دانشکده‌ی علوم ریاضی

آنالیز الگوریتم ها	مدرس: دکتر شهرام خزایی

تمرین سری پنجم

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۰۰۷۱*

پرسش ۱

برای حل این سوال متغیر های $x_{ij} \in \{0,1\}$ را در نظر میگیریم که x_{ij} نشان دهنده این است که آیا مشتری i به مرکز j وصل شده است(1) یا خیر(0)؟
همچنین $y_j \in \{0,1\}$ ها را در نظر میگیرم که نشان دهنده این است که مرکز i باز شده است(1) یا خیر(0).

میخواهیم x_{ij} ها و y_j ها را طوری انتخاب کنیم که عبارت زیر مینیمم شود:

$$\sum_{j=1}^{n}(f_jy_j + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}c_{ij})$$

(فرض کنید که n مرکز داریم) و قید های ما به صورت زیر است :

$$\text{for all i،j} \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$
$$\text{for all j} \quad y_j \in \{0,1\}$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{1j} = 1$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{2j} = 1$$
$$\cdots$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{mj} = 1$$

که به این معنیست که هر مشتری دقیقا به یک مرکز وصل شده است. و:

$$y_1 \geq max(x_{11}, \ldots, x_{m1})$$
$$y_2 \geq max(x_{12}, \ldots, x_{m2})$$
$$\cdots$$

$$y_n \geq max(x_{1n}, \ldots, x_{mn})$$

که به این معنیست که اگر مشتری به مرکزی متصل است آن مرکز باید باز باشد.
نکته:
عبارت $a \geq max(a_1, \ldots, a_m)$ را میتوان به صورت m نامساوی باز کرد:

$$a \geq a_1$$
$$a \geq a_2$$
$$\ldots$$
$$a \geq a_m$$

پرسش ۲

ابتدا فرض کنید که یک یال در دور همیلتونی ما هست. با حذف آن یال باید بتوانیم یک مسیر همیلتونی به ترتیب راس های قبل فقط با شروع و پایان از دو سر این یال داشته باشیم. پس ابتدا یک یال دلخواه در نظر میگیریم. سپس آن یال را حذف کرده و دو راس دو سر آن را u و v مینامیم. حالا تمام حالت های انتخاب دو راس از راس های مجاور این یال ها را در نظر میگیریم . یال بین این دو راس و بقیه راس های مجاور را حذف میکنیم. یعنی تمام حالاتی که درجه راس های u و v برابر 1 میشود در نظر میگیریم. حالا با استفاده از الگوریتم A چک میکنیم که گراف باقیمانده مسیر همیلتونی دارد یا خیر؟ در نهایت به ازای همه یال ها و همه حالت ها اگر حالتی وجود داشت که جواب بله بود الگوریتم بله خروجی میدهد. و در غیر این صورت جواب خیر است.

اثبات درستی:

به وضوح اگر یک یالی در دور همیلتونی باشد و آنرا حذف کنیم آن دور همیلتونی به مسیر همیلتونی تبدیل میشود. در نتیجه به ازای هر دو راسی که بین آن ها یال بود تمام حالتی که دو یال دیگر آن دو راس میتوانند انتخاب شوند را در نظر میگیریم. پس تمام حالاتی که u و v ممکن است در دور همیلتونی به دو راس دیگر وصل شوند و یال بین آنها در دور باشد را در نظر میگیریم حالا این یال را برداشته و همچنین بقیه یال هایی که در یال های متصل به u و v در این حالت در نظر نگرفته را حذف میکنیم به وضوح اگر دور همیلتونی حاوی یال بین u و v و دو یال دیگری که انتخاب کردیم باشد در گراف باقیمانده حتما دور همیلتونی داریم پس بعد از در نظر گرفتن تمام حالات الگوریتم بله میدهد اگر و تنها اگر دور همیلتونی داشته باشیم.

تحلیل زمانی:

تعداد بار هایی که الگوریتم A را اجرا میکنیم برابر است با تعداد یال ها ضرب در $r_u \times r_v$ که r_u تعداد راس های همسایه u به جز v است. که در کل دست بالا اگر در نظر بگیریم n تعداد راس هاست میشود $O(n^2 \times n^2T(A))$ که در کل چند جمله ایست.

پرسش ۳

اگر به هر یال گراف اصلی دو راس جدید اضافه کنیم گراف سه رنگ پذیر میشود زیرا تمام راس های قبلی را میتوان بنفش کرد چون دیگر هیچ کدام با هم مجاور نیستند. (بین آنها حداقل سه یال جدید فاصله هست.) و همچنین هر کدام از راس الکی ها فقط با یک راس واقعی و یک راس الکی دیگر مجاورند:) پس یکی از راس الکی های هر یال را صورتی و دیگری را نارنجی میکنم. گراف رنگ شد. حالا فرض کنیم بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف G را داریم. چگونه این مجموعه را برای گراف G' محاسبه کنیم؟
مجموعه انتخابی از G' را در نظر میگیرم همان راس های انتخاب شده و دقیقا میتوان به تعداد یال ها دامی نود به این مجموعه اضافه کرد زیرا اگر یک راس در مجموعه اولیه انتخاب شده باشد دو دامی نود مجاور آن انتخاب نمیشوند و دقیقا دو دامی نود بعدی انتخاب میشوند و این دو مشکلی برای مجموعه مستقل ایجاد نمیکنند زیرا اگر راس اصلی مجاور این دامی نود ها انتخاب نشده است چون با راس اصلی انتخاب شده در گراف G مجاور بوده پس مجموعه همچنان مستقل میماند. و همچنین اگر دو راس اصلی دو دامی نود هیچ کدام انتخاب نشده باشند نیز هر کدام از دامی نود ها را به دلخواه انتخاب میکنیم. حالا چرا این مجموعه بزرگترین مجموعه مستقل است؟
اگر بخواهیم در مجموعه مستقلمان تمام نود های مجموعه مستقل اولیه حضور داشته باشند انگاه بیشترین تعداد راس هایی که میتوان به این مجموعه اضافه کرد به تعداد تمام یال هاست. زیرا به هر یال میتوان ماکسیمم یک راس جدید اضافه کرد. اگر یک سر یال انتخاب شده باشد که به وضوح معلوم است. اما اگر دو سر یال انتخاب شده نباشند یعنی هر کدام از آنها عضو یک یال که یک سر آن انتخاب شده باشد هستند که این یعنی انتخاب دو راس برای اضافه کردن به مجموعه از این یال باعث حذف حداقل یک راس از یکی از آن دو یال میشود و تفاوتی ایجاد نمیکند. حالا اگر مجموعه ای داشته باشیم که بزرگترین مجموعه مستقل باشد و تمام اعضای مجموعه مستقل قبلی را ندارد. به ازای هر عضوی از آن مجموعه که ندارد اگر یک دامی نود اضافه کنیم که کاری نکرده ایم چون با داشتن مجموعه قبلی ماکسیمم دامی نود که به تعداد یال هاست را میشد اضافه کرد. و همچنین اگر راس های اصلی ای انتخاب کنیم که با هم مجاورند یک دامی نود به ازای هر مجاورت از دست میدهیم که سودی ندارد و اما ماکسیمم تعداد نامجاور ها نیز همان بود که مجموعه مستقل اولیه داشت پس اندازه بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف G' برابر است با :

$$\text{تعداد یال های G} + \text{اندازه بزرگترین مجموعه مستقل G}$$

اگر تعداد بزرگ ترین مجموعه مستقل در G' را داشته باشیم چگونه این اندازه را برای G محاسبه کنیم؟
برای اینکار با توضیحات قسمت قبل به وضوح کافیست تعداد یال های G را از این تعداد کم کنیم.

پرسش ۴

الگوریتم جریان بیشینه به ما بیشترین جریان گذرنده بدون یال تکراری را میدهد.
اما ما میخواهیم راس ها نیز تکراری نباشند. ایده جالب این است که راس ها را به چشم یال نگاه کنیم و ظرفیت یک به آنها بدهیم که مثلا اگر راسی میتوانست دو واحد جریان عبور دهد حال به یالی با یک واحد جریان تبدیل شده و حداکثر یک واحد جریان عبور میدهد. پس هر راسی که مینیمم درجه ورودی و خروجی آن بیشتر از یک بود را به عنوان دو راس i و o در نظر میگیرم و یال جهت داری از i به o رسم میکنم و یال هایی که به این راس وارد شده بودند را به i وارد میکنم و همچنین آنهایی که از آن خارج شده بودند را از o خارج میکنم. حالا الگوریتم max flow را روی این گراف جدید بین دو راس s و t اجرا میکنیم به این صورت که به یال ظرفیت یک میدهم و اگر گراف جهت

دار نبود نیز هر یال را به صورت دو یال جهت دار میکشم. ادعا میکنم جریان بیشینه ای که از این گراف رد میشود با تعداد مسیر های راس مجزا بین s و t برابر است.

اثبات ادعا:

جریان به اندازه بیشترین تعداد مسیر های راس مجزا به وضوح در گراف جدید قابل عبور دادن است زیرا در هر مسیر جریان 1 واحد جاری میشود و به هر راس مسیر دقیقا جریان یک وارد و جریان یک از آن خارج میشود چون در مجموع مسیر ها هیچ راس تکراری وجود ندارد. پس چنین جریانی قابل عبور دادن است.
حال کافیست نشان دهم که جریان بیشینه عبوری همان جریان بیشینه برای مسیر های راس مجزا است یعنی باید نشان دهم که ممکن نیست این جریان از دو مسیری که راس مشترک دارند عبور کند. فرض کنیم راس مشترک آنها راس a است . حالا در گراف جدیدی که ساختم a_1 و a_2 را داریم که ماکسیمم جریان بین آنها یک است پس اگر بخواهیم هر دوی این مسیر ها را داشته باشیم باید از راس a دو واحد جریان عبور کند که اکنون به علت پایستگی جریان ماکسیمم جریان عبوری از a_1 و a_2 برابر 1 است و این نشان میدهد هیچ دو مسیر با راس مشترکی در گراف اصلی در جریان بیشینه این گراف کمکی انتخاب نمیشوند و اثبات تکمیل میشود.

پرسش ۵

پرسش ۶

برای حل این سوال گراف G' .را به صورتی که در صورت سوال گفته شده است تشکیل میدهم سپس به هر یال وزن ۱ نسبت میدهم. حالا یک جریان از x_0 به اندازه n وارد گراف کرده و در نهایت الگوریتم مکس فلو به یک سری از یال ها عدد یک را نسبت میدهد. گراف S را به صورت زیر میسازم.

$$\begin{aligned} V_s &= V_g \\ (i,j) \in E_g \quad &\text{iff} \quad f_{(x_i,y_j)} = 1 \\ \text{for} \quad &1 \leq i,j \leq n \end{aligned}$$

که: جریان نسبت داده شده به یال e = f_e

ادعا میکنم که این گراف کمترین پوشش مسیری برای گراف G است.

اثبات:

الگوریتم جریان بیشینه در گراف G' بیشترین تعداد یال های ممکن را پیدا میکند که پوشش مسیری راس مجزا به ما میدهند.
دلیل راس مجزا بودن این است که اگر(x_i, y_j) انتخاب شد دیگر (x_i, y_z) یا (x_t, y_j) نمیتوانند انتخاب شوند. چون جریان ورودی و خروجی یک واحد است و پایستگی جریان داریم. و از طرفی دیگر گراف دور ندارد پس تضمین میشود که مجزا بودن راس ها را داریم.
حالا کافیست نشان دهیم کمترین پوشش مسیری همان پوششی است که بیشترین تعداد یال را دارد.
یک پوشش مسیری با تعداد مسیر مشخص میشود که تعداد یال های هر مسیر برابر است با:

$$1 - \text{تعداد راس های آن مسیر}$$

پس تعداد کل یال های این پوشش برابر است با

$$\text{تعداد راس ها} - r$$

که r تعداد مسیر هاست. پس هرچه r کمتر شود تعداد یال ها بیشتر و همچنین هرچه تعداد یال ها بیشتر یعنی تعداد مسیر ها کمتر بوده. پس پوشش مسیری با بیشترین یال ممکن همان پوشش مسیری با کمترین تعداد مسیر است. پس الگوریتم ثابت میشود.

تحلیل زمانی:

تشکیل گراف S از روی f_e های بدست آمده برای یال ها چند جمله ایست و همچنین الگوریتم بیشینه جریان نیز چند جمله ای حل میشود پس این الگوریتم چند جمله ای است.