دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری چهار

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی *شماره دانشجویی:* **۴۰۱۱۰۰۰۷۱**

پرسش ۱

نا اریب بودن $\hat{\theta}$ به معنی این است که:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

می دانیم داریم :

$$var(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}^2] - E[\hat{\theta}]^2$$
$$=> E[\hat{\theta}^2] = var(\hat{\theta}) + \theta^2$$

که این یعنی $bias(\hat{\theta}^2) = var(\hat{\theta})$.
که اگه بخواهد نا اریب باشد یعنی واریانس صفر است و وقتی اطلاعاتی از توزیع در دست نداریم و لزوما ثابت نیست پس واریانس آن نیز صفر نیست.

پرسش ۲

آ)

$$MSE(T_\omega) = B^2(T_\omega) + var(T_\omega)$$

که داریم $B(T_\omega) = E[T_\omega] - \mu$ پس:

$$E[T_\omega] = \omega E[\bar{X_1}] + (1-\omega)E[\bar{X_2}] = \omega\mu + (1-\omega)\mu = \mu$$

در نتیجه $B(T_\omega) = 0$ می باشد و در ادامه داریم:

$$var(T_\omega) = var(\omega\bar{X_1} + (1-\omega)\bar{X_2}) = \omega^2 var(\bar{X_1}) + (1-\omega)^2 var(\bar{X_2})$$
$$= \omega^2\frac{{\sigma_1}^2}{n} + (1-\omega)^2\frac{{\sigma_2}^2}{n}$$

در نتیجه داریم:

$$MSE(T_\omega) = \omega^2\frac{{\sigma_1}^2}{n} + (1-\omega)^2\frac{{\sigma_2}^2}{n}$$

ب) برای نشان دادن اینکه T_ω سازگار است کافیست نشان دهیم:

$$T_\omega \to \mu \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

طبق قانون اعداد بزرگ میدانیم که :

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X}_1 = \lim_{n\to\infty} \bar{X}_2 = \mu$$

$$\lim_{n\to\infty} T_\omega = \omega\mu + (1-\omega)\mu = \mu$$

پس T_ω برآوردگری سازگار است.

پ) می خواهیم

$$MSE(T_\omega) = f(\omega) = \omega^2 \frac{{\sigma_1}^2}{n} + (1-\omega)^2 \frac{{\sigma_2}^2}{n}$$

را مینیمم کنیم. چون تابعی پیوسته بر حسب امگا است میتوان از آن مشتق گرفت و مشتق آن را برابر صفر قرار داد.

$$f'(\omega) = \frac{2{\sigma_1}^2}{n}\omega - (1-\omega)\frac{2{\sigma_2}^2}{n} = 0$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
{\sigma_1}^2\omega &= (1-\omega){\sigma_2}^2 \\
{\sigma_1}^2\omega &= {\sigma_2}^2 - \omega{\sigma_2}^2 \\
{\sigma_1}^2\omega + \omega{\sigma_2}^2 &= {\sigma_2}^2 \\
\omega({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2) &= {\sigma_2}^2 \\
\omega &= \frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}
\end{aligned}$$

پرسش ۳

$$E[X] = \int_b^\infty x f(x) dx = \frac{e^{\frac{b}{a}}}{a} \int_b^\infty x e^{-x} = \frac{(1+b)}{a} e^{\frac{b}{a} - b}$$

از طرفی چون تابع چگالی است داریم:

$$1 = \int_b^\infty f(x) dx = \frac{e^{\frac{b}{a}}}{a} \int_b^\infty e^{-x} = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a} - b}$$

قرار میدهیم :

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n}$$

از طرفی دیگر داریم با روش گشتاور:

$$\frac{(1+b)}{a} e^{\frac{b}{a}-b} = \bar{X}$$

می دانیم $\frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}-b} = 1$ پس در رابطه های بالا بجای این عبارت 1 را قرار میدهیم داریم:

$$1 + b = \bar{X} \quad => \quad b = \bar{X} - 1$$

حالا باید a را برحسب b حل کنیم به صورتی که $\frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}-b} = 1$ را حل کنیم که $a = 1$ در این معادله جواب میدهد و از آنجایی که تابع چگالی بر حسب a است و یکتاست پس همین جواب کافیست و روش گشتاوری به ما برآورد گر های زیر را میدهد:

$$a = 1 \quad b = \bar{X} - 1$$

توجه کنید که این معادله بر حسب $b = \bar{X} - 1$ ممکن است جواب های دیگری نیز داشته باشد برای a اما یکی از جواب ها حتما همیشه 1 است که از داده مستقل است همچنین جواب دیگر را میتوان بر حسب داده به صورت ضمنی محاسبه کرد. که رابطه ضمنی ما هست:

$$b = \bar{X} - 1 = \frac{a}{1-a} \log^a$$

پرسش ۴

آ)

$$f(x|\hat{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{\theta}} & 0 \leq x \leq \hat{\theta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

می خواهیم $A = P[X1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n|\hat{\theta}]$ را ماکسیمم کنیم که به خاطر استقلال داریم:

$$A = \begin{cases} 0 & max(X_i) > \hat{\theta} \\ \frac{1}{\hat{\theta}^n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

پس داریم $max(X_i) \geq \hat{\theta}$ که چون تابع $\frac{1}{\hat{\theta}^n}$ بر حسب $\hat{\theta}$ نزولی است پس ماکسیمم خود را وقتی اخذ میکند که $\hat{\theta}$ کمترین مقدار خود یعنی $max(X_i)$ باشد.

ب) اگر بازه را باز در نظر بگیریم آنگاه نمیتوان $\hat{\theta} = max(X_i)$ را در نظر گرفت زیرا پارامتر ما از هر یک از X_i ها بزرگتر اکید است. حالا میتوانیم $\hat{\theta}$ را در بازه $(max(X_i), \infty)$ در نظر بگیریم که چون این بازه مینیمم ندارد روش بیشینه درست نمایی مقداری را به ما به عنوان بر آوردگر اعلام نمیکند.

پرسش ۵

اگر فرض کنیم p را با $\hat{p}$ بر آورد کنیم احتمال این رخداد برابر است با:

$$f(\hat{p}) = \hat{p}^k(1-\hat{p})^{n-k}$$

حالا طبق این روش برای بدست آوردن ماکسیمم تابع بالا باید از تابع بالا نسبت به $\hat{p}$ مشتق بگیریم داریم:

$$f'(\hat{p}) = k\hat{p}^{k-1}(1-\hat{p})^{n-k} - (n-k)\hat{p}^k(1-\hat{p})^{n-k-1}$$

اگر این عبارت را برابر صفر قرار دهیم داریم:

$$k(1-\hat{p}) = \hat{p}(n-k)$$

که این روش پیشنهاد میدهد قرار دهیم $\hat{p} = \frac{k}{n}$.

(به این نکته توجه کنید که این تابع در نقاط دو سر بازه ماکسیمم نمیشود $f(0) = f(1) = 0$)

پرسش ۶

اگر قرار دهیم تعداد جانداران واکسن زده دیده شده در مرحله دوم $= X$

$$P[X = m|\hat{N}] = f(\hat{N}) = \frac{\binom{n_1}{m}\binom{\hat{N}-n_1}{n_2-m}}{\binom{\hat{N}}{n_2}}$$

برای ماکسیمم کردن این عبارت در نظر میگیریم که تابع $f(\hat{N})$ تا کجا صعودیست که یعنی تا کجا $f(\hat{N+1}) > f(\hat{N})$ است.
پس میخواهیم:

$$\frac{f(\hat{N+1})}{f(\hat{N})} \geq 1$$

$$\frac{\binom{\hat{N}}{n_2}\binom{n_1}{m}\binom{\hat{N}+1-n_1}{n_2-m}}{\binom{n_1}{m}\binom{\hat{N}-n_1}{n_2-m}\binom{\hat{N}+1}{n_2}} = \frac{\binom{\hat{N}}{n_2}\binom{\hat{N}+1-n_1}{n_2-m}}{\binom{\hat{N}-n_1}{n_2-m}\binom{\hat{N}+1}{n_2}} \geq 1$$

$$\frac{\hat{N}!(\hat{N}+1-n_2)!(\hat{N}+1-n_1)!(\hat{N}-n_1-n_2+m)!}{(\hat{N}-n_2)!(\hat{N}+1)!(\hat{N}-n_1)!(\hat{N}+1-n_1-n_2+m)!} \geq 1$$

$$\frac{(\hat{N}+1-n_2)(\hat{N}+1-n_2)}{(\hat{N}+1)(\hat{N}+1-n_1-n_2+m)} \geq 1$$

قرار میدهیم $x = \hat{N} + 1$ داریم:

$$\frac{(x-n_2)(x-n_1)}{x(x-n_1-n_2+m)} \geq 1$$

$$x^2 - n_2x - n_1x + n_1n_2 \geq x^2 - n_2x - n_1x + mx$$

$$\frac{n_1n_2}{m} \geq \hat{N} + 1$$

و اولین جایی که این رابطه نقض میشود جواب ماست که هست:

$$\hat{N} = \frac{n_1n_2}{m}$$

که همان برآوردگر پیشنهادی M.L.E است.