Cours de mathématiques Terminale ES - Suites géométriques et arithmético-géométriques

Retrouve d'autres **cours de Mathématiques** sur le sujet "Suites"
- Savoir utiliser la calculatrice pour rechercher un seuil

Objectif(s)

• Reconnaître et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée.
• Connaître la formule donnant 1 + q + … + q^n avec $q \neq 1$.
• Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison strictement positive.
• Étant donné une suite (q^n) avec 0 < q < 1, mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel q^n est inférieur à un réel a positif donné.
• Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite arithmético-géométrique.

Les suites géométriques servent de « modèle » à la description de très nombreux phénomènes de la vie courante, en économie, sciences humaines, biologie, physique …
Chaque fois que l'on utilise des pourcentages répétitifs, des situations où les résultats sont proportionnels à chaque résultat précédent, on est dans le cas d'une **suite géométrique**.

Exemple : de 2000 à 2012 la population d'une ville a augmenté de 3 %. Sachant que la population de l'an 2000 était de 210 000 habitants, quelle devrait être la population de l'an 2012 de cette ville ?

Utiliser le **coefficient de proportionnalité noté k** tel que : $k=1+\frac{t}{100}=1+\frac{3}{100}=1{,}03$.

Pour passer d'une année à l'autre, il faut donc multiplier le nombre d'habitants par 1,03. D'où le nombre d'habitants que l'on doit constater en 2012 : $210000\times 1{,}03^{12}=299410$ (arrondi à l'unité près).

La population réelle étant de 300 000 habitants en 2012, **le modèle proposé est considéré comme validé par l'observation**, on suppose que pour les 20 prochaines années, l'augmentation suivra la même règle.

Combien d'habitants devraient habiter cette ville en 2032 ? Nombre d'habitants auquel on doit s'attendre en 2032 : $300000\times 1{,}03^{20}=541833$ (arrondi à l'unité près).

1. Définition et propriétés

a. Définition

Soit q un réel strictement positif $q\in\mathbb{Q}^*$.

Une suite géométrique est une suite de nombres pour laquelle, à partir d'un premier terme, chaque terme est obtenu **en multipliant** le terme précédent toujours par le même nombre, strictement positif. Le nombre multiplié est appelé **raison**.
D'après la définition : $u_{n+1}=q\times u_n$, q étant la raison de la suite, on a : 0 < q.

Exemple : On place 530 € au taux d'intérêt composé de 3,25 % annuel (l'intérêt acquis à chaque période est ajouté au capital). L'intérêt ajouté chaque année est différent. Il faut utiliser le **coefficient multiplicateur** qui vaut : $k=1+\frac{t}{100}=1+\frac{3{,}25}{100}=1{,}0325$.

Chaque année on multiplie par le même nombre (le **CM**), c'est une suite géométrique.
On pose u_0 = 530 et pour chaque année n, $u_{n+1}=q\times u_n$ le **capital** obtenu après n années.
On définit ainsi une **suite géométrique de premier terme** u_0 = 530 **et de raison** q = 1,0325.

Remarque : les suites géométriques sont notées quelques fois(V_n) .

b. Propriétés

• $u_n=q^n\times u_0$, ce qui permet de calculer facilement l'un des termes de la suite, u_0 étant donné.

Par exemple dans le cas précédent, le capital obtenu après cinq années est de :
$u_5 = q^5 \times u_0 = 1{,}0325^5 \times 530 = 621{,}91$ (arrondi à 10^{-2} près).

• $u_n = q^{n-1} \times u_1$. Attention, parfois on préfère commencer une suite par u_1 et non par u_0. Appliquer cette formule dans le cas où le premier terme donné est u_1.

• $u_n = q^{n-p} \times u_p$. De même, si u_0 (ou u_1) n'est pas donné, appliquer cette formule dans le cas où le terme connu est u_p.

2. Variations

a. Variations d'une suite géométrique

• Pour $0 < u_0$:

Si $0 < q < 1$, la suite est **strictement décroissante** (elle est strictement monotone).
Si $1 < q$, la suite est **strictement croissante** (elle est strictement monotone).

• Pour $u_0 < 0$:

Si $0 < q < 1$, la suite est **strictement croissante** (elle est strictement monotone).
Si $1 < q$, la suite est **strictement décroissante** (elle est strictement monotone).

Remarques

• Si $q = 1$ la suite est **constante**, chaque terme vaut u_0.
• Si $q = 0$ la suite est **constante au-delà de u_0**, tous les termes sont nuls.
• Si $q < 0$ la suite est **alternée**, un terme positif, le suivant négatif.

b. Variations relatives

Pour une suite géométrique non-nulle , le **rapport** $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ est **constant** (ce que l'on apprend sous la forme valeur finale moins valeur initiale sur valeur initiale). C'est le pourcentage (en valeur décimale) de variation de la valeur. Il suffit de multiplier par 100 pour obtenir le pourcentage (en %).

3. Somme des termes d'une suite géométrique

a. Somme des termes pour q différent de 0

Pour $q \neq 0,\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple : un objet rare coûte 100 000 €. Chaque fois que l'on achète l'un de ces objets, il augmente du dixième de sa valeur précédente. Les calculs étant établis en centaines de milliers d'euros, combien faut-il dépenser pour en acheter 8 ?

Prix du premier objet 1, pour chaque nouvel achat il faut dépenser 10 % en plus, c'est-à-dire multiplier le prix précédent par q = 1,1 (le coefficient multiplicateur).

On cherche la somme $1 + q + q^2 + \ldots + q^7 = \frac{1 - q^{7+1}}{1 - q} = \frac{1 - 1{,}1^8}{1 - 1{,}1} = 11{,}435888$ (en centaines de milliers d'euros).

b. Somme des termes pour q différent de 1

La somme des n+1 termes consécutifs d'une suite géométrique avec $q \neq 1$ est **le nombre S_n** tel que : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ car :
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple : Pour creuser un puit, un puisatier demande 20 € pour le premier mètre, 22 € pour le deuxième, 24,20 € pour le 3ème, et pour chaque mètre creusé supplémentaire, 10 % de plus que pour le précédent.

À combien revient le creusement d'un forage de 80 mètres ? Attention, il faut additionner chacun des prix par nouveau mètre creusé.

C'est une suite géométrique, $u_1 = 20$ et $q = 1{,}1$.
On remarquera que la suite commence avec u_1 et non u_0. Le deuxième mètre c'est u_2, ce qui est plus pratique pour la compréhension du problème.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 20 \times \frac{1 - q^{80}}{1 - q} = 409480\ euros$$

Remarques

• Si la suite commence par u_1, la formule précédente devient

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

• Si q = 1, la suite est constante et $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1) \times u_0$.

4. Limite d'une suite géométrique et recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

a. Limite d'une suite géométrique

• **Pour 0 < q < 1**, la suite géométrique a pour limite 0 quand n tend vers l'infini : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On comprend que multiplier un nombre positif par un nombre strictement compris entre 0 et 1 c'est obtenir un nombre plus petit. Et le faire de nombreuses fois c'est se rapprocher de 0.

• **Pour 1 < q**, la suite géométrique a pour limite $+\infty$ quand n tend vers l'infini : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On comprend que multiplier un nombre positif par un nombre strictement supérieur à 1 c'est obtenir un nombre plus grand. Le faire de nombreuses fois c'est obtenir un très grand nombre.

• **Pour q = 1**, la suite géométrique est **constante** y compris quand n tend vers l'infini : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

En exemple, on peut remarquer que dans l'exercice précédent, les sommes payées deviennent de plus en plus grandes (car 1 < q). Cette somme devient rapidement infiniment plus élevée que les moyens que l'on peut accorder pour un particulier, une société, une commune ou un état (à 162 mètres, on dépasse le milliard d'euro !).

b. Algotithme, recherche d'un seuil

Exemple : La vente d'un produit baisse de 3 %. Son fabriquant décide d'en arrêter la fabrication lorsque le nombre d'objets vendus deviendra inférieur à la moitié des ventes actuelles.

Dans combien de temps s'arrêtera la fabrication de cet objet ?

97 % du nombre d'objets vendus l'année précédente, sont vendus chaque nouvelle année.

Soit u_0 le nombre d'objets vendus cette année. Le coefficient multiplicateur est k = 0,97.

On a $u_1 = 0{,}97u_0$, puis $u_2 = 0{,}97^2u_0$, et $u_n = (0{,}97^n)u_0$.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq \frac{1}{2}u_0$, c'est-à-dire $0{,}97^n \times u_0 \leq \frac{u_0}{2} \Leftrightarrow 0{,}97^n \leq \frac{1}{2}$.

On pourrait essayer de trouver le résultat par tâtonnement. Il est préférable de construire un petit programme sur calculatrice :

<table>
<tr><td colspan="2">Algorithme :
Variables : I un entier (compteur)
Début
Initialiser I par 0
Répéter
Incrémenter I
Jusqu'à ce que 0,97n ≤ 1/2
Afficher I
Fin</td><td>Cet algorithme comporte une boucle itérative et conditionnelle.</td></tr>
<tr><td>TI-82 stat (83-84)</td><td>Casio Graph 35+</td><td>TI-Nspire CAS</td></tr>
<tr><td>PROGRAM:SEUIL1
:0→I
:Repeat .97^I≤.5
:I+1→I
:End
:Disp I</td><td>0→I↵
While (.97)^I>.5↵
I+1→I↵
WhileEnd↵
I◢</td><td>1.1 1.2 1.3 Seuil1
seuil1
Define seuil1()=
Prgm
i:=0
While (0.97)^i>0.5
i:=i+1
EndWhile
Disp i
EndPrgm</td></tr>
</table>

Remarques

• Une fois l'algorithme traduit en programme sur la calculatrice, il est facile de le transformer pour obtenir un autre seuil, d'utiliser un autre taux de pourcentage. Par exemple, pour un taux de 1 % on trouvera 69 périodes.

• Il est très simple de rajouter quelques instructions pour que le seuil et le taux soient

• Il est très simple de rajouter quelques instructions pour que le seuil et le taux soient demandés dans l'exécution du programme.

• La boucle à utiliser est la boucle « répéter ». Sur la *Graph35+* cette instruction n'existe pas, on utilise alors, avec un petit changement, la boucle « tant que ». De même sur la *TI-Nspire CAS*, cette boucle existe en LUA à partir du logiciel ordinateur. Sur la calculatrice on utilise aussi la boucle « tant que ».

5. Suite arithmético-géométrique

a. Préambule

Les suites arithmétiques ou géométriques ont l'avantage de **pouvoir se calculer facilement** (relation de récurrence, formules simples) pour tout terme choisi. Les suites de la forme $\mathbf{u_{n+1} = au_n + b}$ (a, b réels) peuvent **se transformer en suites géométriques**. Il est alors assez simple de donner des résultats de calculs.

b. Définition

Une suite arithmético-géométrique (U_n) est une suite qui à partir d'un premier terme a_0, donne pour chaque terme consécutif et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

Remarque : pour le baccalauréat, si on nous donne une suite (U_n), il est préférable de passer à une suite géométrique. Après quelques calculs on obtient des résultats sur la suite arithmético-géométrique.

Suites géométriques et arithmético-géométriques 4/5 basé sur 67 votes.