



مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

آمار و کاربرد ها

تمرین سری سه - بخش اول

شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۰۰۷۱

نام و نام خانوادگی: کژال باغستانی

پرسش ۱

(۱) \tilde{A}

(۲) در نظر میگیریم: $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X - \mu)$ از آنجایی که Σ متقارن پس است پس Σ^{-1} نیز متقارن در نتیجه $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ نیز متقارن است پس داریم:

$$\sqrt{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\Sigma^{-1}}^T$$

پس داریم:

$$Y^T Y = (\sqrt{\Sigma^{-1}}(X - \mu))^T \sqrt{\Sigma^{-1}}(X - \mu) = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)$$

(۳) در نظر میگیریم: $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}}$ میخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$A \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)} dX$$

در نظر میگیریم: $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X - \mu)$ حالا به محاسبه ژاکوبین Y می پردازیم:

$$D(Y(X)) = \sqrt{\Sigma^{-1}}$$

$$J_Y = \det(\sqrt{\Sigma^{-1}}) = \sqrt{\det(\Sigma^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}$$

پس در ادامه با تغییر متغیر در انتگرال داریم:

$$A \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} Y^T Y} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}} dY = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} Y^T Y} dY$$

که داریم :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} Y_i^2} dY$$

و از انجایی که میدانیم $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}Y_i^2} dY_i = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ در نتیجه داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} dY = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

پس :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} dY = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = 1$$

(ب) (۱) داریم :

$$(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) = Y^T \Sigma^{-1} Y = \sum_{j=1}^n Y_j \sum_{i=1}^n Y_i a_{ij} =$$

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + \sum_{j=2}^n Y_j Y_1 a_{1j}$$

که باتوجه به تقارن Σ^{-1} داریم $a_{ij} = a_{ji}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} \\ &= a_{11} Y_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} Y_1 + \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} \end{aligned}$$

در نتیجه داریم :

$$\alpha = a_{11}$$

$$\beta = \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$\gamma = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

(۲) داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx_1 =$$

اگر قرار دهیم $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Sigma^{1/2}}$ داریم:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha Y_1^2 + 2\beta Y_1 + \gamma} dx_1 = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2 + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} dx_1$$

تمرین سری سه - بخش اول-۲

$$\begin{aligned}
&= Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2 + \frac{\beta}{\alpha})^2)} dx_1 = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} du = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{n/2}\Sigma^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{(n-1)/2}(\Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})}
\end{aligned}$$

(۳) ابتدا ماتریس B را نشان می‌دهم.

$$\begin{aligned}
B &= \tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}} \\
\tilde{A} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
\frac{vv^T}{a_{11}} &= \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

حال داریم :

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^T B \tilde{Y} &= \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i B_{ij} = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i (a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}) = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i (a_{ij}) - \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i (\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}) \\
&= \gamma - \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n Y_j a_{1j} \sum_{i=2}^n Y_i a_{1i} = \gamma - \frac{1}{a_{11}} (\sum_{i=2}^n Y_i a_{1i})^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

(۴)

می‌دانیم عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس دترمینان آن را عوض نمی‌کند پس با استفاده از a_{11} در Σ^{-1} ستون اول این ماتریس را صفر می‌کنیم. به وضوح سطر i ام باید با $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ برابر سطر اول جمع شود تا درآیه اول آن صفر شود. که ماتریس به دست آمده به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

که اگر دقت کنیم به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$\det(\Sigma^{-1}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

که همان خواسته سوال است. (۵) (پ) (ت) (ث) (۱)

$$M_X(t) = E[e^{t^T X}] = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) e^{t^T X} dX$$

که با توجه به تعریف $F_X(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)} e^{t^T X} dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{t^T X - \frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)} dX \end{aligned}$$

که همان خواسته سوال است.

(۲)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(X - \mu - \Sigma t)^T \Sigma^{-1} (X - \mu - \Sigma t) &= -\frac{1}{2}((X - \mu)^T \Sigma^{-1} - t^T \Sigma^T \Sigma^{-1})(X - \mu - \Sigma t) \\ &= -\frac{1}{2}((X - \mu)^T \Sigma^{-1} - t^T)((X - \mu) - \Sigma t) \\ &= -\frac{1}{2}((X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) - t^T (X - \mu) - (X - \mu)^T t + t^T \Sigma t) \\ &= -\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) + t^T (X - \mu) - \frac{1}{2} t^T \Sigma t \end{aligned}$$

(ج) (۳)