دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر سحر قاجار

تمرین سری سوم

طراح: پریسا موسوی

پرسش ۱

یک دایره به شعاع R حول مبدأ مختصات در نظر بگیرید. یک نقطه به تصادف روی این دایره انتخاب می‌کنیم. فرض کنید احتمال اینکه این نقطه هر جایی از دایره باشد، یکسان است. همچنین فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های x و y نقطه‌ی انتخابی باشند.

آ) نشان دهید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.
ب) احتمال این را محاسبه کنید که نقطه‌ی انتخابی داخل دایره‌ای به شعاع a باشد.
پ) میانگین فاصله‌ی این نقطه از مبدأ را محاسبه کنید.

پرسش ۲

می‌خواهیم یک ایستگاه آتش‌نشانی را در جاده‌ای به طول A تاسیس کنیم. فرض کنید حریق با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, A]$ رخ می‌دهد. ایستگاه را در چه مکانی تاسیس کنیم تا امید ریاضی فاصله‌ی ایستگاه از حریق، کمینه باشد؟ (در واقع اگر $X \sim Uniform[0, A]$ باشد، باید نقطه‌ی a را بیابید که $\mathbb{E}(|X - a|)$ را کمینه کند.)

پرسش ۳

یک جمع n نفری تصمیم به بازی اسم فامیل می‌گیرند. هر فرد به صورت مستقل از دیگران و بدون تقلب با آن‌ها کلمات را می‌نویسد. هر دور این بازی زمانی پایان می‌یابد که اولین نفر تمام کلمات را بنویسد.

آ) اگر زمانی که طول می‌کشد تا نفر iام کلمات را بنویسد، از توزیع $Exp(\lambda_i)$ پیروی کند، امید ریاضی و واریانس طول هر دور از این بازی چقدر است؟
ب) پریسا و کژال می‌خواهند امتیازات بازی را محاسبه کنند. اما از آن‌جایی که پریسا و کژال هیچ‌کدام حرف دیگری را قبول ندارند، تصمیم می‌گیرند هر دو امتیازات را محاسبه کنند و در نهایت اعدادی که به دست می‌آورند را با هم مقایسه کنند. اگر زمانی که پریسا و کژال نیاز دارند تا امتیازات همه‌ی افراد را جمع بزنند به ترتیب P و K باشند و از توزیع‌های $P \sim Exp(a)$ و $K \sim Exp(b)$ تبعیت کنند، به طور میانگین بعد از پایان یک دور ، شمردن امتیازات چقدر طول می‌کشد؟ (در صورت نیاز، فرض کنید $a > b$ است؛ بالاخره پریسا خیلی سریع‌تر از کژال حساب می‌کند!)

پرسش ۴

فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim Exp(\lambda)$، متغیر تصادفیِ $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ و متغیر تصادفیِ $Z = X - \lfloor X \rfloor$ باشد.

آ) ثابت کنید Y یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $1 - e^{-\lambda}$ است.
ب) توزیع Z را محاسبه کنید.
پ) امید ریاضی Z را محاسبه کنید.
ت) واریانس Z را محاسبه کنید.

پرسش ۵

فرض کنید $U \sim Uniform[0, 1]$ باشد. نشان دهید:

آ) اگر a یک عدد حقیقی باشد، توزیع aU را به دست آورید.
ب) توزیع $\max(U, 1 - U)$ را به دست آورید.
پ) توزیع $\min(U, 1 - U)$ را به دست آورید.

پرسش ۶

به متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر، یک متغیر تصادفی از توزیع کوشی استاندارد گفته می‌شود:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

نشان دهید اگر X یک متغیر تصادفی از توزیع کوشی استاندارد باشد، $Y = \frac{1}{X}$ نیز از توزیع کوشی استاندارد است.

پرسش ۷

فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ باشد به طوری که $\alpha, \beta \geq 1$ هستند. نقطه‌ی x_0 را طوری بیابید که $f_X(x_0)$ بیشینه باشد.