I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

– Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.
– Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5% par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = \left(1+\frac{1,5}{100}\right)\times C_n = 1,015\times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,015$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = \left(1-\frac{4}{100}\right)\times r_n = 0,96\times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0\times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000\times 0,96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

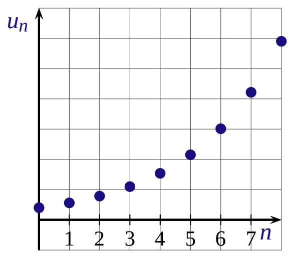
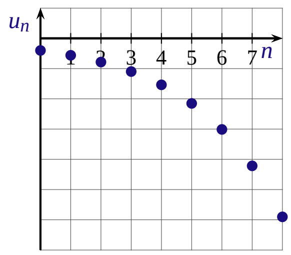
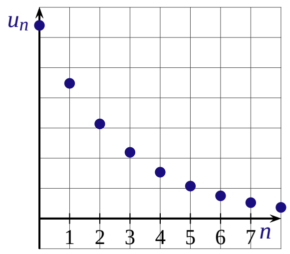
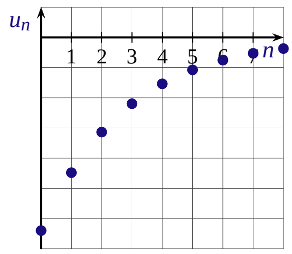
$$u_n = u_p\times q^{n-p}$$

4 MONOTONIE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$
– Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
– Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

<table>
<tr><td colspan="2">Si $q > 1$</td><td colspan="2">Si $0 < q < 1$</td></tr>
<tr>
<td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante
</td>
<td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante
</td>
<td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante
</td>
<td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
</td>
</tr>
</table>

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.
– Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.
– Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
– Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
– Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul
– Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
– Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n).
– Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

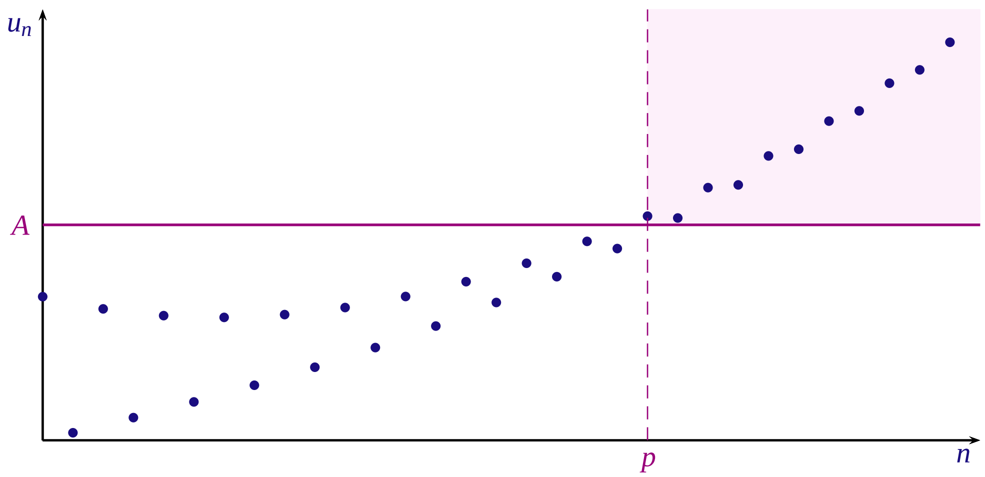
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r ; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. On écrit :

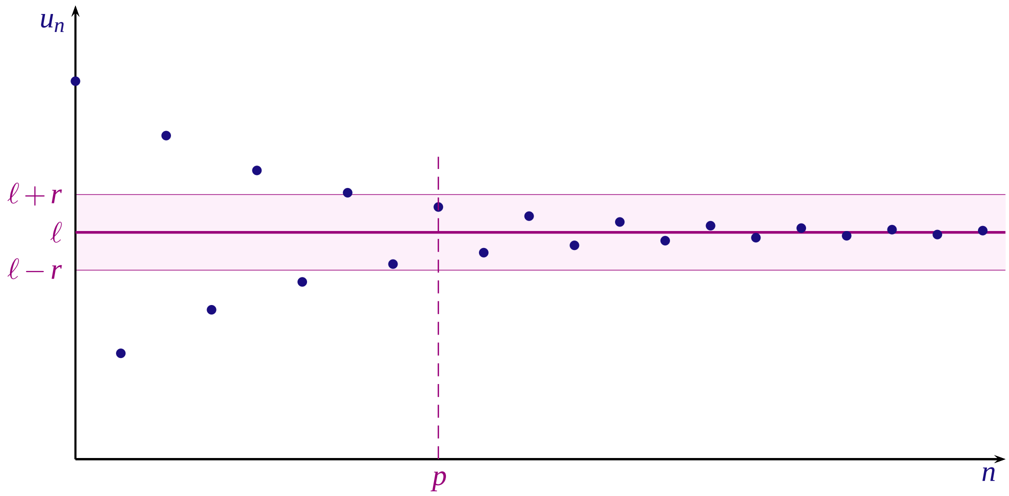
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME (*admis*)

Soit q un réel strictement positif :
- Si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n est constante et sa limite est 1.
- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q strictement positive.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

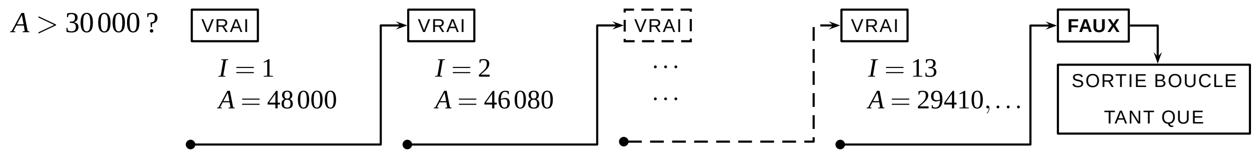
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50000$
Comme $0 < 0{,}96 < 1$ la suite (r_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 50000 \times 0{,}96^n = 0$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$

```
INITIALISATION :
A = 50000 ;
I = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE A > 30000 FAIRE
    I prend la valeur I+1 ;
    A prend la valeur 0,96 × A ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I
```

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
`PROGRAM : SEUIL`	`===== SEUIL =====`
`: 50000 → A`	`50000 → A ↲`
`: 0 → I`	`0 → I ↲`
`: While A > 30000`	`While A > 30000 ↲`
`: I + 1 → I`	`I + 1 → I ↲`
`: 0.96*A → A`	`0.96*A → A ↲`
`: End`	`WhileEnd ↲`
`: Disp I`	`I`

Initialisation :
$A = 50\,000$
$I = 0$
Traitement :
Tant que la condition $A > 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "**TANT_ QUE**" et "**FIN TANT_ QUE**"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2000$
$1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2000 \times 1{,}015^n = +\infty$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $2000 \times 1{,}015^n > 3000$

```
INITIALISATION :
A = 2000 ;
I = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE A ⩽ 3000 FAIRE
    I prend la valeur I+1 ;
    A prend la valeur 1,015 × A ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I
```

La calculatrice affiche 28. Donc pour tout entier $n \geqslant 28$, $2000 \times 1{,}015^n > 3000$.

III SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La suite (u_n) définie pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite *arithmético-géométrique*

REMARQUE

- Si $a = 1$ la suite est arithmétique.
- Si $b = 0$ la suite est géométrique.
- Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

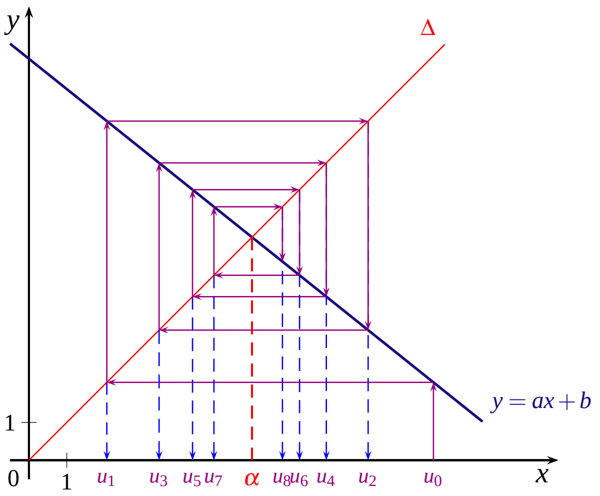
ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. (u_n) la suite définie par u_0 et pour tout entier n, $u_{n+1} = au_n + b$.

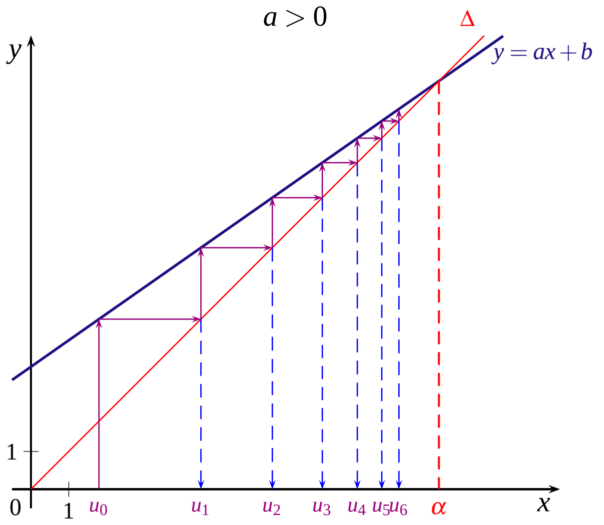
REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$

$a < 0$



$a > 0$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

UNE SUITE AUXILIAIRE

Si une suite arithmético-géométrique définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ est convergente, alors sa limite est l'unique solution de l'équation $ax + b = x$. Soit $x = \dfrac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$. Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique. En effet, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n - \frac{ab}{1-a} \\ &= a \times \left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n, $v_n = a \times v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

Par conséquent, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times a^n$ avec $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

On en déduit que pour tout entier n, $u_n = v_0 \times a^n + \dfrac{b}{1-a}$

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*

   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.

   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$

2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*

   Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.

3. *Exprimer u_n en fonction de n.*

   (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126000 \times 1{,}002^n$.

   Donc pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

4. *Étude de la suite (u_n).*

   a) *Variation*

   Pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

   Donc pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$

   D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

   b) *Limite*

   Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 126000 \times 1{,}002^n - 125000 = +\infty$.

   c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*

   On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15000$.

   L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15000.

```
A = 1000 ; I = 0;
TANT_QUE A ⩽ 15000 FAIRE
    I prend la valeur I + 1 ;
    A prend la valeur 1,002 × A + 250 ;
FIN TANT_QUE
Afficher I
```

   La calculatrice affiche 53. Donc le capital disponible dépassera 15000 € au bout de 53 mois.

EXERCICE 1

(u_n) est une suite arithmétique de raison a, déterminer l'entier k, s'il existe, dans chacun des cas suivants :

1. $u_{21} = 34$, $a = 1{,}5$ et $u_k = 1$
2. $u_{10} = 64$, $u_5 = 14$ et $u_k = 114$.

EXERCICE 2

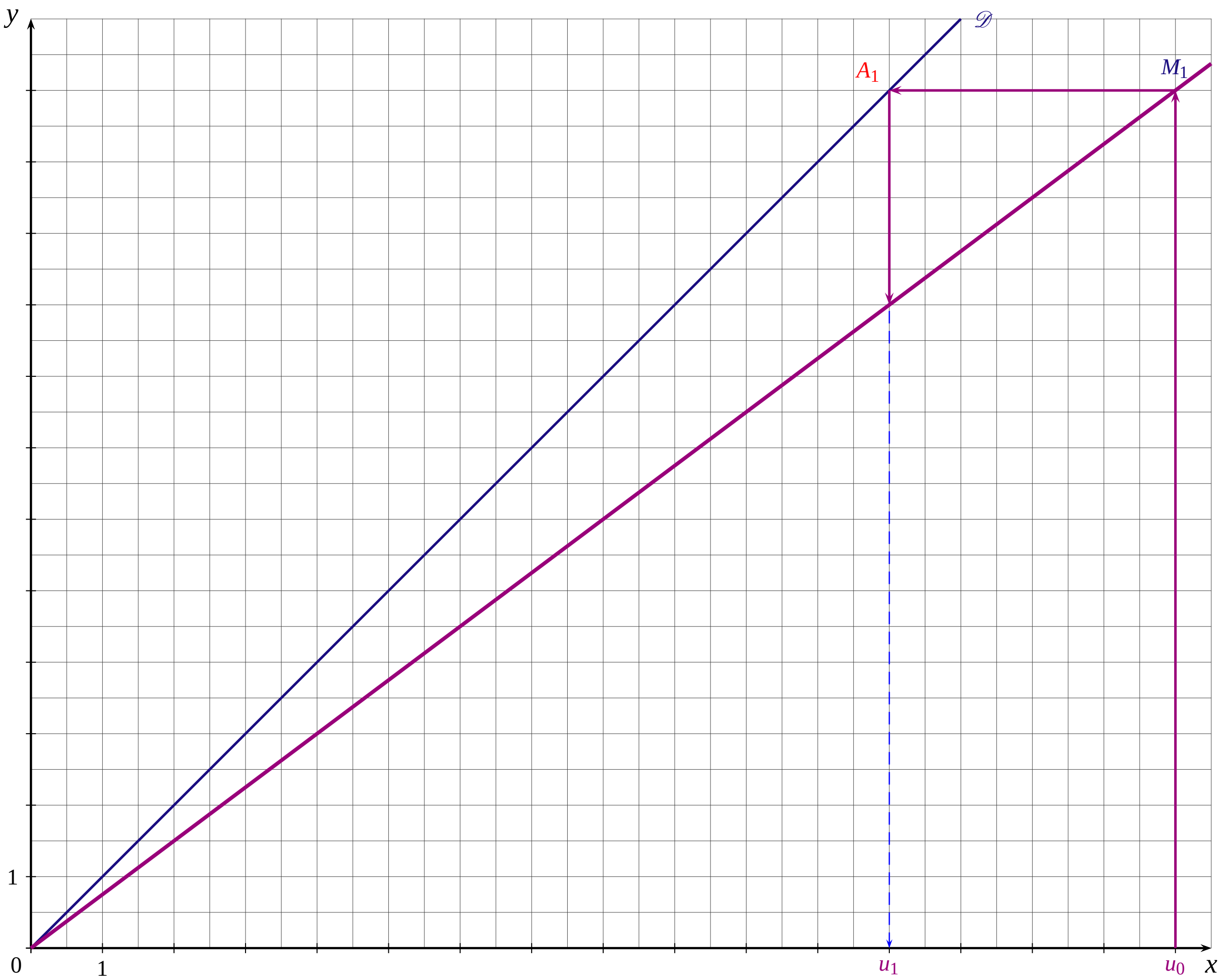
(u_n) est une suite géométrique de raison q strictement positive, déterminer l'entier p dans chacun des cas suivants :

1. $u_6 = 4$, $q = \dfrac{1}{2}$ et $u_p = \dfrac{1}{4}$
2. $u_3 = 16$, $u_7 = 1$ et $u_p = \dfrac{1}{8}$.

EXERCICE 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n$.

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   d) On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n. Calculer S_4.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{11}$.

b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$.
4. Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$. Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

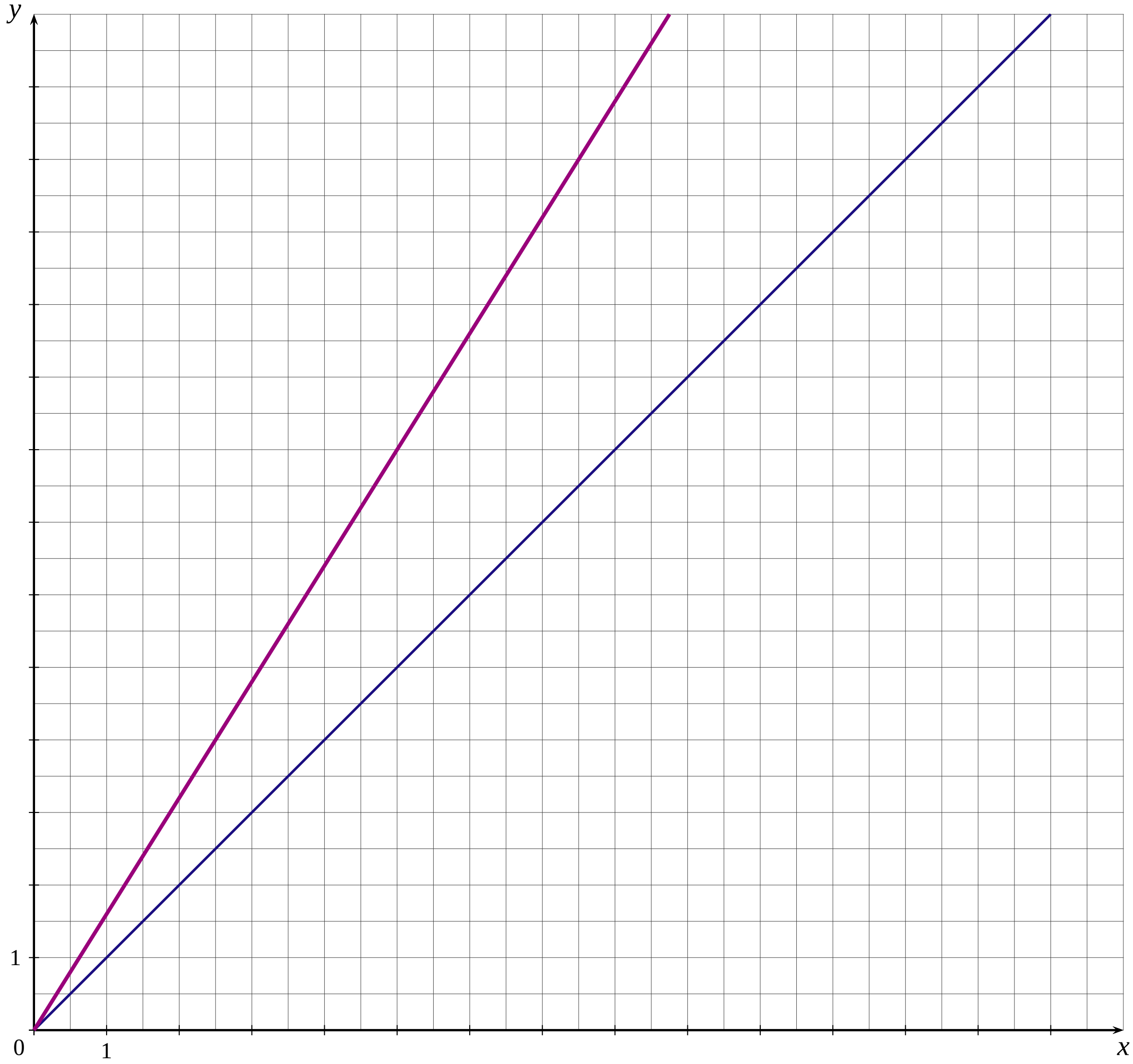
EXERCICE 4

Soit (u_n) la suite géométrique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8}{5} \times u_n$.

1. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite (u_n).



   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5000$.
4. On note S la somme des n premiers termes de la suite u_n.

   a) Montrer que pour tout entier n, $S = \dfrac{5\left(1{,}6^n - 1\right)}{6}$.

   b) Vers quel réel tend S quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 5

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2013*)

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite que l'on appellera (u_n).

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1{,}5u$ à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$?

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}5u_n$.
   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.
3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   a) Calculer les valeurs des termes S_0, S_1 et S_2.
   b) Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur du terme S_n pour un n donné ?
   Écrire ce nouvel algorithme sur sa copie.
   c) Calculer le terme S_n en fonction de l'entier naturel n.
   d) En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 6

(*D'après sujet bac Polynésie 2013*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée ci-dessous.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08
11	9	5,000 786 43
12	10	5,000 314 57

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?

3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère l'algorithme suivant :

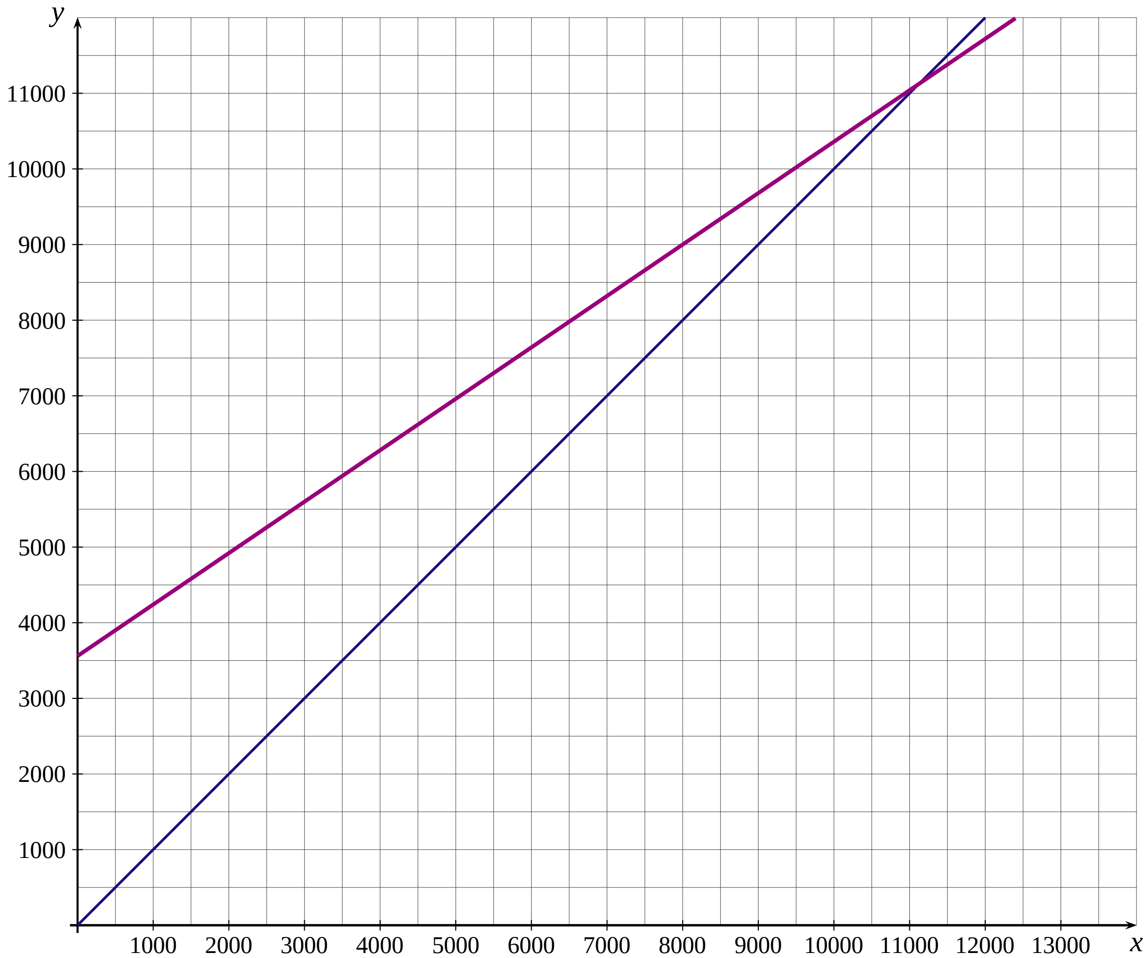
Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE $\text{U} - 5 > 0{,}01$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur $0{,}4\text{U} + 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

   Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   d) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ?
   Pourquoi ?

EXERCICE 7

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5500$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}68 \times u_n + 3560$.

1. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}68x + 3560$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).



Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que la limite de la suite (u_n).

b) Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?

$A = 5500$;
$k = 0$;
TANT_QUE $A < 11000$ **FAIRE**
 k prend la valeur $k+1$;
 A prend la valeur $0{,}68 \times A + 3560$;
FIN TANT_QUE
SORTIE : Afficher k;

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 11125$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 11125 - 5625 \times 0{,}68^n$.
   c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 8

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.
En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2010+n$; on a donc $a_0 = 40$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et S sont des entiers naturels
	A est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de S
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à A la valeur 40
Traitement :	Tant_que $A \leqslant S$:
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à A la valeur $0{,}85 \times A + 12$
	Fin Tant_que
Sortie :	Afficher n

L'utilisateur saisit en entrée le nombre $S = 65$.
Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près.
Quel nombre obtient-on en sortie ? Interpréter ce résultat.

n	0	1	...	
A	40		...	
Test $A \leqslant S$	Vrai		...	

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$.
   c) Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 90 mille exemplaires ?

EXERCICE 9 (*D'après sujet bac Amérique du Nord 2013*)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1[er] janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

PARTIE A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1[er] janvier de l'année $(2013+n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
   Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

VARIABLES
U, N
INITIALISATION
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N
TRAITEMENT
Tant que $U < 100$
U prend la valeur $U \times 0{,}95 + 6$
N prend la valeur $N + 1$
Fin du Tant que
SORTIE
Afficher N

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

PARTIE B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1[er] janvier de l'année $(2013+n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et préciser son premier terme w_0.
3. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, w_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de (w_n).
   c) En déduire la limite de (v_n). Interpréter ce résultat.