



مدرس: دکتر سحر قاجار

احتمال و کاربرد آن

تمرین سری چهارم

طراح: کوشا معینی

پرسش ۱

(آ) فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته و Y یک متغیر تصادفی گسسته باشد. نشان دهید تابع توزیع شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{P\{Y = y|X = x\}}{P\{Y = y\}}f(x)$$

(ب) یک شرکت بیمه فرض می‌کند که هر فرد دارای یک پارامتر تصادف باشد و تعداد تصادفات سالانه فردی که پارامتر تصادف او λ است دارای توزیع پواسون با میانگین λ می‌باشد. شرکت همچنین فرض می‌کند که مقدار پارامتر تصادف فردی که به تازگی بیمه شده یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای k و α است. اگر یک فرد تازه بیمه شده مرتکب n تصادف در طول سال اول بیمه خود شود، چگالی شرطی پارامتر تصادف وی را پیدا کنید. همچنین، متوسط تعداد تصادفات او را در سال جاری تعیین کنید.

پرسش ۲

یک فروشگاه دو مکان جداگانه برای کنترل مشتریان در زمان خروج دارد. این مکان‌ها هر کدام دو صندوق و دو کارمند برای کنترل مشتریان دارند. در صورتیکه X نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که صندوق‌ها در یک زمان مشخص در مکان 1 مورد استفاده قرار گرفته‌اند و Y تعداد دفعات استفاده از صندوق‌ها در مکان 2 باشد، تابع احتمال توأم بصورت زیر خواهد بود:

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.12	0.04	0.04
1	0.08	0.19	0.05
2	0.06	0.12	0.30

(آ) تابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را پیدا کنید.

(ب) $E(X)$ ، $E(X|Y=2)$ ، و $E(XY)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۳

تابع احتمال چگالی برای دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x + 2y) & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

(آ) آیا X و Y مستقل هستند؟

(ب) $P(X + Y < 1)$ را محاسبه کنید.

(پ) $E(\frac{X}{Y^4} + X^2Y)$ را محاسبه کنید.

(ت) امید شرطی $E(X|Y = y)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۴

(آ) ثابت کنید دو متغیر تصادفی X و Y (پیوسته) مستقل هستند اگر و تنها اگر تابع چگالی (جرم) احتمال مشترک آنها به صورت زیر بیان شود:

$$f_{X,Y}(x, y) = h(x)g(y), \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

(ب) اگر تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x, y) = 6e^{-2x}e^{-3y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

(پ) اگر تابع چگالی توأم به صورت زیر باشد، چه می توان گفت؟

$$f(x, y) = 24xy, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1.$$

پرسش ۵

آمبولانسی با سرعت ثابت و در طول جادهای به طول L حرکت میکند. در يك لحظه معین از زمان، حادثه ای در نقطه ای که به تصادف روی جاده توزیع شده است رخ میدهد. (یعنی فاصله اش از يك انتهای ثابت جاده توزیع یکنواخت روی فاصله $[0, L]$ دارد.) همچنین فرض کنید که محل آمبولانس در لحظه حادثه نیز دارای توزیع یکنواخت است. توزیع فاصله آمبولانس از محل حادثه را با فرض استقلال حساب کنید.

پرسش ۶

(آ) دو نقطه به تصادف روی خطی به طول L انتخاب میکنیم به طوریکه دو نقطه در دو طرف از نقطه وسط خط قرار گیرند. به بیان دیگر، دو نقطه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بطوریکه X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $[0, \frac{L}{2}]$ و Y دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $[\frac{L}{2}, L]$ است. احتمال اینکه طول بین دو نقطه انتخابی بیشتر از $\frac{L}{2}$ باشد را پیدا کنید.

ب) دربخش قبل، احتمال اینکه 3 پاره خط از X تا Y ، از X تا L ، و از Y تا L بتوانند تشکیل اضلاع يك مثلث بدهند را پیدا کنید. (توجه کنید که 3 پاره خط میتوانند تشکیل اضلاع يك مثلث را بدهند اگر طول هرکدام از آنها کمتر از مجموع طول دو تاي ديگر باشد).