دانشکده‌ی علوم ریاضی

آنالیز الگوریتم ها	مدرس: دکتر شهرام خزایی

تمرین سری پنجم

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۰۰۷۱*

پرسش ۱

برای حل این سوال متغیر های $x_{ij} \in \{0,1\}$ را در نظر میگیریم که x_{ij} نشان دهنده این است که آیا مشتری i به مرکز j وصل شده است یا خیر؟:
میخواهیم x_{ij} ها را طوری انتخاب کنیم که عبارت زیر مینیمم شود:

$$\sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} x_{ij}(c_{ij}+f_j)$$

و قید های ما به صورت زیر است :

$$\text{for all i،j} \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{1j} = 1$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{2j} = 1$$
$$\cdots$$
$$\sum_{1\leq j\leq n} x_{mj} = 1$$

پرسش ۲

ابتدا فرض کنید که یک یال در دور همیلتونی ما هست. با حذف آن یال باید بتوانیم یک مسیر همیلتونی به ترتیب راس های قبل فقط با شروع و پایان از دو سر این یال داشته باشیم. پس ابتدا یک یال دلخواه در نظر میگیریم. سپس آن یال را حذف کرده و دو راس دو سر آن را u و v مینامیم. حالا تمام حالت های انتخاب دو راس از راس های مجاور این یال ها را در نظر میگیریم . یال بین این دو راس و بقیه راس های مجاور را حذف میکنیم. یعنی تمام حالاتی که درجه راس های u و v ۱ میشود در نظر میگیریم. حالا با استفاده از الگوریتم A چک میکنیم که گراف باقیمانده مسیر همیلتونی دارد یا خیر؟ در نهایت به ازای همه یال ها و همه حالت ها اگر حالتی وجود داشت که جواب بله بود الگوریتم بله خروجی میدهد. و در غیر این صورت جواب خیر است.

اثبات درستی:
تحلیل زمانی:

پرسش ۳

اگر به هر یال گراف اصلی دو راس جدید اضافه کنیم گراف سه رنگ پذیر میشود زیرا تمام راس های قبلی را میتوان بنفش کرد چون دیگر هیچ کدام با هم مجاور نیستند. (بین آنها حداقل سه یال جدید فاصله هست.) و همچینین هر کدام از راس الکی ها فقط با یک راس واقعی و یک راس الکی دیگر مجاورند:) پس یکی از راس الکی های هر یال را صورتی و دیگری را نارنجی میکنم. گراف رنگ شد. حالا فرض کنیم بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف G را داریم. چگونه این مجموعه را برای گراف prime G محاسبه کنیم؟
مجموعه انتخابی از p g را در نظر میگیرم همان راس های انتخاب شده و دقیقا میتوان به تعداد یال ها دامی نود به این مجموعه اضافه کرد زیرا اگر یک راس در مجموعه اولیه انتخاب شده باشد دو دامی نود مجاور آن انتخاب نمیشوند و دقیقا دو دامی نود بعدی انتخاب میشوند و این دو مشکلی برای مجموعه مستقل ایجاد نمیکنند زیرا اگر راس اصلی مجاور این دامی نود ها انتخاب نشده است چون با راس اصلی انتخاب شده در گراف g مجاور بوده پس مجموعه همچنان مستقل میماند. و همچنین اگر دو راس اصلی دو دامی نود هیچ کدام انتخاب نشده باشند نیز هر کدام از دامی نود ها را به دلخواه انتخاب میکنیم. حالا چرا این مجموعه بزرگترین مجموعه مستقل است؟
اگر بخواهیم در مجموعه مستقلمان تمام نود های مجموعه مستقل اولیه حضور داشته باشند انگاه بیشترین تعداد راس هایی که میتوان به این مجموعه اضافه کرد به تعداد تمام یال هاست. زیرا به هر یال میتوان ماکسیمم یک راس جدید اضافه کرد. اگر یک سر یال انتخاب شده باشد که به وضوح معلوم است. اما اگر دو سر یال انتخاب شده نباشند یعنی هر کدام از آنها عضو یک یال که یک سر آن انتخاب شده باشد هستند که این یعنی انتخاب دو راس برای اضافه کردن به مجموعه از این یال باعث حذف حداقل یک راس از یکی از آن دو یال میشود و تفاوتی ایجاد نمیکند. حالا اگر مجموعه ای داشته باشیم که بزرگترین مجموعه مستقل باشد و تمام اعضای مجموعه مستقل قبلی را ندارد. به ازای هر عضوی از آن مجموعه که ندارد اگر یک دامی نود اضافه کنیم که کاری نکرده ایم چون با داشتن مجموعه قبلی ماکسیمم دامی نود که به تعداد یال هاست را میشد اضافه کرد. و همچنین اگر راس های اصلی ای انتخاب کنیم که با هم مجاورند یک دامی نود به ازای هر مجاورت از دست میدهیم که سودی ندارد و اما ماکسیمم تعداد نامجاور ها نیز همان بود که مجموعه مستقل اولیه داشت پس اندازه بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف g p برابر است با :
اندازه بزرگترین مجموعه مستقل g + تعداد یال های G.
اگر تعداد بزرگ ترین مجموعه مستقل در p G را داشته باشیم چگونه این اندازه را برای g محاسبه کنیم؟
برای اینکار با توضیحات قسمت قبل به وضوح کافیست تعداد یال های G رااز این تعداد کم کنیم:)).

پرسش ۴

الگوریتم جریان بیشینه به ما بیشترین جریان گذرنده بدون یال تکراری را میدهد.
اما ما میخواهیم راس ها نیز تکراری نباشند. ایده جالب این است که راس ها را به چشم یال نگاه کنیم و ظرفیت یک به آنها بدهیم که مثلا اگر راسی میتوانست دو واحد جریان عبور دهد حال به یالی با یک واحد جریان تبدیل شده و حداکثر یک واحد جریان عبور میدهد. پس هر راسی که مینیمم درجه ورودی و خروجی آن بیشتر از یک بود را به عنوان دو راس i و o در نظر میگیرم و یال جهت داری از i به o رسم میکنم و یال هایی که به این راس وارد شده بودند

را به i وارد میکنم و همچنین آنهایی که از آن خارج شده بودند را از o خارج میکنم. حالا الگوریتم flow max را روی این گراف جدید بین دو راس s و t اجرا میکنیم به این صورت که به یال ظرفیت یک میدهم و اگر گراف جهت دار نبود نیز هر یال را به صورت دو یال جهت دار میکشم. ادعا میکنم جریان بیشینه ای که از این گراف رد میشود برابر است با تعداد مسیر های راس مجزا بین s و t.
اثبات ادعا:

پرسش ۵

پرسش ۶

برای حل این سوال گراف G' .را به صورتی که در صورت سوال گفته شده است تشکیل میدهم سپس به هر یال وزن ۱ نسبت میدهم. حالا یک جریان از x_0 به اندازه n وارد گراف کرده و در نهایت الگوریتم مکس فلو به یک سری از یال ها عدد یک را نسبت میدهد. گراف S را به صورت زیر میسازم.

$$V_s = V_g$$
$$(i,j) \in E_g \quad iff \quad f_{(x_i,y_j)} = 1$$
$$\text{for} \quad 1 \leq i,j \leq n$$

که: جریان نسبت داده شده به یال e $= f_e$

ادعا میکنم که این گراف کمترین پوشش مسیری برای گراف G است.

اثبات:

الگوریتم جریان بیشینه در گراف G' بیشترین تعداد یال های ممکن را پیدا میکند که پوشش مسیری راس مجزا به ما میدهند.
دلیل راس مجزا بودن این است که اگر(x_i, y_j) انتخاب شد دیگر (x_i, y_z) یا (x_t, y_j) نمیتوانند انتخاب شوند. چون جریان ورودی و خروجی یک واحد است و پایستگی جریان داریم. و از طرفی دیگر گراف دور ندارد پس تضمین میشود که مجزا بودن راس ها را داریم.
حالا کافیست نشان دهیم کمترین پوشش مسیری همان پوششی است که بیشترین تعداد یال را دارد.
یک پوشش مسیری با تعداد مسیر مشخص میشود که تعداد یال های هر مسیر برابر است با:

$$\text{تعداد راس های آن مسیر} - 1$$

پس تعداد کل یال های این پوشش برابر است با

$$\text{تعداد راس ها} - r$$

که r تعداد مسیر هاست. پس هرچه r کمتر شود تعداد یال ها بیشتر و همچنین هرچه تعداد یال ها بیشتر یعنی تعداد مسیر ها کمتر بوده. پس پوشش مسیری با بیشترین یال ممکن همان پوشش مسیری با کمترین تعداد مسیر است.
پس الگوریتم ثابت میشود.

تحلیل زمانی:

تشکیل گراف S از روی f_e های بدست آمده برای یال ها چند جمله ایست و همچنین الگوریتم بیشینه جریان نیز چند جمله ای حل میشود پس این الگوریتم چند جمله ای است.