دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری پنج

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی *شماره دانشجویی:* **۴۰۱۱۰۰۰۷۱**

پرسش ۱

میدانیم $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ توزیع نرمال استاندارد دارد و بازه اطمینان ۹۹ درصد به این معناست که:

$$P[-a \leq Z \leq a] = 0.99$$

و همچنین بازه اطمینان ۹۵ درصد یعنی:

$$P[-b \leq Z \leq b] = 0.95$$

با بدست اوردن a و b از اینترنت داریم:

$$a = 2.57 \quad b = 1.96$$

پس برای بازه اطمینان ۹۹ درصد داریم:

$$-2.57 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 2.57$$

$$-2.57 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{0.2} \leq 2.57$$

$$-0.514 \leq \bar{X}-\mu \leq 0.514$$

و همچنین برای بازه اطمینان ۹۵ درصد داریم:

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{0.2} \leq 1.96$$

$$-0.392 \leq \bar{X}-\mu \leq 0.392$$

که چون برای ما $-2 \leq \bar{X}-\mu \leq 2$ قابل قبول بود پس هر دو قابل قبولند.

پرسش ۲

این سوال نیز مانند سوال قبل آماره Z را معرفی میکنیم که:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

بازه اطمینان ۹۵ درصد به صورت زیر است.:

$$P[-a \leq Z \leq a] = 0.95$$

$$P[-a \leq \frac{1350 - \mu}{\frac{100}{\sqrt{169}}} \leq a] = 0.95$$

که a را در سوال قبل محاسبه کردیم و داریم:

$$P[-15.07 \leq 1350 - \mu \leq 15.07] = 0.95$$

$$P[-1334.92 \leq \mu \leq 1365.07] = 0.95$$

حالا برای بازه اطمینان ۹۰ درصد داریم:

$$P[-b \leq Z \leq b] = 0.90$$

که b تقریبا برابر میشود با 1.64و داریم:

$$P[-1.64 \times 100/13 \leq 1350 - \mu \leq 1.64 \times 100/13] = 0.9$$

$$P[-1337.38 \leq \mu \leq 1362.61] = 0.9$$

پرسش ۳

با فرض برابری واریانس ها طبق درس میدانیم

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim T(n + m - 2)$$

که :

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{(n+m-2)}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(9)300 + (19)450}{28}} = \sqrt{\frac{11250}{28}}$$

پس a را قرار میدهیم که:

$$P[-a < X < a] = 0.95 \quad X \sim T(n+m-2)$$

که با کمک اینترنت داریم:

$$a = 2.048$$

پس داریم:

$$P[-a < \frac{27 - 25 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{3}{20}\frac{11250}{28}}} < a] = P[-17.89 < (\mu_1 - \mu_2) < 13.89] = 0.95$$

و از انجایی که صفر در این نامساوی صدق میکند پس فرض صفر را رد نمیکنیم.

پرسش ۴

آ) برای محاسبه t مقدار کافیست مقادیر را جایگذاری کنیم داریم:

$$\text{t-value} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 0.875$$

ب)

$$\text{p-value} = P[T > \text{t-value}]$$

که با درنظر گرفتن $t(99)$ بودن توزیع آماره T و کمک اینترنت داریم:

$$\text{p-value} = P[T > 0.875] = 0.192$$

پ) اگر p-value از 0.05 کوچک تر بود رد میشد اما الان نمیتوانیم در سطح معناداری 95% آن را رد کنیم.

پرسش ۵

داریم :

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} + \mu_y - \mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_1^2}{\frac{m}{k}}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

از طرفی دیگر میدانیم

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_1})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} (\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_1})^2 \sim \chi^2(m-1)$$

درنتیجه داریم:

$$\frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}+\mu_y-\mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_1^2}{\frac{m}{k}}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_1})^2+\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_1})^2}{n+m-2}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}+\mu_y-\mu_x}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{k}{m}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n+m-2}}}$$

$$= \frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}+\mu_y-\mu_x}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{k}{m}}}}{\sqrt{\frac{\frac{m-1}{k}S_y^2+(n-1)S_x^2}{n+m-2}}} \sim T(n+m-2)$$

پرسش ۶

برای این سوال داریم $n = 8$.
$\bar{X} = 0.25$
$S_{\bar{x}} = 6.04$

آ) میدانیم

$$P[-a < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < a] = P[-a < Y < a]$$

که $Y \sim t(7)$. حالا a را میابیم که $P[-a < Y < a] = 0.95$. داریم:

$$a = 2.36$$

پس داریم:

$$P[-2.36 < \frac{0.25-\mu}{2.14} < 2.36] = P[-4.8 < \mu < 5.3] = 0.95$$

ب) میدانیم $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع $\chi^2(n-1)$ میباشد.
درنتیجه برای تخمین انحراف معیار زمان ها داریم:

$$P[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - bar(X))^2 < b] = P[Y < b]$$

که $Y \sim \chi^2(n-1)$.
حالا b را میابیم که $P[Y < b] = 0.95$. داریم:

$$b = 14.067$$

پس داریم:

$$P[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 14.067] = P[\frac{255.37}{\sigma^2} < 14.067] = P[18.15 < \sigma^2] = P[4.2 < \sigma] = 0.95$$

توجه کنید که اینجا بازه اطمینان را یک طرفه در نظر گرفتم همچنین میتوان با استفاده از بازه اطمینان دو طرفه نیز محاسبات را انجام داد.

پرسش ۷

برای حل این سوال و تخمین $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ از توزیع fraction استفاده میکنیم.
داریم :

$$(\frac{S_2.\sigma_1}{S_1.\sigma_2})^2 \sim F(m-1, n-1)$$

در نتیجه:

$$P[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}a] = F(a)$$

که $n = 247.3 \times 40 = 9892$ و $m = 254.1 \times 30 = 7623$ پس با کمک اینترنت $a = 1.036$.
که :

$$F(a) = 0.95$$
$$P[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{231.04}{349.69}1.036] = P[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 0.684] = 0.95$$