دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها	مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری سه بخش اول

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی:* **۴۰۱۱۰۰۰۷۱**

پرسش ۱

آ) ۱) می دانیم توزیع آماره n ام در میان $N = 2n - 1$ آماره به صورت زیر است:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n! f(x) F(x)^{n-1} (1 - F(x))^{N-n}}{(n-1)!(n-1)!}$$

در نتیجه داریم:

$$E[X_{(n)}] = \int_0^1 x f_{X_{(n)}}(x) dx$$

اگر X_i ها دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشند داریم:

$$f(x) = 1;$$
$$F(x) = x;$$

در نتیجه داریم :

$$E[X_{(n)}] = \int_0^1 \alpha_n x^n (1-x)^{N-n} dx = \alpha_n \int_0^1 x^n (1-x)^{N-n} dx$$
$$E[X_{(n)}^2] = \int_0^1 \alpha_n x^{n+1} (1-x)^{N-n} dx = \alpha_n \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{N-n} dx$$

که $\alpha_n = \frac{n!}{(n-1)!(n-1)!}$.

حالا با توجه به توزیع بتا میدانیم:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx$$

پس داریم:

$$E[X_{(n)}] = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{n!(n-1)!}{2n!}$$

$$E[X_{(n)}^2] = \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n+1)!}$$
$$var(X_{(n)}) = \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n+1)!} - \frac{(n!)^2((n-1)!)^2}{(2n!)^2}$$

ب) ۱) داریم:

$$g(x) = f(x+\alpha) = f(-x+\alpha) = g(-x)$$

پس تابع $g(x)$ تابعی زوج است.

۲) داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u+\alpha)f(u+\alpha)du = \int_{-\infty}^{\infty} (u+\alpha)g(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha g(u)du$$

که از آنجایی که $g(u)$ تابعی زوج است پس $ug(u)$ تابعی فرد و $\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du = 0$. درنتیجه داریم:

$$E(X) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du$$

و همچنین از آنجایی که تابع $g(x)$ انتقالی از یک تابع توزیع است پس $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 1$ در نتیجه:

$$E(X) = \alpha$$

۳) با تغییر متغیر $u = x - \alpha$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{m-\alpha} f(u+\alpha)du = \int_{-\infty}^{m-\alpha} g(u)du = \frac{1}{2}$$

که از آنجایی که $g(x)$ تنها در نقطه 0 مساحت چپ و راست برابری دارد و مساحت کل زیر آن برابر با 1 است پس داریم:

$$m - \alpha = 0 \quad => \quad m = \alpha$$

پ) ۱)

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x f(x) F(x)^{n-1} (1-F(x))^{N-n} dx$$

که $\alpha_n = \frac{n!}{(N-n)!(n-1)!}$.

۲)

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x f(x) F(x)^{n-1} (1-F(x))^{N-n} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(u+\alpha) f((u+\alpha)) F((u+\alpha))^{n-1} (1 - F((u+\alpha)))^{N-n} du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(u+\alpha) f((u+\alpha)) G(u)^{n-1} (1 - G(u))^{N-n} du$$

پرسش ۲

تفکر تفکر