

# Mathématiques

## Cours de Spé

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>7</b>
1.1	Définitions . . . . .	7
1.1.1	Convergence et divergence . . . . .	7
1.1.2	Somme et reste d'une série convergente . . . . .	8
1.1.3	Condition nécessaire de convergence . . . . .	8
1.2	Séries à termes positifs . . . . .	9
1.2.1	Premier critère . . . . .	9
1.2.2	Séries de Riemann . . . . .	10
1.2.3	Critères de comparaison . . . . .	10
1.2.4	Règle de Riemann . . . . .	12
1.2.5	Séries de Bertrand . . . . .	13
1.2.6	Règle de D'Alembert . . . . .	14
1.2.7	Règle de Cauchy . . . . .	14
1.2.8	Règle de Duhamel . . . . .	15
1.3	Séries à termes quelconques . . . . .	16
1.3.1	Séries alternées . . . . .	16
1.3.2	Critère spécial . . . . .	17
1.3.3	Convergence absolue . . . . .	17
1.3.4	Règle d'Abel . . . . .	18
1.4	Exercices types . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>23</b>
2.1	Définitions . . . . .	23

2.1.1	Espaces vectoriels . . . . .	23
2.1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	24
2.2	Opérations . . . . .	24
2.2.1	Intersection de sev . . . . .	24
2.2.2	Somme de sev . . . . .	25
2.3	Sous-espaces supplémentaires . . . . .	25
2.3.1	Sev en somme directe . . . . .	25
2.3.2	Sev supplémentaires . . . . .	25
2.4	Sev engendré . . . . .	26
2.5	Application linéaire . . . . .	26
2.5.1	Définition . . . . .	26
2.5.2	Noyau et image . . . . .	27
2.6	Base et dimension . . . . .	28
2.6.1	Famille libre, famille génératrice, base . . . . .	28
2.6.2	Dimension . . . . .	28
2.6.3	Théorème de la base incomplète et ses corollaires . . . . .	29
2.6.4	Théorème du rang . . . . .	30
2.7	Exercices types . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Matrices</b>	<b>35</b>
3.1	Opérations . . . . .	35
3.1.1	Définition . . . . .	35
3.1.2	Somme . . . . .	36
3.1.3	Produit externe . . . . .	36
3.1.4	Produit interne . . . . .	36
3.1.5	Transposée . . . . .	37
3.1.6	Trace . . . . .	38
3.1.7	Déterminant . . . . .	38
3.1.8	Inversion . . . . .	40
3.2	Matrice et application linéaire . . . . .	41
3.2.1	Matrice d'une application linéaire . . . . .	41
3.2.2	Matrice de passage . . . . .	42

3.2.3	Changement de base . . . . .	43
3.3	Exercices types . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Diagonalisation des endomorphismes et des matrices carrées</b>	<b>48</b>
4.1	Définitions . . . . .	48
4.1.1	Valeur propre . . . . .	48
4.1.2	Sous-espace propre . . . . .	48
4.1.3	Polynôme d'endomorphisme . . . . .	49
4.2	Diagonalisabilité . . . . .	50
4.2.1	Polynôme caractéristique . . . . .	50
4.2.2	Polynôme scindé . . . . .	50
4.2.3	Endomorphisme diagonalisable . . . . .	51
4.3	Exercices types . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Intégrales impropres</b>	<b>62</b>
5.1	Définitions . . . . .	62
5.1.1	Définition d'une intégrale impropre . . . . .	62
5.1.2	Convergence et divergence . . . . .	63
5.2	Fonctions de Riemann . . . . .	68
5.3	Intégrales impropres de fonctions positives . . . . .	69
5.3.1	Rappels sur les notations de Landau . . . . .	69
5.3.2	Critères de comparaison pour des fonctions positives . . . . .	70
5.3.3	Fonctions de Bertrand . . . . .	72
5.4	Critères complémentaires . . . . .	73
5.4.1	Critère intégral de Cauchy . . . . .	73
5.4.2	Intégration par parties . . . . .	74
5.4.3	Changement de variable . . . . .	75
5.4.4	Convergence absolue . . . . .	75
5.4.5	Théorème d'Abel . . . . .	76
5.5	Quelques intégrales célèbres . . . . .	76
5.6	Exercices types . . . . .	77

<b>6</b>	<b>Espaces préhilbertiens</b>	<b>84</b>
6.1	Définitions . . . . .	84
6.1.1	Forme bilinéaire . . . . .	84
6.1.2	Forme bilinéaire symétrique . . . . .	85
6.1.3	Produit scalaire . . . . .	86
6.2	Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski . . . . .	87
6.2.1	Théorème de Cauchy-Schwarz . . . . .	87
6.2.2	Théorème de Minkowski . . . . .	87
6.3	Orthogonalité . . . . .	87
6.3.1	Définitions . . . . .	87
6.3.2	Théorème de Pythagore . . . . .	88
6.3.3	Orthogonal d'un sous-espace . . . . .	88
6.3.4	Famille orthogonale et orthonormale . . . . .	89
6.3.5	Théorème de Gram-Schmidt . . . . .	90
6.3.6	Théorème du supplémentaire orthogonal . . . . .	91
6.4	Projection orthogonale . . . . .	92
6.4.1	Définition . . . . .	92
6.4.2	Distance à un sous-espace . . . . .	92
6.4.3	Théorème de Bessel . . . . .	93
6.5	Adjoint . . . . .	94
6.5.1	Définition . . . . .	94
6.5.2	Propriétés . . . . .	94
6.5.3	Opérateur autoadjoint . . . . .	95
6.6	Exercices types . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>106</b>
7.1	Définitions . . . . .	106
7.1.1	Suite de fonctions . . . . .	106
7.1.2	Convergence simple . . . . .	107
7.1.3	Convergence uniforme . . . . .	109
7.2	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	111
7.2.1	La convergence uniforme implique la convergence simple . . . . .	111

7.2.2	Convergence uniforme et opérations . . . . .	111
7.2.3	Convergence uniforme et continuité . . . . .	111
7.2.4	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	112
7.2.5	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	112
7.3	Approximation des fonctions continues . . . . .	115
7.3.1	Approximation uniforme des fonctions continues sur un fermé borné . . .	115
7.3.2	Approximation uniforme des fonctions continues et périodiques . . . . .	115
7.4	Exercices types . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Séries de fonctions</b>	<b>117</b>
8.1	Convergences . . . . .	117
8.1.1	Définition d'une série de fonctions . . . . .	117
8.1.2	Convergence simple . . . . .	118
8.1.3	Convergence uniforme . . . . .	119
8.1.4	Convergence normale . . . . .	121
8.1.5	Convergence absolue . . . . .	122
8.1.6	Liens entre les différents types de convergence . . . . .	122
8.2	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	123
8.2.1	Convergence uniforme et continuité . . . . .	123
8.2.2	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	123
8.2.3	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	123
8.3	Exercices types . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>128</b>
9.1	Définitions . . . . .	128
9.1.1	Série trigonométrique . . . . .	128
9.1.2	Continuité par morceaux . . . . .	129
9.1.3	Coefficients de Fourier et série de Fourier . . . . .	130
9.1.4	L'espace $\mathcal{D}$ et ses propriétés . . . . .	133
9.2	Propriétés . . . . .	134
9.2.1	Théorème de Bessel . . . . .	134
9.2.2	Théorème de Parseval . . . . .	134

9.2.3	Théorème de Lejeune-Dirichlet . . . . .	135
9.3	Exercices types . . . . .	136
<b>10</b>	<b>Fonctions de deux variables réelles</b>	<b>143</b>
10.1	Introduction . . . . .	143
10.2	Topologie de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	143
10.2.1	Normes sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .	143
10.2.2	Ouverts de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	144
10.3	Dérivées partielles . . . . .	145
10.3.1	Fonctions partielles . . . . .	145
10.3.2	Dérivées partielles premières . . . . .	145
10.3.3	Dérivées partielles secondes . . . . .	148
10.3.4	Théorème de Schwarz . . . . .	149
10.4	Point critique . . . . .	150
10.4.1	Point critique . . . . .	150
10.4.2	Notations de Monge . . . . .	151
10.5	Extrema locaux des fonctions de deux variables . . . . .	152
10.5.1	Extremum local . . . . .	152
10.5.2	Recherche pratique des extrema locaux . . . . .	153
10.6	Exercices types . . . . .	155

# Chapitre 1

## Séries numériques

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Convergence et divergence

##### Définition 1

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. La série de terme général  $u_n$  notée  $\sum u_n$  est la suite des sommes partielles  $(S_n)$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On dit que  $\sum u_n$  converge si  $(S_n)$  converge. On dit qu'elle diverge sinon.

##### Exemple de la série géométrique

Soit  $q \in \mathbb{R}_+^*$ . Considérons la série géométrique  $\sum q^n$ .

Alors la suite des sommes partielles associée est  $(S_n) = \left( \sum_{k=0}^n q^k \right)$ .

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc  $(S_n)$  converge ssi  $q < 1$  c'est-à-dire  $\sum u_n$  converge ssi  $q < 1$ .



**Proposition 1**

Soient  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  deux séries numériques et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

1.  $(\sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ converge}) \implies \sum (u_n + v_n) \text{ converge.}$
2.  $\sum u_n \text{ converge} \implies \sum \lambda u_n \text{ converge.}$
3.  $(\sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ diverge}) \implies \sum (u_n + v_n) \text{ diverge.}$

**1.1.2 Somme et reste d'une série convergente****Définition 2**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique convergente. On appelle somme de la série le nombre réel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

et on appelle reste de la série la suite  $(R_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Exemple**

En reprenant l'exemple précédent, si  $q < 1$ , alors la somme de la série  $\sum q^n$  est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{car } q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi si  $q < 1$ , la série  $\sum q^n$  est convergente et converge vers  $\frac{1}{1-q}$

**1.1.3 Condition nécessaire de convergence****Proposition 2**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exemple**

$\sum \frac{e^n}{n}$  diverge car la suite  $\left(\frac{e^n}{n}\right)$  ne tend pas vers 0.

**1.2 Séries à termes positifs****1.2.1 Premier critère****Définition 3**

On dit qu'une série numérique  $\sum u_n$  est à termes positifs si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ .

**Proposition 3**

Soient  $\sum u_n$  une série à termes positifs et  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (S_n) \text{ est majorée}$$

**Proposition 4**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

$$\text{Alors} \left\{ \begin{array}{l} \sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge} \end{array} \right.$$

**Exemple**

La série à termes positifs  $\sum \frac{1}{n|\sin(n)|}$  diverge. En effet pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\sin(n)| \leq 1$  donc

$$\frac{1}{|\sin(n)|} \geq 1$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n|\sin(n)|} \geq \frac{1}{n}$$

or  $\sum \frac{1}{n}$  diverge donc  $\sum \frac{1}{n|\sin(n)|}$  diverge.

### 1.2.2 Séries de Riemann

#### Définition 4

On appelle série de Riemann, toute série de la forme  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

#### Théorème 1 (de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

#### Exemple

Étudions la nature de la série numérique  $\sum \frac{1 + \cos(n)}{n^4}$ . C'est une série à termes positifs car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$1 + \cos(n) \geq 0 \quad \text{vu que} \quad \cos(n) \geq -1$$

D'autre part pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1 + \cos(n)}{n^4} \leq \frac{2}{n^4} \quad \text{car} \quad \cos(n) \leq 1$$

Or la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^4}$  converge (car  $4 > 1$ ) donc la série  $\sum \frac{1 + \cos(n)}{n^4}$  converge par comparaison.

### 1.2.3 Critères de comparaison

#### Proposition 5

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles positives telles que  $u_n = o(v_n)$ . Alors

$$\sum v_n \text{ converge } \implies \sum u_n \text{ converge}$$

2. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles positives telles que  $u_n = O(v_n)$ . Alors

$$\sum v_n \text{ converge } \implies \sum u_n \text{ converge}$$

3. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles positives telles que  $u_n \sim v_n$ . Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Exemples**

1. Montrons que la série à termes positifs  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  converge. On a

$$e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En effet

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge (car  $2 > 1$ ) donc  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  converge par comparaison.

2. Montrons que la série à termes positifs  $\sum \frac{|\sin(n)|}{n^2}$  converge.

On a

$$\frac{|\sin(n)|}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En effet la suite  $(|\sin(n)|)$  est bornée. Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum \frac{|\sin(n)|}{n^2}$  converge par comparaison.

3. Montrons que la série à termes positifs  $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$  diverge. On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Or  $\sum \frac{1}{n}$  diverge donc la série  $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$  diverge par comparaison.

**Proposition 6**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Alors

$$\sum (u_n - u_{n-1}) \text{ converge} \iff (u_n) \text{ converge}$$

**Exemple**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

On a

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$$

or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum (u_n - u_{n-1})$  converge. Ainsi, par la proposition 6,  $(u_n)$  converge. La limite de cette suite s'appelle la constante d'Euler notée  $\gamma$ .

**1.2.4 Règle de Riemann****Théorème 2 (règle de Riemann)**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  alors  $\sum u_n$  converge.

**Exemple**

Étudions la nature de la série à termes positifs  $\sum (\ln(n))^{-n}$ . (Il est entendu que dans la suite des sommes partielles associées à cette série,  $n \geq 2$ ). On a

$$(\ln(n))^{-n} = e^{-n \ln(\ln(n))}$$

Or  $n^2 e^{-n \ln(\ln(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc en appliquant la règle précédente, on en déduit que la série  $\sum (\ln(n))^{-n}$  converge.

### 1.2.5 Séries de Bertrand

#### Définition 5

On appelle série de Bertrand toute série de la forme  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$  où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

#### Théorème 3 (de Bertrand)

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \text{ converge} \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

#### Exemple

Étudions la nature de la série  $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3 + n^2 + 1}}$ . On a

$$\begin{aligned} \sqrt{n^3 + n^2 + 1} &= \sqrt{n^3 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} \\ &= n^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{n^3 + n^2 + 1} \sim n^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3 + n^2 + 1}} \sim \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Or la série de Bertrand  $\sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge (car  $\frac{3}{2} > 1$ ).

Donc la série  $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3 + n^2 + 1}}$  converge par comparaison via la proposition 5.

### 1.2.6 Règle de D'Alembert

#### Théorème 4 (règle de d'Alembert)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \quad \text{où } \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \ell < 1 \implies \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \ell > 1 \implies \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

#### Exemple

Considérons  $\sum u_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{1}{n!}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $0 < 1$  donc  $\sum \frac{1}{n!}$  converge par la règle de d'Alembert.

### 1.2.7 Règle de Cauchy

#### Théorème 5 (règle de Cauchy)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \quad \text{où } \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \ell < 1 \implies \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \ell > 1 \implies \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

**Exemple**

Considérons la série  $\sum u_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \sqrt[n]{u_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} \\
 &= \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\
 &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
 &= e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\
 &= e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
 &= e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
 &= e^{-1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{e} < 1$  donc la série  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  converge par la règle de Cauchy.

**1.2.8 Règle de Duhamel****Théorème 6 (règle de Duhamel)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle strictement positive telle que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \alpha > 1 \implies \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \alpha < 1 \implies \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$



**Exemple**

Étudions la nature de  $\sum u_n$  où pour tout  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

On a pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \\ &= \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{6} < 1$  donc  $\sum u_n$  diverge par la règle de Duhamel.

**1.3 Séries à termes quelconques**

Dans ce paragraphe, on considère des séries à termes quelconques c'est-à-dire de terme général de signe non constant. Parmi toutes les séries à termes quelconques, il existe deux grandes familles pour lesquelles des théorèmes existent : il s'agit des séries alternées et des séries absolument convergentes.

**1.3.1 Séries alternées****Définition 6**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On dit que  $(u_n)$  est alternée s'il existe une suite réelle  $(a_n)$  positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-1)^n a_n$  ou  $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ .

**Exemple**

Par exemple,  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$  est une suite alternée.

**1.3.2 Critère spécial****Théorème 7 (Critère spécial des séries alternées)**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle alternée.

Si  $(|u_n|)$  est décroissante et converge vers 0 alors

1.  $\sum u_n$  converge.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$

**Exemple**

Considérons la série  $\sum u_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Alors  $(u_n)$  est une suite alternée. De plus  $(|u_n|)$  est décroissante et converge vers 0. Donc la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge par la règle de Leibniz.

**1.3.3 Convergence absolue****Définition 7**

On dit qu'une série numérique  $\sum u_n$  converge absolument si la série  $\sum |u_n|$  converge.

**Exemple**

Par exemple la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge absolument car la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

**Proposition 7**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique convergeant absolument. Alors  $\sum u_n$  converge.

**Exemple**

Par exemple la série  $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$  converge car elle converge absolument. En effet pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$  converge c'est-à-dire  $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$  converge absolument.

**Définition 8**

On appelle série semi-convergente toute série convergente mais non absolument convergente.

**Proposition 8**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge  $\iff \alpha > 0$

**1.3.4 Règle d'Abel****Théorème 8 (règle d'Abel)**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que

1.  $(u_n)$  est décroissante et converge vers 0.

2. La suite  $\left( \sum_{k=0}^n v_k \right)$  est bornée.

Alors  $\sum u_n v_n$  converge

**Exemple**

Soit  $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ . Étudions la nature de la série  $\sum u_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n}$ .

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{1}{n}$  et  $w_n = e^{in\theta}$ .

Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et converge vers 0. Montrons que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right)$  est bornée.

Remarquons que  $e^{i\theta} \neq 1$  car  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k \\ &= e^{i\theta} \cdot \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= e^{i\theta} \cdot \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi  $\left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}$

Donc la suite des sommes partielles associée à  $\sum w_n$  est bornée.

Ainsi,  $\sum v_n w_n = \sum u_n$  converge par la règle d'Abel.

## 1.4 Exercices types

### Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

### Solution

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1 \end{aligned}$$

Donc  $\sum u_n$  converge via la règle de D'Alembert.

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge. Ainsi  $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$  converge absolument donc converge.

Ainsi  $\sum \frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ , somme de deux séries convergentes, converge.

**Exercice 2**

Soit  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2n} \right)$

1. Déterminer un développement limité de  $u_n$  au voisinage de  $+\infty$  à l'ordre 2.
2. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .

**Solution**

$$1. u_n = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{2(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Par le critère des séries alternées,  $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$  converge et d'autre part :

$$-\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n^2}$$

or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  converge.

Finalement  $\sum u_n$ , somme de deux séries convergentes, converge.

**Exercice 3**

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n (n+1)^{n-1} (2n-1)}{n^{n+1}}.$$

1. Montrer que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

2. En déduire que

$$u_n = (-1)^n \frac{2e}{n} + (-1)^{n+1} \frac{4e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{N.B. : } u_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{2n-1}{n^2}\right).$$

3. Déterminer la nature de  $\sum u_n$ .

## Solution

1.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{(n-1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

donc

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e^{1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e e^{-\frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

d'où par un développement limité de l'exponentielle, on obtient finalement :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

2.

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{2n-1}{n^2}\right) = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En utilisant la question précédente, on a

$$u_n = (-1)^n e \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n e \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

i.e.

$$u_n = (-1)^n e \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

soit encore

$$u_n = (-1)^n \frac{2e}{n} + (-1)^{n+1} \frac{4e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3.  $\sum (-1)^n \frac{2e}{n}$  converge par le critère spécial des séries alternées.

Notons

$$v_n = (-1)^{n+1} \frac{4e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

 $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{4e}{n^2}$  or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum v_n$  converge absolument donc converge.Ainsi  $\sum u_n$ , somme de deux séries convergentes, converge.

**Exercice 4**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Etudier la nature de la série de terme général  $1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

**Solution**

Comme  $\alpha > 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  Ainsi

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

Ainsi  $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$  converge ssi  $2\alpha > 1$  i.e.  $\alpha > 1/2$

**Exercice 5**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$

**Solution**

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} \\ &= e^{n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{n^\alpha \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)} \end{aligned}$$

Si  $\alpha < 2$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$  donc  $\sum u_n$  diverge.

Si  $\alpha = 2$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1/2} \neq 0$  donc  $\sum u_n$  diverge

Si  $\alpha > 2$ ,  $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\sum u_n$  converge.

## Chapitre 2

# Espaces vectoriels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Espaces vectoriels

##### Définition 9

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev si  $E$  est muni d'une loi de composition interne notée  $+$  et d'une loi de composition externe (de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$ ) notée  $\cdot$  telles que

–  $(E, +)$  est un groupe commutatif

–  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2$

$$\cdot (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

$$\cdot \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

$$\cdot \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$$

$$\cdot 1.x = x$$

##### Exemples

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
2. L'espace des polynômes à coefficients réels  $\mathbb{R}[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.



3. L'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.
4. L'espace des suites réelles  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.

### 2.1.2 Sous-espaces vectoriels

#### Définition 10

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.  $F$  est un sev de  $E$  si

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$

#### Remarque

Pour montrer qu'un ensemble est vectoriel, on montre dans la quasi-totalité des cas que c'est un sev d'un ev classique du type d'un des exemples ci-dessus.

#### Exemples

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients réels est un  $\mathbb{R}$ -ev car c'est un sev du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{R}[X]$ .
2. L'ensemble des fonctions paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev car c'est un sev du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
3. L'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev car c'est un sev du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

## 2.2 Opérations

### 2.2.1 Intersection de sev

#### Proposition 9

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors  $F \cap G$  est un sev de  $E$ . Plus généralement, si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de sev de  $E$ , alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sev de  $E$ .

#### Remarque

Cette proposition est essentielle pour la notion de sev engendré.

### 2.2.2 Somme de sev

#### Définition 11

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ .

On définit l'ensemble  $F + G$  par

$$F + G = \{z \in E, \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}$$

#### Proposition 10

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors  $F + G$  est un sev de  $E$ .

## 2.3 Sous-espaces supplémentaires

### 2.3.1 Sev en somme directe

#### Définition 12

Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si

$$\forall (x, y) \in F \times G : x + y = 0 \implies x = y = 0$$

#### Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les sev  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$  et  $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$  sont en somme directe.

#### Proposition 11

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  et  $G$  sont en somme directe
- (ii)  $F \cap G = \{0\}$
- (iii)  $\forall x \in F + G, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$

### 2.3.2 Sev supplémentaires

#### Définition 13

Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  et on écrit  $E = F \oplus G$  si

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad E = F + G$$

**Proposition 12**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, \quad x = y + z$$

**Exemple**

Soient  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \text{ paire}\}$  et  $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \text{ impaire}\}$ . Alors  $P$  et  $I$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**2.4 Sev engendré****Définition 14**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X \subset E$ . Il existe un plus petit sev de  $E$  contenant  $X$ . C'est l'intersection de tous les sev de  $E$  contenant  $X$ . Il est appelé sev de  $E$  engendré par  $X$  et noté  $\text{Vect}(X)$ .

**Proposition 13**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ . Alors

$$\text{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

**Exemples**

1. Dans le plan  $E = \mathbb{R}^2$ , le sev engendré par un vecteur non nul  $x$  de  $E$  est  $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbb{R}x$  i.e. la droite vectorielle engendrée par  $x$ .
2. Dans le plan  $E = \mathbb{R}^2$ , le sev engendré par deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $E$  est  $E$  tout entier.

**2.5 Application linéaire****2.5.1 Définition****Définition 15**

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est linéaire (et on écrit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ) si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

**Exemples**

$$1. \quad I : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_a^b f(x)dx \end{cases} \quad \text{est linéaire.}$$

$$2. \quad D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases} \quad \text{est linéaire.}$$

**Proposition 14**

1.  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev
2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors
  - a.  $f(0) = 0$
  - b.  $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x - y) = f(x) - f(y)$

**2.5.2 Noyau et image****Définition 16**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle noyau (resp. image) de  $f$  l'ensemble noté  $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$  (resp.  $\text{Im}(f) = \{f(x); x \in E\}$ )

**Proposition 15**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont respectivement des sev de  $E$  et  $F$ .
2.  $f$  injective  $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$ .
3.  $f$  surjective  $\iff \text{Im}(f) = F$ .

**Exemple**

Considérons l'application linéaire  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$

Alors  $\text{Ker}(f) = \{\text{polynômes constants}\}$  et  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

## 2.6 Base et dimension

### 2.6.1 Famille libre, famille génératrice, base

#### Définition 17

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $L = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ . On dit que  $L$  est une famille libre si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

On dit que  $L$  est liée si elle n'est pas libre.

#### Définition 18

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $G = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ . On dit que  $G$  engendre  $E$  (ou que  $E$  est engendré par  $G$  ou que  $G$  est une partie génératrice de  $E$ ) si  $E = \text{Vect}(G)$ .

#### Définition 19

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $B = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ . On dit que  $B$  est une base de  $E$  si  $B$  est libre et engendre  $E$ .

#### Exemple

$B = (1, X - 1, (X + 1)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### 2.6.2 Dimension

#### Définition 20

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On dit que  $E$  est de dimension finie s'il est engendré par une famille finie de vecteurs de  $E$ .

#### Exemple

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension finie car  $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$

**Théorème 9**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  ont même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de  $E$  et noté  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  ou  $\dim(E)$ .

**Exemples**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$  car  $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  est une base de  $E$  et  $\text{Card}(B) = n + 1$ .
2.  $E = \mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1 car  $B = \{1\}$  est une base de  $E$  en tant que  $\mathbb{C}$ -ev.
3.  $F = \mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2 car  $B = \{1, i\}$  est une base de  $F$  en tant que  $\mathbb{R}$ -ev.

**2.6.3 Théorème de la base incomplète et ses corollaires****Théorème 10**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie engendré par  $G$ . Soit  $L$  une famille libre de  $E$ . Alors on peut compléter la famille  $L$  par des vecteurs pris dans  $G$  pour obtenir une base de  $E$ .

**Proposition 16**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie tel que  $E \neq \{0\}$ . Alors  $E$  admet au moins une base.

**Proposition 17**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un sev de  $E$ .

Alors  $F$  admet au moins un supplémentaire dans  $E$ .

**Proposition 18**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev supplémentaires dans  $E$ ,  $B$  une base de  $F$  et  $B'$  une base de  $G$ .

Alors  $B \sqcup B'$  est une base de  $E$ .

**Proposition 19**

$$E = F \oplus G \implies \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

**Proposition 20**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  tels que

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G)$$

Alors  $F = G$

**Proposition 21**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Alors

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{bijective} \implies \dim(E) = \dim(F)$$

**2.6.4 Théorème du rang****Théorème 11**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

**Proposition 22**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**2.7 Exercices types****Exercice 1**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  paire et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\left(f^2 = 0 \text{ et } \dim(\text{Im}(f)) = \frac{n}{2}\right) \iff (\text{Im}(f) = \text{Ker}(f))$$

**Solution**

$\boxed{\implies}$  Montrons que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(f)$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Or  $f^2 = 0$  donc  $f(y) = f^2(x) = 0$  donc  $y \in \text{Ker}(f)$ .

D'autre part, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$  or  $\dim(\text{Im}(f)) = \frac{n}{2}$  donc  $\dim(\text{Ker}(f)) = \frac{n}{2}$ .

Ainsi  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f))$ .

Comme  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ , on en déduit que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Montrons que  $f^2 = 0$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $f(x) \in \text{Im}(f)$  or  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$  donc  $f(x) \in \text{Ker}(f)$  i.e.  $f^2(x) = 0$ .

D'autre part, par le théorème du rang, on a  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$  or  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) = \frac{n}{2}$ .

## Exercice 2

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $(\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)) \iff (\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\})$
2. Montrer que  $(\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)) \iff (\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = E)$

## Solution

1.  $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ .

Soit  $y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et  $g(y) = 0$ . Ainsi  $g(f(x)) = 0$  i.e.  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ . Or

$$\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$$

donc  $x \in \text{Ker}(f)$  donc  $y = f(x) = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$  (l'autre inclusion étant évidente).

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

Montrons d'abord que  $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ . Alors  $g(f(x)) = 0$ . Donc  $f(x) \in \text{Ker}(g)$  et  $f(x) \in \text{Im}(f)$ .

Donc  $f(x) \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ . Or

$$\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$$



donc  $f(x) = 0$  i.e.  $x \in \text{Ker}(f)$ .

Montrons à présent que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ . Alors  $f(x) = 0$ . Donc  $g(f(x)) = g(0) = 0$  donc  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ .

2.  $\boxed{\implies}$

Supposons  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ .

Montrons que  $E \subset \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $g(x) \in \text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$ . Donc il existe  $z \in E$  tel que  $g(x) = g(f(z))$ .

Ainsi  $x = x - f(z) + f(z)$  avec  $f(z) \in \text{Im}(f)$  et  $x - f(z) \in \text{Ker}(g)$  car

$$g(x - f(z)) = g(x) - g(f(z)) = 0$$

Donc  $x \in \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ . Ainsi  $E = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$  (l'autre inclusion étant évidente).

$\boxed{\impliedby}$

Supposons  $E = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .

L'inclusion  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$  est évidente.

Montrons que  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(g)$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = g(x)$ . Or

$$E = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$$

donc  $x = x_1 + x_2$  avec  $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(g) \times \text{Im}(f)$ . Ainsi

$$y = g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_2)$$

or  $x_2 \in \text{Im}(f)$  donc il existe  $z \in E$  tel que  $x_2 = f(z)$ . Ainsi

$$y = g(f(z))$$

donc  $y \in \text{Im}(g \circ f)$ . Donc  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$ .

### Exercice 3

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\text{Im}(h \circ f) \subset \text{Im}(h \circ g) \iff \text{Im}(f) + \text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g) + \text{Ker}(h)$$

**Solution**

Supposons  $\text{Im}(h \circ f) \subset \text{Im}(h \circ g)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(h)$ . Alors il existe  $(x, z) \in E \times \text{Ker}(h)$  tel que  $y = f(x) + z$ . Donc

$$h(y) = h(f(x) + z) = h(f(x)) \in \text{Im}(h \circ f) \subset \text{Im}(h \circ g)$$

Ainsi il existe  $t \in E$  tel que  $h(y) = h(g(t))$ . Donc

$$y = g(t) + y - g(t) \in \text{Im}(g) + \text{Ker}(h)$$

car

$$h(y - g(t)) = h(y) - h(g(t)) = 0$$

Ainsi  $\text{Im}(f) + \text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g) + \text{Ker}(h)$ .



Supposons  $\text{Im}(f) + \text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g) + \text{Ker}(h)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(h \circ f)$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = h(f(x))$ . Or

$$f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Im}(f) + \text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g) + \text{Ker}(h)$$

Donc il existe  $(u, v) \in E \times \text{Ker}(h)$  tel que  $f(x) = g(u) + v$ . Ainsi

$$y = h(g(u) + v) = h(g(u)) \in \text{Im}(h \circ g)$$

Donc  $\text{Im}(h \circ f) \subset \text{Im}(h \circ g)$ .

**Exercice 4**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(p, q) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2 = p$  et  $q^2 = q$  (c'est-à-dire  $p$  et  $q$  sont des projecteurs). On suppose  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  et  $p \neq q$ .

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $q = \alpha p \Rightarrow \alpha p = \alpha^2 p$ .
2. Montrer que  $(p, q)$  forme une famille libre dans  $\mathcal{L}(E)$ .

**Solution**

1. Supposons  $q = \alpha p$ . Alors  $\alpha p = q^2$  (car  $q = q^2$ ) donc  $\alpha p = (\alpha p)^2$  (car  $q = \alpha p$ ) i.e.  $\alpha p = \alpha^2 p^2$  soit  $\alpha p = \alpha^2 p$  (car  $p^2 = p$ ).
2. Supposons par l'absurde que  $(p, q)$  non libre i.e.  $p$  et  $q$  colinéaires.

Alors  $q = \alpha p$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

En utilisant la question 1., on a donc  $\alpha p = \alpha^2 p$  soit  $(\alpha^2 - \alpha)p = 0$  i.e.  $\alpha(\alpha - 1)p = 0$  d'où  $\alpha(\alpha - 1) = 0$  car  $p \neq 0$ . Donc  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ .

Or si  $\alpha = 0$  alors  $q = 0$  ce qui contredit l'hypothèse. De même, si  $\alpha = 1$  alors  $q = p$  ce qui contredit également l'hypothèse.

## Chapitre 3

# Matrices

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### 3.1 Opérations

#### 3.1.1 Définition

##### Définition 21

Soient  $I = \{1, \dots, m\}$  et  $J = \{1, \dots, n\}$ . On appelle matrice de type  $(m, n)$  (ou à  $m$  lignes et  $n$  colonnes) à éléments dans  $\mathbb{K}$  toute application  $A$  de  $I \times J$  dans  $\mathbb{K}$ .

##### Notation

Si  $A$  est une matrice de type  $(m, n)$  à éléments dans  $\mathbb{K}$ , on écrit  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  ou encore

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de type  $(m, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Exemples**

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

**3.1.2 Somme****Définition 22**

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ . Alors

$$A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ où } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Exemple**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

**3.1.3 Produit externe****Définition 23**

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ où } b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

**Exemple**

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

**3.1.4 Produit interne****Définition 24**

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors

$$AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

**Exemple**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Alors  $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

**Proposition 23**

Soit  $(A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{K}))^3$ . Alors  $A(BC) = (AB)C$ .

**3.1.5 Transposée****Définition 25**

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ . Alors la transposée de  $A$  notée  ${}^tA$  est définie par

$${}^tA = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \text{ où } b_{ij} = a_{ji}$$

**Exemple**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Alors  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Proposition 24**

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

1.  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
2.  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
3.  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

### 3.1.6 Trace

#### Définition 26

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors la trace de  $A$  est le nombre noté  $\text{tr}(A)$  défini par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

#### Exemple

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 5 = 8$$

#### Proposition 25

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
2.  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$
3.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
4.  $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$

### 3.1.7 Déterminant

#### Définition 27 (récursive)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors le déterminant de  $A$  noté  $\det(A)$  ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est défini

par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

où pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $\Delta_{ij}$  est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de la matrice initiale la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne avec  $\det(a_{ij}) = a_{ij}$  (condition d'arrêt).

**Proposition 26**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

1.  $\det({}^t A) = \det(A)$
2.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

**Proposition 27**

Toute transformation du type  $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$  (resp.  $C_i \longleftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$ ) laisse inchangé le déterminant.

**Exemple**

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } \det(A) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda-1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
 &= (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda) + 1) \\
 &= (1-\lambda)^3
 \end{aligned}$$



### 3.1.8 Inversion

#### Définition 28

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est inversible s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = BA = I_n$ . On écrit alors  $B = A^{-1}$ .

#### Proposition 28

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

#### Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  est inversible car  $\det(A) = -1 \neq 0$ . Déterminons  $A^{-1}$ .

$$\text{Soient } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ deux vecteurs de } \mathbb{R}^3. \text{ On a}$$

$$AU = V \iff U = A^{-1}V$$

Or

$$AU = V \iff \begin{cases} x + y = X & (1) \\ x + z = Y & (2) \\ x + y + z = Z & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = X \\ x + z = Y \\ y = Z - Y \end{cases}$$

(on a remplacé (3) par (3) - (2)). D'où

$$AU = V \iff \begin{cases} x = X + Y - Z \\ z = -X + Z \\ y = Z - Y \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Matrice et application linéaire

### 3.2.1 Matrice d'une application linéaire

#### Définition 29

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives  $n$  et  $m$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (f_1, \dots, f_m)$  bases respectives de  $E$  et  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  définie par

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

On appelle matrice de  $u$  relativement à  $B, B'$ , la matrice notée  $Mat_{B, B'}(u) \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{K})$  définie par  $Mat_{B, B'}(u) = (a_{ij})$ .

#### Exemple

$$\text{Soient } B = (1, X, X^2) \text{ et } D : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$$

$$\text{Alors la matrice de } D \text{ relativement à } B \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Proposition 29

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans  $B, B'$ ,  $x \in E$ ,  $X$  la matrice colonne des coordonnées de  $x$  dans  $B$ ,  $y = u(x) \in F$ ,  $Y$  la matrice colonne des coordonnées de  $y$  dans  $B'$ . Alors

$$Y = AX$$

**Proposition 30**

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases respectives de  $E$  et  $F$ ,  $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ . Alors

$$\text{Mat}_{B, B'}(u + v) = \text{Mat}_{B, B'}(u) + \text{Mat}_{B, B'}(v)$$

et

$$\text{Mat}_{B, B'}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{B, B'}(u)$$

**Proposition 31**

Soient  $B$ ,  $B'$  et  $B''$  bases respectives de  $E$ ,  $F$  et  $G$ ,  $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

$$\text{Mat}_{B, B''}(v \circ u) = \text{Mat}_{B', B''}(v) \text{Mat}_{B, B'}(u)$$

**Proposition 32**

Soient  $B$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  bijective.

Alors  $\text{Mat}_B(u)$  est inversible et  $(\text{Mat}_B(u))^{-1} = \text{Mat}_B(u^{-1})$

**Proposition 33**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $B$  une base de  $E$ .

L'application  $\text{Mat} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \longmapsto \text{Mat}_B(u) \end{cases}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**3.2.2 Matrice de passage****Définition 30**

Soient  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  bases de  $E$  définies par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$$

On appelle matrice de passage de  $B$  à  $B'$  la matrice notée  $P_B^{B'} = (p_{ij})$ .

**Exemple**

Soient  $B = (1, X, X^2)$  et  $B' = (1, X - 1, (X + 1)^2)$  deux bases de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Alors

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3.2.3 Changement de base****Proposition 34**

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases de  $E$ ,  $X$  les coordonnées d'un vecteur  $x \in E$  dans  $B$  et  $X'$  les coordonnées de  $x$  dans  $B'$ . Alors

$$X = P_B^{B'} X'$$

**Proposition 35**

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $A = \text{Mat}_B(u)$  et  $A' = \text{Mat}_{B'}(u)$ . En notant  $P = P_B^{B'}$ , on a alors

$$A' = P^{-1}AP$$

**3.3 Exercices types****Exercice 1**

$$1. \text{ Soit } u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (z, y + z, x + y + z) \end{cases}$$

Déterminer la matrice de  $u$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$2. \text{ Soient } (u, v, w) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ défini pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ par } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v(t) = e^{2t} \\ w(t) = te^{2t} \end{cases}$$

et  $E = \text{Vect}(u, v, w)$ .

a. Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $E$ .

b. Montrer que  $f \in E \implies f' \in E$ .

c. Soit  $D : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$

Déterminer la matrice de  $D$  relativement à  $\mathcal{B}$ .

### Solution

1. Notons  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a. Par définition de  $E$ ,  $\mathcal{B}$  engendre  $E$ . Montrons que  $\mathcal{B}$  est libre.

Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda e^t + \mu e^{2t} + \nu t e^{2t} = 0$$

soit encore

$$\lambda + \mu e^t + \nu t e^t = 0$$

En particulier pour  $t = 0$ , on a  $\lambda + \mu = 0$ .

D'autre part, en faisant tendre  $t$  vers  $-\infty$  on a  $\lambda = 0$  donc  $\mu = 0$  puis en prenant  $t = 1$ , on a  $\nu = 0$ . Ainsi  $\mathcal{B}$  est libre.

Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

b. Soit  $f \in E$ . Alors il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f = \lambda u + \mu v + \nu w$ . Alors

$$f' = \lambda u' + \mu v' + \nu w'$$

or  $u' = u$ ,  $v' = 2v$  et  $w' = v + 2w$ , donc

$$f' = \lambda u + (2\mu + \nu)v + 2\nu w \in E$$

c.

$$Mat_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**

Déterminer la dimension des  $\mathbb{R}$ -ev suivants :

1.  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^8)$
2.  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X], \mathbb{R}^3)$
3.  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$

**Solution**

Rappelons que si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{R}$ -ev de dimension respective  $n$  et  $p$  alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$$

1.  $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^8)) = \dim(\mathbb{R}^2) \times \dim(\mathbb{R}^8) = 16$
2.  $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X], \mathbb{R}^3)) = \dim(\mathbb{R}_4[X]) \times \dim(\mathbb{R}^3) = 15$
3.  $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])) = \dim(\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})) \times \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 8 \times 3 = 24$

**Exercice 3**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Déterminer, sous forme factorisée,  $\det(A - \lambda I)$  et  $\det(B - \lambda I)$  en précisant les transformations effectuées sur les lignes et les colonnes.

**Solution**

Notons  $P_A = \det(A - \lambda I)$ .

En effectuant la transformation  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$  on a

$$P_A = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 2 - \lambda & -5 - \lambda & 1 \\ 0 & -6 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

puis en effectuant  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  on a

$$P_A = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -4 - \lambda & 0 \\ 0 & -6 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{Ainsi } P_A = (2 - \lambda)(-4 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$= -(2 - \lambda)^2(4 + \lambda)$$

Notons  $P_B = \det(B - \lambda I)$ .

En effectuant la transformation  $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$  on a

$$P_B = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 - \lambda \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

puis en effectuant  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$  on a

$$P_B = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 3 & 5 - \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{Ainsi } P_B = (2 - \lambda)((3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3)$$

$$= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12)$$

$$= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

$$= (2 - \lambda)^2(6 - \lambda)$$

#### Exercice 4

Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto AM \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer la matrice de  $f$  relativement à la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

**Solution**

1. Il suffit de constater que pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M}_2^2(\mathbb{R})$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$$

i.e.

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN$$

2. Notons  $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$$f(e_{11}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -e_{11} + e_{21}$$

$$f(e_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -e_{12} + e_{22}$$

$$f(e_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_{11}$$

$$f(e_{22}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_{12}$$

$$\text{Ainsi } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## Chapitre 4

# Diagonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

### 4.1 Définitions

#### 4.1.1 Valeur propre

##### Définition 31

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  s'il existe  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , tel que  $u(x) = \lambda x$ .

##### Définition 32

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $X \neq 0$ , tel que  $AX = \lambda X$ .

##### Notation

On note  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$  l'ensemble des valeurs propres de  $u$  dans  $\mathbb{K}$ .

#### 4.1.2 Sous-espace propre

##### Définition 33

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ . On appelle sev propre associé à  $\lambda$  le sev noté  $E_{\lambda} = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ . On appelle vecteur propre associé à  $\lambda$  tout vecteur non nul de  $E_{\lambda}$ .

### 4.1.3 Polynôme d'endomorphisme

#### Définition 34

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . On définit le polynôme d'endomorphisme  $P(u)$  par

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$  si  $P(u) = 0$ .

#### Exemples

1. Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur (i.e.  $p^2 = p$ ).  
Alors  $X^2 - X$  est un polynôme annulateur de  $p$ .
2. Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie (i.e.  $s^2 = id$ ).  
Alors  $X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $s$ .

#### Proposition 36

1. Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ . Alors

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(\lambda) \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(P(u))$$

2. Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda) = 0\}$$

#### Exemples

1. Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.  
 $X^2 - X = X(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $p$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(p) \subset \{0, 1\}$ .
2. Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie.  
Alors  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  est un polynôme annulateur de  $s$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(s) \subset \{-1, 1\}$ .

#### Proposition 37

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}^n(u)$  où les  $\lambda_i$  sont 2 à 2 distincts. Alors les  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe.

## 4.2 Diagonalisabilité

### 4.2.1 Polynôme caractéristique

#### Définition 35

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle polynôme caractéristique de  $A$  le polynôme noté  $P_A$  défini par

$$P_A = \det(A - XI_n)$$

#### Proposition 38

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, P_A(\lambda) = 0\}$$

#### Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) \\ &= (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

D'où  $P_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$

### 4.2.2 Polynôme scindé

#### Définition 36

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . On dit que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{K}$  s'il existe  $k \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  (non forcément distincts) tels que

$$P = k \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

**Exemples**

1.  $X^2 + 1$  est scindé dans  $\mathbb{C}$  car  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  mais n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}$ .
2.  $(X - 1)^2(X - 3)(X - 6)^3$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ .

**Notation**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P_A$  scindé dans  $\mathbb{K}$ . On note  $m(\lambda_i)$  l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  dans  $P_A$ .

**Exemple**

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ .  
Alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$  avec  $m(1) = 2$  et  $m(2) = 1$ .

**Proposition 39**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \implies 1 \leq \dim(E_{\lambda_0}) \leq m(\lambda_0)$$

**4.2.3 Endomorphisme diagonalisable****Définition 37**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est de dimension finie. On dit que  $u$  est diagonalisable s'il existe une base  $B$  de  $E$  propre pour  $u$  i.e. telle que  $\text{Mat}_B(u)$  diagonale.

**Définition 38**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Théorème 12**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  diagonalisable
- (ii) il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres

$$(iii) \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_{\lambda} = E$$

$$(iv) \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_{\lambda}) = \dim(E)$$

### Théorème 13

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Alors  $[A \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})] \Leftrightarrow [P_A \text{ scindé dans } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A), \dim(E_{\lambda}) = m(\lambda)]$

### Exemples

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Étudions la diagonalisabilité de  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) \\ &= (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

D'où  $P_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$  avec  $m(1) = 3$ .

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Ker}(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } -x + y + z = 0 \right\} \end{aligned}$$

D'où  $\dim(E_1) = 2 \neq 3$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Étudions la diagonalisabilité de  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$$P_A = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$P_A = (2-X)((3-X)^2 - 1)$$

soit

$$P_A = (2-X)^2(4-X)$$

Donc  $P_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 4\}$  avec  $m(2) = 2$  et  $m(4) = 1$ .

Déterminons le sous-espace propre  $E_2$  associé à la valeur propre 2.

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

soit

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + z = 0 \right\}$$

i.e.

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi

$$\dim(E_2) = 2 = m(2)$$

D'autre part comme  $m(4) = 1$ ,  $\dim(E_4) = 1$  Ainsi  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

En outre

$$E_4 = \text{Ker}(A - 4I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} -x - y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

soit finalement

$$E_4 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Ainsi } D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.3 Exercices types

#### Exercice 1

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

Si oui, exhiber une base de vecteurs propres i.e. déterminer  $D$  et  $P$ .

*(Vous devez justifier rigoureusement votre réponse en déterminant **OBLIGATOIREMENT** avec précision les sous-espaces propres)*

## Solution

$$\begin{aligned}
 P_A(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ 2 & 2-X & -3 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
 &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 1-X & 2-X & -3 \\ 1-X & 2 & 1-X \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 0 & -X & -3 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
 &= -X(1-X)^2
 \end{aligned}$$

D'où  $P_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, 1\}$  avec  $m(0) = 1$  et  $m(1) = 2$ .

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \text{Ker}(A - I) \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{vmatrix} -2x + 2y = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{vmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y = z \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

D'où  $\dim(E_1) = 1 \neq 2 = m(1)$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable.



$$\begin{aligned}
 P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
 &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 2-X & 1 & -X \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \\
 &= (2-X)(1+X)^2
 \end{aligned}$$

D'où  $P_B$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $S_{P_{\mathbb{R}}}(B) = \{-1, 2\}$  avec  $m(-1) = 2$  et  $m(2) = 1$ .

$$\begin{aligned}
 E_{-1} &= \text{Ker}(B + I) \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0 \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

D'où  $\dim(E_{-1}) = 2 = m(-1)$ . De plus  $\dim(E_2) = 1$  car  $m(2) = 1$  donc  $B$  est diagonalisable.

Il reste à déterminer  $E_2$  pour obtenir une base de vecteurs propres.

$$\begin{aligned} E_2 &= \text{Ker}(B - 2I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y = z \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

$$\text{Soient } a \in \mathbb{R} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Discuter de la diagonalisabilité de  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivant les valeurs de  $a$ .

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

## Solution

On a

$$P_A(X) = -X(a - X)(2 + 2a - X)$$

donc le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ .

1er cas :  $a \notin \{0, -1, -2\}$

Alors  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, a, 2 + 2a\}$  avec  $\forall \lambda \in S_{P_{\mathbb{R}}}(A), m(\lambda) = 1$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2e cas :  $a = 0$

Alors

$$P_A(X) = X^2(2 - X)$$

donc  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, 2\}$  avec  $m(0) = 2$  et  $m(2) = 1$ . Or

$$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc  $\dim(E_0) = 1 \neq m(0)$  d'où  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

3e cas :  $a = -1$

Alors

$$P_A(X) = -X^2(1 + X)$$

donc  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, -1\}$  avec  $m(0) = 2$  et  $m(-1) = 1$ . Or

$$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc  $\dim(E_0) = 2 = m(0)$  d'où  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  (car  $\dim(E_{-1}) = 1$  vu que  $m(-1) = 1$ )

4e cas :  $a = -2$

Alors

$$P_A(X) = -X(2 + X)^2$$

donc  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, -2\}$  avec  $m(0) = 1$  et  $m(-2) = 2$ . Or

$$E_{-2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc  $\dim(E_{-2}) = m(-2)$ . D'autre part comme  $m(0) = 1$ ,  $\dim(E_0) = 1$  d'où  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Finalement  $A$  diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ssi  $a \neq 0$ .

### Exercice 3

Soit  $(u_n)$  une suite réelle vérifiant  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = u_2 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1}$ .

Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X_{n+1} = AX_n$ .

N.B. :  $A$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels à déterminer.

2. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et la diagonaliser (on explicitera la matrice diagonale et  $P$ ).
3. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Solution

1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.  $P_A(X) = -X(X+1)(X-2)$ .

Donc le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et  $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, -1, 2\}$

De plus  $m(0) = m(-1) = m(2) = 1$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Donc } D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. On a  $A = PDP^{-1}$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on a  $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ 0 & 4(-1)^{n+2} + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 2(-1)^n + 2^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$  i.e. vu que  $u_0 = 0$  et  $u_1 = u_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ 0 & 4(-1)^{n+2} + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 2(-1)^n + 2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \frac{1}{6} \left( 4(-1)^{n+1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n \right)$$

soit encore

$$u_n = \frac{1}{3} \left( (-1)^{n+1} + 2^n \right)$$

#### Exercice 4

1. Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A + I = 0$  (\*)
  - a. Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ . Montrer que  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ .
  - b. Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ne peut pas vérifier l'équation (\*).

**Solution**

1. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré impair. En notant  $\tilde{P}$  la fonction polynôme (continue) associée à  $P$ , on a

$$\lim_{-\infty} \tilde{P} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \tilde{P} = +\infty$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que  $P$  admet au moins une racine réelle.

2. a. Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ . Alors  $\exists X \neq 0$ ,  $AX = \lambda X$  donc  $A^2X = AAX = \lambda^2X$  soit

$$(A^2 + A + I)X = (\lambda^2 + \lambda + 1)X$$

or  $A^2 + A + I = 0$  donc

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)X = 0$$

or  $X \neq 0$  donc

$$(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

- b. Supposons que  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifie (\*). Alors par 2.a., on a

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$$

or le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A$  est de degré 3 donc de degré impair donc par 1.,  $P_A$  admet au moins une racine réelle i.e.

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$$

ce qui est contradictoire.

## Chapitre 5

# Intégrales impropres

### 5.1 Définitions

#### 5.1.1 Définition d'une intégrale impropre

##### Définition 39

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ . On appelle intégrale impropre toute intégrale d'un des 8 types suivants :

- a.  $\int_a^b f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $[a, b[$  et non définie en  $b$ .
- b.  $\int_a^b f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $]a, b]$  et non définie en  $a$ .
- c.  $\int_a^b f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $]a, b[$  et non définie en  $a$  et  $b$ .
- d.  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $[a, +\infty[$ .
- e.  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $] - \infty, b]$ .
- f.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

g.  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $]a, +\infty[$  et non définie en  $a$ .

h.  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$  où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $] -\infty, b[$  et non définie en  $b$ .

### Exemples

1.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$  est une intégrale impropre du type  $a$ . car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  n'est pas définie en 1 (elle tend vers l'infini en 1).

2.  $\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)} dt$  est une intégrale impropre du type  $c$ . car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t(1-t)}$  n'est pas définie en 0 et 1.

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est une intégrale impropre du type  $d$ .

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) est une intégrale impropre du type  $g$ .

### Remarques

1. Nous verrons dans la suite du cours que l'étude des intégrales impropres du type  $c$ .,  $f$ .,  $g$ . et  $h$ . se ramènent à l'étude d'intégrales impropres d'autres types.
2. Dans la suite du cours, nous utiliserons la notation  $b \leq +\infty$  (respectivement  $-\infty \leq a$ ) qui signifie que  $b$  est un réel ou  $+\infty$  (respectivement  $a$  est un réel ou  $-\infty$ ) ce qui permet d'énoncer les définitions de la convergence pour uniquement trois grands types d'intégrales impropres.

#### 5.1.2 Convergence et divergence

La premier réflexe à posséder lorsqu'on étudie une intégrale impropre est de repérer les bornes sur lesquelles la fonction n'est pas définie.



**Définition 40 (cas droit)**

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b[$  avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ . On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  admet une limite finie en  $b$ . Dans ce cas

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

**Remarques**

1. On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  diverge si  $\int_a^b f(t) dt$  ne converge pas.
2. Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ . Ainsi  $\int_a^b f(t) dt$  converge ssi  $F(x)$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $b$ .

**Exemples**

1. Étudions l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{1-t} dt$ . Il s'agit bien d'une intégrale impropre (cas droit) car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1-t}$  n'est pas définie en 1. On a

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt &= -[\ln(1-t)]_0^x \\ &= \ln(1) - \ln(1-x) \\ &= -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty \end{aligned}$$

Donc  $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ . Ainsi  $\int_0^1 \frac{1}{1-t} dt$  diverge.

2. Étudions l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ . On a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t^2} &= -\left[\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc  $\int_1^x \frac{dt}{t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge. On a de plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

### Définition 41 (cas gauche)

Soit  $f : ]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $]a, b]$  avec  $-\infty \leq a < b < +\infty$ . On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \longmapsto \int_x^b f(t) dt$  admet une limite finie en  $a$ . Dans ce cas

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

### Remarque

1. On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  diverge si  $\int_x^b f(t) dt$  ne converge pas.
2. Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_x^b f(t) dt = F(b) - F(x)$ . Ainsi  $\int_a^b f(t) dt$  converge ssi  $F(x)$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

### Exemples

1. Étudions l'intégrale  $\int_0^1 \ln(t) dt$ . Il s'agit bien d'une intégrale impropre (cas gauche) car la fonction  $t \mapsto \ln(t)$  n'est pas définie en 0. On a par intégration par parties (en posant  $u(t) = \ln(t)$  et  $v'(t) = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln(t) dt &= [t \ln(t)]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t} \times t dt \\ &= [t \ln(t) - t]_x^1 \\ &= \ln(1) - 1 - (x \ln(x) - x) \\ &= x - x \ln(x) - 1 \end{aligned}$$

Or  $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  (théorème des croissances comparées) donc  $\int_x^1 \ln(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$ .

Ainsi  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge et on a de plus

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

2. Étudions l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ . On a

$$\begin{aligned} \int_x^0 e^t dt &= [e^t]_x^0 \\ &= 1 - e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc  $\int_x^0 e^t dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ . Ainsi  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$  converge et on a de plus

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$$

### Définition 42 (cas bilatéral)

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $]a, b[$  avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

### Remarques

1. En pratique, lorsqu'on étudie une intégrale impropre bilatérale  $\int_a^b f(t) dt$ , on considère un point  $c$  quelconque strictement compris entre  $a$  et  $b$ .
2. Lorsqu'on considère une intégrale impropre bilatérale  $\int_a^b f(t) dt$ , et que pour un  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$ ,  $\int_a^c f(t) dt$  diverge alors on peut immédiatement conclure que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  diverge. En effet si cette dernière intégrale convergerait, alors en particulier  $\int_a^c f(t) dt$  convergerait ce qui est contradictoire.

## Exemples

1. Étudions l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)} dt$ . Il s'agit bien d'une intégrale impropre bilatérale car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t(1-t)}$  n'est pas définie en 0 et 1. Choisissons un point strictement compris entre 0 et 1, par exemple  $\frac{1}{2}$  et commençons par étudier la nature de  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)} dt$ . On a

$$\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)} dt &= \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} dt \\ &= [\ln(t) - \ln(1-t)]_x^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - (\ln(x) - \ln(1-x)) \\ &= \ln(1-x) - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \end{aligned}$$

Donc  $\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ . Ainsi  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)} dt$  diverge. Par conséquent  $\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)} dt$  diverge.

2. Étudions l'intégrale impropre bilatérale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ . Commençons par étudier la nature de  $\int_0^{+\infty} t dt$  (le choix de la borne 0 est arbitraire, on aurait pu choisir n'importe quel réel).

On a

$$\begin{aligned} \int_0^x t dt &= \frac{1}{2} [t^2]_0^x \\ &= \frac{1}{2} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Donc  $\int_0^x t dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ainsi  $\int_0^{+\infty} t dt$  diverge. Par conséquent  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$  diverge.

**Observation**

On prendra garde de ne pas confondre  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ . En effet, on a vu dans un des exemples précédents que  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$  diverge (en particulier cette intégrale n'est pas un nombre) et pourtant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x t dt = 0!$

**Remarque**

Dans la suite du cours, les résultats principaux seront énoncés dans le cas droit d'une intégrale impropre, les autres cas se déduisant très facilement du premier.

**Proposition 40**

Soient  $f$  et  $g$  continues sur  $[a, b[$  avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$  telles que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent. Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt$  converge et on a de plus

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt$$

**Remarque**

Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge et  $\int_a^b g(t) dt$  diverge alors  $\int_a^b (f + g)(t) dt$  diverge.

En effet, si  $\int_a^b (f + g)(t) dt$  convergeait, alors en utilisant la proposition précédente,

$$\int_a^b (f + g)(t) - f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$$

convergerait ce qui est faux par hypothèse.

**5.2 Fonctions de Riemann**

Les intégrales impropres qui suivent sont des références au sens où l'étude d'une intégrale impropre se ramène souvent à comparer la fonction à intégrer aux fonctions de Riemann.

**Théorème 14**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors

1.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha < 1$$

2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

**Remarque**

En utilisant les résultats du théorème précédent, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  diverge. En effet, si  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  convergait, alors en particulier  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  convergeraient. On aurait donc à la fois  $\alpha < 1$  et  $\alpha > 1$  ce qui est absurde.

**5.3 Intégrales impropres de fonctions positives**

Etudier la nature d'une intégrale impropre  $\int_a^b f(t) dt$  (cas droit) est aisé lorsqu'on peut exhiber une primitive  $F$  de  $f$ . Il suffit en effet d'étudier la limite de  $F$  en  $b$ . Malheureusement, il est souvent délicat (voire impossible) d'exprimer une primitive de  $f$  : par exemple si  $f$  est la fonction  $t \mapsto e^{t^2}$  ou encore  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ . Dans ce cas, une des idées est de comparer  $f$  à des fonctions de références, par exemple les fonctions de Riemann. Comme pour les séries numériques, les critères résultant de ces comparaisons ne sont valables que dans le cas de fonctions *positives*.

**5.3.1 Rappels sur les notations de Landau**

Soit  $a$  un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  (ce qu'on notait précédemment  $-\infty \leq a \leq +\infty$ ).

**Définition 43 (Notations de Landau)**

1. On dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  (et on écrit : au voisinage de  $a$ ,  $f = O(g)$ ) si au voisinage de  $a$ ,  $f = g.h$  avec  $h$  bornée au voisinage de  $a$ .

2. On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  (et on écrit : au voisinage de  $a$ ,  $f = o(g)$ ) si au voisinage de  $a$ ,  $f = g.\varepsilon$  avec  $\varepsilon(t)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow a$ .
3. On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  (et on écrit  $f \underset{a}{\sim} g$ ) si au voisinage de  $a$ ,  $f = g.k$  avec  $k(t)$  tend vers 1 quand  $t \rightarrow a$ .

### Observations

1. Si  $g$  ne s'annule pas,  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$  signifie simplement que  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$
2. Si  $g$  ne s'annule pas,  $f = o(g)$  au voisinage de  $a$  signifie simplement

$$\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$$

3. Si  $g$  ne s'annule pas,  $f \underset{a}{\sim} g$  signifie simplement

$$\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 1$$

### Exemples

1. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\sin(t) = O(1)$  car la fonction  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1} = \sin(t)$  est bornée (par 1) au voisinage de  $+\infty$ .
2. Au voisinage de 0,  $t^2 = o(t)$  car  $\frac{t^2}{t} = t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$
3.  $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$  car  $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$

### Remarques

Rappelons également les exemples suivants :

1. pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ , on a au voisinage de  $+\infty$

$$(\ln(t))^\alpha = o(t^\beta) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(\ln(t))^\alpha}{t^\beta} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

2. pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a au voisinage de  $+\infty$

$$t^\alpha = o(e^t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{t^\alpha}{e^t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

### 5.3.2 Critères de comparaison pour des fonctions positives

#### Proposition 41

Soient  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  définies et continues sur  $[a, b[$  où  $-\infty < a < b \leq +\infty$ .

1. Supposons qu'au voisinage de  $b$ ,  $0 \leq f(t) \leq g(t)$ . Alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t) dt \text{ converge}$$

et

$$\int_a^b f(t) dt \text{ diverge} \implies \int_a^b g(t) dt \text{ diverge}$$

2. Supposons qu'au voisinage de  $b$ ,  $f(t) = O(g(t))$ . Alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t) dt \text{ converge}$$

3. Supposons qu'au voisinage de  $b$ ,  $f(t) = o(g(t))$ . Alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t) dt \text{ converge}$$

4. Supposons que  $f \sim_b g$ . Alors  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont de même nature.

#### Exemples

1. Étudions l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$  est positive et définie en 1. Il s'agit donc du cas droit d'une intégrale impropre. On a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t^3+1 \geq t^3$  donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{1}{t^3+1} \leq \frac{1}{t^3}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$  converge donc  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$  converge par comparaison.



2. Étudions l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt$ . La fonction  $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t^2}$  est positive et définie en 1. Il n'y a donc qu'une étude en  $+\infty$ . On a au voisinage de  $+\infty$

$$\frac{|\sin(t)|}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

car la fonction

$$t \mapsto \frac{\frac{|\sin(t)|}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = |\sin(t)|$$

est bornée. Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge donc  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt$  converge.

3. Étudions l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ . La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est positive et définie en 1. Il s'agit donc du cas droit d'une intégrale impropre. On a au voisinage de  $+\infty$ ,

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet

$$\frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge donc  $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge par comparaison.

4. Étudions l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ . La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est positive et définie en 1. Il s'agit donc du cas gauche d'une intégrale impropre. On a

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$$

car

$$\frac{\frac{e^{-t}}{t}}{\frac{1}{t}} = e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Or  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge donc  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$  diverge par comparaison.

### Remarque

Dans les exemples ci-dessus, aucune tentative d'expression d'une quelconque primitive n'a été lancée. Il s'agissait simplement de comparer la fonction  $f$  à une fonction de Riemann.

### 5.3.3 Fonctions de Bertrand

Les fonctions de Bertrand sont les autres fonctions de références.

#### Théorème 15 (Bertrand)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Alors

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt \text{ converge } \Longleftrightarrow \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

#### Remarque

Par exemple  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$  diverge.

#### Exemple

Étudions l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^3} dt$ . La fonction  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}$  est positive sur  $[e, +\infty[$  et définie en  $e$ . Il s'agit donc du cas droit d'une intégrale impropre. On a

$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3}$$

car

$$\frac{\frac{\ln(t)}{(1+t)^3}}{\frac{\ln(t)}{t^3}} = \left( \frac{t}{1+t} \right)^3 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

Or  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} dt$  converge donc  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^3} dt$  converge par comparaison.

## 5.4 Critères complémentaires

### 5.4.1 Critère intégral de Cauchy

Ce critère compare la nature d'une série avec celle d'une intégrale impropre. Il permet d'établir un lien entre les cours consacrés aux séries numériques et ceux consacrés aux intégrales impropres.

#### Théorème 16 (Critère intégral de Cauchy)

Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, positive et décroissante sur  $[n_0, +\infty[$ . Alors  $\sum f(n)$  et  $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

**Exemple**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étudions la nature de la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .

Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$  donc la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

Si  $\alpha > 0$ , la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$  car pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,

$$f'(t) = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} \leq 0$$

Ainsi, on en déduit via le théorème précédent que  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est de même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ .

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha > 1$  donc  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

**5.4.2 Intégration par parties**

L'intégration par parties permet parfois d'étudier la nature d'une intégrale impropre comme le montre l'exemple qui suit.

**Exemple**

Étudions l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ . La fonction  $t \mapsto te^{-t}$  est définie en 0. Il s'agit donc du cas droit d'une intégrale impropre. Procédons par une intégration par parties en posant  $u(t) = t$  et  $v'(t) = e^{-t}$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-t} dt &= -[te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt \\ &= -xe^{-x} - [e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

or

$$xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{théorème des croissances comparées})$$

et

$$e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$\int_0^x te^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$  converge et on a de plus

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$$

### 5.4.3 Changement de variable

Le changement de variable permet également d'étudier certaines intégrales impropres.

#### Exemple

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . On souhaite étudier  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$  (cas particulier des fonctions de Bertrand).

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$  est définie en 2 donc il s'agit du cas droit d'une intégrale impropre.

Effectuons le changement de variable suivant  $u = \ln(t)$  dans l'intégrale  $\int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$ . On a alors  $du = \frac{dt}{t}$ . Ainsi

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{u^\beta} du$$

Donc  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$  est de même nature que  $\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$ . Or cette dernière converge ssi  $\beta > 1$  donc  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$  converge ssi  $\beta > 1$ .

### 5.4.4 Convergence absolue

#### Définition 44 (cas droit)

On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument si  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge.

La convergence absolue revêt un intérêt essentiellement par la proposition suivante.

#### Proposition 42

Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument, alors elle converge.

**Exemple**

Étudions la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt$ . Comme la fonction  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^3}$  est définie en 1, il s'agit du cas droit d'une intégrale impropre. On a pour tout  $t \geq 1$ ,

$$\left| \frac{\sin(t)}{t^3} \right| \leq \frac{1}{t^3}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$  converge donc  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t^3} \right| dt$  converge c'est-à-dire  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt$  converge absolument.

On en conclut par la proposition précédente que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt$  converge.

**5.4.5 Théorème d'Abel****Théorème 17 (Abel)**

Soient  $f$  et  $g$  continues sur  $[a, b[$  avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$  telles que

- $f$  décroissante et  $\lim_{+\infty} f = 0$
- il existe  $k > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b[$ ,  $\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq k$

Alors  $\int_a^b f(t)g(t)dt$  converge

**Lemme 1 (Bonnet ou seconde formule de la moyenne)**

Soient  $f$  positive et décroissante sur  $[x, y]$  et  $g$  continue sur  $[x, y]$ .

Alors il existe  $c \in [x, y]$  tel que  $\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x) \int_x^c g(t)dt$

**5.5 Quelques intégrales célèbres****Théorème 18 (de Lejeune-Dirichlet)**

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$  converge et  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

**Lemme 2**

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2 \sin(x)}$$

$$2. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}$$

**Lemme 3**

Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi/2]$ .

$$\text{Alors } \int_0^{\pi/2} f(x) \sin((2n+1)x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Corollaire 1**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

**Théorème 19 (Laplace-Gauss)**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**5.6 Exercices types****Exercice 1**

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$1. \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

$$2. \quad \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$$

**Solution**

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge donc  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$  d'où  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge.

2. Au voisinage de 0,  $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ .

Or  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$  converge ssi  $\alpha - 1 < 1$  i.e. ssi  $\alpha < 2$ .

Ainsi  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha < 2$ .

3. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})} \sim e^{-t}$

Or  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge d'où  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$  converge.

Au voisinage de  $-\infty$ ,  $\frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})} \sim e^t$

Or  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$  converge d'où  $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$  converge.

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$  converge.

**Exercice 2**

On rappelle la formule  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ .

Considérons  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ .

1. Montrer (rigoureusement) que  $\ln(\sin(x)) \sim \ln(x)$ .

2. Montrer que  $I$  converge et que  $I = J$  en utilisant par exemple le changement de variable

$$u = \frac{\pi}{2} - x$$

3. Montrer que  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$ .

4. En déduire la valeur de  $I$ .

## Solution

1.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} &= \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x} \cdot x\right)}{\ln(x)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1\end{aligned}$$

Donc  $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ 2. Via la première question  $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$  or  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x) dx$  converge. En effet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Ainsi  $I$  converge.D'autre part en effectuant le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} - u$  dans  $I$  on a

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) (-du) = J$$

3. En effectuant le changement de variable  $u = \frac{x}{2}$  on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \right) \\ &\quad \left( \text{via le changement de variable } u = t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (I + J) \\ &= I\end{aligned}$$



4.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \sin(x) \cos(x)) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx \\
&= \frac{\pi}{2} \ln(2) + I + J
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } J = I = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

**Exercice 3**

Soient  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  et  $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  où  $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$ .

1. Déterminer  $\{\alpha \in \mathbb{R}, \Gamma(\alpha) \text{ converge}\}$ .
2. Former une relation de récurrence entre  $\Gamma(\alpha)$  et  $\Gamma(\alpha + 1)$ .
3. En déduire  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Déterminer  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \beta(x, y) \text{ converge}\}$ .
5. Montrer que  $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ .

**Solution**

1.  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  est une intégrale impropre bilatérale.

$$\text{Etude en } 0 : e^{-t} t^{\alpha-1} \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$$

$$\text{or } \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \text{ converge ssi } 1 - \alpha < 1 \text{ i.e. ssi } \alpha > 0 \text{ donc } \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt \text{ converge ssi } \alpha > 0.$$

Etude en  $+\infty$  : via le théorème de croissance comparée on a,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, t^2 e^{-t} t^{\alpha-1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc au voisinage de l'infini,

$$e^{-t}t^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge donc pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$  converge.

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \quad \text{converge ssi} \quad \alpha > 0$$

i.e.

$$\Gamma(\alpha) \quad \text{converge ssi} \quad \alpha > 0$$

2. On procède par intégration par parties en posant  $u(t) = t^\alpha$  et  $v'(t) = e^{-t}$  et en remarquant que  $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$ . On a ainsi

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Conclusion :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on a par une récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1)$$

or

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$

4.  $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$  est une intégrale impropre bilatérale.

Etude en 0 :  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

or  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{1-x}}$  converge ssi  $1-x < 1$  i.e. ssi  $x > 0$  donc  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$  converge ssi  $x > 0$ .

Etude en 1 :  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{1}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$

or par le changement de variable  $u = 1 - t$ ,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^{1-y}}$$

qui converge ssi  $1 - y < 1$  i.e. ssi  $y > 0$  donc  $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge ssi  $y > 0$ .

Conclusion :  $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge ssi  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

i.e.  $\beta(x, y)$  converge ssi  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

5. En utilisant le changement de variable  $u = 1 - t$ , on a immédiatement

$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

#### Exercice 4

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On rappelle le résultat suivant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \text{ converge ssi } \alpha > 1$$

1. Montrer que  $\int_0^1 x \ln(x) dx$  converge.

2. Soit

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

a. Déterminer la nature de  $I(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .

b. Effectuer le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$  dans  $I(2)$ . En déduire la valeur de  $I(2)$ .

#### Solution

1. En intégrant par partie, on a

$$\int_0^1 x \ln(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = -\frac{1}{4}$$

donc  $\int_0^1 x \ln(x) dx$  converge.

2. a. Etude en 0 :

$$\frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} \underset{0}{\sim} x \ln(x)$$

or  $\int_0^1 x \ln(x) dx$  converge d'où  $\int_0^1 \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$  converge.

Etude en  $+\infty$  :

$$\frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x^{2\alpha}} = \frac{\ln(x)}{x^{2\alpha-1}}$$

or  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2\alpha-1}} dx$  converge ssi  $2\alpha - 1 > 1$  i.e. ssi  $\alpha > 1$  d'où  $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

Ainsi  $I(\alpha)$  converge ssi  $\alpha > 1$

b. En effectuant le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$  dans  $I(2)$ , on a

$$I(2) = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2} \cdot \left(-\frac{dy}{y^2}\right) = - \int_0^{+\infty} \frac{y \ln(y)}{(y^2 + 1)^2} dy$$

i.e.  $I(2) = -I(2)$  donc  $I(2) = 0$

## Chapitre 6

# Espaces préhilbertiens

### 6.1 Définitions

#### 6.1.1 Forme bilinéaire

##### Définition 45

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\varphi$  est une forme bilinéaire si

- $\forall x \in E, y \longmapsto \varphi(x, y)$  est linéaire
- $\forall y \in E, x \longmapsto \varphi(x, y)$  est linéaire

##### Exemples

1. Soient  $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t) \, dt \end{cases}$

Alors  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

2. Soient  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\psi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \operatorname{tr}(AB) \end{cases}$

Alors  $\psi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

**Proposition 43**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = {}^t X M Y$$

où  $M = (\varphi(e_i, e_j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $X$  et  $Y$  sont respectivement les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$ .  $M$  s'appelle la matrice de la forme bilinéaire  $\varphi$  relativement à  $\mathcal{B}$ .

**Exemple**

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr}(AB) \end{cases}$$

Alors la matrice de  $\varphi$  relativement à la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 44**

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases d'un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$  de dimension finie,  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire,  $M = \text{Mat}_B(\varphi)$  et  $M' = \text{Mat}_{B'}(\varphi)$ . Alors

$$M' = {}^t P M P$$

où  $P = P_B^{B'}$ .

**6.1.2 Forme bilinéaire symétrique****Définition 46**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire. On dit que  $\varphi$  est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

**Proposition 45**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie,  $B$  une base de  $E$ ,  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire et  $M = \text{Mat}_B(\varphi)$ . Alors

$$\varphi \text{ symétrique} \iff M \text{ symétrique}$$

**6.1.3 Produit scalaire****Définition 47**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\varphi$  est un produit scalaire si  $\varphi$  est bilinéaire, symétrique, positive et définie i.e. si  $\varphi$  est bilinéaire symétrique et

$$\begin{cases} \forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \\ \forall x \in E, (\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0) \end{cases}$$

On appelle espace préhilbertien réel tout  $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire. On appelle espace euclidien tout  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

**Remarque**

Lorsque  $(E, \varphi)$  est préhilbertien, on note souvent  $\varphi$  par  $\langle, \rangle$  de sorte que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on notera souvent  $\langle x, y \rangle$  au lieu de  $\varphi(x, y)$ .

**Exemples**

$$1. \text{ Soient } E = C^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_a^b f(t)g(t) dt \end{cases}$$

Alors  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

$$2. \text{ Soient } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \psi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr}({}^tAB) \end{cases}$$

Alors  $\psi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

## 6.2 Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

### 6.2.1 Théorème de Cauchy-Schwarz

#### Théorème 20 (Cauchy-Schwarz)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire symétrique et positive. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x)} \sqrt{\varphi(y, y)}$$

#### Exemple

$$\text{Soient } E = C^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_a^b f(t)g(t) dt \end{cases}$$

Alors via le théorème de Cauchy-Schwarz, on a pour tout  $(f, g) \in E$ ,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

### 6.2.2 Théorème de Minkowski

#### Théorème 21 (Minkowski)

Soit  $(E, \varphi)$  préhibertien réel. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \sqrt{\varphi(x + y, x + y)} \leq \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)}$$

## 6.3 Orthogonalité

### 6.3.1 Définitions

#### Définition 48

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev. On appelle norme sur  $E$ , toute application  $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in E^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} N(x) \geq 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \\ N(x) = 0 \iff x = 0 \\ N(x + y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$$



**Proposition 46**

Soit  $(E, \varphi)$  préhilbertien réel. Alors  $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in E$  par  $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$  est une norme sur  $E$ .

**Définition 49**

Soit  $(E, <, >)$  préhilbertien réel.

On dit que 2 vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux si  $< x, y > = 0$ .

**6.3.2 Théorème de Pythagore****Théorème 22 (Pythagore)**

Soient  $(E, <, >)$  préhilbertien réel,  $x$  et  $y$  deux vecteurs orthogonaux de  $E$ . Alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**6.3.3 Orthogonal d'un sous-espace****Définition 50**

Soient  $(E, <, >)$  préhilbertien réel et  $A \subset E$ . On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble noté  $A^\perp$  défini par

$$A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A \quad < x, y > = 0\}$$

**Proposition 47**

Soient  $(E, <, >)$  préhilbertien réel et  $A \subset E$ . Alors  $A^\perp$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.

**Proposition 48**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un espace préhilbertien  $(E, <, >)$ . Alors

1.  $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
2.  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
3.  $A \subset A^{\perp\perp}$

$$4. A \cap A^\perp \subset \{0\}$$

**Exemple**

$$\text{Soient } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \end{cases}$$

et  $F = \text{Vect}(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$ .

Déterminons  $F^\perp$ .

Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que pour tout  $Q \in F$ ,  $P \perp Q$ .

$$\text{Alors } \begin{cases} \varphi(aX^2 + bX + c, 1 + X + X^2) = 0 \\ \varphi(aX^2 + bX + c, 1 - X + X^2) = 0 \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} c + b + 4a = 0 \\ c - b + 4a = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $b = 0$  et  $c = -4a$  donc  $F^\perp = \text{Vect}(X^2 - 4)$ .

**6.3.4 Famille orthogonale et orthonormale****Définition 51**

Soient  $(E, <, >)$  préhilbertien réel (resp. euclidien) et  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$  (resp.  $B = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ ). On dit que  $X$  est une famille orthogonale (resp.  $B$  base orthogonale) de  $E$  si

$$i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad (\text{resp. } i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0)$$

On dit que  $X$  est une famille orthonormée ou orthonormale (resp.  $B$  base orthonormée) de  $E$  si

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{resp. } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij})$$

**Proposition 49**

Soient  $(E, <, >)$  euclidien et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

**Proposition 50**

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel est libre.

### 6.3.5 Théorème de Gram-Schmidt

#### Théorème 23 (Gram-Schmidt)

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une base orthogonale  $O = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, f_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

#### Exemple

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)dx$$

Déterminons, par la méthode de Gram-Schmidt, à partir de la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$  une base orthogonale  $(P_0, P_1, P_2)$  de  $E$  pour  $\langle, \rangle$ .

On a :  $P_0 = 1$

$P_1 = X + aP_0 = X + a$  où  $a \in \mathbb{R}$  vérifie  $\langle P_0, P_1 \rangle = 0$  i.e.  $\langle 1, X + a \rangle = 0$  soit en utilisant la linéarité à droite :

$$a = -\frac{\langle 1, X \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$$

or  $\langle 1, X \rangle = \int_{-1}^1 x(1-x^2)dx = 0$  car  $x \mapsto x(1-x^2)$  est impaire. Donc  $a = 0$  i.e.  $P_1 = X$

$P_2 = X^2 + bP_0 + cP_1 = X^2 + b + cX$  où  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$  vérifie

$$\begin{cases} \langle P_0, P_2 \rangle = 0 \\ \langle P_1, P_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \langle 1, X^2 + b + cX \rangle = 0 \\ \langle X, X^2 + b + cX \rangle = 0 \end{cases}$$

soit finalement comme  $\langle 1, X \rangle = \langle X, 1 \rangle = 0$  :

$$\begin{cases} b = -\frac{\langle 1, X^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \\ c = -\frac{\langle X, X^2 \rangle}{\langle X, X \rangle} \end{cases}$$

Or  $\langle X, X^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3(1-x^2)dx = 0$  car  $x \mapsto x^3(1-x^2)$  est impaire. Donc  $c = 0$ .

D'autre part

$$\langle 1, X^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)dx = 2 \int_0^1 x^2 - x^4 dx = 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

et

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = 2 \int_0^1 1 - x^2 dx = 2 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

d'où  $b = -\frac{1}{5}$  i.e.  $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$

### 6.3.6 Théorème du supplémentaire orthogonal

#### Théorème 24

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sev de  $E$ . Alors

$$E = F \oplus F^\perp$$

#### Corollaire 2

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sev de  $E$ . Alors

$$F^{\perp\perp} = F$$

#### Remarque

Ce résultat est faux en dimension infinie comme l'illustre le contre-exemple ci-dessous.

Soient  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique et  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ .

Alors  $F^\perp = \{0\}$ .

En effet soient  $f \in F^\perp$  et  $g : x \mapsto xf^2(x)$ .

Or  $g \in F$  donc  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 xf^2(x) dx = 0$ .

Donc par continuité et positivité de la fonction  $x \mapsto xf^2(x)$  on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $xf^2(x) = 0$  donc pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f(x) = 0$  soit finalement  $f = 0$  par continuité de  $f$ .

Ainsi  $F^\perp = \{0\}$  donc  $F^{\perp\perp} = E \neq F$ .

## 6.4 Projection orthogonale

### 6.4.1 Définition

#### Définition 52

Soient  $(E, <, >)$  un espace euclidien et  $F$  un sev de  $E$ . On appelle projecteur orthogonal sur  $F$  noté  $p_F$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  i.e.  $p_F \in \mathcal{L}(E)$ ,  $p_F^2 = p_F$ ,  $\text{Im}(p_F) = F$  et  $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$ .

#### Proposition 51

Soient  $(E, <, >)$  un espace euclidien (resp. préhilbertien réel),  $F$  un sev (resp. de dimension finie) de  $E$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

### 6.4.2 Distance à un sous-espace

#### Proposition 52

Soient  $F$  un sev d'un espace euclidien  $(E, <, >)$  et  $x \in E$ . Alors l'application  $\begin{cases} F & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$  atteint son minimum en  $p_F(x)$ .

On appelle distance de  $x$  à  $F$  noté  $d(x, F)$  le réel  $\|x - p_F(x)\|$ .

#### Exemple

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)dx$$

Déterminer le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

Notons  $P_0$  le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$ . Alors

$$\begin{cases} P_0 \in F \\ X^2 - P_0 \in F^\perp \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX + b \\ X^2 - aX - b \in F^\perp \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX + b \\ \langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX + b \\ \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)(1 - x^2) dx = 0 \\ \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)x(1 - x^2) dx = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX + b \\ b = \frac{1}{5} \\ a = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$P_0 = \frac{1}{5}$$

### 6.4.3 Théorème de Bessel

#### Théorème 25 (Bessel)

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormée de  $(E, \langle, \rangle)$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$\sum_{i=1}^p (\langle x, e_i \rangle)^2 \leq \|x\|^2$$

## 6.5 Adjoint

### 6.5.1 Définition

#### Définition 53

Soient  $(E, <, >)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors il existe un unique endomorphisme noté  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < x, u(y) > = < u^*(x), y >$$

$u^*$  est appelé adjoint de  $u$ .

### 6.5.2 Propriétés

#### Proposition 53

Soit  $(E, <, >)$  un espace euclidien.

1. L'application  $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto u^* \end{cases}$  est un automorphisme d'espaces vectoriels.
2. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(u^*)^* = u$ .
3.  $(id)^* = id$ .
4. Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ .
5. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  bijectif, on a  $u^*$  bijectif et  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .

#### Proposition 54

Soient  $(E, <, >)$  un espace euclidien et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Alors pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$Mat_B(u^*) = {}^t Mat_B(u)$$

#### Proposition 55

Soient  $(E, <, >)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^\perp$$

### 6.5.3 Opérateur autoadjoint

#### Définition 54

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $u$  est autoadjoint si  $u^* = u$  i.e. si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ .

#### Exemple

Soit  $p$  un projecteur orthogonal de  $(E, \langle, \rangle)$  où  $(E, \langle, \rangle)$  est un espace euclidien i.e.  $p$  est la projection sur  $F = \text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p) = F^\perp$ .

Montrons que  $p$  est autoadjoint.

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Montrons que  $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle p(x), y \rangle &= \langle p(x), p(y) + y - p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), y - p(y) \rangle \end{aligned}$$

Or  $p(x) \in \text{Im}(p)$  et  $y - p(y) \in \text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$  donc

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$$

De même

$$\begin{aligned} \langle x, p(y) \rangle &= \langle x - p(x) + p(x), p(y) \rangle \\ &= \langle x - p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle \end{aligned}$$

Donc  $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ .

## 6.6 Exercices types

### Exercice 1

On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et un produit scalaire sur  $E$  noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Dans la suite,  $f$  désigne un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $f$  est une isométrie si  $\forall x \in E$ ,  $\|f(x)\| = \|x\|$ .



1. Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . Montrer que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

2. Montrer que si  $f$  est une isométrie alors  $f$  est bijectif.

3. Montrer que

$$f \text{ est une isométrie} \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

4. Soit  $f$  une isométrie telle que  $f^2 = -id$ . Montrer que pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $f(x)$  est orthogonal à  $x$ .

### Solution

- 1.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

2. Supposons que  $f$  est une isométrie. Comme  $E$  est de dimension finie, il suffit de montrer que  $f$  est injectif i.e.  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ . Alors  $f(x) = 0$ . Donc  $\|f(x)\| = 0$  or  $\|f(x)\| = \|x\|$  donc  $\|x\| = 0$  soit  $x = 0$ .

3.  $\Leftarrow$  : prendre  $y = x$ .

$\Rightarrow$  : Soit  $(x, y) \in E^2$ . Via la question 1., on a

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

or  $f$  étant linéaire et une isométrie on a

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle$$

4. Soit  $x \in E$ . Montrons que  $\langle f(x), x \rangle = 0$ . Via la question précédente on a

$$\begin{aligned}\langle f(x), x \rangle &= \langle f^2(x), f(x) \rangle \\ &= \langle -x, f(x) \rangle \\ &= -\langle f(x), x \rangle\end{aligned}$$

Ainsi  $\langle f(x), x \rangle = 0$

## Exercice 2

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\|\cdot\|$  la norme associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 : 1 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$$

2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 : \left\| \frac{1}{\|x\|^2}x - \frac{1}{\|y\|^2}y \right\| = \frac{1}{\|x\| \|y\|} \|x - y\|$$

3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , on pose

$$\phi(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u$  pour que  $\phi$  soit un produit scalaire sur  $E$ .

## Solution

1. Montrons que

$$\forall (x, y) \in E^2 : 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 1 - \|x + y\|^2 \geq 0.$$

$$2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 1 - \|x + y\|^2 = 2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 1 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

soit

$$2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 1 - \|x + y\|^2 = 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

soit encore

$$2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 1 - \|x + y\|^2 = 1 + \|x - y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$$

2. Montrons que

$$\forall (x, y) \in E^2 : \left\| \frac{1}{\|x\|^2}x - \frac{1}{\|y\|^2}y \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \|x - y\|^2.$$

Posons  $k = \frac{1}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$  et  $l = \frac{1}{\|y\|^2} \in \mathbb{R}$ . Il faut donc montrer que

$$\|kx - ly\|^2 = kl\|x - y\|^2.$$

Or

$$\|kx - ly\|^2 = \|kx\|^2 + \|ly\|^2 - 2kl \langle x, y \rangle = k^2\|x\|^2 + l^2\|y\|^2 - 2kl \langle x, y \rangle = k + l - 2kl \langle x, y \rangle$$

et

$$kl\|x - y\|^2 = kl(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle) = l + k - 2kl \langle x, y \rangle$$

d'où l'égalité

3. On a clairement  $\phi$  bilinéaire, symétrique et positive pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ . D'autre part :

$$\phi \text{ définie} \Leftrightarrow (\forall x \in E : \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in E : \langle u(x), u(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$$

or

$$\langle u(x), u(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$$

donc

$$\phi \text{ définie} \Leftrightarrow (\forall x \in E : u(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$$

i.e.

$$\phi \text{ définie} \Leftrightarrow u \text{ injective.}$$

Ainsi  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$  ssi  $u$  est injective.

### Exercice 3

On définit sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  le produit scalaire  $\langle, \rangle$  défini pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des matrices diagonales d'ordre 2 à coefficients réels et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre 2. Déterminer  $\mathcal{D}^\perp$  et  $\mathcal{S}^\perp$ .

N.B. : vous exhiberez une base de  $\mathcal{D}^\perp$  et  $\mathcal{S}^\perp$ .

**Solution**

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Alors

$$A \in \mathcal{D}^\perp \iff \forall D \in \mathcal{D}, \langle A, D \rangle = 0$$

$$\iff \forall D \in \mathcal{D}, \text{tr}({}^tAD) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{tr} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $\mathcal{D}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ; (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  soit encore

$$\mathcal{D}^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), {}^tA = A \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Alors

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{S}^\perp &\iff \forall S \in \mathcal{S}, \langle A, S \rangle = 0 \\
&\iff \forall S \in \mathcal{S}, \text{tr}({}^tAS) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A \in \mathcal{S}^\perp \iff \begin{cases} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{tr} \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $\mathcal{S}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R} \right\}$  soit encore

$$\mathcal{S}^\perp = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

#### Exercice 4

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)p(x)dx$$

où  $p$  est une fonction non nulle continue et positive sur  $[0, 1]$ .

1. On suppose dans cette question que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $p(x) = x$ .

A partir de la base canonique  $(1, X, X^2)$ , construire par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthogonale de  $E$  relativement à ce produit scalaire.

2. On suppose dans cette question que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $p(x) = 1$ .

- a. Déterminer le projeté orthogonal  $P_0$  de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}(1, X)$ .

b. Déterminer

$$\text{Min}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

### Solution

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, on a :  $E_0 = 1$

$E_1 = X + aE_0 = X + a$  où  $a \in \mathbb{R}$  vérifie  $\langle E_0, E_1 \rangle = 0$  i.e.  $\langle 1, X + a \rangle = 0$  soit en utilisant la linéarité à droite :

$$a = -\frac{\langle 1, X \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$$

i.e

$$a = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x dx} = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$E_1 = X - \frac{2}{3}$$

$E_2 = X^2 + bE_0 + cE_1 = X^2 + b + cX$  où  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$  vérifie

$$\begin{cases} \langle E_0, E_2 \rangle = 0 \\ \langle E_1, E_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \langle E_0, X^2 + bE_0 + cE_1 \rangle = 0 \\ \langle E_1, X^2 + bE_0 + cE_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

i.e. vu que  $\langle E_0, E_1 \rangle = \langle E_1, E_0 \rangle = 0$

$$\begin{cases} b = -\frac{\langle 1, X^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \\ c = -\frac{\langle X - \frac{2}{3}, X^2 \rangle}{\langle X - \frac{2}{3}, X - \frac{2}{3} \rangle} \end{cases}$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -\frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x dx} \\ c = -\frac{\int_0^1 x^3 \left(x - \frac{2}{3}\right) dx}{\int_0^1 x \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx} \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{6}{5} \end{array} \right.$$

Ainsi

$$E_2 = X^2 - \frac{1}{2} - \frac{6}{5} \left(X - \frac{2}{3}\right)$$

soit

$$E_2 = X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}$$

2. a.  $P_0$  est le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$ . Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \in F \\ X^2 - P_0 \in F^\perp \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ X^2 - aX - b \in F^\perp \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ \langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0 \end{array} \right.$$



i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ \int_0^1 (x^2 - ax - b) dx = 0 \\ \int_0^1 (x^2 - ax - b)x dx = 0 \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ \left[ \frac{x^3}{3} - a\frac{x^2}{2} - bx \right]_0^1 = 0 \\ \left[ \frac{x^4}{4} - a\frac{x^3}{3} - b\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0 \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = aX + b \\ 2 - 3a - 6b = 0 \\ 3 - 4a - 6b = 0 \end{array} \right.$$

i.e.

$$P_0 = X - \frac{1}{6}$$

- b. Soient  $P = X^2$  et  $I = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ . En utilisant les propriétés de  $P_0$ , on a

$$I = \min_{Q \in F} \|P - Q\|^2 = \|P - P_0\|^2$$

or

$$\|P - P_0\|^2 = \langle P - P_0, P - P_0 \rangle = \langle P, P - P_0 \rangle - \langle P_0, P - P_0 \rangle = \langle P, P - P_0 \rangle$$

car  $P - P_0 \in F^\perp$  et  $P_0 \in F$ . Donc  $I = \langle P, P - P_0 \rangle$  i.e.

$$I = \int_0^1 x^2 \left( x^2 - \left( x - \frac{1}{6} \right) \right) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{180}$$

Ainsi

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{180}$$

# Chapitre 7

## Suites de fonctions

$I$  désigne un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

### 7.1 Définitions

#### 7.1.1 Suite de fonctions

##### Définition 55

On appelle suite de fonctions de  $I$  vers  $\mathbb{R}$ , toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$

##### Observation

Lorsque l'on considère une suite **numérique**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  où chacun des  $u_i$  sont des réels.

En revanche lorsque l'on considère à présent une suite **de fonctions**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ , alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$  où chacun des  $f_i$  sont désormais des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

##### Remarque

Certaines suites de fonctions  $(f_n)$  ne sont définies qu'à partir d'un rang  $n \geq n_0$  comme l'exemple 2. ci-dessous où  $n_0 = 1$ .

Dans la suite du cours  $(f_n)$  désignera  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Exemples

1.  $(f_n)$  la suite des fonctions puissances sur  $[0, 1]$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonctions sinusoïdales où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n} \sin(nx) \end{cases}$

## Remarque

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . Quel sens donner à « $(f_n)$  converge vers  $f$  sur  $I$ » ?

Deux types de convergence existent :

- une convergence «point par point» dite **convergence simple**.
- une convergence «globale» dite **convergence uniforme**.

### 7.1.2 Convergence simple

#### Définition 56

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . On dit que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  si

$$\forall x \in I \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$$

autrement dit si  $\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

#### Observation

Si  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  et  $x$  est fixé dans  $I$ , alors  $(f_n(x))$  est une suite numérique (réelle) c'est-à-dire  $(f_n(x)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Ainsi pour étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $I$ , on fixe un  $x \in I$  et on étudie la limite de la suite réelle  $(f_n(x))$ .

## Exemples

1. Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$\text{Alors } f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ainsi  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$   
sur  $[0, 1]$ .

$$2. \text{ Soit } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}^*} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n} \sin(nx) \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

$$3. \text{ Soit } (f_n) \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} [0, 1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^2 x^n \end{cases}$$

Soit  $x \in [0, 1[$ . Alors  $f_n(x) = n^2 x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1[$ .

## Observations

1. Dans l'exemple 1., chaque  $f_n$  est continue, pourtant  $f$  n'est pas continue.

Ainsi la «limite simple» d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue.

2. Dans l'exemple 2., on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_n(x) = \cos(nx)$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite

$(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.

$$\text{Ainsi } \frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d}{dx} (f_n(x)) \right).$$

Autrement dit les deux «symboles»  $\lim$  et  $\frac{d}{dx}$  ne commutent pas.

$$3. \text{ Dans l'exemple 3., } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x^n dx = n^2 \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n^2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx .$$

Autrement dit les deux «symboles»  $\lim$  et  $\int$  ne commutent pas.

### 7.1.3 Convergence uniforme

#### Définition 57

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . On dit que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

#### Observation

A présent le  $N$  ne dépend plus de  $x$ . Ainsi pour  $n$  assez grand, les graphes des  $f_n$  s'insèrent dans une bande de largeur  $2\varepsilon$  autour du graphe de  $f$ .

#### Proposition 56

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . Alors

$$(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{(il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que dès que } n \geq N \\ \Delta_n := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \text{ existe)} \\ \text{et} \\ (\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \end{array} \right.$$

#### Méthodes pour étudier la convergence uniforme

1. On cherche  $f$  telle que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  puis on tente de déterminer  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  (grâce au tableau de variation) et on montre que

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exemple**

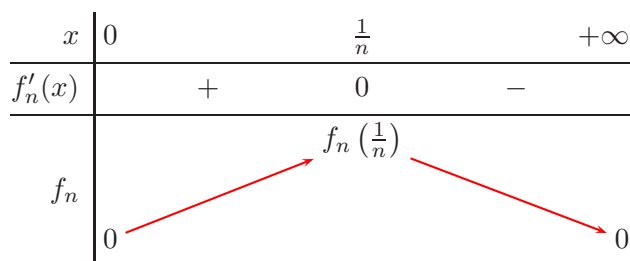
Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto xe^{-nx} \end{cases}$

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Alors  $f_n(x) = xe^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

Étudions la convergence uniforme éventuelle de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la fonction nulle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'_n(x) = (1 - nx)e^{-nx}$$



$$\text{d'où } \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Si la détermination de  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  n'est pas aisée, on cherche une suite numérique

$$(\varepsilon_n) \text{ (c'est-à-dire indépendante de } x) \text{ telle que : } \begin{cases} \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n \end{cases}$$

**Exemple**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n} \sin(nx) \end{cases}$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  or  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque**

Lorsque  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n - f$  n'est pas bornée sur  $I$ , on peut directement conclure que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $I$  car  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ .

**7.2 Propriétés de la convergence uniforme****7.2.1 La convergence uniforme implique la convergence simple****Proposition 57**

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$  telles que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ . Alors  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .

**7.2.2 Convergence uniforme et opérations****Proposition 58**

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $f \in \mathbb{R}^I$  sur  $I$  et  $(g_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $g \in \mathbb{R}^I$  sur  $I$ . Alors  $(f_n + \lambda g_n)$  converge uniformément vers  $f + \lambda g$  sur  $I$ .

**7.2.3 Convergence uniforme et continuité****Proposition 59**

Soient  $x_0 \in I$ ,  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x_0$  et  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ . Alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Corollaire 3**

Soient  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$  et converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ . Alors  $f$  est continue sur  $I$ .



### 7.2.4 Convergence uniforme et intégrales définies

#### Proposition 60

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ ,  $(f_n) \in (\mathbb{R}^{[a,b]})^{\mathbb{N}}$  avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  continue sur  $[a, b]$  et  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  tels que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$

#### Exemple

Soit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{ne^x}{n+x} \end{cases}$

Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . Alors  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ .

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers  $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \end{cases}$  sur  $[0, 1]$ .

D'autre part, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f_n(x) - f(x)| = \frac{xe^x}{n+x} \leq \frac{e}{n}$  donc  $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$

c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = e - 1$

### 7.2.5 Convergence uniforme et dérivées

#### Proposition 61

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $f \in \mathbb{R}^I$  telles que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  et  $(f'_n)$  converge uniformément vers une fonction  $g$  sur  $I$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = g(x)$  c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d}{dx} (f_n(x)) \right)$$

**Inventaire des méthodes pour montrer qu'une suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $I$**

1. On montre que  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exemple :** soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \end{cases}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{D'autre part pour tout } x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{\sqrt{n}(1+nx^2) - x\sqrt{n}(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{\sqrt{n}(1-nx^2)}{(1+nx^2)^2}$$

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $f_n$  sont impaires, il suffit de dresser un tableau de variation sur  $\mathbb{R}^+$ .

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n$	0	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	0

$$\text{Donc } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

d'où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

2. On montre qu'il existe une suite numérique  $(M_n) \in I^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \geq M_n$  avec  $M_n \not\rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exemple :** soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} ]0,1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{nx+1} \end{cases}$

Alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $]0,1]$  vers  $f : \begin{cases} ]0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$  donc  $\sup_{x \in ]0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$

d'où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $]0,1]$ .

3. On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue et  $f$  n'est pas continue.

**Exemple :** soit  $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

Alors  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0,1]$  vers la fonction  $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$

Comme  $f$  n'est pas continue sur  $[0,1]$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[0,1]$ , on en conclut que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0,1]$ .

4. On montre qu'il existe une suite numérique  $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$  telle

que  $f_n(x_n) - f(x_n) \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

**Exemple :** soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \end{cases}$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  or  $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}} \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$   
donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

5. Dans le cas où  $I = [a, b]$ , on montre que  $\int_a^b f_n(x) dx \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x) dx$

**Exemple :** soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}^*}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^2 x e^{-nx} \end{cases}$

Soit  $x \in [0, 1]$ .

Alors  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \left( -\frac{1}{n} [x e^{-nx}]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} dx \right) \\ &= n^2 \left( -\frac{e^{-n}}{n} - \frac{1}{n^2} [e^{-nx}]_0^1 \right) \\ &= 1 - e^{-n}(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 0 dx \neq 1 \end{aligned}$$

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

## 7.3 Approximation des fonctions continues

### 7.3.1 Approximation uniforme des fonctions continues sur un fermé borné

#### Théorème 26 (de Weierstrass)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Toute fonction continue sur  $[a, b]$  (à valeurs réelles) est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions polynomiales.

### 7.3.2 Approximation uniforme des fonctions continues et périodiques

On considère dans cette section des fonctions  $2\pi$ -périodique. Les démonstrations s'adaptent facilement au cas général des fonctions  $T$ -périodique en introduisant  $w = \frac{2\pi}{T}$ .

#### Définition 58

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est un polynôme trigonométrique s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $(c_n) \in \mathbb{C}^{2N+1}$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

**Théorème 27 (de Weierstrass)**

Toute fonction continue et  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de polynômes trigonométriques.

**7.4 Exercices types**

Les exercices types de ce chapitre figurent dans celui consacré aux séries de fonctions.

## Chapitre 8

# Séries de fonctions

### 8.1 Convergences

#### 8.1.1 Définition d'une série de fonctions

##### Définition 59

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ . On appelle série de fonctions de terme général  $f_n$ , notée  $\sum f_n$ , la suite de fonctions des sommes partielles  $(S_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ .

##### Exemples

1.  $\sum f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$
2.  $\sum f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n x^n}{n} \end{cases}$

##### Remarque

Ainsi, si  $\sum f_n$  est une série de fonctions où  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in I$ ,  $\sum f_n(x)$  est une série numérique.

### 8.1.2 Convergence simple

#### Définition 60

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge c'est-à-dire si pour tout  $x \in I$ , la suite numérique  $(S_n(x))$  converge.

#### Définition 61

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

On appelle somme de la série  $\sum f_n$  notée  $S$  ou  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  la fonction définie pour tout  $x \in I$  par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On appelle reste de la série  $\sum f_n$  la suite de fonctions notée  $(R_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I$  par  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ .

#### Observations

1. Etudier la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $I$  revient donc après avoir fixé un  $x \in I$  à étudier la convergence de la série numérique  $\sum f_n(x)$ . On pourra à cette occasion utiliser tous les critères déjà vus sur les séries numériques.
2. Si  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = S - S_n$ .

#### Exemples

1.  $\sum f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

Étudions la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Étudions la série numérique  $\sum x^n$ .

On a  $\sum x^n$  converge ssi  $|x| < 1$ . En effet,  $\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k$  existe et est finie ssi  $|x| < 1$ .

Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$  vers  $S : \begin{cases} ] -1, 1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{1-x} \end{cases}$

2.  $\sum f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n x^n}{n} \end{cases}$

Étudions la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . Étudions la série numérique  $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ . C'est une série numérique alternée or la suite numérique  $\left( \left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| \right) = \left( \frac{x^n}{n} \right)$  décroît et tend vers 0 (la décroissance de cette suite provient de  $\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x \cdot \frac{n}{n+1} \leq 1$ )

Ainsi en utilisant le critère spécial des séries alternées, la série numérique  $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$  converge donc  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .

### 8.1.3 Convergence uniforme

#### Définition 62

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ .

On dit que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si  $(S_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

#### Remarques

1. Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  (cf. chapitre précédent).
2. Si  $\sum f_n$  et  $\sum g_n$  convergent uniformément sur  $I$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sum (f_n + \lambda g_n)$  converge uniformément sur  $I$  (cf. chapitre précédent).

#### Proposition 62

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .



**Observation**

Cette proposition est utile par sa contraposée : si  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $I$  (c'est-à-dire si  $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini) alors  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

**Exemple**

$$\sum f_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Étudions la série numérique  $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

Si  $x = 0$ , la série converge trivialement. Sinon on a  $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc au voisinage de l'infini,  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par conséquent  $\sum f_n(x)$  converge par comparaison. Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

Étudions la convergence uniforme éventuelle de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $f'_n(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$ .

On en déduit le tableau de variations suivant

$x$	0	$\frac{2}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n$	0	$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	0

$$\text{donc } \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Proposition 63**

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  telle que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

Alors  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

### Remarque

La proposition 63 est particulièrement adaptée aux séries alternées vérifiant le critère spécial : en effet si  $\sum u_n$  est une série numérique alternée vérifiant le critère spécial alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .

### Exemple

$$\sum f_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n x^n}{n} \end{cases}$$

Soit  $x \in [0, 1]$ .

La série numérique  $\sum f_n(x)$  est alternée et vérifie le critère spécial car la suite numérique  $(|f_n(x)|)$  est décroissante et converge vers 0 donc  $\sum f_n(x)$  converge. Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$ . De plus pour tout  $x \in [0, 1]$ , comme la série numérique alternée  $\sum f_n(x)$  vérifie le critère spécial, on a

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . Ainsi la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

#### 8.1.4 Convergence normale

##### Définition 63

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ .

On dit que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si  $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ bornée sur } I \\ \text{et} \\ \text{la série numérique } \sum \sup_{x \in I} |f_n(x)| \text{ converge} \end{cases}$

**Proposition 64**

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ . Alors  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si il existe une suite

$$\text{numérique } (\alpha_n) \text{ telle que } \begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \in I, |f_n(x)| \leq \alpha_n \\ \text{et} \\ \sum \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$$

**Exemple**

$$\sum f_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n^2 + n^3 x^2} \end{cases}$$

On remarque immédiatement que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$  et la série numérique  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Ainsi  $\sum f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .

**8.1.5 Convergence absolue****Définition 64**

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ . On dit que  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la série numérique  $\sum |f_n(x)|$  converge.

**Exemple**

$$\sum f_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^3} \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $|f_n(x)| = \frac{x^2 + n}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  donc la série numérique  $\sum |f_n(x)|$  converge par comparaison. Ainsi  $\sum f_n$  converge absolument sur  $\mathbb{R}$ .

**8.1.6 Liens entre les différents types de convergence****Proposition 65**

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ . Alors

1.  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I \implies \sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

2.  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I \implies \sum f_n$  converge absolument sur  $I$ .

### Proposition 66

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  telle que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ . Alors  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

## 8.2 Propriétés de la convergence uniforme

### 8.2.1 Convergence uniforme et continuité

#### Proposition 67

Soient  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  et  $x_0 \in I$  tels que  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue en } x_0 \text{ (resp. sur } I) \\ \text{et} \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right.$

Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue en  $x_0$  (resp. sur  $I$ ).

### 8.2.2 Convergence uniforme et intégrales définies

#### Proposition 68

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^{[a,b]})^\mathbb{N}$  telle que  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a, b] \\ \text{et} \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b] \end{array} \right.$

Alors  $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

### 8.2.3 Convergence uniforme et dérivées

#### Proposition 69

Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  telle que  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right.$

Alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

### 8.3 Exercices types

Ces exercices types portent à la fois sur les suites et les séries de fonctions.

#### Exercice 1

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  par  $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ .

1. Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

#### Solution

1. On a  $f_n(0) = 0$  et si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  par croissance comparée donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $f'_n(x) = nxe^{-nx}(2 - nx)$  donc  $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{ne^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Ainsi  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

#### Exercice 2

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = nx^n(1 - x)$$

1. Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
2. Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

#### Solution

1. Soit  $x \in [0, 1]$ . Si  $x \neq 1$ , alors  $nx^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Si  $x = 1$ ,  $1 - x = 0$  donc on a également  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

2.

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(n - (n+1)x)$$

donc

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

or

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-(1+\frac{1}{n})+o(1)}$$

donc

$$\|f_n\|_\infty = e^{-(1+\frac{1}{n})+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0$$

donc  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .**Exercice 3**Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  par  $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ .

1. Étudier la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Étudier la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Solution**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

On a  $\sum f_n(0)$  convergente et si  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

2.  $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{4}{ne^2}$  qui diverge donc  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} kx^2 e^{-kx} \\
 &\geq x^2 \sum_{k=n+1}^{2n} k e^{-kx} \\
 &\geq x^2 e^{-2nx} \sum_{k=n+1}^{2n} k \\
 &\geq n(n+1)x^2 e^{-2nx}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{n(n+1)}{n^2} e^{-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-2}.$$

Ainsi  $(R_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

### Exercice 4

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x e^{-n^2 x^2}$$

1. Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Étudier la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
4. Étudier la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

### Solution

a. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Si  $x = 0$  alors  $f_n(x) = 0$ .

Si  $x \neq 0$ , alors  $f_n(x) = x e^{-n^2 x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$f'_n(x) = (1 - 2n^2x^2)e^{-n^2x^2}$$

d'où

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

c. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Si  $x = 0$ , la série  $\sum f_n(x)$  est la série numérique nulle donc converge.

Si  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge.

Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

d. En reprenant les résultats de la question b., on a

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n\sqrt{2}e}$$

or  $\sum \frac{1}{n}$  diverge donc  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .



## Chapitre 9

# Séries de Fourier

### 9.1 Définitions

#### 9.1.1 Série trigonométrique

##### Définition 65

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions  $\sum f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \end{cases} \quad \text{avec } \omega \in \mathbb{R}, (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ deux suites complexes.}$$

##### Observations

1. Si  $\sum f_n$  est une série trigonométrique, alors chaque  $f_n$  est  $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique  
car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f_n(x)$
2. Si  $\sum f_n$  est une série trigonométrique et  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ,  
alors  $S$  est  $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique.

En effet soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors la suite des somme partielles  $(S_n)$  vérifie  $S_n\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = S_n(x)$ .

$$\text{Or } S_n\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad \text{et} \quad S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x)$$

d'où par unicité de la limite  $S\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = S(x)$ .

3. Les séries de Fourier étudient notamment la réciproque de la 2<sup>ème</sup> remarque : étant donnée une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique, existe-t-il  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites complexes telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$  ?

### Remarque

Dans toute la suite, on considère  $\omega = 1$  (c'est-à-dire des fonctions  $2\pi$ -périodiques) sachant que les définitions, propositions et théorèmes s'adaptent facilement au cas général.

### 9.1.2 Continuité par morceaux

#### Définition 66

On dit que  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  si  $f$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  sauf en un nombre fini (éventuellement nul) de points  $x_i$  pour lesquels  $f$  admet une limite à gauche (notée  $f(x_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_i - h)$ ) et à droite (notée  $f(x_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_i + h)$ ) c'est-à-dire s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_0, \dots, x_n) \in [0, 2\pi]^{n+1}$  tels que

1.  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$
2. Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  continue sur  $]x_i, x_{i+1}[$  et  $f$  admet une limite à gauche en  $x_i$  (pour  $i \neq 0$ ) et à droite en  $x_i$  (pour  $i \neq n$ ).

### Notations

On notera  $C_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  (resp.  $C_m^0(I, \mathbb{C})$  où  $I \subset \mathbb{R}$ ) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $I$ ),  $C_{m, 2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  et  $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

### Observations

1. Le «éventuellement nul» de la définition précédente signifie que les fonctions continues sur  $[0, 2\pi]$  sont bien évidemment continues par morceaux sur  $[0, 2\pi]$ .
2. Soit  $f \in C_m^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ . Alors en reprenant les notations de la dernière définition, on a

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

### 9.1.3 Coefficients de Fourier et série de Fourier

#### Définition 67

Soit  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $n^{\text{ièmes}}$  coefficients de Fourier associés à  $f$  les

$$\text{nombres complexes } a_n(f) \text{ et } b_n(f) \text{ définis par } \begin{cases} a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{cases}$$

On appelle série de Fourier de  $f$  la série de fonctions  $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} F_n(f)$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$F_n(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \end{cases}$$

#### Proposition 70

$$\text{Soit } f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \text{ Alors } \begin{cases} f \text{ paire} & \implies b_n(f) = 0 \\ f \text{ impaire} & \implies a_n(f) = 0 \end{cases}$$

#### Exemple

$$\text{Soit } f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ définie par } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[ \\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[ \end{cases}.$$

$$\text{Alors } a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} [\sin(nx)]_0^{\pi} = 0$$

De plus

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{n\pi} [\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} b_{2p}(f) = 0 \\ b_{2p+1}(f) = \frac{2}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

La série de Fourier de  $f$  est :  $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)x)$

### Proposition 71

Soit  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Alors la série de Fourier de  $f$  s'écrit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad \text{c'est-à-dire} \quad c_0(f) + \sum_{n \geq 1} c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}$$

$$\text{où pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre complexe  $c_n(f)$  s'appelle  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier (exponentiel) de  $f$ .

### Définition 68

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev.

On appelle produit scalaire sur  $E$  toute forme  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  sesquilinéaire (c'est-à-dire linéaire à droite et antilinéaire à gauche), hermitienne (c'est-à-dire pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ ) et définie positive sur  $E$ .

### Remarque

Cette définition (et les exemples ci-dessous) sont juste des rappels destinés à se refamiliariser avec ce concept revêtant un intérêt essentiel dans cette section consacrée aux séries de Fourier.

On rappelle que  $\varphi$  antilinéaire à gauche signifie que pour tout  $(x, y, z) \in E^3$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \overline{\lambda} \varphi(y, z)$$

### Exemples

$$1. \text{ Considérons } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr}({}^t \overline{A} B) \end{cases}$$

Alors  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ . En effet :

- $\varphi$  est clairement antilinéaire à droite et linéaire à gauche car la trace est linéaire.
- $\varphi$  est hermitienne. En effet, soit  $(A, B) \in E^2$ .

$$\begin{aligned}\text{Alors } \varphi(A, B) &= \text{tr}({}^t\overline{AB}) \\ &= \text{tr}\left({}^t({}^t\overline{AB})\right) \\ &= \text{tr}({}^tB\overline{A}) \\ &= \text{tr}\left({}^t\overline{BA}\right) \\ &= \overline{\varphi(B, A)}\end{aligned}$$

- $\varphi$  est positive. En effet soit  $A = (a_{ij}) \in E$ . Montrons que  $\varphi(A, A) = \text{tr}({}^t\overline{AA}) \geq 0$ .

$$\text{On a } {}^t\overline{AA} = (b_{ij}) \text{ où } b_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{kj} \text{ donc } \text{tr}({}^t\overline{AA}) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{ki}$$

$$\text{d'où } \varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \geq 0$$

- $\varphi$  est définie car étant donnée  $A$  dans  $E$ ,  $\varphi(A, A) = 0 \implies \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{ki}|^2 = 0$

$$\implies A = 0$$

$$2. \text{ Considérons } E = C^0([a, b], \mathbb{C}) \text{ et } \varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) & \longmapsto \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \end{cases}$$

Alors  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

En effet :

- $\varphi$  est clairement antilinéaire à droite et linéaire à gauche.
- $\varphi$  est également clairement hermitienne
- $\varphi$  est positive. En effet soit  $f \in E$ . Alors  $\varphi(f, f) = \int_a^b \overline{f(x)} f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$

$$\begin{aligned}
 - \varphi \text{ est définie car étant donnée } f \text{ dans } E, \varphi(f, f) = 0 &\implies \forall x \in [a, b], |f(x)|^2 = 0 \\
 &\implies f = 0
 \end{aligned}$$

### 9.1.4 L'espace $\mathcal{D}$ et ses propriétés

#### Notation

On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

#### Observation

$$C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{D} \subset C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

#### Remarque

Si  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  n'est pas dans  $\mathcal{D}$ , il est facile de transformer  $f$  pour qu'elle soit dans  $\mathcal{D}$  comme l'illustre la définition qui suit.

#### Définition 69

Soit  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On appelle régularisée de  $f$  la fonction notée  $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \end{cases}$

#### Proposition 72

L'application  $\varphi : (f, g) \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{D}$ .

#### Remarques

1.  $\varphi$  est clairement un produit scalaire sur  $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mais n'est pas un produit scalaire sur  $C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  car non définie. En effet étant donnée  $f \in C_{m,2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , si  $\varphi(f, f) = 0$  alors  $f = 0$  sur  $[0, 2\pi]$  sauf aux points  $x_i$  de la subdivision choisie de  $[0, 2\pi]$ .

2. Pour tout  $f \in \mathcal{D}$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_n(f) = \varphi(e_n, f)$ .
3. Dans la suite du cours, nous noterons  $\langle, \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathcal{D}$  au lieu de  $\varphi$ .

### Proposition 73

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée dans  $(\mathcal{D}, \langle, \rangle)$  où  $e_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto e^{inx} \end{cases}$

## 9.2 Propriétés

### 9.2.1 Théorème de Bessel

#### Théorème 28 (de Bessel)

Soit  $f \in \mathcal{D}$ .

Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

### 9.2.2 Théorème de Parseval

#### Théorème 29 (de Parseval)

Soit  $f \in \mathcal{D}$ . Alors  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2$  où  $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

Si  $f$  est à valeurs réelles :  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f))$

### Remarque

L'égalité de Parseval du théorème précédent permet en particulier de déterminer certaines sommes de séries numériques convergentes comme l'illustre l'exemple qui suit.

### Exemple

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$  par  $f(x) = x^2$ .

Déterminons tout d'abord la série de Fourier de  $f$ .

Comme  $f$  est paire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n(f) = 0$ .

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} \overbrace{[x^2 \sin(nx)]_0^{\pi}}^0 - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( -\frac{1}{n} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

La série de Fourier de  $f$  s'écrit donc

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

Par le théorème de Parseval, on a

$$\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$$

soit

$$\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}$$

soit finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$



### 9.2.3 Théorème de Lejeune-Dirichlet

#### Définition 70

$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  ssi il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_0, \dots, x_n) \in [0, 2\pi]^{n+1}$  tels que :

1.  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$
2. pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la restriction de  $f$  à  $]x_i, x_{i+1}[$  se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$

#### Notations

On note  $C_{m,2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

#### Théorème 30 (de Lejeune-Dirichlet)

Soit  $f \in C_{m,2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la régularisée  $\tilde{f}$  de  $f$  c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \tilde{f}(x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) = \tilde{f}(x)$$

## 9.3 Exercices types

#### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $x \in [-\pi, \pi[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[ \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0, \pi[ \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  associés à  $f$  et écrire la série de Fourier associée à  $f$ .
2. En déduire  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$

3. En utilisant l'égalité de Parseval, déterminer  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$
4. En déduire  $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

**Solution**

1. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} [\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $b_{2p} = 0$  et  $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$

La série de Fourier de  $f$  est donc  $\frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)}$

2. La fonction  $f$  étant  $C^1$  par morceaux, on a en particulier en tout point  $x$  où  $f$  est continue :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)}$$

En particulier pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$$

3. En utilisant l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or  $f$  étant impaire,  $f^2$  est paire donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

Ainsi

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

4.

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

donc

$$\frac{3}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$ ,  $2\pi$  périodique définie pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$  par  $f(x) = |x|$ .

1. Déterminer les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  associés à  $f$ .

2. Déterminer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

3. Déterminer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

4. Déterminer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

5. Déterminer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

### Solution

1.  $f$  est paire donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} \underbrace{[x \sin(nx)]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{2p} = 0$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)^2\pi}$$

La série de Fourier de  $f$  est donc

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x)$$

2. La fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux (et de plus continue sur  $\mathbb{R}$ ) donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x) = |x|$$

En particulier pour  $x = 0$ , on a  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0$  soit

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. En utilisant l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

or

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

donc

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

donc

$$\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

donc

$$\frac{15}{16} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $x \in [-\pi, \pi[$  par  $f(x) = e^x$ .

1. Déterminer la série de Fourier de  $f$ .

2. En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$

### Solution

1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ IPP}}}{=} \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

D'autre part

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ IPP}}}{=} \frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Donc la série de Fourier de  $f$  est

$$\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx) + \frac{n(-1)^{n+1}}{1+n^2} \sin(nx)$$

2. En appliquant le théorème de Dirichlet (remarquez que  $f$  est discontinue en  $\pi$ ), on a

$$\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(n\pi) + \frac{n(-1)^{n+1}}{1+n^2} \sin(n\pi)$$

Or  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  et  $\sin(n\pi) = 0$  donc

$$\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

soit finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi(e^\pi + e^{-\pi})}{e^\pi - e^{-\pi}} - 1 \right)$$

## Chapitre 10

# Fonctions de deux variables réelles

### 10.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  (fonctions de deux variables

réelles) c'est-à-dire les fonctions  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(x, y) \end{cases}$

L'étude porte principalement sur les notions de dérivées partielles et sur la recherche des éventuels extrema locaux. Nous constaterons que beaucoup de concepts et de théorèmes déjà vus sur les fonctions d'une variable se généralisent aux fonctions de deux variables.

### 10.2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

#### 10.2.1 Normes sur $\mathbb{R}^2$

##### Définition 71

On appelle norme sur  $\mathbb{R}^2$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- $N(x) \geq 0$
- $N(x) = 0 \iff x = 0$



- $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

### Exemples

1.  $\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$
2.  $\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \text{Max}(|x|, |y|) \end{cases}$
3.  $\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto |x| + |y| \end{cases}$

### Définition 72

On dit que deux normes  $N$  et  $N'$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont équivalentes s'il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que pour tout  $x \in E$ ,

$$N(x) \leq \alpha N'(x) \quad \text{et} \quad N'(x) \leq \beta N(x)$$

### Proposition 74

$\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Remarque

Dans la suite du cours  $\|\cdot\|$  désignera indifféremment  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  ou  $\|\cdot\|_1$

### 10.2.2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

#### Définition 73

On appelle boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $u_0$  et de rayon  $r > 0$  l'ensemble noté  $B(u_0, r)$  défini par

$$B(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^2, \|u - u_0\| < r\}$$

**Définition 74**

Soit  $U$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  si

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \subset U$$

**10.3 Dérivées partielles****10.3.1 Fonctions partielles****Définition 75**

Soient  $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u = (u_1, u_2) \in I$ . On appelle fonctions partielles associées à  $f$  au point  $u$ , les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  notées  $f(\cdot, u_2)$  et  $f(u_1, \cdot)$  définies par

$$f(\cdot, u_2) : x \mapsto f(x, u_2)$$

et

$$f(u_1, \cdot) : y \mapsto f(u_1, y)$$

**Exemple**

$$\text{Soient } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Les fonctions partielles associées à  $f$  au point  $u = (1, 1)$  sont

$$f(\cdot, 1) : x \mapsto f(x, 1) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

et

$$f(1, \cdot) : y \mapsto f(1, y) = \frac{y}{1 + y^2}$$

**10.3.2 Dérivées partielles premières****Définition 76**

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u = (u_1, u_2) \in U$ . On dit que  $f$  admet en  $u$  des dérivées partielles (premières) si la fonction partielle  $f(\cdot, u_2)$  (resp.  $f(u_1, \cdot)$ ) est dérivable en  $u_1$  (resp.  $u_2$ ). Les

dérivées partielles (premières) au point  $u$  sont alors notées  $\frac{\partial f}{\partial x}(u)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(u)$ .

Si  $f$  admet en tout point de  $U$  des dérivées partielles premières, on définit alors les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u) \end{cases}$$

$$\left( \text{resp. } \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u) \end{cases} \right)$$

### Observation

Ainsi pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , il suffit de considérer  $y$  comme une constante dans  $f(x, y)$  et de dériver  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ .

De même pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , il suffit de considérer  $x$  comme une constante dans  $f(x, y)$  et de dériver  $f(x, y)$  par rapport à  $y$ .

### Exemples

$$1. \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2y - x + 2y \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2$$

$$2. \text{ Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto xe^{xy} \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy}$$

$$3. \text{ Soit } h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

### Remarque

$\frac{\partial f}{\partial x}$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) sont parfois notées  $D_1(f)$  ou encore  $f'_x$  (resp.  $D_2(f)$  ou  $f'_y$ ).

### 10.3.3 Dérivées partielles secondes

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in U$ . On dit que  $f$  admet des dérivées partielles secondes en  $u$  si

$\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  admettent des dérivées partielles en  $u$ .

Elles se notent alors :

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (u)$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (u)$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (u)$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (u)$$

Si elles existent en tout point de  $u$ , on appelle dérivées partielles secondes de  $f$  les quatre fonctions suivantes :

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) & \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) \end{cases}$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) & \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) \end{cases}$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) & \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u) \end{cases}$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) & \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u) \end{cases}$$

**Exemple**

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2y - x + 2y \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x$$

**10.3.4 Théorème de Schwarz**

On constate dans l'exemple précédent que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Le théorème de Schwarz dit que c'est toujours vrai pourvu que  $f$  soit suffisamment «régulière» (plus précisément de classe  $C^2$  c'est-à-dire si les dérivées partielles premières et les quatre dérivées partielles secondes existent et sont continues). Dans tous les exemples et exercices proposés, le théorème sera applicable de sorte qu'il sera inutile de calculer à la fois  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

**Théorème 31 (Schwarz)**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $U$ . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

## 10.4 Point critique

### 10.4.1 Point critique

#### Définition 77

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u = (a, b) \in U$ . On dit que  $u$  est un point critique de  $f$  si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$$

#### Remarque

Lorsque l'on cherche l'ensemble des points critiques d'une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il suffit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

#### Exemple

$$\text{Considérons } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy \end{cases}$$

Recherchons les points critiques de  $f$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi la deuxième équation donne  $x = 0$  ou  $x = 1$  ce qui donne respectivement en reportant dans la première équation  $y = 0$  ou  $y = 1$ . Ainsi  $f$  admet deux points critiques  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

### 10.4.2 Notations de Monge

#### Définition 78

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (vérifiant le théorème de Schwarz) et  $u = (a, b) \in U$  un point critique de  $f$ . On note alors

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{cases}$$

#### Exemple

Reprenons l'exemple précédent. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \end{cases}$$



On a déjà vu que  $A = (0, 0)$  et  $B = (1, 1)$  sont les points critiques de  $f$ . Pour  $A = (0, 0)$ , on a

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Pour  $B = (1, 1)$  on a

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -3 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6 \end{cases}$$

## 10.5 Extrema locaux des fonctions de deux variables

### 10.5.1 Extremum local

#### Définition 79

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in U$ . On dit que  $f$  admet en  $u$  un maximum (resp. minimum) local si  $f(v) \leq f(u)$  (resp.  $f(v) \geq f(u)$ ) pourvu que  $v$  soit suffisamment proche de  $u$ . On dit que  $f$  admet un extremum local en  $u$  si  $f$  admet un minimum local ou un maximum local en  $u$ .

#### Proposition 75

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $u \in U$  et que les dérivées partielles premières existent en  $u$  alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$$

**Remarques**

1. Ainsi les extrema locaux éventuels d'une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont à chercher *parmi* les points critiques.
2. Remarquons l'analogie de cette proposition avec celle consacrée aux fonctions d'une variable.

**10.5.2 Recherche pratique des extrema locaux****Théorème 32**

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (vérifiant le théorème de Schwarz) et  $u = (a, b) \in U$  un point critique de  $f$ . Alors

1. si  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  alors  $u$  est un minimum local de  $f$ .
2. si  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$  alors  $u$  est un maximum local de  $f$ .
3. si  $rt - s^2 < 0$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum en  $u$ . On dit que  $u$  est un point-col (ou point-selle) de  $f$ .

**Remarque**

Si  $rt - s^2 = 0$ , aucun théorème général n'existe pour conclure directement. Bien entendu, les exercices proposés rentreront dans le cadre du théorème.

**Exemple**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$$

Déterminons les points critiques de  $f$  et précisons leur nature (maximum local, minimum local ou point-col). Commençons par rechercher les points critiques de  $f$  :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Après calcul du discriminant de la deuxième équation, on trouve  $x = -\frac{1}{3}$  ou  $x = 1$ . Ainsi en utilisant la première équation, on a donc deux points critiques  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  et  $(1, 1)$ . Déterminons la nature de chaque point critique. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \end{cases}$$

Donc au point  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  :

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -2 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -2 \end{cases}$$

Ainsi  $rt - s^2 < 0$  donc  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  est un point-col.

Au point  $(1, 1)$ ,

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 2 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -2 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6 \end{cases}$$

Ainsi  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  donc  $(1, 1)$  est un minimum local.

## 10.6 Exercices types

### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$ .

1. Déterminer les points critiques de  $f$ .
2. Pour chacun des points critiques, préciser s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point-col.

### Solution

1. Déterminons les points critiques de  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-2, 1)$$

$f$  a donc 2 points critiques  $(0, 0)$  et  $(-2, 1)$ .

2. Déterminons la nature de chaque point critique.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \frac{3}{2}x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

Donc au point  $(0, 0)$  :  $r = 2$ ,  $s = 1$  et  $t = 2$  donc  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  d'où  $f$  admet en  $(0, 0)$  un minimum local.

Au point  $(-2, 1)$  :  $r = -1$ ,  $s = 1$  et  $t = 2$  donc  $rt - s^2 < 0$  d'où  $f$  admet en  $(-2, 1)$  un point-col.

## Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x(\ln^2(x) + y^2)$ .

Déterminer les points critiques de  $f$  en précisant s'il s'agit de maximum local, minimum local ou point-col.

## Solution

Recherchons les points critiques de  $f$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln^2(x) + y^2 + x \cdot \frac{2\ln(x)}{x} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln^2(x) + 2\ln(x) + y^2 \\ y = 0 \quad (\text{car } x \neq 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = e^{-2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$f$  admet donc deux points critiques  $(1, 0)$  et  $(e^{-2}, 0)$ .

Déterminons la nature de chaque point critique :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x$$

Donc au point  $(1, 0)$  :  $r = 2$ ,  $s = 0$  et  $t = 2$  donc  $rt - s^2 = 4 > 0$  et  $r > 0$  d'où  $f$  admet en  $(1, 0)$  un minimum local.

Au point  $(e^{-2}, 0)$  :  $r = -2e^2$ ,  $s = 0$  et  $t = 2e^{-2}$  donc  $rt - s^2 = -4 < 0$  d'où  $f$  admet en  $(e^{-2}, 0)$  un point-col.