

I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.

Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.

Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?

Notons :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage » ;

Nous avons $p(A \cup B) = 0,12$, $p(A) = 0,06$ et $p(B) = 0,08$. Or

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{d'où} \quad p(A \cap B) = 0,08 + 0,06 - 0,12 = 0,02$$

$$\text{Donc } p_B(A) = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;

Nous avons $p(V) = 0,85$ et $p_V(M) = 0,02$.

La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0,02 \times 0,85 = 0,017$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

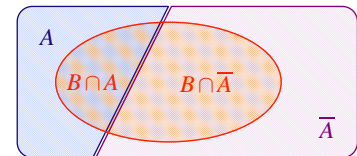
Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$



2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

- Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire \bar{A} forment une partition de Ω .
- Si les évènements A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

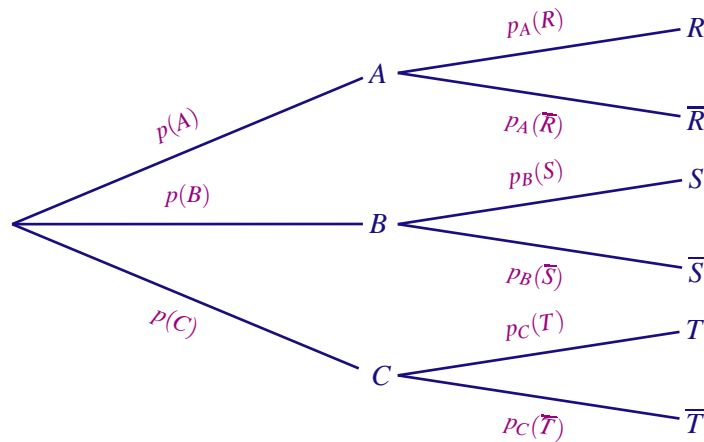
Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) + p_C(S) \times p(C) \\ &= 0,15 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,1 = 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S, \bar{S}\}$ est une partition de l'évènement B .
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des événements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

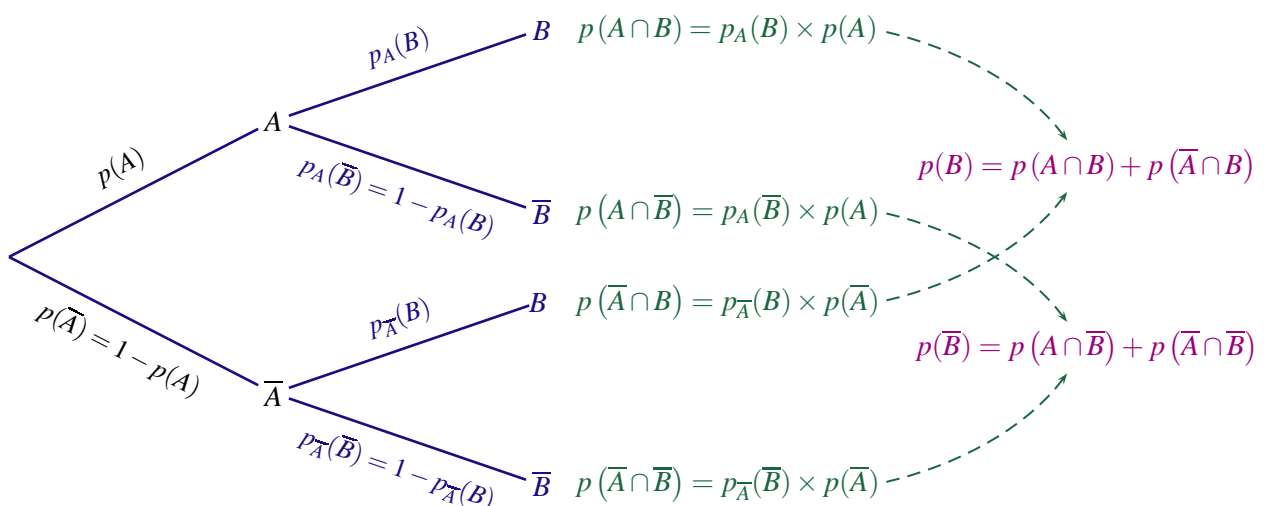
RÈGLES

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet événement.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

PROBABILITÉS COMPOSÉES

PROBABILITÉS TOTALES



IV ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

3 LOI BINOMIALE

SCHÉMA DE BERNOULLI

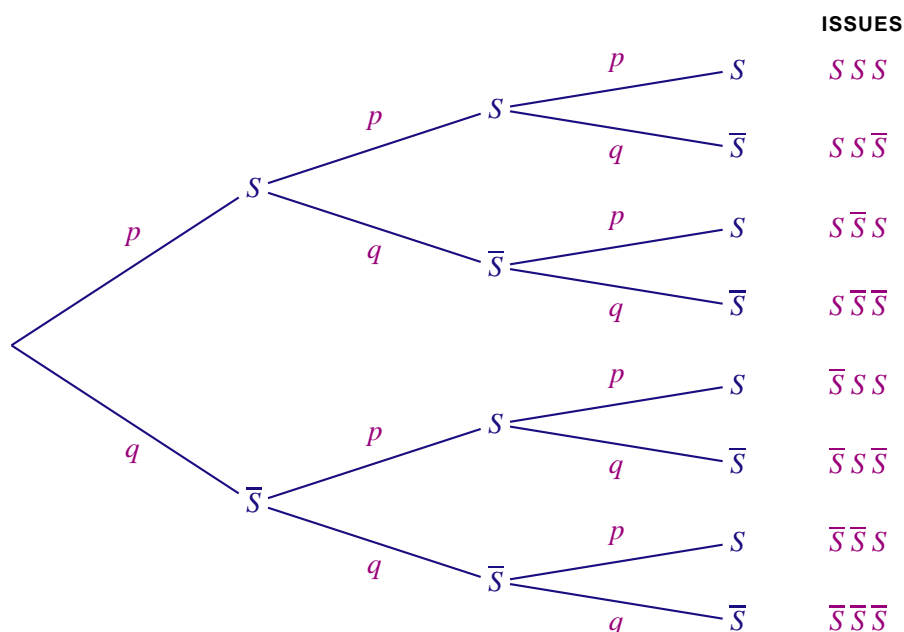
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes s'appelle un schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.

La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'échec est $p(\bar{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS; SS\bar{S}; S\bar{S}S; \bar{S}SS; S\bar{S}\bar{S}; \bar{S}S\bar{S}; \bar{S}\bar{S}S; \bar{S}\bar{S}\bar{S}\}$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

On répète successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès

LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p .

Cette loi est notée $\mathcal{B}(n; p)$. Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

EXEMPLE

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathcal{B}(4; p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1 - p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4

EXERCICE 1

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 12 % des bovins ont la maladie M ;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
 - a) pour un animal d'être malade si il réagit au test ;
 - b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

EXERCICE 2

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades ;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif ;
- 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4

D'après une étude de la direction du tourisme concernant l'ensemble des résidents Français :

Est défini comme "voyage", tout départ du domicile, retour à celui-ci avec au moins une nuit passée en dehors.

Ces voyages se décomposent en "séjours" de deux sortes :

- Séjours courts définis par le fait d'avoir passé entre une nuit et trois nuits en lieu fixe ;
- Séjours longs définis par le fait d'avoir passé au moins quatre nuits en lieu fixe.

Le mode d'hébergement d'un séjour peut être marchand (hôtel, camping, gîte etc ...) ou non marchand.

On considère que sur l'ensemble des résidents Français qui ont effectué au moins un voyage :

- Les séjours courts représentent 55% de l'ensemble des séjours ;
- 43% des séjours longs se font en hébergement marchand ;
- 36,4% de l'ensemble des séjours se font en hébergement marchand.

On interroge au hasard, un résident Français ayant effectué un voyage et on note :

- L : « l'évènement la personne a fait un séjour long » ;
- M : l'évènement « le mode d'hébergement du séjour est marchand » ;

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long en hébergement marchand.
b) En déduire la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour court en hébergement marchand.
4. Un résident Français effectue un séjour court, quelle est la probabilité qu'il choisisse un hébergement marchand ?
5. On interroge au hasard, un résident Français ayant choisi un hébergement non marchand au cours de son séjour. Quelle est la probabilité que le séjour de cette personne soit un séjour long ?

EXERCICE 5

Une entreprise fabrique un article dans deux unités de production notées A et B. L'unité A, assure 60% de la production.

On a constaté que :

- 3% des pièces provenant de l'unité A présentent un défaut de fabrication ;
- 8% des pièces provenant de l'unité B présentent un défaut de fabrication.

1. On prélève un article au hasard, et on note :
 - A l'évènement « la pièce provient de l'unité A » ;
 - B l'évènement « la pièce provient de l'unité B » ;
 - D l'évènement « la pièce présente un défaut », \overline{D} l'évènement contraire.
 - a) Calculer la probabilité qu'un article présente un défaut et provienne de l'unité A.
 - b) Montrer que la probabilité qu'un article présente un défaut est égale à 0,05.
2. L'entreprise envisage de mettre en place un test de contrôle de ces articles avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 82% des articles défectueux, mais il élimine également à tort 4% des articles non défectueux. Les articles non éliminés sont alors mis en vente.
On prend au hasard un article fabriqué et on note V l'évènement « l'article est mis en vente ».
 - a) Calculer $p(V \cap D)$ et $p(V \cap \overline{D})$. En déduire que la probabilité qu'un article fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,921.
 - b) L'entreprise souhaite qu'il y ait moins de 1% des articles vendus défectueux. Ce contrôle permet-il d'atteindre cet objectif ?

EXERCICE 6

Un atelier produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut A et le défaut B, à l'exclusion de tout autre défaut.

On a constaté que, parmi les pièces produites, 28 % ont le défaut A, 27 % ont le défaut B, et 10 % ont les deux défauts.

1. On choisit au hasard une des pièces produites. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. On admet que 80 % des pièces qui n'ont qu'un seul des deux défauts sont réparables, et que 40 % des pièces qui ont les deux défauts sont réparables. On choisit une pièce au hasard et on note :
 - D_1 l'évènement : " La pièce a un seul défaut " ;
 - D_2 l'évènement : " La pièce a deux défauts " ;
 - R l'évènement : " La pièce est réparable ".
 - a) Montrer que la probabilité de l'évènement : " La pièce choisie est réparable " est $p(R) = 0,32$.
 - b) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle n'ait qu'un seul défaut.
3. On choisit au hasard successivement cinq pièces. On suppose que le nombre de pièces est suffisamment important pour que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.
Calculer la probabilité pour que, sur les 5 pièces choisies, au moins trois pièces soient réparables.

EXERCICE 7

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 0,2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 0,2$.

- a) Dans le plan muni d'un repère orthogonal, utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,8x + 0,2$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que la limite de la suite (u_n) .
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $v_n = u_n - 1$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_n en fonction de n .
b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
c) À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 0,99$

PARTIE B

Une entreprise a chargé un centre d'appel de démarcher des clients potentiels.

On a constaté qu'une personne contactée sur cinq accepte un rendez-vous avec un commercial.

Le centre d'appel contacte n personnes successivement et de manière indépendante. On note p_n la probabilité qu'au moins une des n personnes contactées accepte un rendez-vous.

- Dans le cas où $n = 5$, calculer la probabilité qu'aucune des cinq personnes contactées n'accepte un rendez-vous, puis en déduire p_5 .
- Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faut démarcher pour que la probabilité qu'au moins une des personnes contactées accepte un rendez-vous soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 8

(D'après sujet bac Antilles, Guyane 2013)

Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes, et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.

Le responsable constate que 28 % des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48 % pour un ordinateur portable. Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur achète un unique produit entre tablette, ordinateur portable, ordinateur fixe, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.

Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5 % ont souscrit une extension de garantie et, parmi ceux ayant acquis un ordinateur fixe, 12,5 % ont souscrit une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs. On note :

T l'évènement « l'acheteur a choisi une tablette » ;

M l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur portable » ;

F l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe » ;

G l'évènement « l'acheteur a souscrit une extension de garantie ».

On note aussi \overline{F} , \overline{M} , \overline{T} , \overline{G} les évènements contraires.

- Construire un arbre pondéré en indiquant les données de l'énoncé.
- Calculer $P(F)$ la probabilité de l'évènement F , puis $P(F \cap G)$.
- On sait de plus que 12 % des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie.
Déterminer la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.
- Montrer que $P(G) = 0,164$.
- Pour tous les appareils, l'extension de garantie est d'un montant de 50 euros. Quelle recette complémentaire peut espérer le responsable du rayon lorsque 1 000 appareils seront vendus ?

EXERCICE 9

(D'après sujet bac Centres Étrangers 2013)

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.

On sait que :

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».

L'évènement contraire de l'évènement A sera noté \bar{A} .

On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Définir par une phrase l'évènement $E \cap V$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.
5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.
Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à 0,001 près.
6. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu 0,80 euro sur l'exploitation agricole et 3,40 euros dans des supermarchés.
Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

EXERCICE 10

(D'après sujet bac Liban 2013)

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

- C : « l'heure est creuse »
- T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,

- 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
 - 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.
5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X .
 6. Déterminer l'espérance de X .
 7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

EXERCICE 11

(D'après sujet bac Polynésie 2013)

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. a) Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?
b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.
c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.
b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millièème.
3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

Formule « avion + hôtel » : 390 €
Formule « train + hôtel » : 510 €
Option « visites guidées » : 100 €

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

EXERCICE 12

(D'après sujet bac Asie 2013)

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de terminale de séries générales selon la série et le sexe, à la rentrée 2010.

	Filles	Garçons
Littéraire (L)	40 872	11 080
Sciences économiques et sociales (ES)	63 472	40 506
Scientifique (S)	71 765	87 031
Total	176 109	138 617

Source : Ministère de l'Éducation nationale, DEPP

On choisit au hasard un élève de terminale de série générale. On note :

F : l'évènement « L'élève choisi est une fille ».

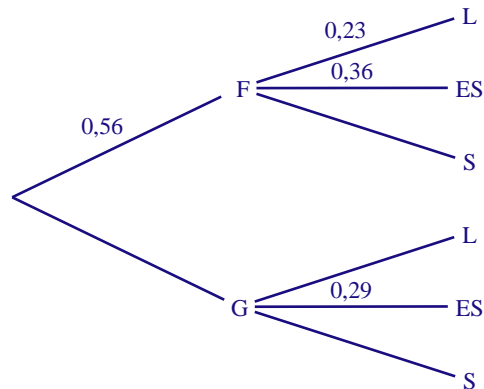
G : l'évènement « L'élève choisi est un garçon ».

L : l'évènement « L'élève choisi est en série Littéraire ».

ES : l'évènement « L'élève choisi est en série Sciences Économiques et Sociales ».

S : l'évènement « L'élève choisi est en série Scientifique ».

1. En utilisant les effectifs inscrits dans le tableau :
 - a) Sachant qu'on interroge un garçon, calculer la probabilité qu'il soit en série Littéraire.
 - b) Calculer $p(S)$.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



3. En utilisant l'arbre complété et les propriétés des probabilités :
 - a) Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que l'élève choisi soit un élève de la série Sciences Économiques et Sociales est égale à 0,33.
 - b) Calculer $p_{ES}(F)$.
4. On choisit successivement et au hasard 10 élèves de terminale de série générale. On admet que le nombre de lycéens est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise. Calculer la probabilité de choisir exactement trois élèves de la série ES.

EXERCICE 13

(D'après sujet bac France métropolitaine La Réunion Septembre 2013)

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.

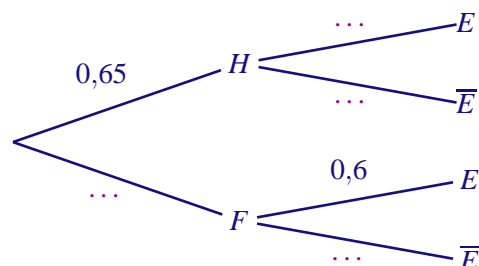
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.

On admet que ces proportions restent stables.

PARTIE A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et \bar{E} l'évènement contraire de E .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2. a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
- b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.
- c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
(On donnera le résultat arrondi au centième.)

PARTIE B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (On arrondira le résultat au centième).
3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. (On donnera une valeur arrondie au dix millième).

EXERCICE 14

(D'après sujet bac Pondichéry 2013)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.
4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.
 - a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
 - b) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .
 - c) Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.