

ACTIVITÉ 1

Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif.

En 2014, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.

Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays les années précédentes sont données, en pourcentage, dans le tableau suivant :

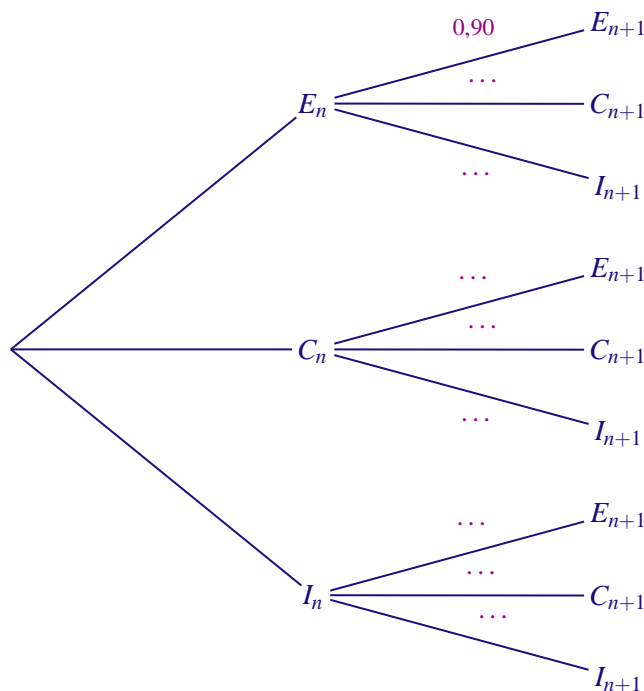
Année n	Année $n + 1$		
	Emploi	Chômage	Inactif
Emploi	90	3	7
Chômage	30	43	27
Inactif	14	7	79

Ce tableau synthétise les changements de situation entre deux années consécutives : 90% des personnes qui ont un emploi une année donnée occupent un emploi l'année suivante.

On interroge au hasard une personne de la population (15-64 ans). Soit n un entier naturel, on note :

- E_n l'évènement « Cette personne occupe un emploi l'année $2014 + n$ » ;
- C_n l'évènement « Cette personne est au chômage l'année $2014 + n$ » ;
- I_n l'évènement « Cette personne est inactive l'année $2014 + n$ ».
- e_n , c_n et i_n les probabilités respectives $P(E_n)$, $P(C_n)$ et $P(I_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre les années n et $n + 1$



2. Calculer les probabilités e_1 et c_1 . En déduire la probabilité i_1 .
3. Calculer la probabilité c_2 .
4. Exprimer les probabilités e_{n+1} , c_{n+1} et i_{n+1} en fonction des probabilités e_n , c_n et i_n .

I DÉFINITIONS

1 GRAPHE PROBABILISTE

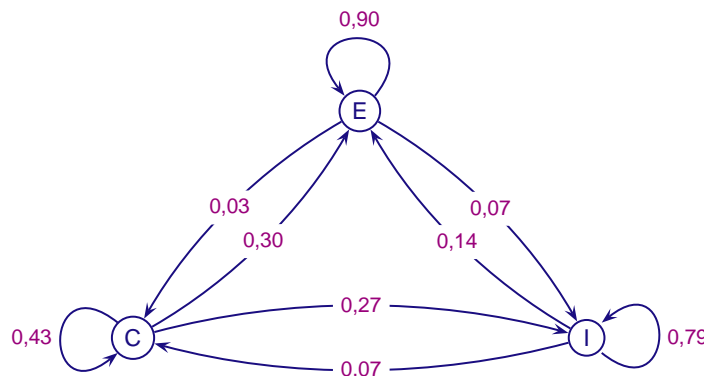
Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré (sans arêtes parallèles) dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

- les sommets du graphe sont les états possibles du système ;
- le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'évènement j à l'étape $n + 1$ sachant que l'évènement i est réalisé à l'étape n .

EXEMPLE

Notons respectivement E, C et I les trois états emploi chômage et inactivité de l'activité 1. Le graphe probabiliste associé est :



2 MATRICE DE TRANSITION

La matrice de transition associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.

Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n + 1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n .

EXEMPLE

La matrice de transition M du graphe précédent est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

3 ÉTAT PROBABILISTE

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.

Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

EXEMPLE

Dans l'activité 1, en 2014, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.

Notons P_0 l'état probabiliste de l'année 2014 :

$$P_0 = (0,69 \quad 0,06 \quad 0,25)$$

II ÉVOLUTION D'UN ÉTAT AU COURS DU TEMPS

Étudions l'évolution au cours du temps du système à trois états (emploi, chômage, inactif) de l'activité 1 :

Soit $P_n = (e_n \ c_n \ i_n)$ l'état probabiliste du système l'année n .

D'après la formule des probabilités totales, l'année $n + 1$:

$$e_{n+1} = e_n \times 0,90 + c_n \times 0,30 + i_n \times 0,14$$

$$c_{n+1} = e_n \times 0,03 + c_n \times 0,43 + i_n \times 0,27$$

$$i_{n+1} = e_n \times 0,14 + c_n \times 0,07 + i_n \times 0,79$$

L'état probabiliste du système l'année $n + 1$ est :

$$P_{n+1} = (e_n \times 0,90 + c_n \times 0,30 + i_n \times 0,14 \quad e_n \times 0,03 + c_n \times 0,43 + i_n \times 0,27 \quad e_n \times 0,14 + c_n \times 0,07 + i_n \times 0,79)$$

$$\text{Soit } P_{n+1} = (e_n \ c_n \ i_n) \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

1 PROPOSITION

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \dots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Soit $P_n = (a_1 \ \dots \ a_k)$ l'état probabiliste du système à l'instant n , M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n + 1$. Alors, pour tout entier n , on a

$$P_{n+1} = P_n M$$

EXEMPLE

Avec les données de l'exemple précédent :

$$P_1 = (0,69 \ 0,06 \ 0,25) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix} = (0,674 \ 0,064 \ 0,262)$$

En 2015, 6,4% de la population devrait être au chômage.

2 THÉORÈME

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p , si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n , on a $P_n = P_0 \times M^n$

EXEMPLE

Calculons l'état probabiliste prévisible en 2020 :

$$P_6 = (0,69 \ 0,06 \ 0,25) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}^6 \approx (0,64 \ 0,069 \ 0,291)$$

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur les transitions dans le marché du travail, en 2020 d'environ 6,9% de la population (15-65 ans) de ce pays serait au chômage.

3 ÉTAT STABLE

Un état stable d'un graphe probabiliste de matrice de transition M est un état P tel que $P = PM$.

EXEMPLE

Déterminons l'état stable P du système emploi, chômage et inactivité sur le marché du travail.

Soit $P = (e \ c \ i)$ l'état stable. Nous avons :

$$\begin{aligned} P = PM &\Leftrightarrow (e \ c \ i) = (e \ c \ i) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (e \ c \ i) = (0,9e + 0,3c + 0,14i \quad 0,03e + 0,43c + 0,07i \quad 0,07e + 0,27c + 0,79i) \end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $e + c + i = 1$. Par conséquent e , c et i sont solutions du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,9e + 0,3c + 0,14i &= e \\ 0,03e + 0,43c + 0,07i &= c \\ 0,07e + 0,27c + 0,79i &= i \\ e + c + i &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1e + 0,3c + 0,14i &= 0 \\ 0,03e - 0,57c + 0,07i &= 0 \\ 0,07e + 0,27c - 0,21i &= 0 \\ e + c + i &= 1 \end{cases} \quad L_3 = -(L_1 + L_2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1e + 0,3c + 0,14i &= 0 \\ 0,03e - 0,57c + 0,07i &= 0 \\ e + c + i &= 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4c + 0,24i &= 0,1 \\ 0,6c - 0,04i &= 0,03 \\ e + c + i &= 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e + c + i &= 1 \\ 0,4c + 0,24i &= 0,1 \\ 0,8i &= 0,24 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 0,63 \\ c &= 0,07 \\ i &= 0,30 \end{cases} \end{aligned}$$

L'état stable du système est $P = (0,63 \ 0,07 \ 0,30)$.

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur le marché du travail, sur le long terme environ 7% de la population (15-65 ans) serait au chômage.

REMARQUE

Le taux de chômage est le rapport entre le chômage et la population active (emploi+chômage) soit :

$$\frac{0,07}{0,63 + 0,07} = 0,1$$

Sur le long terme, le taux du chômage se stabilise à 10%

4 PROPRIÉTÉ

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0 .

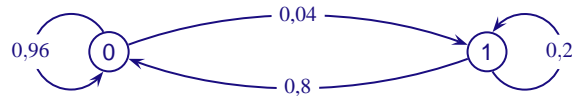
EXEMPLE

En salle des professeurs, il y a deux photocopieuses qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Chaque photocopieuse en état de marche a une probabilité égale à 0,2 de tomber en panne pendant la journée.

Dans le cas où une photocopieuse tombe en panne pendant la journée, elle est réparée en fin de journée et se retrouve donc en état de marche le lendemain.

Supposons que l'on ne puisse pas réparer plus d'une photocopieuse chaque jour.
On s'intéresse au nombre de photocopieuses en panne en début de journée.
Le graphe probabiliste est un graphe à deux états 0 ou 1 :



dont la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Soit $P = (a \ b)$ l'état stable du système. Nous avons :

$$\begin{aligned} P = PM &\Leftrightarrow (a \ b) = (a \ b) \times \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (a \ b) = (0,96a + 0,8b \quad 0,04a + 0,2b) \end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $a + b = 1$. Par conséquent a et b sont solutions du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,96a + 0,8b &= a \\ 0,04a + 0,2b &= b \\ a + b &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,04a - 0,8b &= 0 \\ 0,04a - 0,8b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,04a - 0,8b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{20}{21} \\ b &= \frac{1}{21} \end{cases} \end{aligned}$$

L'état stable du système est $P = \left(\frac{20}{21} \quad \frac{1}{21} \right)$. Quel que soit l'état initial, au bout d'un certain nombre jours, la probabilité que chaque jour aucune photocopieuse ne soit en panne est égale à $\frac{20}{21}$.

EXERCICE 1

Le tableau ci-dessous extrait d'une étude de la Commission européenne, donne en pourcentage les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail dans l'Union Européenne en fonction du genre :

Année $n + 1$

Année n	Hommes			Femmes		
	Emploi	Chômage	Inactif	Emploi	Chômage	Inactif
Emploi	95	3	2	93	3	4
Chômage	31	58	11	28	56	16
Inactif	10	4	86	9	4	87

Calculer les probabilités selon son genre, pour une personne qui est en congé parental(Inactif) d'avoir un emploi un an plus tard et deux ans plus tard.

EXERCICE 2

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

- En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.
- En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 de se retrouver en situation de succès.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
 - a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard ?
 - b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme ?

EXERCICE 3

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

- une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;
- une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

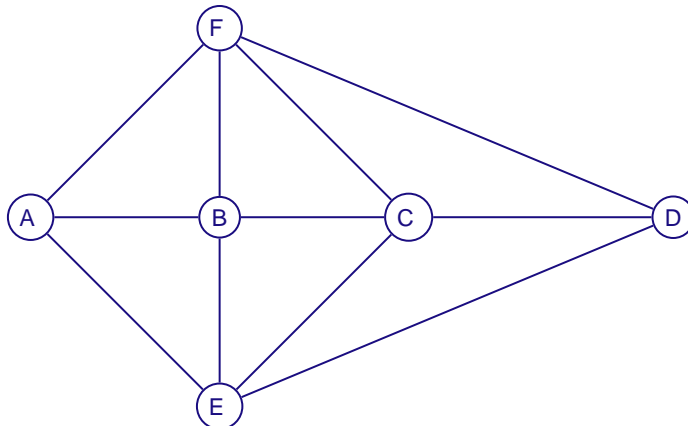
- 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;
- 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2010, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

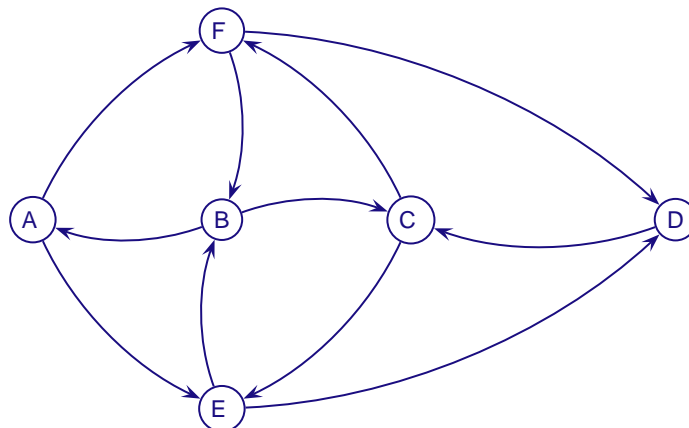
1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \ b_n)$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année 2010 + n . L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0,8 \ 0,2)$.
 - a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2011.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
3. On pose pour tout entier n , $u_n = a_n - 0,4$.
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
 - b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$
 - c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n) . Donner une interprétation concrète de ce résultat.
 - d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

EXERCICE 4

Un site internet comporte 6 pages, notées A, B, C, D, E, F reliées entre elles suivant le graphe ci-dessous.



1. Le responsable du site souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ?
2. Le responsable du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.
Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires ?
3. Le graphe orienté ci-dessous indique les liens direct entre les pages du site.
On considère que sur chaque page, les visiteurs choisissent uniformément et au hasard de rester sur la page ou de suivre un des liens.



Vérifier que l'état stable du système est $P = \left(\frac{3}{38} \quad \frac{3}{19} \quad \frac{9}{38} \quad \frac{4}{19} \quad \frac{3}{19} \quad \frac{3}{19} \right)$

Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.

Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.

Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n -ième mois après l'étude et $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n -ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $(0,564 \quad 0,436)$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$. Déterminer les réels a et b . Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_n = a_n - 0,6$.
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.
 - b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$.
 - c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à $0,595$?

EXERCICE 6

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.

Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

- 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;
- Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;
- 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F , N et R .

2. On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,28 & 0,1 \\ 0,32 & \dots & 0,1 \\ \dots & \dots & 0,7 \end{pmatrix}$.

3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.

Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n , b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n .

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

- a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1 = (0,32 \quad 0,58 \quad 0,1)$.
- b) Déterminer l'état probabiliste P_3 . Interpréter ce résultat.
- c) Déterminer l'état probabiliste stable du système.
- d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

EXERCICE 7

(D'après sujet bac Amérique du Sud 2013)

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à $0,2$.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à $0,3$.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et \bar{S} l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n -ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n -ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n -ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et \bar{S} .
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
b) Calculer M^2 .
c) Déterminer l'état probabiliste P_2 .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ...
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N .

PARTIE B

On considère, pour tout entier naturel n , l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n -ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$. On a donc $p_n = p(S_n)$.

On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.

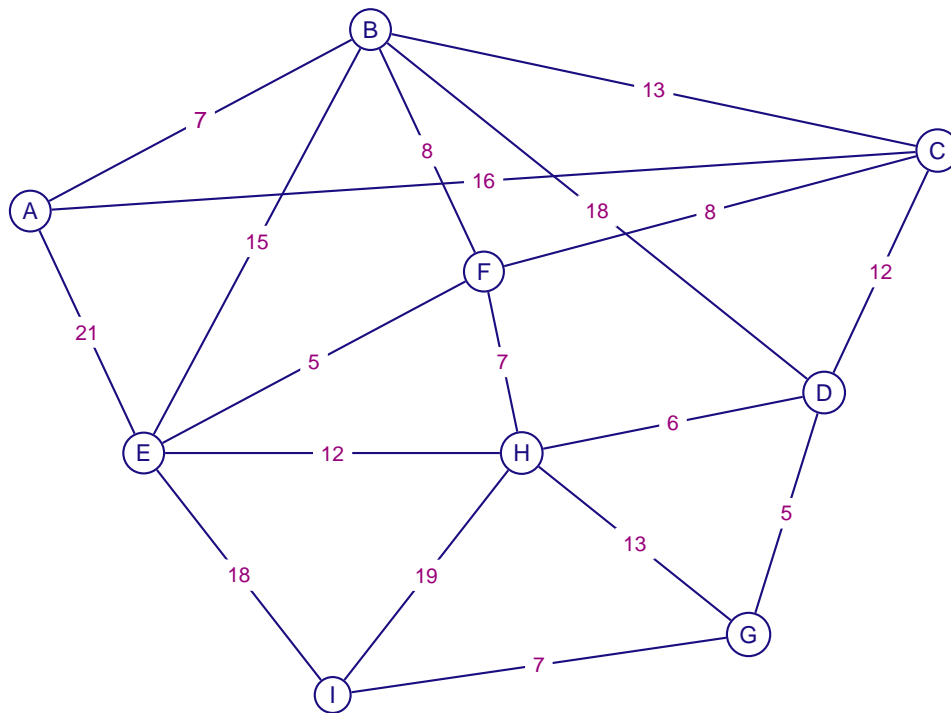
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0 .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

PARTIE C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous. Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas. Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.

Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

EXERCICE 8

(D'après sujet bac Antilles, Guyane Septembre 2013)

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

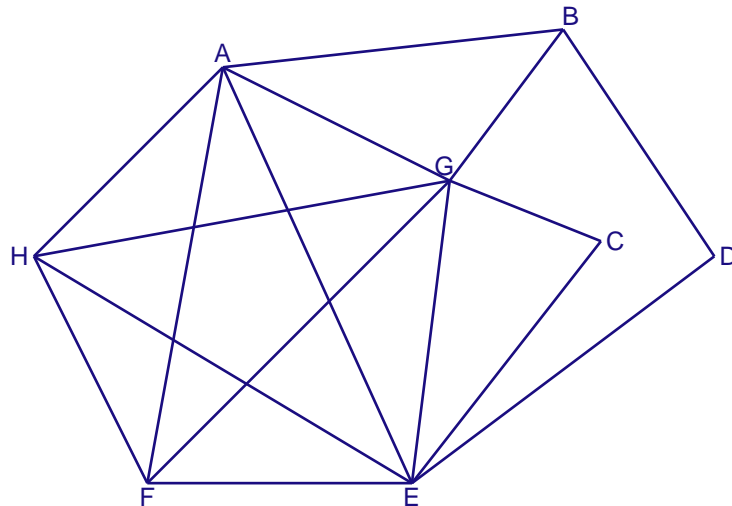
Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.

De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n -ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n -ième vente promotionnelle.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n -ième vente promotionnelle.

1. a) Déterminer P_1 .
b) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :
 V quand il y a achat ;
 \overline{V} quand il n'y a pas achat.
2. a) Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.
b) Calculer P_2 et P_3 . D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?
3. Justifier qu'il existe un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ pour cette situation. Le déterminer.
4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat.

Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

EXERCICE 9

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.

Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.

La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaître leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.

On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T .
2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.
3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$.
Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.
4. a) Montrer que l'état stable est $(0,4 \quad 0,6)$.
b) Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?
5. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
En déduire que pour tout entier n , on a $c_{n+1} = 0,95 \times c_n + 0,02$.
b) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n Affecter à A la valeur $0,95 \times A + 0,02$ Fin Pour
Sortie :	Afficher A

En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.

Que permet de déterminer cet algorithme ?

EXERCICE 10

(D'après sujet bac Polynésie 2013)

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90% du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

On observe à partir de 2010 que chaque année, 15% des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10% des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et b_n , la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

PARTIE A

- Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
- Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
 - Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $(0,61 \quad 0,39)$.
 - Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

- Écrire un système traduisant cette situation.
- Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
- Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

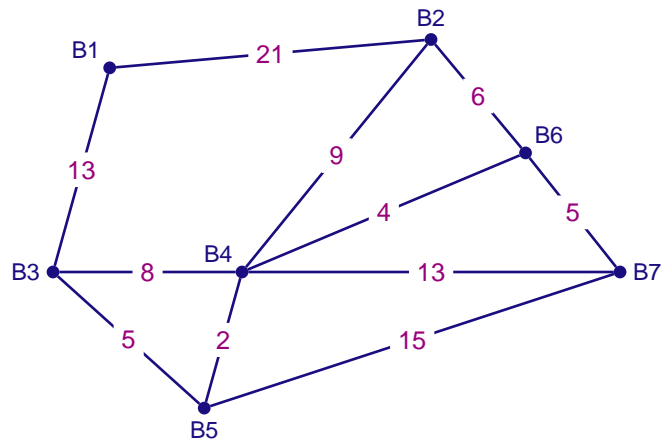
EXERCICE 11

(D'après sujet bac Polynésie Septembre 2013)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus. Les sept balises notées B1; B2; ...; B7 sont représentées sur le graphe ci-contre. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1. a) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
b) Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
c) Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?
2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins. Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

PARTIE B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.

En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme.

On note :

A « le licencié est assuré »

B « le licencié n'est pas assuré »

Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année $2011 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \ y_n)$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année $2011 + n$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_0 = (0,8 \ 0,2)$, déterminer P_1 . Interpréter ce résultat.
4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %. L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?