دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر سحر قاجار

تمرین سری ششم

طراح: کژال باغستانی

پرسش ۱

فرض کنید n آزمایش برنولی به صورت مستقل با احتمال موفقیت $\frac{1}{2}$ اجرا میشود. نشان دهید اگر در نظر بگیریم X متغیر تصادفی تعداد موفقیت های حاصل از این آزمایش ها باشد، داریم:

$$Pr[X \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n}] \leq \frac{1}{4}$$

پرسش ۲

آ) برای هر متغیر نامنفی X و هر $a > 0$ ، ثابت کنید

$$E[X] \geq aP[X \geq a]$$

ب) با ایده اثبات بخش قبل، با فرض اینکه $X < 2E[X]$ سعی کنید یک کران بالا برای مقدار $P[X \geq \frac{E[X]}{2}]$ بدست بیاورید.

پ) ثابت کنید برای هر مقدار t که تابع مولد گشتاور X در t قابل تعریف باشد و هر $a \in \mathbb{R}$

$$e^{-a.t}M_X(t) \geq P[X \geq a]$$

پرسش ۳

با استفاده از قضیه حد مرکزی ثابت کنید که متوسط فاصله از مبدأ برای یک قدم زن تصادفی پس از n حرکت تقریبا برابر با $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ است.

پرسش ۴

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و Y یک متغیر مستقل از X با تابع جرم احتمال زیر باشد

$$P(Y=+1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$$

آ) ثابت کنید $Z=XY$ هم توزیع نرمال دارد.
ب) میانگین و واریانس Z را بیابید.
پ) $cov(X,Y)$ را بدست آورید.
ت) آیا $X+Z$ هم توزیع نرمال دارد؟

پرسش ۵

طول عمر ریزپردازنده‌های تولیدی یک کارخانه از توزیع نرمال با میانگین $\mu=1.4\times10^6$ و واریانس $\sigma^2=9\times10^{10}$ پیروی می‌کنند. احتمال اینکه در یک دسته‌ی ۲۰۰ تایی از این ریزپردازنده‌ها، حداقل ۲۰تا با طول عمر کمتر از 1.8×10^6 موجود باشد، تقریبا چقدر است؟ (در صورت نیاز، به این موضوع توجه کنید که به ازای $z<-4$ تابع $\Phi(z)\approx 0$ است.)

پرسش ۶

فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله ای از متغیر های تصادفی پوآسون با پارامتر 1 و مستقل باشد، با استفاده از این دنباله و قضیه حد مرکزی نشان دهید :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$$

پرسش ۷

به سوالات زیر پاسخ دهید.
آ) فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد. نشان دهید به ازای هر $a>0$ و هر $k>0$ داریم:

$$Pr[X\geq a]\leq\frac{E[X^k]}{a^k}.$$

ب) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد و X نیز یک متغیر تصادفی باشد. نشان دهید اگر و فقط اگر

$$Pr\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\}=1$$

داشته باشیم، برای هر $\epsilon>0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}Pr[\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m-X|\geq\epsilon\}]=0$$

راهنمایی: درمورد

$$Pr[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}]$$

چه می‌توان گفت؟

پ) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله ای از متغیر های تصادفی باشد. اگر $k > 0$ موجود باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^k] < +\infty$ نشان دهید $Pr[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] = 1$ است.