دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها	مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری سه - بخش اول

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی — *شماره دانشجویی:* ۴۰۱۱۰۰۰۷۱

پرسش ۱

آ) ۱)

۲) در نظر میگیریم: $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ از آنجایی که Σ متقارن پس است پس Σ^{-1} نیز متقارن در نتیجه $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ نیز متقارن است پس داریم:

$$\sqrt{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\Sigma^{-1}}^T$$

پس داریم:

$$Y^TY = (\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu))^T\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu) = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

۳) در نظر میگیریم: $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}$ میخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}\,dX$$

در نظر میگیریم : $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ حالا به محاسبه ژاکوبین Y می پردازیم:

$$D(Y(X)) = \sqrt{\Sigma^{-1}}$$

$$J_Y = det(\sqrt{\Sigma^{-1}}) = \sqrt{det(\Sigma^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} keinghalatedorosteshkon$$

پس در ادامه با تغییر متغیر در انتگرال داریم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}\,dY = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}\,dY$$

که داریم :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{2}Y_i^2}\,dY$$

و از انجایی که میدانیم $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}Y_i^2} dY_i = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ در نتیجه داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2}\, dY = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

پس :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2}\, dY = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = 1$$

ب) ۱) داریم :

$$(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) = Y^T\Sigma^{-1}Y = \sum_{j=1}^n Y_j \sum_{i=1}^n Y_i a_{ij} =$$

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + \sum_{j=2}^n Y_j Y_1 a_{1j}$$

که باتوجه به تقارن Σ^{-1} داریم $a_{ij} = a_{ji}$ پس داریم:

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$= a_{11}Y_1^2 + 2\sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} Y_1 + \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

درنیجه داریم :

$$\alpha = a_{11}$$

$$\beta = \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$\gamma = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

۲) داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx_1 =$$

اگر قرار دهیم $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Sigma^{1/2}}$ داریم:

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha Y_1^2 + 2\beta Y_1 + \gamma} dx_1 = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2 + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} dx_1$$

$$= Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2+\frac{\beta}{\alpha})^2)}dx_1 = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}du = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{n/2}\Sigma^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{(n-1)/2}(\Sigma)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}$$

۳) ابتدا ماتریس B را نشان میدهم.

$$B = \tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{vv^T}{a_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

حال داریم :

$$\tilde{Y}^T B\tilde{Y} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i B_{ij} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}) = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(a_{ij}) - \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i(\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}})$$

$$= \gamma - \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} Y_j a_{1j}\sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i} == \gamma - \frac{1}{a_{11}}(\sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i})^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

۴)

می دانیم عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس دترمینان آن را عوض نمیکند پس با استفاده از a_{11} در Σ^{-1} ستون اول این ماتریس را صفر میکنیم. به وضوح سطر i ام باید با $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ برابر سطر اول جمع شود تا درآیه اول آن صفر شود. که ماتریس به دست آمده به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

که اگر دقت کنیم به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$det(\Sigma^{-1}) = det \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

که همان خواسته سوال است. ۵) **پ)** **ت)** **ث)** ۱)

$$M_X(t) = E[e^{t^T X}] = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) e^{t^T X} dX$$

که با توجه به تعریف $F_X(x)$ داریم:

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)} e^{t^T X} dX$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{t^T X - \frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)} dX$$

که همان خواسته سوال است. ۲) ۳) **ج)**