دانشکده‌ی علوم ریاضی

آنالیز الگوریتم ها	مدرس: دکتر شهرام خزایی

تمرین سری یک

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی:* ۴۰۱۱۰۰۰۷۱

پرسش ۱

به صورت کلی درباره تمام قسمت ها رابطه ای را که به دست آوردم را اعلام میکنم و سپس با استقرا ابتدا نشان میدهم که از O آن رابطه و سپس نشان میدهم از Ω آن رابطه است.

آ) ادعا : رابطه از $\Theta(n)$ است.

برهان : رابطه از $O(n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\sqrt{n}) < C\sqrt{n}$ حال داریم :

$$T(n) < C\sqrt{n} + n$$

برای $C = 2$ و $n > 4$ داریم :

$$T(n) < Cn$$

برهان : رابطه از $\Omega(n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\sqrt{n}) > C\sqrt{n}$ حال داریم :

$$T(n) > C\sqrt{n} + n$$

برای $C = \frac{1}{2}$ داریم :

$$T(n) > Cn$$

ب) ادعا : رابطه از $\Theta(n^2)$ است.

برهان : رابطه از $O(n^2)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n-\sqrt{n}}{4}) < C(\frac{n-\sqrt{n}}{4})^2$ حال داریم :

$$T(n) < 8C(\frac{n-\sqrt{n}}{4})^2 + n^2$$

$$T(n) < 8C\frac{n^2+n-2n\sqrt{n}}{16} + n^2$$

$$T(n) < C\frac{n^2+n-2n\sqrt{n}}{2} + n^2$$

$$T(n) < C\frac{n^2}{2} + C\frac{n}{2} - Cn\sqrt{n} + n^2$$

$$T(n) < (\frac{C}{2}+1)n^2 + C\frac{n}{2} - Cn\sqrt{n}$$

برای $C > 2$ و $n > 1$ داریم :

$$T(n) < Cn^2$$

برهان : رابطه از $\Omega(n^2)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n-\sqrt{n}}{4}) > C(\frac{n-\sqrt{n}}{4})^2$ حال داریم :

با انجام محاسبات قسمت قبل داریم:

$$T(n) > (\frac{C}{2}+1)n^2 + C\frac{n}{2} - Cn\sqrt{n}$$

که برای $C = 1$ و $n > 4$ داریم؛

$$T(n) > Cn^2$$

پ) ادعا : رابطه از $\Theta(n^{log 3})$ است.

برهان : رابطه از $O(n^{\log 3})$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{2}) < C((\frac{n}{2})^{\log 3}) - C\frac{n}{2}$ حال داریم :

$$T(n) < 3C(\frac{n^{\log 3}}{2^{\log 3}}) - \frac{3Cn}{2} + n$$

$T(n) < Cn^{\log 3} - \frac{3Cn}{2} + n$

که برای $C > 2$ داریم: $T(n) < C(n)^{\log 3} - Cn$

برهان : رابطه از $\Omega(n^{\log 3})$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{2}) > C(\frac{n}{2})^{\log 3}$ حال داریم :

$T(n) > 3C(\frac{n^{\log 3}}{2^{\log 3}}) + n$

$T(n) > Cn^{\log 3} + n$

برای $n > 0$ داریم:

$T(n) > C(n)^{\log 3}$

ت) ادعا : رابطه از $\Theta(n^{0.51})$ است.

برهان : رابطه از $O(n^{0.51})$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{4}) < C(\frac{n}{4})^{0.51}$ حال داریم :

$T(n) < 2C(\frac{n^{0.51}}{4^{0.51}}) + n^{0.51}$

$T(n) < n^{0.51}(1 + \frac{2C}{4^{0.51}})$

که برای $C > \frac{4^{0.51}}{4^{0.51}-2}$ که تقریبا برابر با 72 است. پس مثلا $C = 80$

$T(n) < Cn^{0.51}$

برهان : رابطه از $\Omega(n^{0.51})$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{4}) > C(\frac{n}{4})^{0.51}$ حال داریم :

$T(n) > n^{0.51}(1 + \frac{2C}{4^{0.51}})$

که برای $0 < C < \frac{4^{0.51}}{4^{0.51}-2}$ مثلا $C = 1$

$T(n) > Cn^{0.51}$

ث) ادعا : رابطه از $\Theta(n^2)$ است.

برهان : رابطه از $O(n^2)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{2}) < C(\frac{n}{2})^2 - D\frac{(\frac{n}{2})}{\ln \frac{n}{2}}$ حال داریم :

$T(n) < 4C(\frac{n}{2})^2 - 4D\frac{(\frac{n}{2})}{\ln \frac{n}{2}} + \frac{n}{\ln n}$

$T(n) < Cn^2 - D\frac{(2n)}{\ln \frac{n}{2}} + \frac{n}{\ln n}$

که برای $D > 1$ داریم:

$T(n) < Cn^2$

برهان : رابطه از $\Omega(n^2)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{2}) > C(\frac{n}{2})^2$ حال داریم :

$T(n) > 4C\frac{n^2}{4} + \frac{n}{\ln n}$

$T(n) > Cn^2 + \frac{n}{\ln n}$

که چون $n > 0$ $\quad \frac{n}{\ln n}$ داریم:

$T(n) > Cn^2$

ج) ادعا : رابطه از $\Theta(n \ln n)$ است.

برهان : رابطه از $O(n \ln n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{3}) < C\frac{n}{3} \ln \frac{n}{3}$ و $T(\frac{2n}{3}) < C\frac{2n}{3} \ln \frac{2n}{3}$ حال داریم :

$T(n) < C\frac{n}{3}\ln\frac{n}{3} + C\frac{2n}{3}\ln\frac{2n}{3} + dn$

$T(n) < C\frac{n}{3}\ln n - C\frac{n}{3}\ln 3 + C\frac{2n}{3}\ln n + C\frac{2n}{3}\ln 2 - C\frac{2n}{3}\ln 3 + dn$

$T(n) < Cn\ln n - C\frac{n}{3}\ln 3 + C\frac{2n}{3}\ln 2 - C\frac{2n}{3}\ln 3 + dn$

که برای $C > \frac{d}{\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2}$ داریم:

$T(n) < Cn\ln n$

برهان : رابطه از $\Omega(n\ln n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{3}) > C\frac{n}{3}\ln\frac{n}{3}$ و $T(\frac{2n}{3}) > C\frac{2n}{3}\ln\frac{2n}{3}$ حال داریم :

$T(n) > Cn\ln n - C\frac{n}{3}\ln 3 + C\frac{2n}{3}\ln 2 - C\frac{2n}{3}\ln 3 + dn$

که برای $0 < C < \frac{d}{\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2}$ داریم:

$T(n) > Cn\ln n$

چ) ادعا : رابطه از $\Theta(n)$ است.

برهان : رابطه از $O(n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{5}) < C\frac{n}{5}$ و $T(\frac{7n}{10}) < C\frac{7n}{10}$ حال داریم :

$T(n) < C(\frac{2n}{10}) + C(\frac{7n}{10}) + dn$

$T(n) < C(\frac{9n}{10}) + dn$

که برای $C > 10d$ داریم :

$T(n) < Cn$

برهان : رابطه از $\Omega(n)$ است.

به عنوان گام استقرا فرض میکنیم $T(\frac{n}{5}) > C\frac{n}{5}$ و $T(\frac{7n}{10}) > C\frac{7n}{10}$ حال داریم :

$$T(n) > C(\frac{9n}{10}) + dn$$

که برای $C < 10d$ مثلا $C = 9d$ داریم :

$$T(n) > Cn$$

پرسش ۲

آ)

$$a = A[n/2]$$
$$b = B[n/2]$$

ابتدا a و b را با هم مقایسه میکنیم فرض کنیم b بزرگ تر باشد این یعنی $\frac{n}{2}$ عضو بزرگ تر از b در ارایه A قرار دارد (تمام اعضای بعد از a و در خود ارایه B نیز تمام اعضای بعد از b از آن بزرگ ترند پس میانه قطعا کوچک تر مساوی b است و میتوانیم نصفه دوم آرایه B را دور بریزیم از طرفی دیگر با همین استدلال میانه حتما بزرگ تر از a است پس حالا میتوانیم نیمه اول آرایه A را نیز دور بریزیم حالا کافیست میانه را برای دو ارایه هر کدام به طول $\frac{n}{2}$ حل کنیم (چون تعداد اعضای بزرگ تر و کوچک تر از میانه که دور ریخته شدند برابرند پس میانه دقیقا میانه اعضای باقی مانده است) . پس رابطه بازگشتی ما به صورت زیر است:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(1)$$

که طبق قضیه مستر برابر با $O(\log n)$ است.
ب) فرض کنیم $m > n$ باشد ادعا میکنم $\frac{m-n}{2}$ اول و $\frac{m-n}{2}$ اخر از آرایه به طول m میانه نیست و میتوان آنهارا حذف و میانه را برای دو آرایه به طول n حل کرد با اثبات این ادعا با کمک قسمت قبل $O(\log a)$ میتوان میانه را پیدا کرد که $a = \min(m, n)$ است.
برهان.

$$a = B[\frac{n-m}{2}]$$
$$b = B[m - \frac{n-m}{2}]$$

تعداد اعضای بزرگ تر از a برابر با $m - \frac{m-n}{2}$ است که برابر است با $\frac{n+m}{2}$. از طرفی دیگر میانه کل این $m + n$ عضو برابر با عضو $\frac{n+m}{2}$ ام است. پس میانه بزرگ تر مساوی a است. به همین طریق میانه کوچک تر مساوی b است و میتوان اعضای بزرگ تر از b و کوچک تر از a را دور ریخت و ادعا ثابت میشود.

پرسش ۳

ایده اصلی این سوال استفاده از ضرب چند جمله ای است. ابتدا روی ارایه n مدیر عامل پیمایش میکنیم و اگر چرب زبانی او i واحد بود جمله x^i را به چند جمله ای مدیران اضافه میکنیم پس در نهایت به چند جمله ای به صورت $\sum_{i=1}^{m} a_i x^i$ که a_i نشان دهنده تعداد افراد با چرب زبانی i واحد است.
همین روند را پی گرفته و برای سرمایه گذاران چند جمله ای $\sum_{i=1}^{m} b_i x^i$ را تشکیل میدهیم که در آن b_i نشان دهنده تعداد سرمایه گذاران با چرب زبانی i است. حالا برای مثال سرمایه گذاری با چرب زبانی i و مدیر عاملی با چرب زبانی j زمان $i+j$ با هم صحبت میکنند که اگر عملیات $x^i \times x^j$ را انجام دهیم توان بدست آمده همان زمان صحبت این دو نفر است و ضریب آن نشان دهنده تعداد مکالماتیست که این مجموع خاص را به ما میدهند. حالا میدانیم با تبدیل FFT میتوانیم ضرب چند جمله ای را $O(n \log n)$ که n ماکسیمم درجه آن است انجام دهیم. و از آنجایی که ماکسیمم درجه این چند جمله ای ها ۲m است میتوان $O(m \log m)$ این ضرب را انجام داد و در ابتدا برای تشکیل چند جمله ای روی آرایه n عضوی افراد $O(n)$ طول کشید. پس زمان کل الگوریتم $O(n + m \log m)$.

پرسش ۴

پرسش ۵

با روش تقسیم و حل این سوال را حل خواهم کرد و ایده اصلی سوال تقسیم کردن حول عوض یکتا در هر مرحله است.
ابتدا در نظر میگیریم که در هر آرایه دلخواه اگر بخواهیم تمام زیرآرایه ها دارای عضو یکتا باشند خود آرایه اصلی که جز زیرآرایه هاست نیز دارای عوض یکتاست. پس در هر آرایه واجد شرایط حداقل یک عضو یکتا وجود دارد و ما تقسیم و حل را حول آن عضو انجام میدهیم.
اگر تمام زیر آرایه های آرایه ی سمت راست عضو یکتا دارای عضو یکتا باشند و همچنین تمام زیر آرایه های آرایه سمت چپ عضو یکتا نیز دارای عضو یکتا باشند به وضوح تمام زیر آرایه هایی که یک قسمت از آنها در زیر آرایه سمت چپ و قسمت دیگر آنها در زیر آرایه سمت راست هستند به دلیل اینکه شامل عضو یکتا میشوند حتما دارای عضو یکتا هستند.(که همان عضو یکتایی است که حول آن تقسیم و حل انجام دادیم) پس کافیست عضو یکتا را بیابیم که با مرتب سازی آرایه ($O(n \ln n)$) و پیمایش روی آن ($O(n)$) میتوان عضو یکتا را پیدا کرد. پس رابطه بازگشتی ما به صورت زیر است.

$$T(n) = T(k-1) + T(n-k) + \Theta(n \ln n)$$

که در آن k اندیس عوض یکتای آرایه است.
اگر احتمال اینکه عضو یکتای اولی که پیدا میکنیم هر یک از عناصر آرایه باشد را برابر در نظر بگیریم داریم:

$$P(k=i) = \frac{1}{n} \qquad i = (1, 2, ..., n)$$

پس احتمال اینکه این عضو در یک دوم میانی آرایه باشد برابر با $\frac{1}{2}$ است. که دقیقا به روابط کوییک سورت میرسیم و قبلا نشان دادیم میانگین زمان اجرای این الگوریتم چگونه محاسبه میشود. فقط برای آن الگوریتم هزینه ادغام $O(n)$ بود و اگر در حل آن معادله هزینه ادغام را $O(n \ln n)$ در نظر بگیریم میانگین زمان اجرای این الگوریتم برابر با $O(n \ln^2 n)$ است.

پرسش ۶