



دانشکده‌ی علوم ریاضی



مدرس: دکتر سحر قاجار

احتمال و کاربرد آن

تمرین سری پنجم

طراح: پارسا غلامی

پرسش ۱

(آ) فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک σ^2 باشند و $Y_i = X_i + X_{i+1} + X_{i+2}$.

برای $0 \leq j \leq n-2$ و $1 \leq i \leq n-2$ ، $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+j})$ را بدست آورید.

پرسش ۲

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند که $X_i \sim U(0, 1)$ و $Y_n = n \cdot \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

پرسش ۳

برای ساختن یک گراف ساده n -رأسی، n رأس با شماره‌های $1, 2, \dots, n$ مشخص می‌کنیم. سپس بین رأس شماره i و j به احتمال p یک یال رسم می‌کنیم. درجه رأس شماره i در گراف تصادفی حاصل را با D_i نمایش می‌دهیم. $\text{corr}(D_i, D_j)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۴

تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})} & x, y > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۵

آیا تابع زیر یک تابع چگالی احتمال مشترک است؟

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{-x_n} & \text{اگر } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

پرسش ۶

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل گاما با پارامترهای (α, λ) و (β, λ) باشند، چگالی مشترک $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$ را بدست آورید.

پرسش ۷

فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد.
آ) برای توان‌های طبیعی مختلف بررسی کنید که آیا Z^n توزیع نرمال دارد؟
ب) ثابت کنید اگر m, n دو عدد طبیعی با زوجیت متفاوت باشند، $\text{cov}(Z^m, Z^n) = 0$ است.
پ) آیا در قسمت ب، Z^m و Z^n مستقل هستند؟