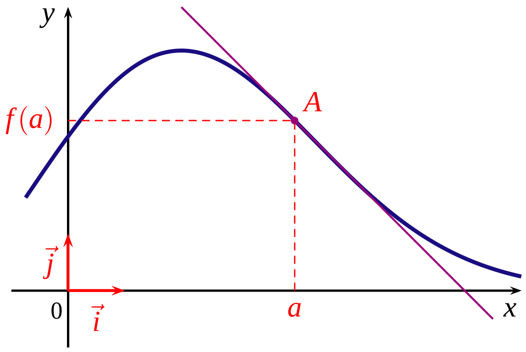
I DÉRIVÉES

1 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.



Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

f définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur ...
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ pour n entier $n \geqslant 2$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour n entier $n \geqslant 1$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = k \times u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$

- $\left(u^2\right)' = 2uu'$
- Si n est un entier non nul, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I (si $v(x) \neq 0$ sur I)

- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
– Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.
– Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.
– Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.
– Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
– Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
– Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

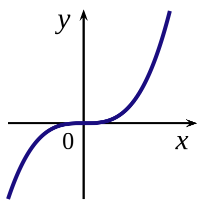
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	*minimum*	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	*maximum*	↘	

Remarques

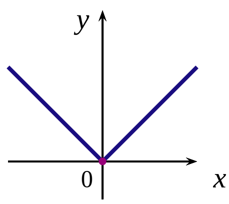
1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

   Considérons la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
   f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

   Sur $\mathbb{R}$ f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

   $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

   Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

   Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

   Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$:

   Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$.

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2 \end{aligned}$$

   Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

   Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ansi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	

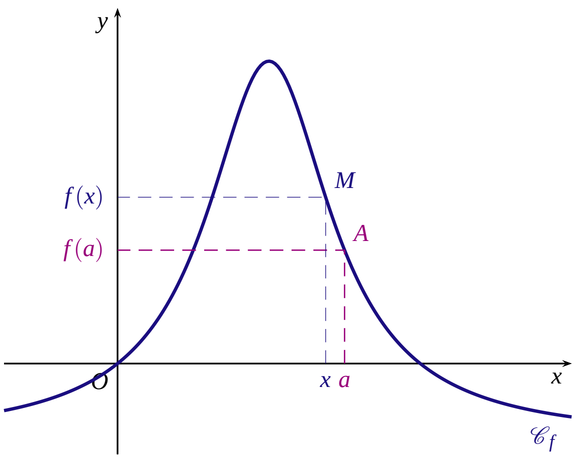
II CONTINUITÉ ET ÉQUATION

1 NOTION DE CONTINUITÉ

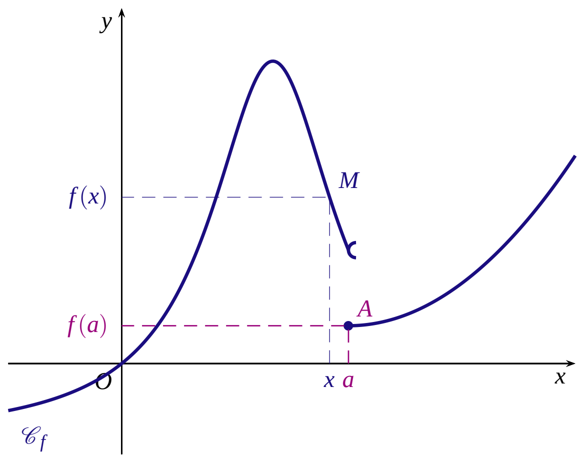
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.
Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

2 PROPRIÉTÉS

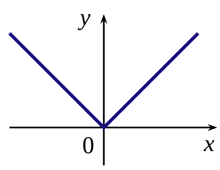
THÉORÈME *(admis)*

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.
Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

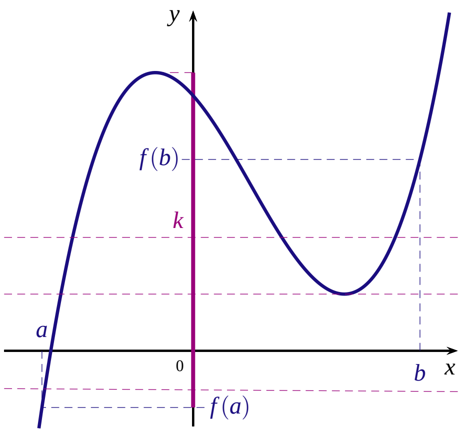
1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME *(admis)*

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue sur I alors elle vérifie la propriété suivante :
quels que soient les réels a et b de l'intervalle I, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a;b]$.

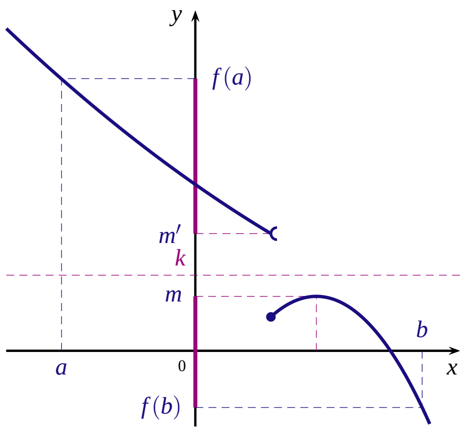
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x)=k$ n'a pas de solution.

2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

COROLLAIRE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I, $a<b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a;b]$.

Démonstration

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence
   Par hypothèse, f est continue sur $[a;b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a;b]$.
2. Unicité
   Supposons que l'équation $f(x)=k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a;b]$
   Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$
   Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1)=f(c_2)=k$
   Donc $c_1=c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a;b]$

REMARQUES

1. Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[a;b]$
2. Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

IV CONVEXITÉ

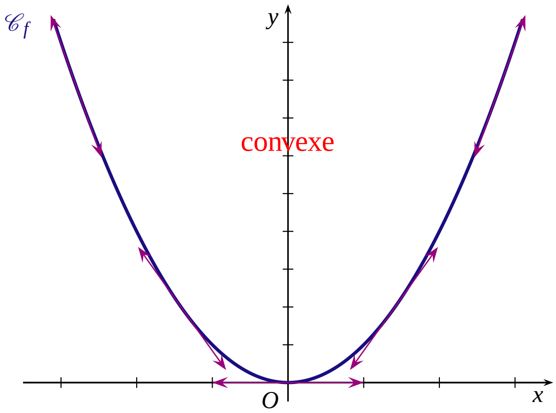
1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

DÉFINITIONS

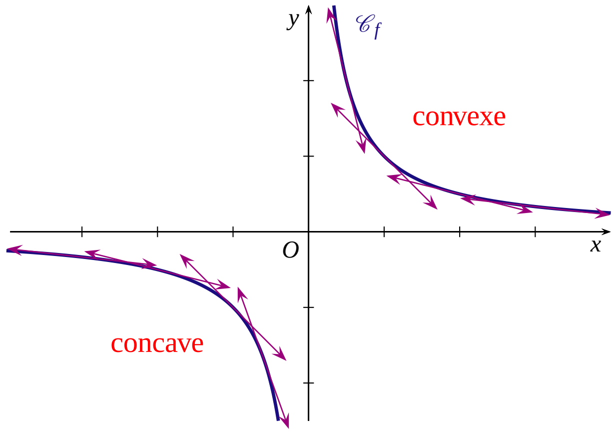
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

EXEMPLES



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.

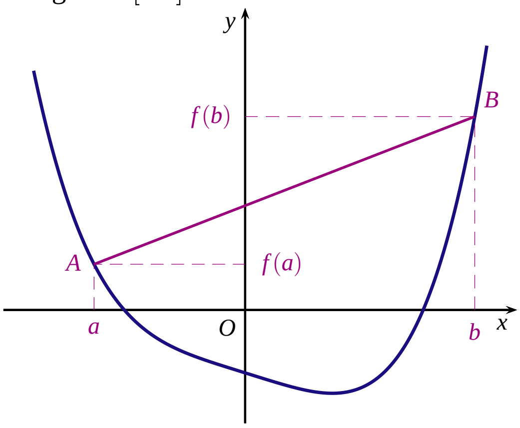


La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

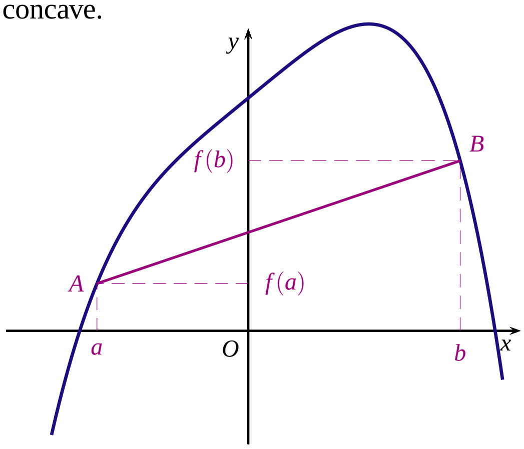
REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



f est convexe.



f est concave

THÉORÈME (*admis*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.
- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$$

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$		$\nearrow$	
convexité de f		CONCAVE		CONVEXE	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

2 POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

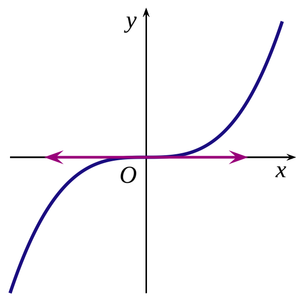
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

EXEMPLE

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0;0)$ du repère.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.
- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $O(0;0)$ est un point d'inflexion.



CONSÉQUENCES

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

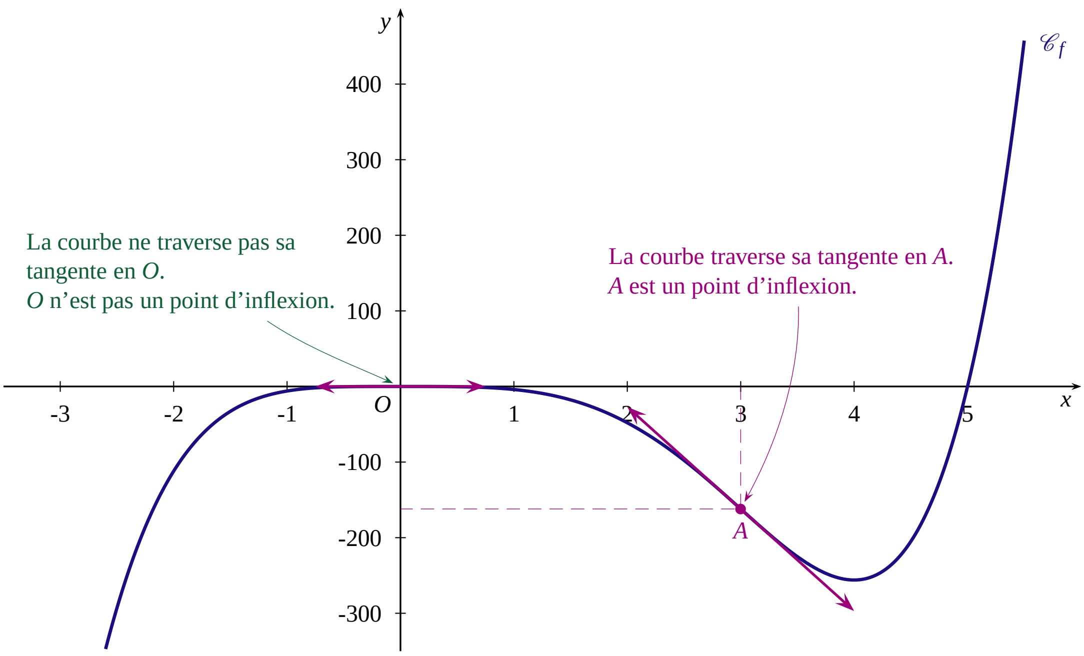
L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'	↘					↗	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A(3; f(3))$.

En effet :
- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



EXERCICE 1

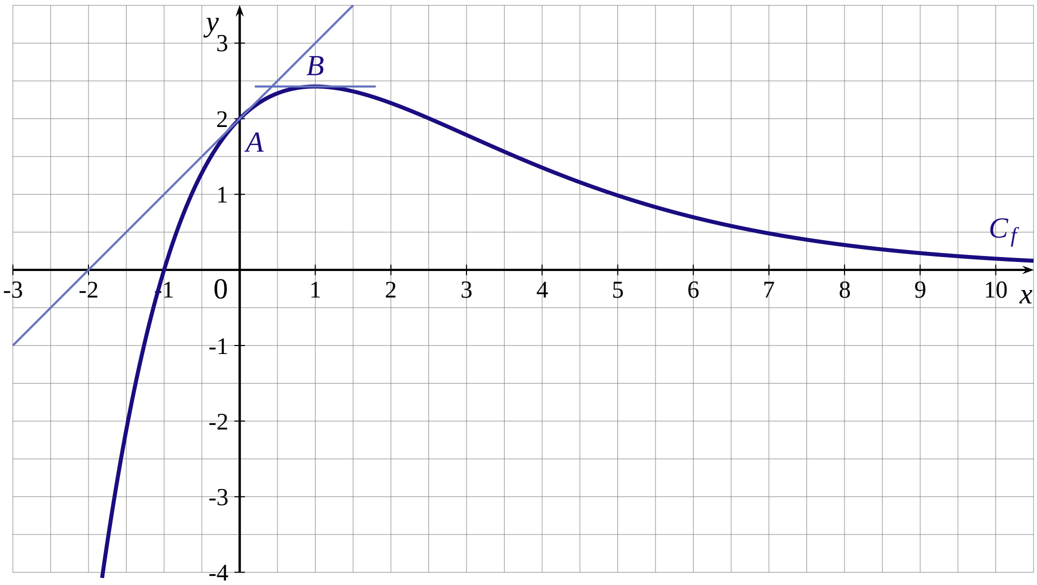
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x^2-14x-\dfrac{8}{x}$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\left(3x^2-4x-4\right)}{x^2}$
2. Étudier les variations de la fonction f.

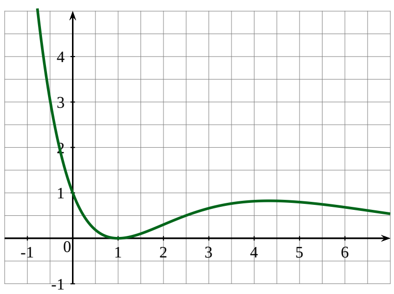
EXERCICE 2

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

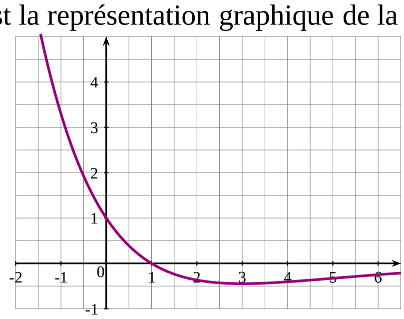
– la courbe coupe l'axe des ordonnées au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(-2;0)$;
– la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;



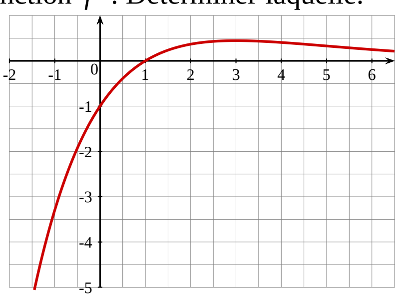
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

EXERCICE 3

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?
   b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
   c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
   b) L'équation $f(x)=1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
   a) L'équation $f'(x)=0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$
   b) $f'(-2)\times f'(0)\leqslant 0$
   c) $f'(-2)\times f'(3)\leqslant 0$

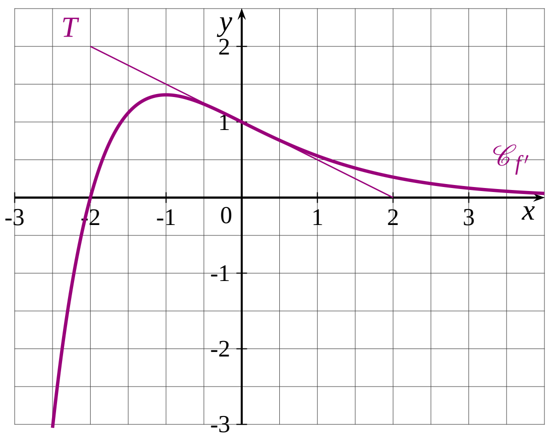
EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, tracer, dans un repère du plan, une courbe pouvant représenter une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;3]$ et vérifiant les informations données

1. f est continue et décroissante sur $[-2;3]$, et l'équation $f(x)=1$ admet une infinité de solutions dans $[-2;3]$.
2. f est continue sur $[-2;3]$ n'est pas monotone sur $[-2;3]$, et l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[-2;3]$.
3. f est continue sur $[-2;3]$ avec $f(-2)=3$, $f(3)=-1$ et l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dans $[-2;3]$.
4. f n'est pas continue sur $[-2;3]$ et pour tout réel k compris entre $f(-2)$ et $f(3)$ l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[-2;3]$.

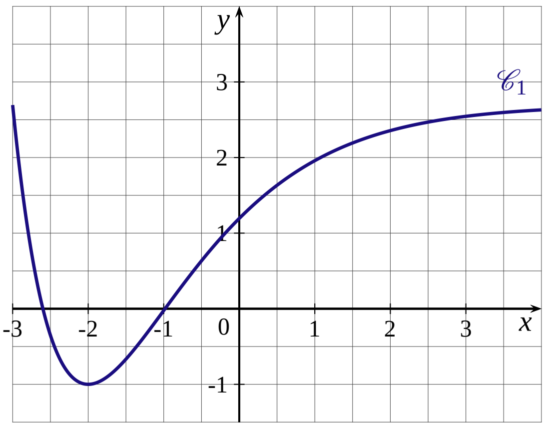
EXERCICE 5

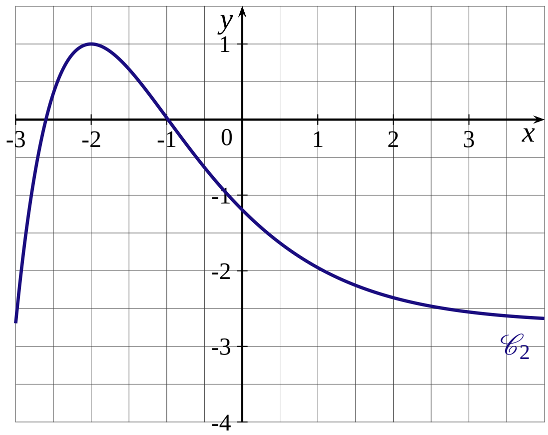
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathscr{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

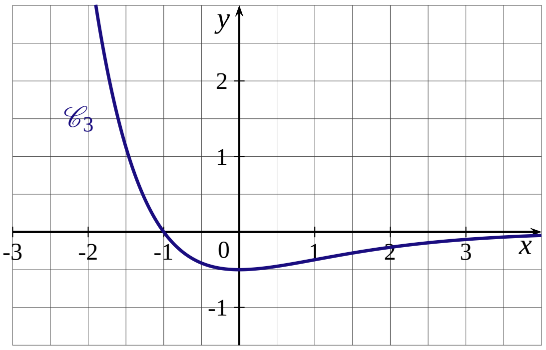


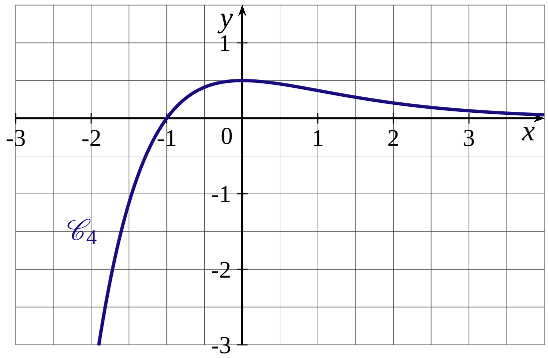
1. Par lecture graphique :
   a) Résoudre $f'(x)=0$.
   b) Résoudre $f''(x)=0$.
   c) Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.









a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.

b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x^3+6x^2+4x+1}{(x+1)^4}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a) Calculer $f'(x)$.

   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.

   c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, de chacune des solutions.

2. a) Étudier la convexité de la fonction f.

   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 7

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement brut des ménages en France de 2001 à 2011. (*Le taux d'endettement brut des ménages est défini comme les crédits au passif divisés par le revenu disponible brut des ménages*.)

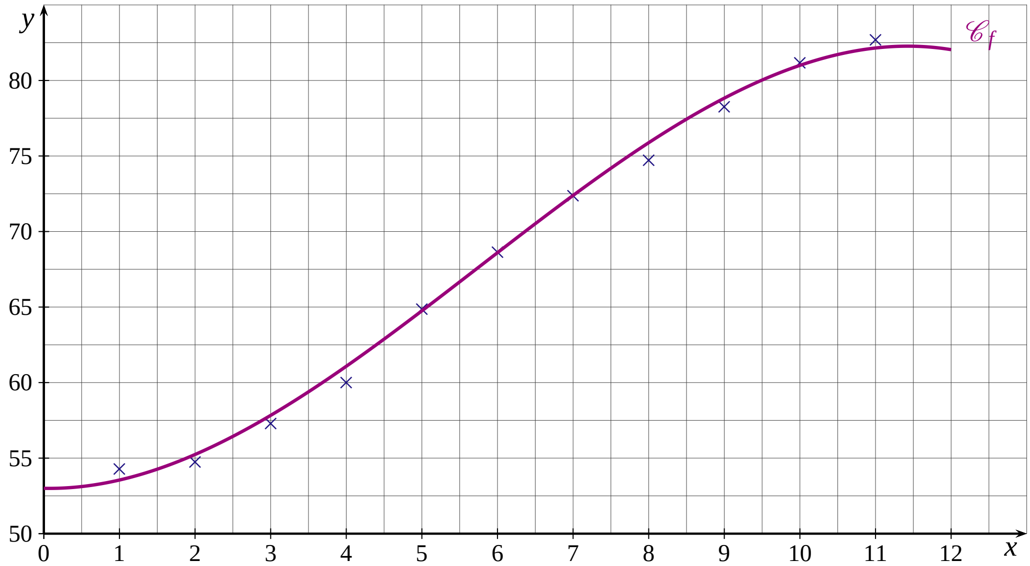
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Taux d'endettement y_i	54,28	54,75	57,30	60,00	64,86	68,63	72,37	74,73	78,27	81,18	82,68

Source : Eurostat

L'évolution du taux d'endettement brut des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;12]$ par :

$$f(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}69x^2 - 0{,}1x + 53$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
2. a) Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement brut est assimilé à la dérivée de la fonction f. Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement brut a-t-il commencé à diminuer ?
   b) Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Taux d'endettement y_i	54,28	54,75	57,30	60,00	64,86	68,63	72,37	74,73	78,27	81,18	82,68
% d'évolution		0,87	4,66								

   c) Le résultat obtenu à la question 2.a est-il cohérent avec les données recueillies ?

EXERCICE 8

PARTIE A

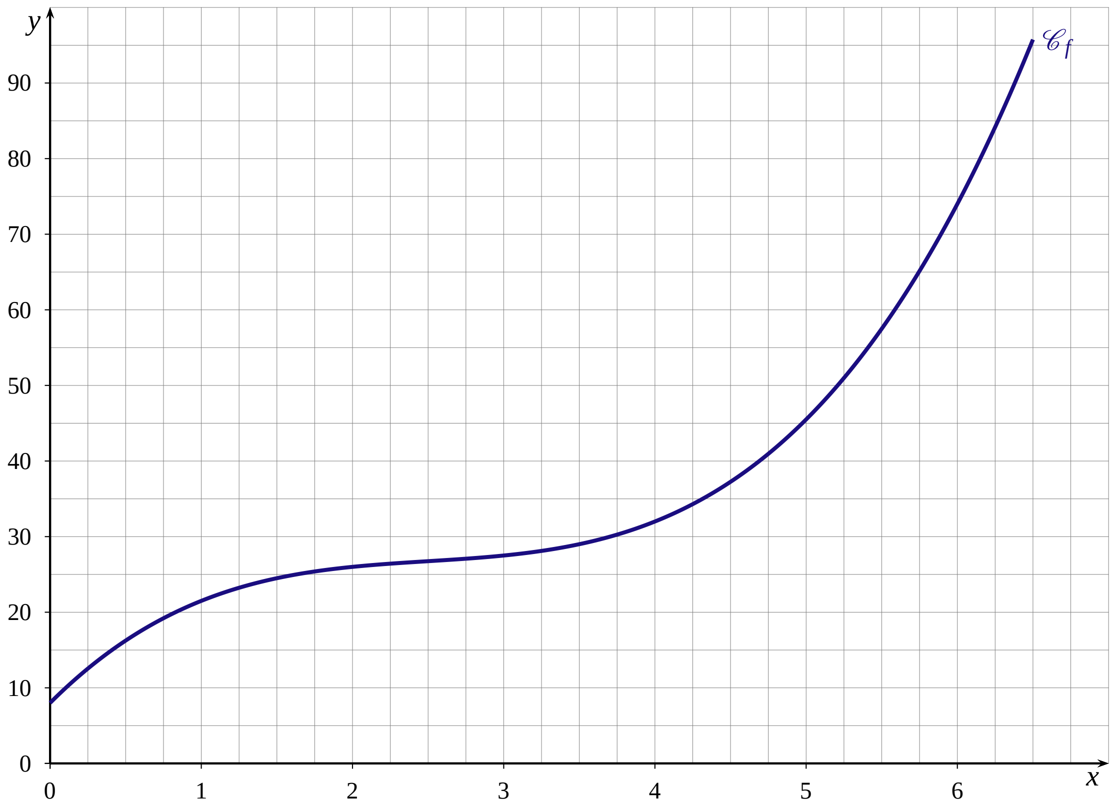
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.
La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0;6{,}5]$, est donnée en annexe ci-dessous :

ANNEXE



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
   a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0\,;\,6{,}5]$ par $B(x) = 13{,}25x - f(x)$.
   a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0\,;\,6{,}5]$.
   b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.
   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   a) Montrer $C'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+0{,}5x+2)}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction C.
   c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.