دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها	مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری سه

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی:* ۴۰۱۱۰۰۰۷۱

پرسش ۱

آ) ۱)

۲) در نظر میگیریم: $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ از آنجایی که Σ متقارن پس است پس Σ^{-1} نیز متقارن در نتیجه $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ نیز متقارن است پس داریم:

$$\sqrt{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\Sigma^{-1}}^T$$

پس داریم:

$$Y^TY = (\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu))^T\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu) = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

۳) در نظر میگیریم: $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}$ میخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}\,dX$$

در نظر میگیریم : $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ حالا به محاسبه ژاکوبین Y می پردازیم:

$$D(Y(X)) = \sqrt{\Sigma^{-1}}$$

$$J_Y = det(\sqrt{\Sigma^{-1}}) = \sqrt{det(\Sigma^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}$$

پس در ادامه با تغییر متغیر در انتگرال داریم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}\,dY = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}\,dY$$

که داریم :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{2}Y_i^2}\,dY$$

و از انجایی که میدانیم $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}Y_i^2} dY_i = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ در نتیجه داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} \, dY = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

پس :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} \, dY = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = 1$$

ب) ۱) داریم :

$$(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu) = Y^T \Sigma^{-1} Y = \sum_{j=1}^n Y_j \sum_{i=1}^n Y_i a_{ij} =$$

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + \sum_{j=2}^n Y_j Y_1 a_{1j}$$

که باتوجه به تقارن Σ^{-1} داریم $a_{ij} = a_{ji}$ پس داریم:

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$= a_{11} Y_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} Y_1 + \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

درنیجه داریم :

$$\alpha = a_{11}$$

$$\beta = \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$\gamma = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

۲) داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx_1 =$$

اگر قرار دهیم $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Sigma^{1/2}}$ داریم:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha Y_1^2 + 2\beta Y_1 + \gamma} dx_1 = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha (Y_1^2 + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} dx_1$$

$$= Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2+\frac{\beta}{\alpha})^2)}dx_1 = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}du = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{n/2}\Sigma^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{(n-1)/2}(\Sigma)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}$$

۳) ابتدا ماتریس B را نشان میدهم.

$$B = \tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{vv^T}{a_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

حال داریم :

$$\tilde{Y}^T B\tilde{Y} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i B_{ij} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}) = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(a_{ij}) - \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}})$$

$$= \gamma - \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} Y_j a_{1j} \sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i} == \gamma - \frac{1}{a_{11}}(\sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i})^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

۴)

می دانیم عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس دترمینان آن را عوض نمیکند پس با استفاده از a_{11} در Σ^{-1} ستون اول این ماتریس را صفر میکنیم. به وضوح سطر i ام باید با $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ برابر سطر اول جمع شود تا درآیه اول آن صفر شود. که ماتریس به دست آمده به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

که اگر دقت کنیم به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$det(\Sigma^{-1}) = det \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

که همان خواسته سوال است.

۵) داریم :

$$\Sigma\Sigma^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ v & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & w^T \\ w & \tilde{\Sigma} \end{bmatrix} = I$$

پس داریم:

$$a_{11}\sigma_{11} + v^T w = 1 => w = (1 - a_{11}\sigma_{11})$$

$$a_{11}w^T + v^T\tilde{\Sigma} = 0 = (0, 0, 0, ..., 0)_{1\times(n-1)}$$

$$v\sigma_{11} + \tilde{A}w = 0 = (0, 0, 0, ..., 0)^T_{1\times(n-1)}$$

$$vw^T + \tilde{A}\tilde{\Sigma} = I_{(n-1)\times(n-1)}$$

می خواهیم نشان دهیم$B\tilde{\Sigma} = I$.داریم:

$$(\tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}})\tilde{\Sigma} = \tilde{A}\tilde{\Sigma} - \frac{vv^T\tilde{\Sigma}}{a_{11}}$$

حالا با توجه به رابطه دوم میدانیم $v^T\tilde{\Sigma} = -a_{11}w^T$ آن را در عبارت بالا جایگزین میکنیم داریم:

$$=> (\tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}})\tilde{\Sigma} = \tilde{A}\tilde{\Sigma} - \frac{-a_{11}vw^T}{a_{11}} = \tilde{A}\tilde{\Sigma} + vw^T$$

که همان عبارت چهارم و برابر با I است پس داریم:

$$\tilde{A}\tilde{\Sigma} + vw^T = B\tilde{\Sigma} = I$$

که ادعا ثابت میشود.

پ) ۱) اگر توزیع حاشیه ای نسبت به متغیر X_i را داشته باشیم میتوانیم امید ریاضی آن را محاسبه کنیم و اما با توجه به نتیجه ای که قسمت قبل گرفتیم توزیع حاشیه ای نسبت به دو متغیر X_i و X_j برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\tilde{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\tilde{X} - \tilde{\mu})^T \tilde{\Sigma}^{-1}(\tilde{X} - \tilde{\mu}))$$

که $\tilde{X} = (X_i, X_j)$ و $\tilde{\mu} = (\mu_i, \mu_j)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} & \sigma_{jj} \end{bmatrix}$.

حال اگر نسبت به X_j از این تابع انتگرال بگیریم دوباره با توجه به قسمت قبل تابع توزیع حاشیه ای برای X_i را خواهیم داشت فقط به این نکته توجه کنیم که $\tilde{\Sigma} = det(\tilde{\Sigma}) = \sigma_{ii}$ پس داریم:

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_{ii}}} \exp(-\frac{(X_i - \mu_i)^2}{2\sigma_{ii}})$$

که میدانیم تابع چگالی متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ_i است پس:

$$E[X_i] = \mu_i$$

۲) طبق استدلال قسمت قبل و تابع چگالی بدست آمده به وضوح داریم:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = var(X_i)$$

۳) طبق قسمت 1 داریم:

$$f_{X_i,X_j}(x_i, x_j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\Sigma)}} \exp(-\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1}(X - \mu))$$

و از طرفی کافیست $E[X_iX_j]$ را محاسبه کنیم چون در گام های قبل $E[X_i]$ و $E[Xj]$ را محاسبه کردیم.

$$E[X_iX_j] = \int x_i x_j f_{X_i,X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

که برای سادگی در نظر میگیریم:

$$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{det(\Sigma)}}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E[X_iX_j] = A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_ix_jexp[a(x_i-\mu_i)^2 + c(x_j-\mu)^2 + (b+d)(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]dx_idx_j$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} x_jexp[c(x_j-\mu)^2]\int_{-\infty}^{\infty} x_iexp[a(x_i-\mu_i)^2 + (b+d)(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]dx_idx_j$$

ابتدا انتگرال زیر را محاسبه میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_iexp[a(x_i-\mu_i)^2 + (b+d)(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]dx_i$$

در نظر میگیریم $u = (x_i-\mu_i)$ و $s = (b+d)(x_j-\mu_j)$ داریم:

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(u+\mu_i)exp[au^2+su]du = \int_{-\infty}^{\infty}(u+\mu_i)exp[a(u+s/2a)^2 - s^2/4a]du$$

در نظر میگیریم $v = (u+s/2a)$ داریم:

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(v-\frac{s}{2a}+\mu_i)exp[av^2-s^2/4a]dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(v)exp[av^2-s^2/4a]dv + \int_{-\infty}^{\infty}(\mu_i-\frac{s}{2a})exp[av^2-s^2/4a]dv$$

که از آنجایی که تابع $f(v) = (v)exp[av^2-s^2/4a]$ تابعی فرد است پس انتگرال آن روی بازه متقارن صفر و داریم:

$$= (\mu_i-\frac{s}{2a})e^{-\frac{s^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{av^2}dv$$

اگر $a > 0$ انتگرال بالا واگراست پس با شرط $a < 0$ کار را ادامه میدهم داریم:

$$= (\mu_i-\frac{s}{2a})e^{-\frac{s^2}{4a}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-a}}$$

پس برای ادامه کار داریم:

$$E[X_iX_j] = \int_{-\infty}^{\infty} x_jexp[c(x_j-\mu)^2](\mu_i-\frac{s}{2a})e^{-\frac{s^2}{4a}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-a}}dx_j$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_i - \frac{(b+d)(x_j-\mu_j)}{2a}) x_j exp[c(x_j-\mu)^2 - \frac{((b+d)(x_j-\mu_j))^2}{4a}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-a}} dx_j$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_i - \frac{s}{2a}) x_j exp[c\frac{s^2}{(b+d)^2} - \frac{s^2}{4a}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-a}} \frac{ds}{(b+d)}$$

ت) ۱) از قسمت های قبل توزیع توام دو متغیر تصادفی نرمال را میدانیم. پس شروع به محاسبه کرده و داریم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\sqrt{(2\pi)}\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\Sigma)}} \exp[-\frac{1}{2}(A-\mu)\Sigma^{-1}(A-\mu)^T]\exp[\frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}]$$

که $A = (X, Y)$ و $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$.

حالا داریم :

$$\frac{\sqrt{(2\pi)}\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\Sigma)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sqrt{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2}{\sigma_x{}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma_y\sqrt{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2}{\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

حالا کافیست نشان دهیم عبارات داخل توان نیز باهم برابرند.داریم:

$$-\frac{1}{2}(A-\mu)\Sigma^{-1}(A-\mu)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$
$$= -\frac{1}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}(x-\mu_x, y-\mu_y)\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}(x-\mu_x, y-\mu_y)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}[(x-\mu_x)\sigma_y^2 - (y-\mu_y)\sigma_{xy}, -(x-\mu_x)\sigma_{xy} + (y-\mu_y)\sigma_x^2](x-\mu_x, y-\mu_y)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$

$$= -\frac{(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2(x-\mu_x)(y-\mu_y)\sigma_{xy} + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$
$$= -\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}(y - \mu_u - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x))^2$$

درنتیجه دو عبارت با هم برابرند.

۲)

برای محاسبه $E[Y|X=x]$ باید $\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$B = \frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}$$
$$C = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$$

حالا باید عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$A\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-B(y-C)^2}dy = A\int_{-\infty}^{\infty}(u+C)e^{-B(u)^2}du = A\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-B(u)^2}du + A\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-B(u)^2}du$$

$$= \frac{Ae^{-B(u)^2}}{-2B}|_{-\infty}^{+\infty} + AC\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{B}}dv = 0 + \frac{AC}{\sqrt{B}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{C(\sqrt{(2\sigma_y^2(1-\rho^2))})}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\pi} = C = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$$

برای محاسبه $var(Y|X=x)$ باید $\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)^2 f_{Y|X}(y|x)$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)^2 f_{Y|X}(y|x) = \int_{\infty}^{\infty}(y^2 - 2y\mu_y + \mu_y^2)f_{Y|X}(y|x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x) + 2\mu_y\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x) + \mu_y^2\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)$$

از طرفی میدانیم $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) = 1$ و با توجه به محاسبات قسمت قبل داریم :

. $\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) = C$

پس کافیست عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x) = A\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-B(y-C)^2}dy = A\int_{-\infty}^{\infty}(u+C)^2 e^{-B(u)^2}du$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-B(u)^2}du + 2CA\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-B(u)^2}du + C^2A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-B(u)^2}du$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-B(u)^2}du + 0 + \frac{\sqrt{\pi}C^2A}{\sqrt{B}}$$

حالا به محاسبه عبارت $A\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-B(u)^2}du$ می پردازیم. داریم:

$$A\int_{-\infty}^{\infty} u\times ue^{-B(u)^2}du = A(u\frac{e^{-B(u)^2}}{-2B}|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{-2B}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bu^2}) = 0 + \frac{A}{2B}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{B^3}}$$

پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x) = \frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{B^3}} + \frac{\sqrt{\pi}C^2A}{\sqrt{B}}$$

و در نتیجه داریم:

$$var(Y|X=x) = \frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{B^3}} + \frac{\sqrt{\pi}C^2A}{\sqrt{B}} + \mu_y^2 + 2\mu_y C$$

می دانیم $A = \sqrt{B}$ پس داریم:

$$var(Y|X=x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2B} + \sqrt{\pi}C^2 + \mu_y^2 + 2\mu_y C = \frac{1}{2B} = \sigma_y^2(1-\rho^2)$$

که اثبات کامل میشود. همچنین از روی تابع توزیع و تطبیق آن با توزیع نرمال نیز میتوان مستقیم این نتیجه را گرفت.
۳)

ث) ۱)

$$M_X(t) = E[e^{t^TX}] = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)e^{t^TX}dX$$

که با توجه به تعریف $F_X(x)$ داریم:

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}e^{t^TX}dX$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{t^TX-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}dX$$

که همان خواسته سوال است.

۲)

$$-\frac{1}{2}(X-\mu-\Sigma t)^T\Sigma^{-1}(X-\mu-\Sigma t) = -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1} - t^T\Sigma^T\Sigma^{-1})(X-\mu-\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1} - t^T)((X-\mu)-\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) - t^T(X-\mu) - (X-\mu)^T t + t^T\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) + t^T(X-\mu) - \frac{1}{2}t^T\Sigma t$$

۳) می خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{t^TX-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}dX$$

با توجه به رابطه بالا داریم:

$$-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) + t^T(X-\mu) - \frac{1}{2}t^T\Sigma t + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu) = t^TX - \frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

حالا با تغییر متغیر $Y = X - \mu - \Sigma t$ داریم:

$$D(Y) = I \quad J(D(Y)) = det(I) = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)}dY$$

$$= e^{(\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y}dY$$

و از طرفی میدانیم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y} dY = 1$$

پس:

$$M_X(t) = \exp[\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu]$$

ج) تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی Y محاسبه میکنیم. داریم:

$$M_Y(t) = E[e^{t^TY}] = E[e^{t^T(c+BX)}] = e^{t^Tc}E[e^{t^TBX}]$$

حالا تغییر متغیر $t' = t^TB$ را درنظر میگیریم و چون X متغیر تصادفی نرمال با پارامتر های μ و Σ است داریم:

$$E[e^{t'X}] = e^{\frac{1}{2}t'\Sigma t'^T + t'\mu} = e^{\frac{1}{2}t^TB\Sigma tB^T + t^TB\mu}$$

پس داریم :

$$M_Y(t) = e^{t^Tc}e^{\frac{1}{2}t^TB\Sigma B^Tt + t^TB\mu} = e^{\frac{1}{2}t^TB\Sigma B^Tt + t^T(c+B\mu)}$$

فرض کنیم $A = B\Sigma B^T$ آنگاه داریم:

$$t^TAt = t^B\Sigma B^Tt$$

پس داریم:

$$M_Y(t) = e^{\frac{1}{2}t^TAt + t^T(c+B\mu)}$$

که از روی تعریف تابع مولد گشتاور برای توزیع نرمال داریم:

$$Y \sim \mathcal{N}(c+B\mu, A) => Y \sim \mathcal{N}(c+B\mu, B\Sigma B^T)$$

پرسش ۲

آ) ۱)

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} < x)$$

که این یعنی حداقل k تا از متغیر های تصادفی ما کوچک تر از x باشند پس در نظر میگیریم که:
$A_j = j$ تای آنها از x کوچک ترند.
داریم:

$$P(X_{(k)} < x) = \sum_{j=k}^{n} A_j = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

پس ادعا ثابت میشود.

۲) از عبارت به دست آمده در قسمت قبل مشتق میگیریم داریم:

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j} = \sum_{j=k}^{n} \frac{d}{dx}(\binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \frac{d}{dx}(F(x)^j (1-F(x))^{n-j})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (n-j) f(x)((1-F(x))^{n-j-1})(F(x)^j)$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} f(x)((1-F(x))^{n-j-1})(F(x)^j)$$

تغییر متغیر $t = j+1$ را در سیگما دوم قرار میدهیم داریم:

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{n-j}$$
$$- \sum_{t=k+1}^{n} \frac{n!}{(t-1)!(n-t)!} f(x)((1-F(x))^{n-t}) F(x)^{(t-1)}$$

که جملات $k+1$ تا n با هم خط میخورند و داریم:

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$$

ب) ۱) از آنجایی که X_i ها هم توزیع هستند $P[a < X_i < b] = P[a < X_j < b]$ در نتیجه اگر بخواهیم $X_{(1)}$ بین a و b باشد هر یک از X_i ها میتوانند کاندید باشند پس در کل برای اینکه ترتیب X_i ها را بچینیم $n!$ حالت داریم که این یعنی :

$$Pr[x_1 - \frac{\epsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_n - \frac{\epsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\epsilon}{2}]$$

$$= n!Pr[x_{i_1} - \frac{\epsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_{i_n} - \frac{\epsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\epsilon}{2}]$$

حالا با توجه به مستقل بودن X_i ها داریم:

$$= n!Pr[x_{i_1} - \frac{\epsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_{i_n} - \frac{\epsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\epsilon}{2}] = n! \prod_{j=1}^{n} Pr[x_{i_j} - \frac{\epsilon}{2} < X_j < x_{i_j} + \frac{\epsilon}{2}]$$

که عبارت $Pr[x_{i_j} - \frac{\epsilon}{2} < X_j < x_{i_j} + \frac{\epsilon}{2}]$ وقتی ϵ به سمت صفر میرود به سمت $\epsilon f(x_j)$ می رود پس داریم:

$$\approx n! \epsilon^n f(x_1) f(x_2) ... f(x_n)$$

۲) با توجه به تعریف داریم :

$$Pr[x_1 - \frac{\epsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_n - \frac{\epsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\epsilon}{2}]$$
$$= \int_{x_n - \frac{\epsilon}{2}}^{x_n + \frac{\epsilon}{2}} \cdots \int_{x_1 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\epsilon}{2}} f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) dx_1 \dots dx_n$$

که داریم:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_n - \frac{\epsilon}{2}}^{x_n + \frac{\epsilon}{2}} \cdots \int_{x_1 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\epsilon}{2}} f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) dx_1 \dots dx_n = \epsilon^n f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n)$$

پس به صورت تقریبی داریم:

$$f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) = n! f(x_1) f(x_2) ... f(x_n)$$

پرسش ۳

آ) ۱) می دانیم توزیع آماره n ام در میان $N = 2n - 1$ آماره به صورت زیر است:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n! f(x) F(x)^{n-1} (1 - F(x))^{N-n}}{(n-1)!(n-1)!}$$

در نتیجه داریم:

$$E[X_{(n)}] = \int_0^1 x f_{X_{(n)}}(x) dx$$

اگر X_i ها دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشند داریم:

$$f(x) = 1;$$

$$F(x) = x;$$

در نتیجه داریم :

$$E[X_{(n)}] = \int_0^1 \alpha_n x^n (1-x)^{N-n} dx = \alpha_n \int_0^1 x^n (1-x)^{N-n} dx$$
$$E[X_{(n)}^2] = \int_0^1 \alpha_n x^{n+1} (1-x)^{N-n} dx = \alpha_n \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{N-n} dx$$

که $\alpha_n = \frac{n!}{(n-1)!(n-1)!}$.

حالا با توجه به توزیع بتا میدانیم:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx$$

پس داریم:

$$E[X_{(n)}] = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{n!(n-1)!}{2n!}$$
$$E[X_{(n)}^2] = \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n+1)!}$$
$$var(X_{(n)}) = \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n+1)!} - \frac{(n!)^2((n-1)!)^2}{(2n!)^2}$$

ب) ۱) داریم:

$$g(x) = f(x+\alpha) = f(-x+\alpha) = g(-x)$$

پس تابع $g(x)$ تابعی زوج است.

۲) داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u+\alpha) f(u+\alpha) du = \int_{-\infty}^{\infty} (u+\alpha) g(u) du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u g(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha g(u) du$$

که از آنجایی که $g(u)$ تابعی زوج است پس $ug(u)$ تابعی فرد و $\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du = 0$. درنتیجه داریم:

$$E(X) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$$

و همچنین از آنجایی که تابع $g(x)$ انتقالی از یک تابع توزیع است پس $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 1$ در نتیجه:

$$E(X) = \alpha$$

۳) با تغییر متغیر $u = x - \alpha$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{m-\alpha} f(u+\alpha)du = \int_{-\infty}^{m-\alpha} g(u)du = \frac{1}{2}$$

که از آنجایی که $g(x)$ تنها در نقطه 0 مساحت چپ و راست برابری دارد و مساحت کل زیر آن برابر با 1 است پس داریم:

$$m - \alpha = 0 \quad => \quad m = \alpha$$

پ) ۱)

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x f(x) F(x)^{n-1} (1 - F(x))^{N-n} dx$$

که $\alpha_n = \frac{n!}{(N-n)!(n-1)!}$.

۲)

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x f(x) F(x)^{n-1} (1 - F(x))^{N-n} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (u+\alpha) f((u+\alpha)) F((u+\alpha))^{n-1} (1 - F((u+\alpha)))^{N-n} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (u+\alpha) g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

۳)

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (u+\alpha) g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

$$= \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} u g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \alpha g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

که تابع $g(u)G(u)^{n-1}(1 - G(u))^{N-n}$ زوج است.(زیرا تمام توابع آن زوج اند).

پس تابع $ug(u)G(u)^{n-1}(1 - G(u))^{N-n}$ یک تابع فرد است .

در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)G(u)^{n-1}(1 - G(u))^{N-n}du = 0$ پس داریم:

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \alpha g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n g(u) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

که عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n g(u)G(u)^{n-1}(1-G(u))^{N-n}du$ همان تابع چگالی توزیع میانه است و درنتیجه این انتگرال برابر 1 است پس :

$$E(X_{(n)}) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n g(u)G(u)^{n-1}(1-G(u))^{N-n}du = \alpha$$

ت) ۱) تغییر متغیر $u = G(x)$ را انجام میدهیم داریم:

$$u = G(x) \quad => \quad \frac{du}{dx} = g(x) \quad => \quad dx = \frac{du}{g(x)}$$

حالا عبارات بدست آمده را در انتگرال جایگذاری میکنیم داریم:

$$var(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n H(u)^2 (u(1-u))^{n-1}du$$

۲)

$$H(u) = H(\frac{1}{2}) + H'(\frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})$$

۳) قرار می دهیم $H(\frac{1}{2}) = a$ و $H(\frac{1}{2}) = b$.

$$var(X_{(n)}) = \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} (a + b(u - \frac{1}{2}))^2 (u(1-u))^{n-1}du$$

$$= \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} (a + b(\frac{z}{2}))^2 (\frac{z+1}{2}(1 - \frac{z+1}{2}))^{n-1}\frac{dz}{2}$$

$$= \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + \frac{b^2z^2}{4} + abz)(\frac{z+1}{2} - \frac{z^2+2z+1}{4})^{n-1}\frac{dz}{2}$$

$$= \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + \frac{b^2y}{4} + aby^{\frac{1}{2}})(\frac{y^{\frac{1}{2}}+1}{2} - \frac{y+2y^{\frac{1}{2}}+1}{4})^{n-1}\frac{dy}{4z}$$

پرسش ۴

از قسمت ۳ بخش ب تابع چگالی تو ام برای دو آماره را داریم:

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_n) = \frac{n!}{(n-2)!}[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_n)f(x_1)$$

حالا میخواهیم $X_1 < X_n < X_1 + a$ باشد پس روی همین ناحیه انتگرال میگیریم داریم:

$$F_R(a) = \frac{n!}{(n-2)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{x_1+a} [F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_n)f(x_1)dx_n dx_1$$

قرار میدهیم $y = F(x_n) - F(x_1)$ و $\alpha = \frac{n!}{(n-2)!}$ داریم:

$$\frac{dy}{dx_n} = f(x_n) \quad => \quad dx_n = \frac{dy}{f(x_n)}$$

$$F_R(a) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{F(x_1+a)-F(x_1)} y^{n-2} f(x_1) dy dx_1$$

$$F_R(a) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(x_1+a) - F(x_1))^{(n-1)}}{n-1} f(x_1) dx_1$$

$$F_R(a) = n \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+a) - F(x))^{(n-1)} f(x) dx$$