



مدرس: دکتر سحر قاجار

احتمال و کاربرد آن

## تمرین سری چهارم

طراح: کوشا معینی

### پرسش ۱

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته و  $Y$  یک متغیر تصادفی گسسته باشد. نشان دهید تابع توزیع شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{P\{Y = y|X = x\}}{P\{Y = y\}}f(x)$$

### پرسش ۲

یک شرکت بیمه فرض می‌کند که هر فرد پارامتری تصادفی با توزیع پواسون و میانگین  $\lambda$  دارد. پارامتر  $\lambda$  به صورت متغیر تصادفی گاما با پارامترهای  $\alpha$  و  $k$  توزیع شده است. اگر فردی تازه بیمه شده باشد و در اولین سال  $n$  تصادف مرتکب شود:

۱. تعداد متوسط تصادفات او در سال جاری را تعیین کنید.

۲. مقدار شرطی پارامتر تصادف وی را پیدا کنید.

### پرسش ۳

یک فروشگاه دو مکان جداگانه برای کنترل مشتریان دارد. مکان اول شامل صندوق‌های استفاده‌شده با تعداد دفعات  $X$  و مکان دوم شامل صندوق‌های استفاده‌شده با تعداد دفعات  $Y$  است. تابع احتمال توأم به صورت زیر داده شده است:

$y \backslash x$	0	1	2
0	0.12	0.04	0.04
1	0.08	0.19	0.05
2	0.06	0.12	0.30

۱. تابع چگالی حاشیه‌ای  $X$  و  $Y$  را پیدا کنید.

۲.  $E(X)$ ،  $E(X|Y = 2)$  و  $E(XY)$  را محاسبه کنید.

## پرسش ۴

تابع احتمال چگالی برای دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x + 2y) & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

۱. آیا  $X$  و  $Y$  مستقل هستند؟

۲.  $P(X + Y < 1)$  را محاسبه کنید.

۳.  $E(\frac{X}{Y^4} + X^2Y)$  را محاسبه کنید.

۴. امید شرطی  $E(X|Y = y)$  را پیدا کنید.

## پرسش ۵

فرض کنید دو متغیر تصادفی پیوسته  $X$  و  $Y$  مستقل باشند و تابع چگالی توأم آنها به صورت زیر تعریف شود:

$$f_{X,Y}(x, y) = h(x)g(y), \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

اگر تابع چگالی توأم به صورت زیر باشد، آیا  $X$  و  $Y$  مستقل هستند؟

$$f(x, y) = 6e^{-2x}e^{-3y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

اگر تابع چگالی توأم به صورت زیر باشد، چه می‌توان گفت؟

$$f(x, y) = 24xy, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1.$$

## پرسش ۶

آمبولانسی با سرعت ثابت در جاده‌ای به طول  $L$  حرکت می‌کند. فرض کنید حوادث به طور یکنواخت روی بازه  $[0, L]$  توزیع شده‌اند. فاصله محل حادثه تا آمبولانس نیز به طور یکنواخت توزیع شده است. استقلال این دو متغیر را بررسی کنید.

## پرسش ۷

۱. روی خطی به طول  $L$ ، دو نقطه تصادفی  $X$  و  $Y$  به طور مستقل انتخاب شده‌اند.  $X$  روی بازه  $[0, \frac{L}{2}]$  و  $Y$  روی بازه  $[\frac{L}{2}, L]$  یکنواخت توزیع شده است. احتمال اینکه فاصله بین این دو نقطه بیش از  $\frac{L}{2}$  باشد، پیدا کنید.

۲. احتمال اینکه  $X, Y$ ، و نقطه  $L$  اضلاع یک مثلث تشکیل دهند را تعیین کنید (طول هر ضلع باید از مجموع طول دو ضلع دیگر کمتر باشد).