دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها	مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری دو

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۰۰۷۱*

پرسش ۱

پرسش ۲

آ) بیان

ب) برهان:

می خواهیم نشان دهیم :

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| > \epsilon) = 0$$

با توجه به نامساوی مارکوف داریم

$$P(X > a) < \frac{E[X]}{a}$$

پس داریم

$$P((\bar{X}-\mu)^2 > a^2) < \frac{E[(\bar{X}-\mu)^2]}{a^2}$$

که این یعنی

$$P((\bar{X}-\mu)^2 > a^2) < \frac{var(\bar{X})}{a^2}$$

و با توجه به $i.i.d$ بودن Xi ها

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P(|\bar{X}-\mu| > \epsilon) < \frac{\sigma^2}{n\epsilon} \quad for \quad fixed \quad \epsilon \quad and \quad \sigma < \infty$$

پس:

$$0 < \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| > \epsilon) < \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon} = 0$$

که ثابت میشود:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| > \epsilon) = 0$$

پ)

پرسش ۳

آ) قضیه حد مرکزی: فرض کنیم دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (i.i.d) را داشته باشیم، که به صورت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نشان داده می‌شوند. قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که توزیع متغیر تصادفی

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

به توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود وقتی که مقدار n به خوبی زیاد شود. به صورت رسمی، این قضیه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

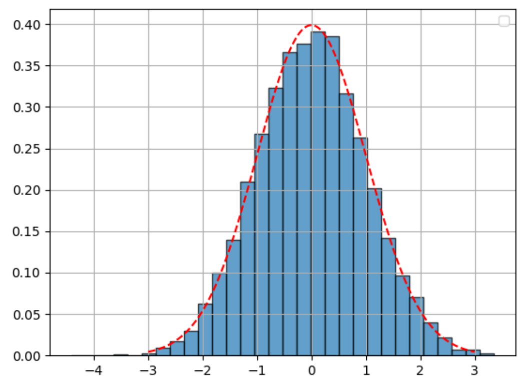
که در این‌جا $\Phi(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

ب) کد پایتون:

src > hw2 > CLT.py > ...

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 30# Sample size
num_samples = 10000
mu = 50
lb = 0
ub = 100

random_vars = np.random.uniform(lb, ub, (num_samples, n))
sample_means = np.mean(random_vars, axis=1)
# variance of uniform distribution 0 to 100 is 2500/3
variance = 2500/3
Z = (sample_means - mu) / (np.sqrt(variance) / np.sqrt(n))

plt.hist(Z, bins=30, density=True, edgecolor='black', alpha=0.7)

x = np.linspace(-3, 3, 1000)
standard_normal = (1 / np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(-0.5 * x**2)
plt.plot(x, standard_normal, color='red', linestyle='dashed')

plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

خروجی:



پرسش ۴

آ) تعریف استقلال برای دو متغیر تصادفی به صورت زیر است:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

که برای این دومتغیر تصادفی اگر تعریف کنیم $H->1:0$ $Xi = flip(i) =$ داریم:

$$E[X] = E[X1+X2] = E[X1]+E[X2] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = E[X2]+E[X3] = E[X2+X3] = E[Y] = 1$$

حالا کافیست $E[XY]$ را محاسبه کنیم که داریم:

p	event	XY	Y	X
$\frac{1}{8}$	TTT	0	0	0
$\frac{1}{8}$	TTH	0	1	0
0	impossible	0	2	0
$\frac{1}{8}$	HTT	0	0	1
$\frac{2}{8}$	THT or HTH	1	1	1
$\frac{1}{8}$	THH	2	2	1
0	impossible	0	0	2
$\frac{1}{8}$	HHT	2	1	2
$\frac{1}{8}$	HHH	4	2	2

در نتیجه داریم:

$$E[XY] = \frac{2}{8}\times 1 + \frac{1}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 4 = 1.25$$

پس مستقل نیستند و کوواریانس آنها برابر است با:

$$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 1.25 - 1 = 0.25$$

ب) چون پرتاب های سکه مستقل هستند توزیع و میانگین و واریانس برای Y برابر با X است. پس به محاسبه این پارامتر ها برای X و Z می پردازم.

$$P(X=0)=\frac{1}{4} \quad P(X=1)=\frac{1}{2} \quad P(X=2)=\frac{1}{4}$$

که عبارت بالا توزیع X وY است.

$$E[X]=E[Y]=1$$

$$var(X)=var(Y)=E[X^2]-E[X]^2=1.5-1=0.5$$

و برای Z داریم :

$$P(Z=0)=\frac{1}{8} \quad P(Z=1)=\frac{3}{8} \quad P(Z=2)=\frac{3}{8} \quad P(Z=3)=\frac{1}{8}$$

که عبارت بالا توزیع Z است.

$$E[Z]=1.5$$

$$var(Z)=E[Z^2]-E[Z]^2=3-2.25=0.75$$

که به صورت کلی متغیر های X و Y توزیع دو جمله دارند با پارامتر های $(2,\frac{1}{2})$ و Z توزیع دو جمله ای با پارامتر $(3,\frac{1}{2})$ دارد.