_2$$
$$\left[A_xB_y - B_xA_y\right] = M_3$$

Тогда:

$$\det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = M_1(x-x_1) + M_2(y-y_1) + M_3(z-z_1) =$$
$$= M_1x + M_2y + M_3z - \left[M_1x_1 + M_2y_1 + M_3z_1\right] = 0$$
$$-\left[M_1x_1 + M_2y_1 + M_3z_1\right] = M_4$$
$$\det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = M_1x + M_2y + M_3z + M_4 = 0$$

Нахождение уравнения прямой

Для решения поставленной задачи используется уравнение прямой в параметрическом виде.

Пусть отрезок задан точками $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Тогда параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = x_1 + a_x t \\ y = y_1 + a_y t \\ z = z_1 + a_z t \end{cases}$$

где $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1,, a_z = z_2 - z_1$

Определение положения координат концов отрезка относительно плоскости

Подставим координаты концов отрезка в уравнение плоскости

$$K_1 = M_1x_1 + M_2y_1 + M_3z_1 + M_4$$
$$K_2 = M_1x_2 + M_2y_2 + M_3z_2 + M_4$$

Если: $K_1 = K_2 = 0$, то отрезок принадлежит плоскости

Если: $sign(K_1) = sign(K_2)$, то отрезок не пересекает плоскость

Иначе: Перейти к поиску точки пересечения прямой и плоскости.

Примечание: $sign(K) = \begin{cases} -1, \text{если } K < 0 \\ 1, \text{если } K > 0 \end{cases}$

Нахождение точки пересечения прямой и плоскости

Для нахождения координаты пересечения прямой и плоскости, необходимо определить параметр *t* входящий в параметрическое уравнение прямой.

$$t = -\frac{M_1a_x + M_2a_y + M_3a_z}{M_1x_1 + M_2y_1 + M_3z_1 + M_4}$$

Подставим *t* в параметрическое уравнение прямой, тем самым получим точку пересечения.

$$P_{rez} = \begin{cases} x_1 + a_xt \\ y_1 + a_yt \\ z_1 + a_zt \end{cases}$$

Проверка принадлежности точки пересечения к области треугольника

Если сумма площадей треугольников, $S_{P_{rez}P_1P_2}, S_{P_{rez}P_2P_3}, S_{P_{rez}P_1P_3}$ равна площади треугольника $S_{P_1P_2P_3}$, то точка пересечения прямой и плоскости P_{rez} лежит в области треугольника $P_1P_2P_3$:

$$S_{P_{rez}P_1P_2} + S_{P_{rez}P_2P_3} + S_{P_{rez}P_1P_3} = S_{P_1P_2P_3}$$

P_{rez} - искомая точка

Если $S_{P_{rez}P_1P_2} + S_{P_{rez}P_2P_3} + S_{P_{rez}P_1P_3} \neq S_{P_1P_2P_3}$, то точка пересечения прямой и плоскости P_{rez} лежит вне области треугольника $P_1P_2P_3$. В этом случае пересечение отсутствует.