2016.10.20

基幹講座 数学 編集委員会 編

このアキ
全角 → 半角に

基幹講座 数学

−3Q (小さく)

ツメ (ベタ組みに)

集合・論理と位相

新井敏康 著

(移動)

代表編集委員

砂田 利一
新井 敏康
木村 俊一
西浦 廉政

Ⓜ系に

東京図書

メモ 13.5Q
天地 26行
行送り 24.5H
左右 31倍
これはOK.

第1章　データの記述と要約統計量

統計学は，記述統計学と推測統計学がある．この章では，データをありのまま見る方法である記述統計について説明する．データ分析の目的は，データを見てそのデータが意味するものを理解することにある．しかし，データをそのまま眺めていても，理解できる内容は限られることになる．そこで，データを理解するために用いられる方法が，「記述統計学」の方法である．

§1.1　データの考え方

本書で取り扱うデータ分析は，基礎的な数理と考え方を取り扱うため，データも複雑なものではなく，ある一定の形式になったものを取り扱う．このことは，複雑なデータを取り扱うことができないということを意味するのではなく，複雑な分析のための数理的な基礎として必要なものを理解するためには，形式がそろったもので理解することが必要であるということである．

そのために，本書全体において，データとはある決まった形式のデータ点の集まりのこととする．例えば，ある小学校の6年生全体80名の身長計測の結果があったとすると，「決まった形式のデータ点」は，ひとりひとりの身長の値を表し，データはその集まり，つまり要素数が80の集合ということになる．

天アキ＝24ミリ

天とハシラとのアキ＝12ミリ

定理 14.2. 確率変数 X は，分布関数 $F(x)$ に従う確率変数であるとし，$x_1, \ldots, x_n$ を，X の独立な実現値であるとする．また，$h(\cdot)$ を実数上に定義される連続な関数で，$E(X)$ と $E(X^2)$ が有界であるとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1} nh(x_i) = E(h(X)) \tag{14.3}$$

が成り立つ [2]．

この定理は，独立な実現値を代入した関数値の算術平均により，期待値の近似値が得られ，実現値を増やせば期待値に収束することを意味している．また，$h(x)$ が連続でないが有界な場合にも同様のことが言える．以上のことから，モンテカルロ法により得られた実現値により，次のようなことが可能である．

ノドアキ 22ミリ

小口アキ 20ミリ

- 関数 $h(x)$ として x^p をとることで，確率変数の p 次モーメントを計算
- 推定量 $\theta^*(X)$ やベイズ事後分布の期待値や分布（定義関数をもちいればよい）の計算

平均 0，分散 1 の正規分布からの実現値 15 個ずつの組を 20000 組発生させ，それぞれの組について標本平均 μ と不偏分散から得られる標準偏差 s ならびに t 統計量

$$t = \frac{\mu}{s/\sqrt{15}} \tag{14.4}$$

を計算した．この t 統計量についてヒストグラムを作成したのが，図

156.5ミリ

[2] この証明は本書の範囲を超えるため，必要であれば別著を参考のこと

29.5ミリ

ノンブルは小口側に

418.5H

104.625ミリ

地とノンブルとのアキ＝12ミリ

うのなら「a は集合 A に要素として含まれる」であろう．

通常，数学では「もの」と「集合」はその都度の文脈において区別されていて，混同されるおそれはあまりない．集合として考えられている対象を，同時に他の集合の要素であり得る「もの」とみなすことは少ない．しかしこの見方に固執していると「集合を要素とする集合」は考えられなくなるし，事実，このような集合を考える必要がある（後で定義するベキ集合など）．いや必要があるというより，それを考えないのなら「集合」を導入するまでもないのである．

0.1ミリ㊤

演習問題 1.1　上5ミリ

以下の内包的記法で書かれた集合を考える：　角丸の長方形に入れる

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{Z}^+ | x^2 - 3x + 5 \leq 0\} \\
B &= \{x \in \mathbb{Z}^+ | x^2 - 3x + 2 \leq 0\} \\
C &= \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ は偶数であり，かつ } x^3 \leq 100\} \\
D &= \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \leq 5\}
\end{aligned}
$$

1. これらの集合の表記を外延的記法に改めよ．
2. $A \subset B$ と $B \subset D$ を示せ．
3. $B \not\subset C$ を示せ．

§1.2　集合の演算

A と B を集合とするとき，A, B 両方に属す要素全体から成る集合を A, B の共通部分（または交わりともいう）といって，$A \cap B$（$\cap$ は「キャップ (cap)」と読む）で表す．すなわち

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \in A | x \in B\} = \{x \in B | x \in A\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in B$$

ここで $\Leftrightarrow$ は「同値」または「必要十分条件」ということで iff と同じ意味である．

集合 $A \cap B$ は以下の図の斜線部である：

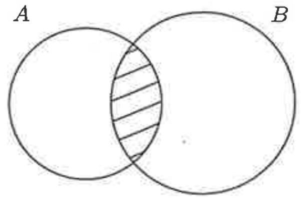

図 1.1　集合 $A \cap B$

注意

このような図をベン図という．ベン図では集合を丸や四角などで書き表し，その要素をその丸などの内部に書く．簡単な集合の演算を直観的に理解するにはベン図は便利なものである．しかしそれだけでは集合の演算に関する法則の証明（十分な説明）にはならないことに注意しよう．それは，ただ図を描くだけでは平面幾何の定理の証明にならないことと同じである．

たとえば

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}.$$

また

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

説明

$A \cap \emptyset$ が空集合であることを示すにはそこに属す要素がひとつも無いことを言えばよい．ところが $x \in A \cap \emptyset$ ということは「$x \in A$ かつ $x \in \emptyset$」ということだが，（$x \in A$ は成立するかもしれないがともかく）$x \in \emptyset$ は空集合 $\emptyset$ の定義からあり得ない．$x \notin \emptyset$ より，「$x \in A$ かつ $x \in \emptyset$」は正しくなく，よって任意の x について $x \notin A \cap \emptyset$ となり，これは $A \cap \emptyset = \emptyset$ を意味する．

つぎは明らかだろう：

$$
\begin{aligned}
A \cap A &= A \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \text{（}\cap\text{ の結合律）}
\end{aligned}
$$

集合 A, B, C について明らかに以下が成立する：

$$A \cap B = B \cap A \text{（}\cap\text{ の交換律）} \tag{1.1}$$

また量化記号の後の括弧 [ ] は，混乱のおそれが無い限り省略して $\forall x \in U\, P(x)$, $\exists x \in U\, P(x)$ とも書く．混乱のおそれがある場合とは，たとえば $\forall x \in \mathbb{R}\, x^2 \geq 0 \land x < 2$ と書いたら，通常は命題 $\forall x \in \mathbb{R}\, [x^2 \geq 0 \land x < 2]$ を指していて，変数 x に関する関係 $\forall y \in \mathbb{R}\, [y^2 \geq 0] \land x < 2$ ではないのだが，やはり括弧をつけたほうが安全であろう．これは式 $\sum_{i=0}^{k} i^2 + i$ が $\sum_{i=0}^{k}(i^2 + i)$ を意味していて，$(\sum_{j=0}^{k} j^2) + i$ ではないのと似ているが，括弧付きの $\sum_{i=0}^{k}(i^2 + i)$ のほうが望ましいのと同じである．

$\forall x \in U\, [P(x)]$ もしくは $\exists x \in U\, [P(x)]$ において，変数 x は（全体）集合 U の要素を走る，つまり U の要素 x ひとつひとつについて $P(x)$ が充たされるかどうかが問題になっている．そこで U を変数 x の<u>変域</u>とも呼ぶ．

変数 x が何を表しているか文脈から明らかなときには，その変域である全体集合 U を $\forall x \in U\, [P(x)]$, $\exists x \in U\, [P(x)]$ において省略してそれぞれ $\forall x[P(x)]$, $\exists x[P(x)]$ とも書かれる．さらに変域である U の部分集合 A について，「A の任意の要素 x は $P(x)$ を充たす」$\forall x \in U\, [x \in A \to P(x)]$ を $\forall x \in A\, [P(x)]$ と書き，「A の要素 x で $P(x)$ を充たすものが存在する」$\exists x \in U\, [x \in A \land P(x)]$ は $\exists x \in A\, [P(x)]$ と書く．

そして「A に属さない任意の x は $P(x)$ を充たす」$\forall x \in U\, [x \notin A \to P(x)]$ を $\forall x \notin A\, [P(x)]$（もちろん $\forall x \in A^c[P(x)]$ でもよい）と書き，「A に属さないある x で $P(x)$ を充たすものが存在する」$\exists x \in U\, [x \notin A \land P(x)]$ は $\exists x \notin A\, [P(x)]$（もちろん $\exists x \in A^c\, [P(x)]$ でもよい）と書く．

さらに変数 x が実数のように順序がついている集合の要素を表すときには，$\forall x > a\, [P(x)]$, $\exists x > a\, [P(x)]$ はそれぞれ $\forall x \in \mathbb{R}\, [x > a \to P(x)]$, $\exists x \in \mathbb{R}\, [x > a \land P(x)]$ を表す．$\forall x \geq a\, [P(x)]$, $\exists x < a[P(x)]$ なども同様である．

U が有限集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 0)$ のときには量化記号 $\forall, \exists$ は論理記号 $\land, \lor$ の連なりで表せる：

$$\forall x \in \{a_1, \ldots, a_n\}\, [P(x)] \Leftrightarrow P(a_1) \land \cdots \land P(a_n)$$

$$\exists x \in \{a_1, \ldots, a_n\}\, [P(x)] \Leftrightarrow P(a_1) \lor \cdots \lor P(a_n)$$

特に $n = 0$ つまり空集合 $\emptyset$ のときには，$\forall x \in \emptyset\, [P(x)]$ は $P(x)$ の如何に関わらず真な命題で，$\exists x \in \emptyset\, [P(x)]$ は偽な命題となる．

さて量化記号と否定 $\neg$ の関係を与えておく．たとえば $\forall x \in U\, [P(x)]$ つまり「任意の U の要素 x について $P(x)$」が成り立たないことを主張する命題 $\neg\forall x \in U\, [P(x)]$ を示すにはどうすればよいか．それは「“どの U の要素 x を取っても $P(x)$” が成り立つわけではない」ということだから，$P(x)$ が成り立たない U の要素 x が少なくともひとつは存在することを意味する．つまり $\forall x \in U\, [P(x)]$ が成り立たないことを示すには $P(x)$ とはならないその反例 $x \in U$ を挙げればよい．

あるいは $\neg\exists x \in U\, [P(x)]$ は「“適当に U の要素 x を取れば $P(x)$” とはならない」ということなので，「どのように U の要素 x を取っても $P(x)$ を成立させることができない」ということを意味する．よってつぎの

（量化記号 $\exists, \forall$ の）de Morgan の法則　(2.5)

$$\neg\exists x \in U\, [P(x)] \Leftrightarrow \forall x \in U\, [\neg P(x)];\ \neg\forall x \in U\, [P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in U\, [\neg P(x)]$$

を得る．これと二重否定の除去を組み合わせて

$$\exists x \in U\, [P(x)] \Leftrightarrow \neg\forall x \in U\, [\neg P(x)];\ \forall x \in U\, [P(x)] \Leftrightarrow \neg\exists x \in U\, [\neg P(x)]$$

つまり $P(x)$ を充たす $x \in U$ が存在することを示すには，仮定「どんな $x \in U$ についても $\neg P(x)$」を設けると矛盾することを示せばよいし，任意の $x \in U$ について $P(x)$ であることを示すには，仮定「$\neg P(x)$ となる $x \in U$ が存在する」のもとで矛盾を導けばよいことになる．

例
円に変更．
15% (うすく)
アミカケ

例　（存在することは分かってもその例が分からない証明の例）
無理数の $\sqrt{2}$ 乗が有理数になることがある: $\exists a \notin \mathbb{Q}(a^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q})$.

証明　先ず $a = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ と取ってみる．$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \lor \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ であるから，場合分けして考える．$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ であれば，$a = \sqrt{2}$ について $a \notin \mathbb{Q} \land a^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ である．つぎに $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ である場合を考える．このとき $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ とすれば $a^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ となってよい．■

も集合 X であり，終域は集合 U である．つぎにそれらの値は $x \in X$ について

$$(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h\circ g)(f(x)) = ((h\circ g)\circ f)(x)$$

となって等しいので，結合律が成り立つ．

注意

結合律をグラフが等しいことを示して確かめてみよう．写像 f, g, h それぞれのグラフを G_f, G_g, G_h とすれば合成写像 $h\circ(g\circ f)$ のグラフは

$$\begin{aligned}
& G_h \circ (G_g \circ G_f) \\
&= \{(x,u) \in X \times U \mid \exists z \in Z\ [(x,z) \in G_g \circ G_f \wedge (z,u) \in G_h]\} \\
&= \{(x,u) \in X \times U \mid \\
&\qquad \exists z \in Z\ [\exists y \in Y((x,y) \in G_f \wedge (y,z) \in G_g) \wedge (z,u) \in G_h]\} \\
&= \{(x,u) \in X \times U \mid \\
&\qquad \exists z \in Z\ \exists y \in Y[(x,y) \in G_f \wedge (y,z) \in G_g \wedge (z,u) \in G_h]\} \\
&= \{(x,u) \in X \times U \mid \\
&\qquad \exists y \in Y\ [(x,y) \in G_f \wedge \exists z \in Z((y,z) \in G_g \wedge (z,u) \in G_h)]\} \\
&= \{(x,u) \in X \times U \mid \exists y \in Y\ [(x,y) \in G_f \wedge (y,u) \in G_h \circ G_g]\} \\
&= (G_h \circ G_g) \circ G_f
\end{aligned} \tag{3.4}$$

となって，最後の集合は $(h\circ g)\circ f$ のグラフである．

章の中で通し番号に
3-1
3-2
⋮
定義や定理など他も同様

いくつかの点とそれらの間を結ぶ矢印において，各点に集合の名前を書き，矢印に写像の名前を書き加えたラベルつきの有向グラフを考える．そのグラフにおいて，矢印を辿ってある二点間を結ぶ道筋があるとき，その道筋に沿って矢印上の写像を合成すると，道筋の始点から終点への写像が得られる．もしも任意の二点間の写像がその二点を結ぶ道筋によらずに一定であるとき，この有向グラフを<u>可換図式</u>という．またそのとき「(有向グラフで表された）可換図式が成り立つ」という言い方もする．たとえば

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, dashed, "k"'] & D
\end{tikzcd}$$

において，左図は $g\circ f = k\circ h$ が成り立つということを示した図であり，右図は与えられた写像 $f : A \to B, g : B \to D$ および $h : A \to C$ に対して図式を可換にする写像 $k : C \to D$ が存在することを示している．

以下の命題3.1.1, 3.1.2は3.1節の演習問題3.1の8, 9と併せて，集合の直積 $A_0 \times A_1$ と直和 $A_0 \coprod A_1$ の写像による特徴付けを与える．

角丸に

命題 3.1.1　−1　ハイフンに．

集合 A_0, A_1 の直積 $A_0 \times A_1$ および射影 $\mathrm{pr}_n : A_0 \times A_1 \to A_n,\ (a_0, a_1) \mapsto a_n\ (n = 0, 1)$ を考える．

任意に集合 X と写像 $f_n : X \to A_n\ (n = 0, 1)$ が与えられたら，写像 $f : X \to A_0 \times A_1$ で $n = 0, 1$ に対して

$$f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$$

となるものが一意的に存在する．この f を (f_0, f_1) あるいは $f_0 \times f_1$ で表すことにする．

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, "f_0"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
 & A_0 \times A_1 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_0"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & \\
A_0 & & A_1
\end{tikzcd}$$

証明　$f : X \to A_0 \times A_1$ を $f(x) = (f_0(x), f_1(x))$ と定めれば，$n = 0, 1$ と $x \in X$ について $(\mathrm{pr}_n \circ f)(x) = \mathrm{pr}_n(f(x)) = \mathrm{pr}_n(f_0(x), f_1(x)) = f_n(x)$ であるから，$f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$ が充たされる．

逆に $g : X \to A_0 \times A_1$ が $f_n = \mathrm{pr}_n \circ g\ (n = 0, 1)$ をみたすとすれば，$n = 0, 1,\ x \in X$ について $f_n(x) = \mathrm{pr}_n(g(x))$ となる．したがって，$g(x) = (f_0(x), f_1(x)) = f(x)$ となる．よって $g = f$ である．■

で表す．つまり $A = B$ は，A の要素 a はみな B の要素であり，かつ逆に B の要素 a はみな A の要素である場合を言う．任意の a について「$a \in A$ ならば $a \in B$，かつ $a \in B$ ならば $a \in A$」あるいは「$a \in A$ は $a \in B$ の必要十分条件」ということである．

オビ部分に対して，+1Q（大きく）左右センター

文字サイズ，行間等ママ

トル

スミアミ 50%

注意

したがって，空集合はひとつしかない．つまり A, B がいずれも要素をひとつも持たない集合ならば $A = B$ である．これにより空集合を表す記号 $\emptyset$ が意味を持つことになる．数学において特定のものを表すために決まった記号を使うことができるのは，その定義によって表されている対象が存在してしかもただ一つに決まる場合に限られる．空集合 $\emptyset$ は集合としてひとつに決まるのだからひとつの決まった記号で表される資格があることになる．

さて読者はこのふたつの集合の間の「等しい」という関係（集合の相等関係）をわざわざ定義したことを奇異に感じる方もおられよう．整数のような初等的対象では「等しいものは等しい」という同語反復で納得してきた．あるいはわれわれの定義如何に関わらず「等しい」という関係はどこかで予め定まっていると感じていたであろう．しかし新たな対象を数学に導入するとき，それらの間の最も基本的な関係は「いつ・どのようなときにそれらが等しいか」であり，これは定義しなければならない．たとえば，線型代数学において行列が導入された直後に，ふたつの行列が等しいと呼ばれるのはどのようなときか定義されたはずである．集合とはものの集まりであるから，その要素が等しいときに等しいと定めた．つまり集合という対象を考えるときには，それがどのように与えられたか，どのようにその集合を定めたかということはまったく考えない，と言っているに等しい定義である．

さて A と B が等しくないことは

$$A \neq B$$

と表される．$A \neq B$ となるのは，

1. A の要素 a で B の要素でないもの ($a \in A$ かつ $a \notin B$) が存在するか，または
2. B の要素 a で A の要素でないもの ($a \in B$ かつ $a \notin A$) が存在する

場合である．

今のところ『統計学』では登場しませんが，直しておいてください．

ふたつの集合 A, B について，A の要素 a がみな B の要素であるとき，A は B の部分集合といって，

$$A \subset B$$

で表す[1]．つまり $A \subset B$ ということは，任意の x について $x \in A$ であれば必ず $x \in B$ となっているということである．

$A \subset A$ と $\emptyset \subset A$ はつねに正しく，空集合 $\emptyset$ の部分集合は自分自身 $\emptyset$ のみである．また $A = B$ であることと $A \subset B$ と $B \subset A$ の両方が成立することは同値である．さらに集合 A, B, C について，$A \subset B$, $B \subset C$ がともに正しければ $A \subset C$ となる．

~~白ヌキ，ヤメ~~

このタグ自体，ヤメ（今後の本では使わない）

~~20%~~

説明

最後に述べた事実だけ説明しておこう．いま $A \subset B$ と $B \subset C$ がともに正しいと仮定する．このとき $A \subset C$ を示すためには，任意に x を取って，$x \in A$ であることを仮定する．この仮定のもとで $x \in C$ を示す．先ずはじめの仮定のひとつ $A \subset B$ より，任意の y についてもし $y \in A$ ならば $y \in B$ である．ここで特に $y = x$ と取ると，仮定 $x \in A$ より $x \in B$ であることが分かる．次にもうひとつの仮定 $B \subset C$ より，任意の z についてもし $z \in B$ ならば $z \in C$ である．そこで $z = x$ として，さっき分かった $x \in B$ より $x \in C$ となる．よって $x \in A$ ならば $x \in C$ であることが分かった．ここまで x は任意であったから，これは定義により $A \subset C$ を意味する．こうして $A \subset B$ と $B \subset C$ を仮定すれば $A \subset C$ が正しいことが分かった．

ここで使った一般的事実を書いておこう．任意の集合 A, B と任意の対象 x について以下が成立する：

$$A \subset B \text{ であるとき，} \quad x \in A \text{ であるならば } x \in B$$

A が B の部分集合ではないことは

$$A \not\subset B$$

と書かれ，これは A の要素 a で B の要素でないもの ($a \in A$ かつ $a \notin B$) が存在することと同値である．このことから $\emptyset \not\subset A$ はつねに正しくないことが

[1] $A \subset B$ を $A \subseteq B$ と書く流儀もある．