دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر سحر قاجار

پاسخنامه تمرین سری ششم

گردآورنده: کژال باغستانی

پرسش ۱

فرض کنید n آزمایش برنولی به صورت مستقل با احتمال موفقیت $\frac{1}{2}$ اجرا میشود. نشان دهید اگر در نظر بگیریم X متغیر تصادفی تعداد موفقیت های حاصل از این آزمایش ها باشد، داریم:

$$Pr[X \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n}] \leq \frac{1}{4}$$

پاسخ. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی برنولی با احتمال موفقیت $p = \frac{1}{2}$ باشند و مجموع آن‌ها را به صورت $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ تعریف کنیم. همچنین داریم:

$$\mathbb{E}[X_i] = p = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{4}.$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی برابر است با:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

که در این مثال $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j$ پس داریم:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = n \cdot \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

برای محاسبه $Pr\left(X \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right)$، از نابرابری چبیشف استفاده می‌کنیم. نابرابری چبیشف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Pr(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}.$$

همچنین نامساوی بالا به ما نامساوی زیر را نیز نتیجه میدهد:

$$Pr(X - \mathbb{E}[X] \geq k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}.$$

با قرار دادن $k = 2$ و جایگذاری مقادیر بدست آمده تا اینجا داریم:

$$Pr(X - \frac{n}{2} \geq \sqrt{n}) \leq \frac{1}{4}.$$

که همان خواسته سوال است.$\square$

پرسش ۲

آ) برای هر متغیر نامنفی X و هر $a > 0$ ، ثابت کنید

$$E[X] \geq aP[X \geq a]$$

ب) با ایده اثبات بخش قبل، با فرض اینکه $X < 2E[X]$ سعی کنید یک کران بالا برای مقدار $P[X \leq \frac{E[X]}{2}]$ بدست بیاورید.

پ) ثابت کنید برای هر مقدار $t > 0$ که تابع مولد گشتاور در X در t قابل تعریف باشد و هر $a \in \mathbb{R}$

$$e^{-a.t} M_X(t) \geq P[X \geq a]$$

پاسخ.

آ) از تعریف امید ریاضی، می‌دانیم:

$$E[X] = \int_0^a xf(x)\,dx + \int_a^\infty xf(x)\,dx.$$

قسمت اول انتگرال مقداری نامنفی است، بنابراین داریم:

$$E[X] \geq \int_a^\infty xf(x)\,dx.$$

همچنین در قسمت دوم انتگرال داریم $x \geq a$ بنابرین:

$$\int_a^\infty xf(x)\,dx \geq \int_a^\infty af(x)\,dx.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم:

$$\int_a^\infty af(x)\,dx = a\int_a^\infty f(x)\,dx = aP[X \geq a].$$

در نتیجه:

$$E[X] \geq aP[X \geq a].$$

ب)

از تعریف امید ریاضی و با توجه به اینکه $0 \le X \le 2E[X]$، می‌دانیم:

$$E[X] = \int_0^{\frac{E[X]}{2}} xf(x)\,dx + \int_{\frac{E[X]}{2}}^{2E[X]} xf(x)\,dx.$$

عبارات داخل انتگرال مقادیری نامنفی است، بنابراین داریم:

$$E[X] \le \frac{E[X]}{2}\int_0^{\frac{E[X]}{2}} f(x)\,dx + 2E[X]\int_{\frac{E[X]}{2}}^{2E[X]} f(x)\,dx$$
$$= \frac{E[X]}{2}P[X \le \frac{E[X]}{2}] + 2E[X](1 - P[X \le \frac{E[X]}{2}])$$

با فرض $E[X] > 0$ و تقسیم دو طرف نامساوی به آن داریم:

$$1 \le \frac{1}{2}P[X \le \frac{E[X]}{2}] + 2 - 2P[X \le \frac{E[X]}{2}]$$

یا همان:

$$P[X \le \frac{E[X]}{2}] \le \frac{2}{3}.$$

پ)

روش اول)

برای اثبات نابرابری

$$e^{-a\cdot t}M_X(t) \ge P[X \ge a],$$

از تعریف تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx}f_X(x)\,dx.$$

در بازه $x \ge a$ داریم $e^{tx} \ge e^{ta}$. بنابراین:

$$M_X(t) \ge \int_a^{\infty} e^{ta}f_X(x)\,dx = e^{ta}P[X \ge a].$$

دو طرف را بر e^{ta} تقسیم می‌کنیم:

$$e^{-a\cdot t}M_X(t) \ge P[X \ge a].$$

روش دوم)

برای حل این قسمت از markov's inequality که در بخش اول اثبات کردیم استفاده می‌کنیم. داریم:

$$X \ge a \overset{t>0}{\Longleftrightarrow} e^{tX} \ge e^{ta}$$
$$\xRightarrow{\textbf{markov's inequality}} \mathbb{P}[e^{tX} \ge e^{ta}] \le \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta}\mathbb{E}[e^{tX}] = e^{-ta}M_X(t)$$

توجه کنید e^{tX} و e^{ta} هردو نامنفی هستند بنابراین می‌توانیم از markov's inequality استفاده کنیم. در اینجا حل مسئله کامل می‌شود. $\square$

پرسش ۳

با استفاده از قضیه حد مرکزی ثابت کنید که متوسط فاصله از مبدأ برای یک قدم زن تصادفی پس از n حرکت تقریبا برابر با $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ است.(قدم زن فقط به سمت چپ و راست حرکت میکند)

پاسخ.

X_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if in step } i \text{ we go to the right} \\ -1 & \text{if in step } i \text{ we go to the left} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[X_i] = 0 \\ Var[X_i] = 1 \end{cases}$$

حال $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را تعریف می‌کنیم و داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[Y_n] = 0 \\ Var[Y_n] = n \end{cases}$$

حال می‌خواهیم با CLT ثابت کنیم $\mathbb{E}[|Y_n|] \approx \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ برای nهای به اندازه کافی بزرگ. طبق CLT داریم:

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \quad \textbf{where } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

حال از Continuous Mapping Theorem داریم که $|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}| \to |Z|$ پس:

$$\mathbb{E}[|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}|] = \frac{\mathbb{E}[|Y_n|]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[|Y_n|] \approx \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

حال به عنوان لمی که در حل سوال به صورت بالا استفاده می‌شود ثابت می‌کنیم $E[|Z|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. داریم:

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

حال با تغییر متغیر $u = \frac{z^2}{2}$ داریم:

$$\mathbb{E}[|Z|] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

پس این لم نیز ثابت شد و حل مسئله کامل می‌شود. $\square$

پرسش ۴

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و Y یک متغیر مستقل از X با تابع جرم احتمال زیر باشد

$$P(Y=+1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$$

آ) ثابت کنید $Z=XY$ هم توزیع نرمال دارد.
ب) میانگین و واریانس Z را بیابید.
پ) $cov(X,Y)$ را بدست آورید.
ت) آیا $X+Z$ هم توزیع نرمال دارد؟

پاسخ.

آ)
با تابع گشتاور مسئله را حل می‌کنیم:

$$M_Z(t)=\mathbb{E}[e^{tZ}]=\mathbb{E}[e^{tXY}]=\sum_{y\in\{+1,-1\}}\mathbb{E}[e^{tXy}]\mathbb{P}[Y=y]$$

$$\Longrightarrow M_Z(t)=\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{tX}]+\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{-tX}]=\frac{1}{2}M_X(t)+\frac{1}{2}M_X(-t)\overset{X\sim\mathcal{N}(0,1)}{=}\mathbf{exp}(\frac{t^2}{2})$$

پس توزیع Z نیز نرمال استاندارد است.
ب)
طبق قسمت قبل با توجه به نرمال استاندارد بودن توزیع Z به ترتیب $\mu_Z=0$ و $\sigma_Z^2=1$ محاسبه می‌شود.
پ)

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[Z]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=0-0\times 0=0$$

ت)

$$M_{X+Z}(t)=\mathbb{E}[e^{t(X+Z)}]=\mathbb{E}[e^{tX(1+Y)}]=\sum_{y\in\{+1,-1\}}\mathbb{E}[e^{tX(1+y)}]\mathbb{P}[Y=y]$$

$$=\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{tX(1+1)}]+\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{tX(1-1)}]=\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{2tX}]+\frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{0}]=\frac{1}{2}M_X(2t)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mathbf{exp}(2t^2)+\frac{1}{2}$$

می‌دانیم اگر $W\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ باشد داریم:

$$M_W(t)=\mathbf{exp}(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})$$

حال طبق قضیه یکتایی ثابت می‌شود که $X+Z$ نرمال نیست و حل مسئله به اتمام می‌رسد. $\square$

پرسش ۵

طول عمر ریزپردازنده‌های تولیدی یک کارخانه از توزیع نرمال با میانگین $\mu = 1.4\times 10^6$ و واریانس $\sigma^2 = 9\times 10^{10}$ پیروی می‌کنند. احتمال اینکه در یک دسته‌ی ۲۰۰ تایی از این ریزپردازنده‌ها، حداقل ۲۰تا با طول عمر کمتر از 1.8×10^6 موجود باشد، تقریبا چقدر است؟ (در صورت نیاز، به این موضوع توجه کنید که به ازای $z < -4$ تابع $\Phi(z) \approx 0$ است.)

پاسخ.

در ابتدا X را عمر یک microprocessor تعریف می‌کنیم که

$$\Longrightarrow \begin{cases} X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \mu = 1.4 \times 10^6 \\ \sigma = 3 \times 10^5 \end{cases}$$

حال مقدار $P[X < 1.8 \times 10^6]$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$p = P[X < 1.8 \times 10^6] = P[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.8 \times 10^6 - 1.4 \times 10^6}{3 \times 10^5}]$$

$$= P[Z < \frac{1.8 \times 10^6 - 1.4 \times 10^6}{3 \times 10^5}] = \Phi(1.33)$$

$$\Longrightarrow p = \Phi(1.33) \approx 0.9082$$

بنابراین احتمال اینکه عمر یک پردازنده کمتر از 1.8×10^6 باشد حدود 0.9082 است. حال 200 تا microprocessor را درنظر می‌گیریم و X_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if lifetime of the microprocessor } i \text{ is less than } 1.8 \times 10^6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال $Y = \sum_{i=1}^{200} X_i$ را تعریف می‌کنیم که X_i ها مستقل از هم هستند. حال به دنبال محاسبه $\mathbb{P}[Y \geq 20]$ هستیم. همچنین می‌دانیم $Y \sim \mathbf{Bin}(200, p)$ است. حال داریم:

$$(Y) \begin{cases} \mathbb{E}[Y] = 200p = 200 \times 0.9082 = 181.64 \\ Var[Y] = 200p(1-p) = 200 \times 0.9082 \times 0.0918 = 16.67 \end{cases}$$

حال چون n مقداری بزرگ است از CLT استفاده می‌کنیم و داریم:

$$Y \sim \mathbf{Bin}(200, 0.9082) \approx Z' \sim \mathcal{N}(181.64, 16.67)$$

چون یک توزیع گسسته را با توزیعی پیوسته تقریب می‌زنیم از ایده continuity correction برای بهبود تقریب استفاده می‌کنیم. حال داریم:

$$\Longrightarrow \mathbb{P}[Y \geq 20] = 1 - \mathbb{P}[Y < 20] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 19] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 19.5]$$

$$\Longrightarrow 1-\mathbb{P}[Y\le 19.5]=1-\mathbb{P}[Z'\le \frac{19.5-181.64}{4.08}]=1-\Phi(-39.74)$$

حال طبق فرض مسئله به ازای $Z<-4$ خواهیم داشت $\Phi(Z)\approx 0$ پس:

$$\mathbb{P}[Y\ge 20]=1-\Phi(-39.74)\approx 1 \quad \square$$

پرسش ۶

فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله ای از متغیر های تصادفی پوآسون با پارامتر 1 و مستقل باشد، با استفاده از این دنباله و قضیه حد مرکزی نشان دهید :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$$

پاسخ.

در ابتدا $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ را متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda=n$ می‌گیریم. داریم:

$$\mathbb{P}[Y_n\le n]=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[Y_n=k]=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^ke^{-n}}{k!}=\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}S$$

حال طبق قضیه حد مرکزی همین احتمال را دوباره محاسبه میکنیم ، می‌دانیم $\frac{Y_n-\mu_n}{\sigma_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n}{\sigma_n}=Z$ برای nهای بزرگ به توزیع نرمال میل می‌کند. حال داریم:

$$\mathbb{P}[Y_n\le n]=\mathbb{P}[\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\le 0]=\mathbb{P}[Z\le 0]=\frac{1}{2}$$

از این رو وقتی $n\to\infty$ آنگاه $\mathbb{P}[Z\le 0]=\frac{1}{2}$ پس در نهایت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\mathbb{P}_{n\to\infty}[Y_n\le n]=\mathbb{P}[Z\le 0]=\frac{1}{2}\quad\square$$

پرسش ۷

به سوالات زیر پاسخ دهید.(قسمت ب و پ امتیازی)

آ) فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد. نشان دهید به ازای هر $a>0$ و هر $k>0$ داریم:

$$Pr[X\ge a]\le\frac{E[X^k]}{a^k}.$$

ب) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد و X نیز یک متغیر تصادفی باشد. نشان دهید اگر و فقط اگر

$$Pr\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\}=1$$

داشته باشیم، برای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} Pr[\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| \geq \epsilon\}] = 0$$

راهنمایی: درمورد

$$Pr[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}]$$

چه می‌توان گفت؟

پ) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله ای از متغیر های تصادفی باشد. اگر $k > 0$ موجود باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^k] < +\infty$ نشان دهید $Pr[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] = 1$ است.

پاسخ.

آ) می‌دانیم اگر $X \geq a$ باشد آنگاه $X^k \geq a^k$ پس درواقع $\{X^k \geq a^k\} \subseteq \{X \geq a\}$ (البته در اینجا چون X و a نامنفی هستند این دو رویداد معادل هستند). پس داریم:

$$\mathbb{P}[X \geq a] = \mathbb{P}[X^k \geq a^k] \overset{\textbf{markov's inequality}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{a^k} \Longrightarrow \mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X^k]}{a^k}$$

ب)
از بالا به پایین:

$$1 = P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X] = P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n - X = 0] \Longrightarrow 0 = P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n - X \neq 0] =$$

$$P\omega : \forall N \in \mathrm{N},\ \exists n \geq N,\ \exists k \in \mathrm{N}\ :\quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}$$

$$= P[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}] \geq$$

$$P[\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}]$$

$$P[\lim_{N\longrightarrow\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}] =$$

$$= \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}]$$

$$= \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\ (\forall \epsilon > 0)\}]$$

$$= \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n - X| \geq \epsilon\ (\forall\epsilon > 0)\}] \geq 0 \Longrightarrow \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n - X| \geq \epsilon\ (\forall\epsilon > 0)\}] = 0$$

از پایین به بالا:

$$0 = \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n - X| \geq \epsilon\ (\forall\epsilon > 0)\}] = \lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\ (\forall\epsilon > 0)\}] =$$

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}$$

$$= P[\lim_{N\longrightarrow\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}]$$

$$= P[\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})\}]$$

$$= P[\omega : \forall N \in \mathrm{N}, \exists n \geq N\ :\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})]$$

$$\Longrightarrow 1 = P[\omega : \exists N \in \mathrm{N}, \forall n \geq N\ :\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\ (\forall k \in \mathrm{N})] =$$

$$P[\omega : \exists N \in \mathrm{N}, \forall n \geq N\ :\ |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0] = P[\omega : \lim_{n\longrightarrow\infty}|X_n(\omega) - X(\omega)| = 0] =$$

$$P[\omega : \lim_{n\longrightarrow\infty} X_n(\omega) - X(\omega) = 0] = P[\omega : \lim_{n\longrightarrow\infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X] \Longrightarrow$$

$$P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X] = 1$$

پس دو گزاره هم ارزاند.

پ)
با استفاده از بخش های قبل داریم:

$$+\infty > \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}[|X_n|^k] \longrightarrow +\infty > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}[|X_n|^k]}{\epsilon^k} \quad (\forall\epsilon > 0)$$

$$\frac{\mathbf{E}[X^k]}{a^k} \geq P[X \geq a]\ \ (X \geq 0\ \ \&a > 0)\ \longrightarrow +\infty > \sum_{n=1}^{\infty}P[|X_n| \geq \epsilon] = \sum_{n=1}^{\infty}P[|X_n - 0| \geq \epsilon]$$

حال از بین اعضای X_i ها، x را به طوری که $x \neq 0$ و قدرمطلق آن کمتر از باقی اعضا تمامی X_iها باشد انتخاب میکنیم، حال با انتخاب اپسیلونی کمتر از قدر مطلق x ،تمامی احتمال ها ناصفر هستند پس جمع آنها بینهایت میشود که تناقض با فرض است. پس از یک جایی به بعد X_n ها صفر میشوند .به عبارتی:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} P[\bigcup_{n=m}^{\infty}|X_n - 0| \geq \epsilon] = 0 \Longrightarrow P[\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = 0] = 1 \quad \square$$

با تشکر از دانشجویانی که در جمع آوری این پاسخنامه کمک کردند.