



مدرس: دکتر سحر قاجار

احتمال و کاربرد آن

## تمرین سری دو

طراح: پوریا گلستانی

### پرسش ۱

در کشور A،  $n$  نفر آدم زندگی می‌کنند که اگر از آنها بپرسیم که بیشتر به رشد اقتصادی اهمیت می‌دهند یا به کاهش تورم، هر نفر به احتمال  $P$  رشد اقتصادی و به احتمال  $1 - P$  به کاهش تورم اهمیت می‌دهد. حال فرض کنید که پارامتر  $\theta$  که بین ۰ و ۱ است مقدار رشد اقتصادی که به صورت  $1 + 2\theta^2$  است و مقدار تورم که به صورت  $\theta$  است را مشخص می‌کند. اگر ما میزان خوشحالی کل کشور A را به صورت  $g \times n_1 - \inf \times n_2$  در نظر بگیریم که  $g$  رشد اقتصادی است،  $\inf$  میزان تورم،  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب تعداد افرادی که به رشد اقتصادی اهمیت می‌دهند و افرادی که به کاهش تورم اهمیت می‌دهند و  $n_1 + n_2 = n$ . بهترین مقداری که دولت میتواند برای  $\theta$  انتخاب کند چه قدر است؟

### پرسش ۲

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر  $p$  باشد، نشان دهید

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p \ln(p)}{1 - p}$$

### پرسش ۳

$n$  توپ به طور همزمان در  $n$  جعبه انداخته میشود. هر توپ به صورت تصادفی در یکی از جعبه ها قرار میگیرد. امید ریاضی تعداد جعبه هایی که خالی خواهند ماند را به دست آورید.

### پرسش ۴

آ فردی هرروز به استخر میرود و به صورت تصادفی کلید یکی از ۳۵۰ کمد موجود در استخر را میگیرد، امید ریاضی تعداد روز هایی که این فرد باید به استخر بیاید تا کلید کمد تکراری به او بیافتد چقدر است؟

ب) دکمه ای داریم که با هر بار فشار دادن آن به احتمال عدد روی دکمه تقسیم بر ۱۰۰ ممکن است بیاوریم و عدد روی دکمه ۰ شود، در غیر این صورت عدد روی دکمه یکی افزایش خواهد یافت. امید ریاضی آخرین عددی که قبل باخت روی دکمه میبینیم چه قدر است؟ ( فرض کنید عدد روی دکمه از ۱ شروع میشود؛ همچنین جواب را به صورت ناصریح نیز میتوانید بنویسید.)

### پرسش ۵

در یک جدول  $6 \times 6$  هر خانه را با احتمال  $p$  و مستقل از بقیه سیاه کرده ایم. (آ) امید ریاضی محیط ناحیه سیاه رنگ را محاسبه کنید. (ب) به ازای چه هایی  $p$  امید ریاضی محیط بیشینه می شود؟

### پرسش ۶

فرض کنید قبل از کوییز درس احتمال هر دانش جو سوالی را می پرسد که با احتمال  $p$  در کوییز خواهد آمد. فرض کنید تعداد دانش جویانی که در کلاس درس حاضر می شوند یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد. احتمال این که دستیاران آموزشی درس مجبور به حل هیچ سوالی از کوییز نباشند را به دست آورید.

### پرسش ۷

یک شهر به صورت جدولی  $1000 \times 1000$  از خانه ها است (در هر سلول جدول یک خانه قرار دارد) این شهر به منطقه هایی به ابعاد  $50 \times 50$  تقسیم شده است. می دانیم در هر ماه به طور متوسط  $500$  آتش سوزی رخ می دهد. چه قدر احتمال دارد در یک ماه در هر منطقه آتش سوزی رخ دهد؟