دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری سه بخش اول

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی *شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۰۰۷۱*

پرسش ۱

آ) ۱)

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} < x)$$

که این یعنی حداقل k تا از متغیر های تصادفی ما کوچک تر از x باشند پس در نظر میگیریم که:
$A_j = j$ تای آنها از x کوچک ترند.
داریم:

$$P(X_{(k)} < x) = \sum_{j=k}^{n} A_j = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}$$

پس ادعا ثابت میشود.

۲) از عبارت به دست آمده در قسمت قبل مشتق میگیریم داریم:

$$\frac{d}{dx} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j} = \sum_{j=k}^{n} \frac{d}{dx} (\binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \frac{d}{dx} (F(x)^j (1 - F(x))^{n-j})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) F(x)^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (n - j) f(x) ((1 - F(x))^{n-j-1}) (F(x)^j)$$

قرار میدهیم $a = k\binom{n}{k} f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}$ داریم:

$$a (\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) F(x)^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (n - j) f(x) ((1 - F(x))^{n-j-1}) (F(x)^j))$$

ب) ۱) از آنجایی که X_i ها هم توزیع هستند $P[a < X_i < b] = P[a < X_j < b]$ در نتیجه اگر بخواهیم $X_{(1)}$ بین a و b باشد هر یک از X_i ها میتوانند کاندید باشند پس در کل برای اینکه ترتیب X_i ها را بچینیم $n!$ حالت داریم که این یعنی :

$$Pr[x_1 - \frac{\epsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_n - \frac{\epsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\epsilon}{2}]$$
$$= n!Pr[x_{i_1} - \frac{\epsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_{i_n} - \frac{\epsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\epsilon}{2}]$$

حالا با توجه به مستقل بودن X_i ها داریم:

$$= n!Pr[x_{i_1} - \frac{\epsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_{i_n} - \frac{\epsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\epsilon}{2}] = n! \prod_{j=1}^{n} Pr[x_{i_j} - \frac{\epsilon}{2} < X_j < x_{i_j} + \frac{\epsilon}{2}]$$

که عبارت $Pr[x_{i_j} - \frac{\epsilon}{2} < X_j < x_{i_j} + \frac{\epsilon}{2}]$ وقتی ϵ به سمت صفر میرود به سمت $\epsilon f(x_j)$ می رود پس داریم:

$$\approx n! \epsilon^n f(x_1) f(x_2) ... f(x_n)$$

۲) با توجه به تعریف داریم :

$$Pr[x_1 - \frac{\epsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\epsilon}{2}, ..., x_n - \frac{\epsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\epsilon}{2}]$$
$$= \int_{x_n - \frac{\epsilon}{2}}^{x_n + \frac{\epsilon}{2}} \cdots \int_{x_1 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\epsilon}{2}} f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

که داریم:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_n - \frac{\epsilon}{2}}^{x_n + \frac{\epsilon}{2}} \cdots \int_{x_1 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\epsilon}{2}} f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) dx_1 \ldots dx_n = \epsilon^n f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n)$$

پس به صورت تقریبی داریم:

$$f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, x_2, .., x_n) = n! f(x_1) f(x_2) ... f(x_n)$$