دانشکده‌ی علوم ریاضی

آمار و کاربرد ها مدرس: دکتر محمد هادی مستفید

تمرین سری سه بخش اول

نام و نام‌خانوادگی : کژال باغستانی *شماره دانشجویی:* ۴۰۱۱۰۰۰۷۱

پرسش ۱

آ) ۱)

۲) در نظر میگیریم: $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ از آنجایی که Σ متقارن پس است پس Σ^{-1} نیز متقارن در نتیجه $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ نیز متقارن است پس داریم:

$$\sqrt{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\Sigma^{-1}}^T$$

پس داریم:

$$Y^TY = (\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu))^T\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu) = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

۳) در نظر میگیریم: $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}$ میخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}\,dX$$

در نظر میگیریم : $Y = \sqrt{\Sigma^{-1}}(X-\mu)$ حالا به محاسبه ژاکوبین Y می پردازیم:

$$D(Y(X)) = \sqrt{\Sigma^{-1}}$$

$$J_Y = det(\sqrt{\Sigma^{-1}}) = \sqrt{det(\Sigma^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} keinghalatedorosteshkon$$

پس در ادامه با تغییر متغیر در انتگرال داریم:

$$A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}\,dY = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Y^TY}\,dY$$

که داریم :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2}\,dY$$

و از انجایی که میدانیم $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}Y_i^2} dY_i = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ در نتیجه داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} \, dY = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

پس :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}Y_i^2} \, dY = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = 1$$

ب) ۱) داریم :

$$(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu) = Y^T \Sigma^{-1} Y = \sum_{j=1}^n Y_j \sum_{i=1}^n Y_i a_{ij} =$$

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + \sum_{j=2}^n Y_j Y_1 a_{1j}$$

که باتوجه به تقارن Σ^{-1} داریم $a_{ij} = a_{ji}$ پس داریم:

$$\sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij} + (Y_1)^2 a_{11} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} + Y_1 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$= a_{11} Y_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1} Y_1 + \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

درنیجه داریم :

$$\alpha = a_{11}$$

$$\beta = \sum_{i=2}^n Y_i a_{i1}$$

$$\gamma = \sum_{j=2}^n Y_j \sum_{i=2}^n Y_i a_{ij}$$

۲) داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx_1 =$$

اگر قرار دهیم $A = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Sigma^{1/2}}$ داریم:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha Y_1^2 + 2\beta Y_1 + \gamma} dx_1 = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha (Y_1^2 + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})} dx_1$$

$$= Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(\alpha(Y_1^2+\frac{\beta}{\alpha})^2)}dx_1 = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}du = Ae^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{n/2}\Sigma^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(2\pi)^{(n-1)/2}(\Sigma)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha})}$$

۳) ابتدا ماتریس B را نشان میدهم.

$$B = \tilde{A} - \frac{vv^T}{a_{11}}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{vv^T}{a_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - \frac{a_{1n}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

حال داریم :

$$\tilde{Y}^T B \tilde{Y} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i B_{ij} = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i (a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}) = \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i (a_{ij}) - \sum_{j=2}^{n} Y_j \sum_{i=2}^{n} Y_i (\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}})$$

$$= \gamma - \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} Y_j a_{1j} \sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i} == \gamma - \frac{1}{a_{11}} (\sum_{i=2}^{n} Y_i a_{1i})^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

۴)

می دانیم عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس دترمینان آن را عوض نمیکند پس با استفاده از a_{11} در Σ^{-1} ستون اول این ماتریس را صفر میکنیم. به وضوح سطر i ام باید با $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ برابر سطر اول جمع شود تا درآیه اول آن صفر شود. که ماتریس به دست آمده به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{2n} - \frac{a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{1n}a_{12}}{a_{11}} & ... & a_{nn} - \frac{a_{1n}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

که اگر دقت کنیم به صورت زیر است

$$\Sigma^{-1'} = \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$det(\Sigma^{-1}) = det \begin{bmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

که همان خواسته سوال است.

۵)

هر وقت دترمینان یاد گرفتم بهت میگم(:

پ) ۱) اگر توزیع حاشیه ای نسبت به متغیر X_i را داشته باشیم میتوانیم امید ریاضی آن را محاسبه کنیم و اما با توجه به نتیجه ای که قسمت قبل گرفتیم توزیع حاشیه ای نسبت به دو متغیر X_i و X_j برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\tilde{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\tilde{X} - \tilde{\mu})^T \tilde{\Sigma}^{-1}(\tilde{X} - \tilde{\mu}))$$

که $\tilde{X} = (X_i, X_j)$ و $\tilde{\mu} = (\mu_i, \mu_j)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} & \sigma_{jj} \end{bmatrix}$.

حال اگر نسبت به X_j از این تابع انتگرال بگیریم دوباره با توجه به قسمت قبل تابع توزیع حاشیه ای برای X_i را خواهیم داشت فقط به این نکته توجه کنیم که $\tilde{\Sigma} = det(\tilde{\Sigma}) = \sigma_{ii}$ پس داریم:

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_{ii}}} \exp(-\frac{(X_i - \mu_i)^2}{2\sigma_{ii}})$$

که میدانیم تابع چگالی متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ_i است پس:

$$E[X_i] = \mu_i$$

۲) طبق استدلال قسمت قبل و تابع چگالی بدست آمده به وضوح داریم:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = var(X_i)$$

۳) طبق قسمت 1 داریم:

$$f_{X_i,X_j}(x_i, x_j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\tilde{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\tilde{X} - \tilde{\mu})^T \tilde{\Sigma}^{-1}(\tilde{X} - \tilde{\mu}))$$

ت) ۱) از قسمت های قبل توزیع توام دو متغیر تصادفی نرمال را میدانیم. پس شروع به محاسبه کرده و داریم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\sqrt{(2\pi)}\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\Sigma)}}\exp[-\frac{1}{2}(A-\mu)\Sigma^{-1}(A-\mu)^T]\exp[\frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}]$$

که $A=(X,Y)$ و $\mu=(\mu_x,\mu_y)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$.

حالا داریم :

$$\frac{\sqrt{(2\pi)}\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)^2 det(\Sigma)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{(2\pi)\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sqrt{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2}{\sigma_x{}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma_y\sqrt{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2}{\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

حالا کافیست نشان دهیم عبارات داخل توان نیز باهم برابرند.داریم:

$$-\frac{1}{2}(A-\mu)\Sigma^{-1}(A-\mu)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$
$$= -\frac{1}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2)}(x-\mu_x, y-\mu_y)\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}(x-\mu_x, y-\mu_y)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2)}[(x-\mu_x)\sigma_y^2-(y-\mu_y)\sigma_{xy}, -(x-\mu_x)\sigma_{xy}+(y-\mu_y)\sigma_x^2](x-\mu_x, y-\mu_y)^T + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$

$$= -\frac{(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2(x-\mu_x)(y-\mu_y)\sigma_{xy} + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2)} + \frac{(x-\mu_x)^2}{2(\sigma_x)^2}$$
$$= -\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}(y-\mu_u-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x))^2$$

درنتیجه دو عبارت با هم برابرند.

۲) ۳) **ث)** ۱)

$$M_X(t) = E[e^{t^TX}] = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)e^{t^TX}dX$$

که با توجه به تعریف $F_X(x)$ داریم:

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}e^{t^TX}dX$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{t^TX-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}dX$$

که همان خواسته سوال است.

۲)

$$-\frac{1}{2}(X-\mu-\Sigma t)^T\Sigma^{-1}(X-\mu-\Sigma t) = -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1} - t^T\Sigma^T\Sigma^{-1})(X-\mu-\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1} - t^T)((X-\mu)-\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}((X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) - t^T(X-\mu) - (X-\mu)^T t + t^T\Sigma t)$$

$$= -\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) + t^T(X-\mu) - \frac{1}{2}t^T\Sigma t$$

۳) می خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{t^T X - \frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)} dX$$

با توجه به رابطه بالا داریم:

$$-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) + t^T(X-\mu) - \frac{1}{2}t^T\Sigma t + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu) = t^T X - \frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

حالا با تغییر متغیر $Y = X - \mu - \Sigma t$ داریم:

$$D(Y) = I \quad J(D(Y)) = det(I) = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y + (\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)} dY$$

$$= e^{(\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y} dY$$

و از طرفی میدانیم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y} dY = 1$$

پس:

$$M_X(t) = \exp[\frac{1}{2}t^T\Sigma t + t^T\mu]$$

نماد گذاری ژاکوبین و دی رو درست کن و از عارف بپرس چرا دی ایکس با دی وای برابر میشه چرا سیگما تانیر گذار نیست؟ **ج)**