

ACTIVITÉ 1

M^r et M^{me} X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains ont été échangées.

Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.

Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.

M^r X constate que les autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

Combien de poignées de mains M^r et M^{me} X ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

ACTIVITÉ 2

On a un groupe de 20 personnes. Si deux personnes se connaissent, elles se serrent la main. Si deux personnes ne se connaissent pas, elles ne se serrent pas la main.

Que pensez vous de la conjecture suivante : « on peut trouver dans le groupe deux personnes qui serrent le même nombre de mains » ?

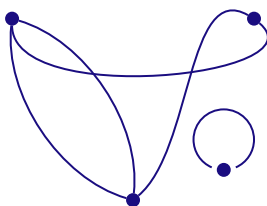
ACTIVITÉ 3

Comment tracer cinq segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement trois autres ?

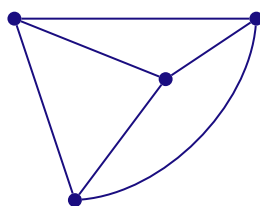
I GRAPHES PREMIÈRES DÉFINITIONS

De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets.

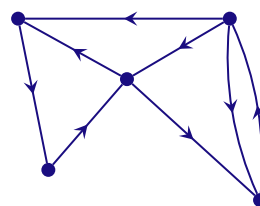
Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.



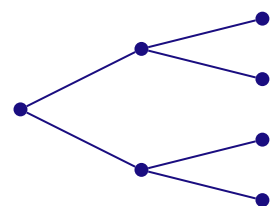
Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3



Graphe G_4

1 DÉFINITIONS

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G , une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les *extrémités* de a .

Les sommets x_i et x_j sont alors *adjacents* dans le graphe G et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a .

Lorsque les deux extrémités sont confondues ($x_i = x_j$) l'arête s'appelle une *boucle*.

Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

ORDRE D'UN GRAPHE

On appelle ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe.

Par exemple :

les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 ; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

GRAPHE SIMPLE

Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

GRAPHE ORIENTÉ

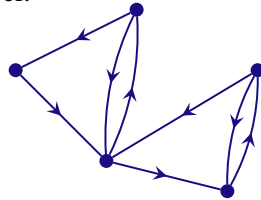
Un graphe peut être orienté une arête est alors appelée un *arc*. Un arc est défini par un couple ordonné (x_i, x_j) de sommets.

REMARQUE

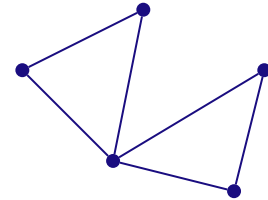
À tout graphe orienté, on peut associer un graphe simple.

Par exemple sur un plan de ville où sont indiquées les rues en sens uniques, un piéton ne tiendra pas compte de l'orientation pour se déplacer.

Au graphe orienté



on associe le graphe simple

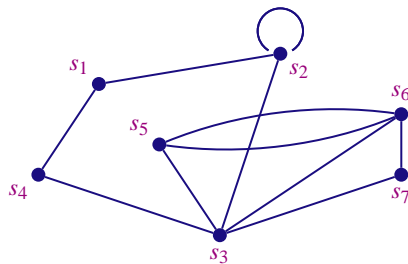


SOUS GRAPHE

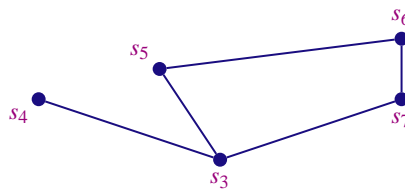
Il arrive que dans certains problèmes on ait besoin de considérer une partie d'un graphe :

$G' = (S', A')$ est un sous-graphe de $G = (S, A)$ si S' est un sous ensemble de S et A' un sous ensemble de A tel que les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S' .
Si A' est constitué de toutes les arêtes de A ayant pour extrémités les sommets de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le sous-graphe engendré par S' .

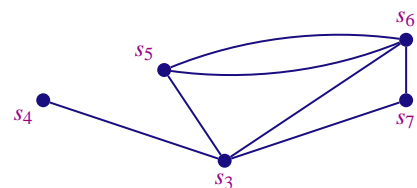
EXEMPLE



Graphe G



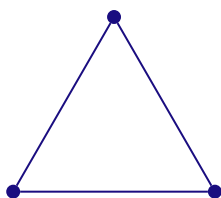
G_1 est un sous graphe de G



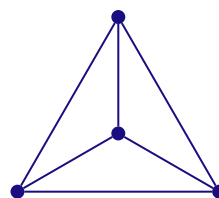
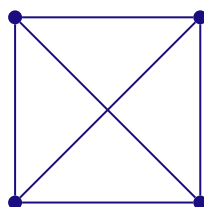
G_2 est le sous graphe de G
engendré par $\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$

GRAPHE COMPLET

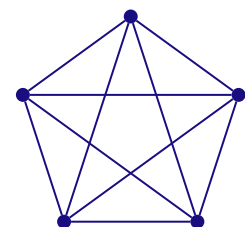
Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



K_3



Deux représentations du K_4



K_5

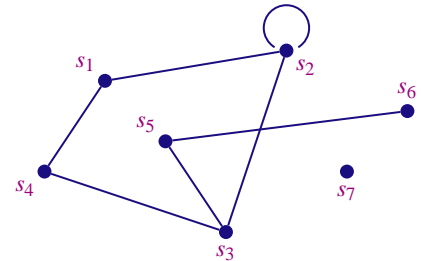
2 DEGRÉ D'UN SOMMET

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$\begin{aligned} d(s_1) &= 2 \\ d(s_2) &= 4 \\ d(s_3) &= 2 \\ d(s_4) &= 3 \\ d(s_5) &= 2 \\ d(s_6) &= 1 \\ d(s_7) &= 0 \end{aligned}$$



DEGRÉ D'UN SOMMET DANS UN GRAPHE ORIENTÉ

Soit s un sommet d'un graphe orienté G .

- On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

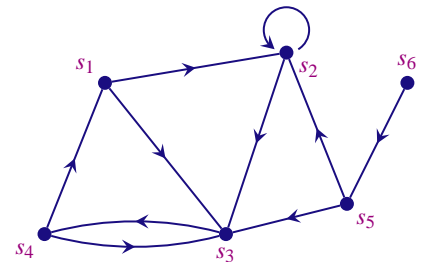
Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$\begin{aligned} d^+(s_1) &= 2 \text{ et } d^-(s_1) = 1 \text{ d'où } d(s_1) = 3 \\ d^+(s_2) &= 2 \text{ et } d^-(s_2) = 3 \text{ d'où } d(s_2) = 5 \\ d^+(s_3) &= 1 \text{ et } d^-(s_3) = 4 \text{ d'où } d(s_3) = 5 \\ d^+(s_4) &= 2 \text{ et } d^-(s_4) = 1 \text{ d'où } d(s_4) = 3 \\ d^+(s_5) &= 2 \text{ et } d^-(s_5) = 1 \text{ d'où } d(s_5) = 3 \\ d^+(s_6) &= 1 \text{ et } d^-(s_6) = 0 \text{ d'où } d(s_6) = 1 \end{aligned}$$



REMARQUE

Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.

Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

THÉORÈME

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.

Démonstration

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

COROLLAIRE

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.

Démonstration

Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.

$m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.
Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.
On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

PROPOSITION

Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.

Démonstration

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que : $0 \leq d(s) \leq n - 1$.

Supposons que les degrés des sommets soient différents.

Les degrés des n sommets sont les entiers $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ et il existe un sommet s_i de degré 0 et un sommet s_j de degré $n - 1$.

Or si $d(s_j) = n - 1$ cela signifie qu'il est adjacent à tous les sommets du graphe et en particulier au sommet s_i donc $d(s_i) \geq 1$

Ce qui est en contradiction avec $d(s_i) \geq 0$.

3 REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN GRAPHE

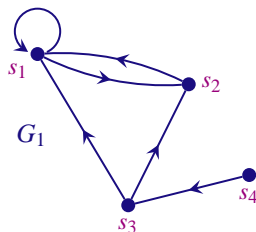
Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .

Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j .

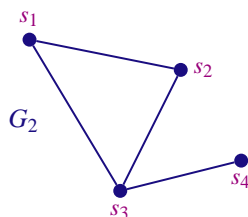
EXEMPLES

1.



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.



La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

REMARQUES

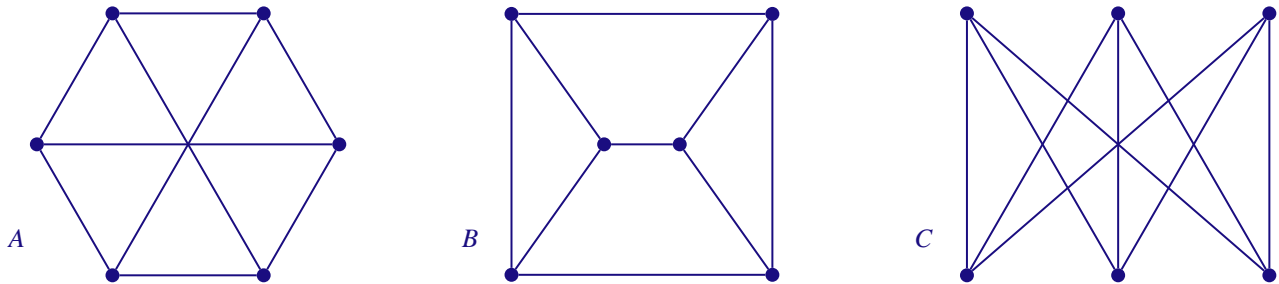
1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
3. La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.
4. La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.
 - La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre de successeurs du sommet s_i .
 - La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs du sommet s_i .

4 GRAPHES ISOMORPHES

Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre.

EXEMPLE

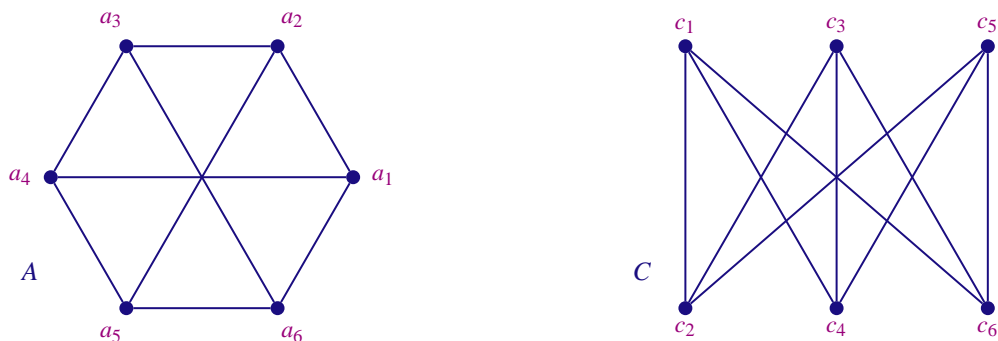
Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.

Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C . Donc B n'est pas isomorphe à A et C .

Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A et C sont isomorphes.

REMARQUES

- Le graphe B est *planaire* : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe *biparti* : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y .
Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

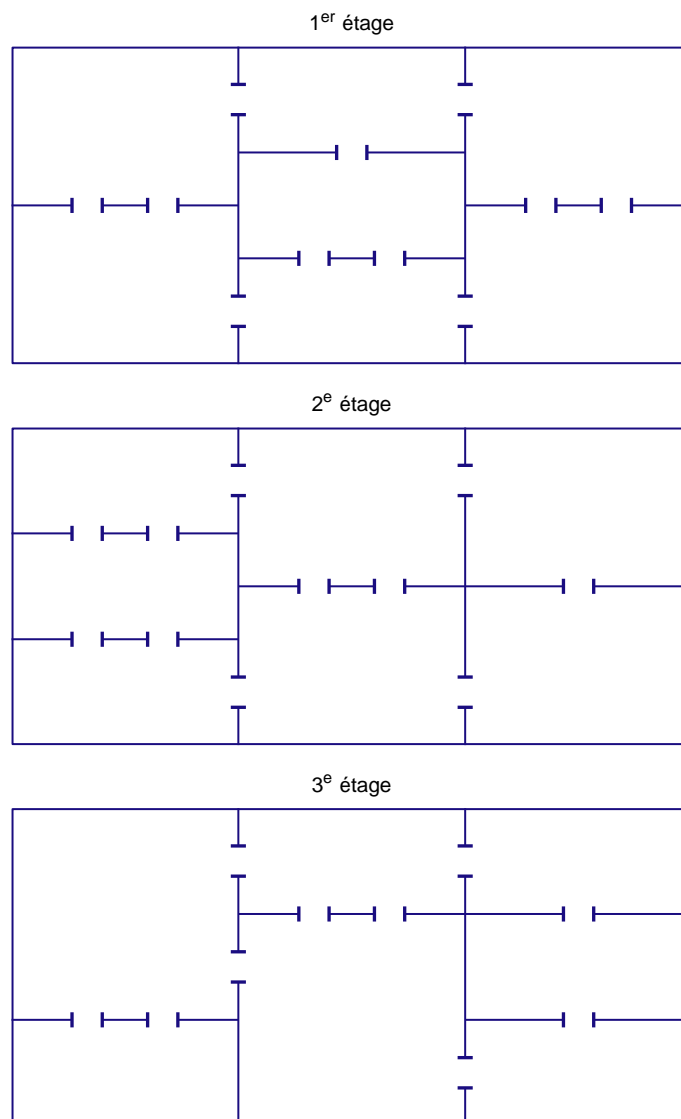
ACTIVITÉ 1

Voici le plan de trois étages d'un musée. À chaque étage, un visiteur se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

Pour chacun des étages :

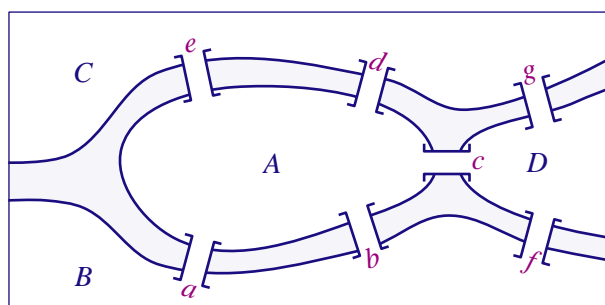
Est-il possible de faire le tour de l'étage en passant exactement une seule fois par chacune des portes ?

Dans ce cas, où faut-il placer les portes d'entrée et de sortie de l'étage pour que ce parcours reste possible ?



ACTIVITÉ 2

Voici un plan de la ville de Königsberg :



Est-il possible de se promener en ne passant qu'une seule fois sur chacun des sept ponts ?

II CHÂÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

1 DÉFINITIONS

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste. Le premier et le dernier élément de la liste sont les extrémités initiale et finale de la chaîne.

Si le graphe est simple, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

1. La *longueur d'une chaîne* est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
2. Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
3. Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
4. Une chaîne est *fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
5. Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composée d'arêtes toutes distinctes.

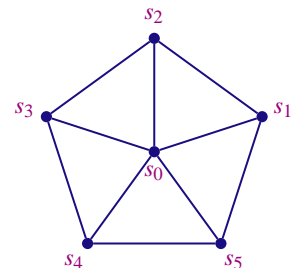
REMARQUE

Les définitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés. On parlera de *chaîne orientée* ou *chemin* et de *cycle orienté* ou *circuit*.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre :

- La chaîne $\{s_0; s_1; s_0; s_2; s_0; s_3; s_0; s_4; s_0; s_5; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_3; s_0; s_4; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_0; s_3; s_4; s_0; s_5; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



2 CHÂÎNES DE LONGUEUR DONNÉE

NOMBRE DE CHÂÎNES

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^n .

DISTANCE

Soit G un graphe ; si x et y sont deux sommets de G , la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y .

REMARQUES

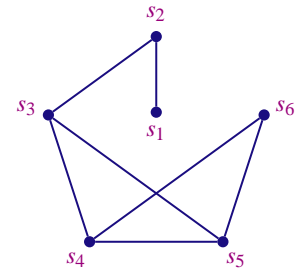
- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y , la distance de x à y est infinie.

DIAMÈTRE

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

EXEMPLE

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



On obtient les nombres de chaînes de longueurs données en calculant les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 chaînes fermées de longueur 2 d'origine le sommet s_3 , 5 chaînes de longueur 3 entre les sommets s_4 et s_6 et 2 chaînes de longueur 4 entre les sommets s_1 et s_6 .

La matrice des distances entre les différents sommets est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le diamètre du graphe est 4.

3 CONNEXITÉ

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .

Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

ALGORITHME

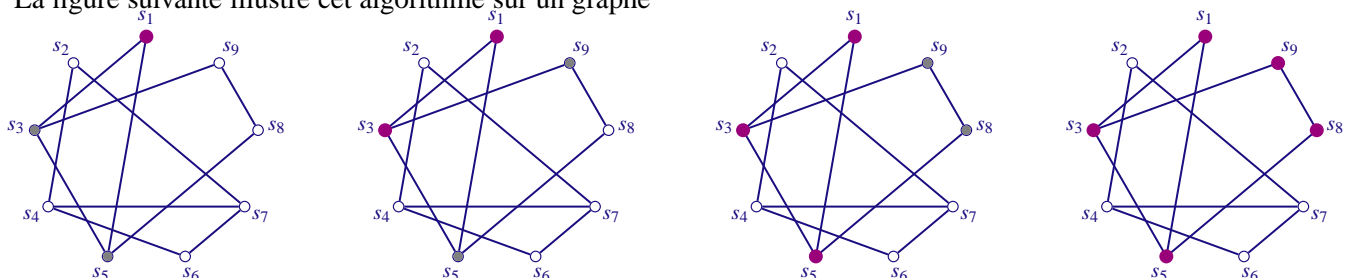
L'algorithme suivant permet de déterminer tous les sommets qui peuvent être atteints à partir d'un sommet.

Soit G un graphe et x un sommet de G :

Marquer provisoirement (*au crayon*) le sommet x ;
TANT_QUE des sommets sont provisoirement marqués **FAIRE**
 choisir un sommet y provisoirement marqué;
 marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués;
 marquer définitivement (*à l'encre*) y ;
FIN TANT_QUE

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu *la classe de connexité* du sommet x .

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2 .

4 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

Un cycle eulérien (*respectivement une chaîne eulérienne*) dans un graphe G est un cycle (*respectivement une chaîne*) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

THÉORÈME 1

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

Démonstration

Si le graphe possède 0 ou 1 sommet, la preuve est triviale, nous supposons donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.

Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet le cycle eulérien « entrant » dans le sommet doit « ressortir » et comme les arêtes du cycle ne peuvent être utilisées qu'une fois, chaque sommet est de degré pair.

Réciproquement :

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.

Comme G possède au moins deux sommets, tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe au moins un cycle dans G .

Formons un cycle C_1 dans G (chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes).

– Si C_1 contient toutes les arêtes du graphe alors G admet un cycle eulérien et le théorème est démontré.

– Dans le cas contraire, le sous graphe H de G défini par les arêtes non utilisées par C_1 a tous ses sommets de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet.

Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1 . Soit x_i un tel sommet.

Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_i .

En insérant dans le cycle C_1 à partir du sommet x_i le cycle C_2 , on obtient un cycle C'_1 . Si ce cycle contient toutes les arêtes de G , C'_1 est le cycle eulérien cherché.

Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

THÉORÈME 2

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne

Démonstration

Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair.

Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i .

Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j .

ALGORITHME

Les démonstrations précédentes permettent de construire une chaîne eulérienne dans un graphe connexe dont le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

```

SI deux sommets sont de degré impair ALORS
  | construire une chaîne simple  $C$  ayant pour extrémités ces deux sommets ;
FIN SI
SI tous les sommets sont de degré pair ALORS
  | construire un cycle  $C$  à partir d'un sommet quelconque ;
FIN SI
marquer les arêtes de  $C$ ;
TANT_QUE il reste des arêtes non marquées FAIRE
  | choisir un sommet  $x$  de  $C$ ;
  | SI il existe un cycle d'origine  $x$  ne contenant aucune des arêtes marquées ALORS
  |   | marquer les arêtes du cycle d'origine  $x$ ;
  |   | remplacer dans  $C$  le sommet  $x$  par le cycle d'origine  $x$ ;
  | FIN SI
FIN TANT_QUE
  
```

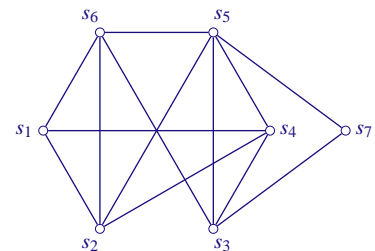
EXEMPLE

Le cycle $\{s_1; s_6; s_5; s_7; s_3; s_4; s_2; s_1\}$ contient tous les sommets du graphe G ci-contre.

Donc G est connexe.

Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5 .

Il existe une chaîne eulérienne commençant d'extrémités s_1 et s_5 .

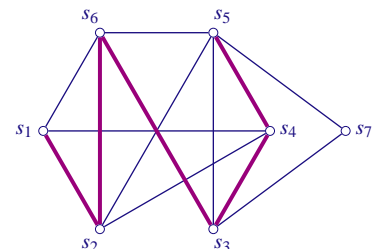


ÉTAPE 1

Les deux sommets de degré impair sont s_1 et s_5

On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets ;

$$C = \{s_1; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$



ÉTAPE 2

Le cycle simple $c_1 = \{s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_2 dans la chaîne C par le cycle c_1 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$

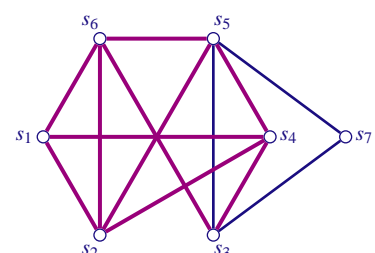
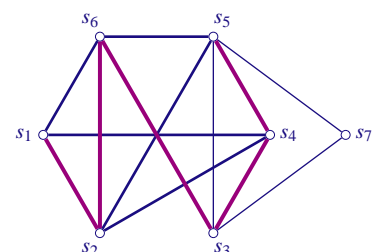
Il reste encore des arêtes non marquées, on recommence l'étape 2

Le cycle $c_2 = \{s_3; s_7; s_5; s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_7; s_5; s_3; s_4; s_5\}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.



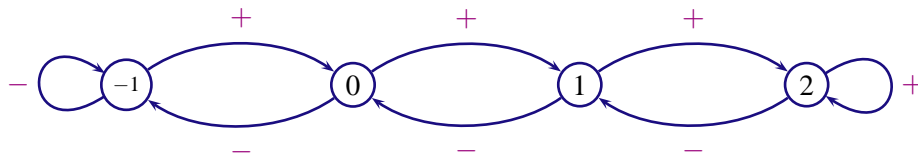
III GRAPHES ÉTIQUETÉS ET AUTOMATES

1 DÉFINITIONS

- Un alphabet A est un ensemble fini de symboles dont les éléments sont appelés des lettres.
Par exemple l'alphabet binaire contient deux lettres $\{0,1\}$
- Un mot sur l'alphabet A est une suite finie de lettres de A .
Par exemple *barbare*, *arbre* et *babbbar* sont des mots sur l'alphabet $\{a,b,e,r\}$
- Un graphe étiqueté est un graphe où chacune des arêtes est affectée d'une lettre de l'alphabet A .

EXEMPLE

Le graphe étiqueté ci-dessous, modélise le fonctionnement d'un monte-charge équipé de deux boutons qui permettent de monter ou de descendre d'un étage :



L'alphabet est $A = \{-; +\}$

Les états symbolisent les étages.

Les étiquettes symbolisent les transitions entre les états (*monter* ou *descendre* d'un étage)

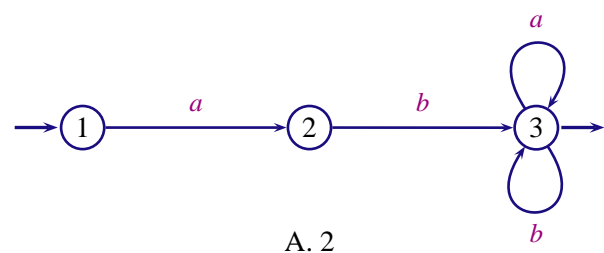
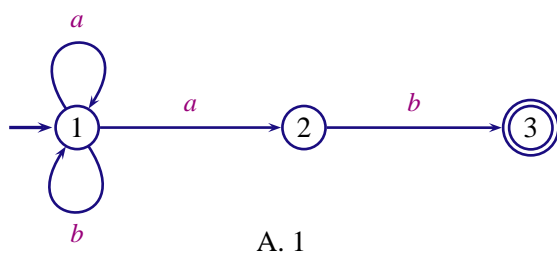
Le bouton $-$ est inactif au sous-sol et le bouton $+$ est inactif au deuxième étage.

2 AUTOMATE

DÉFINITION

Un automate est un graphe orienté étiqueté : les états sont les sommets et les transitions sont les arêtes étiquetées.

L'état initial est marqué par une flèche entrante ; un état final est, soit doublement cerclé (A. 1), soit marqué d'une flèche sortante (A. 2).



RECONNAISSANCE D'UN MOT

Un mot m est reconnu ou accepté par un automate s'il existe un chemin étiqueté par le mot m menant de l'état initial à un état final.

Par exemple :

l'automate A.1 accepte les mots finissant par ab ;

l'automate A.2 accepte les mots commençant par ab .

EXERCICE 1

Pour chacune des listes suivantes, déterminer s'il existe un graphe simple admettant cette liste pour liste des degrés des sommets. S'il existe un tel graphe, le dessiner, sinon expliquer pourquoi.

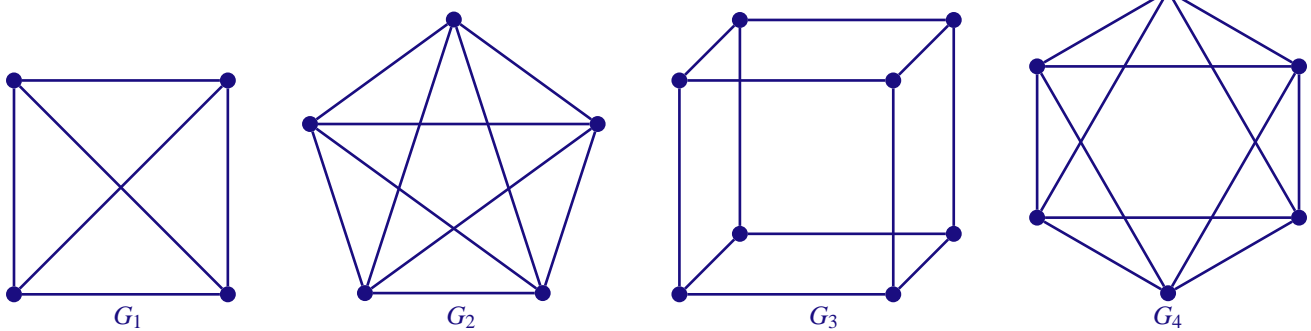
1. (2,3,3,4,4,5)
2. (1,1,1,3)
3. (1,1,2,4,4)
4. (2,3,3,4,5,6,7)

EXERCICE 2

1. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple G si la liste des degrés des sommets est (2,2,3,3,4) ?
2. Dans un graphe simple d'ordre n , quel est le nombre maximal d'arêtes ?

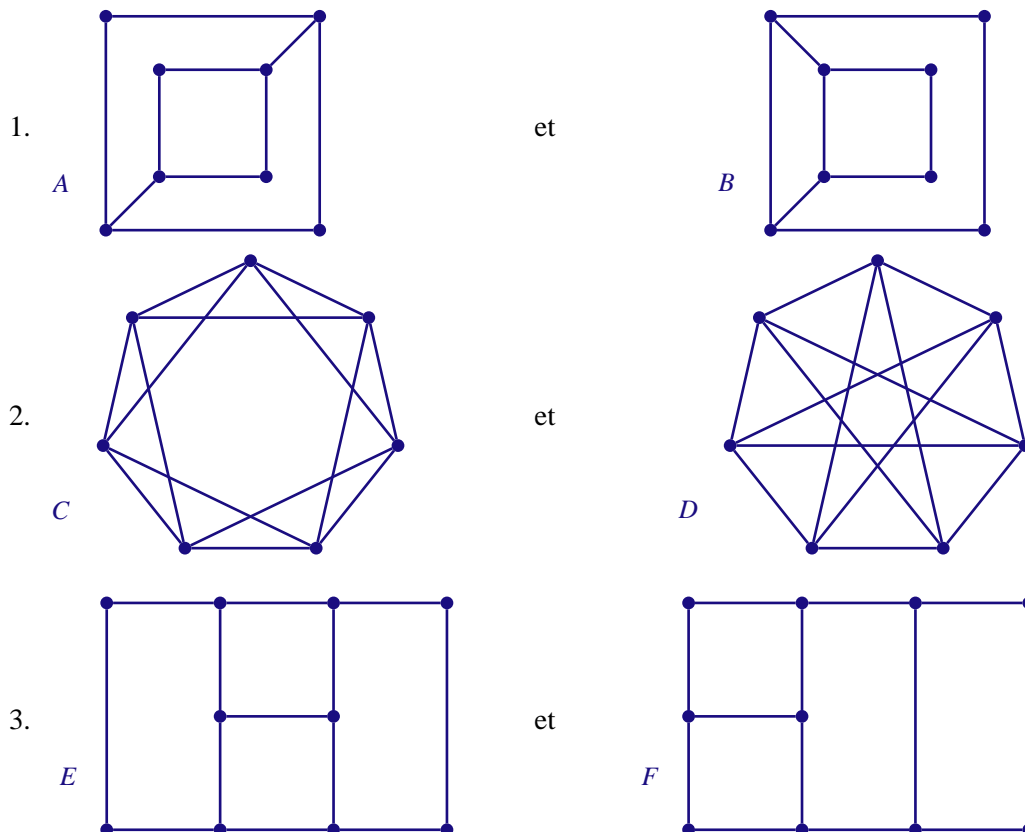
EXERCICE 3

Un graphe est « *planaire* » si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent. Les graphes suivants sont-ils planaires ?



EXERCICE 4

Les graphes simples suivants sont-ils isomorphes ?



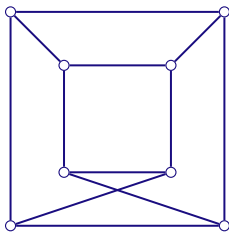
EXERCICE 5

Trouver deux graphes d'ordre 5 qui ne sont pas isomorphes et dont les degrés des sommets sont donnés par la liste $(1,2,2,2,3)$.

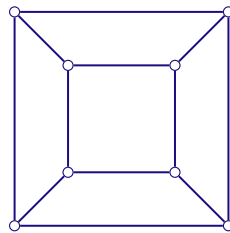
EXERCICE 6

Un graphe G est biparti s'il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête de G a une extrémité dans X et l'autre dans Y .

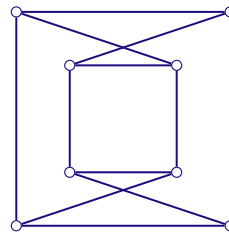
Parmi les graphes suivants lesquels sont bipartis ?



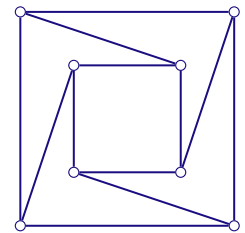
Graphe G



Graphe H



Graphe I

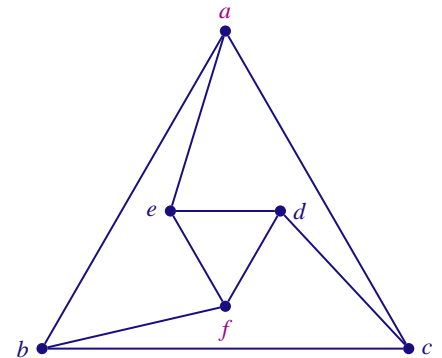


Graphe J

EXERCICE 7

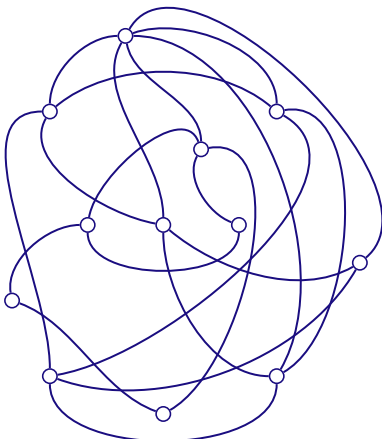
On considère le graphe ci-contre :

1. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 ayant pour extrémités a et b ?
2. Dénombrer toutes les chaînes élémentaires ayant pour extrémités a et f .
3. Quel est le diamètre du graphe ?
4. Combien de cycles distincts possède-t-il ?

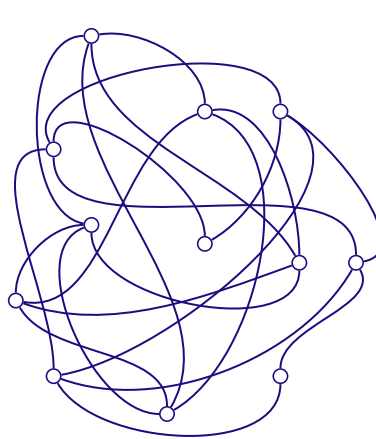


EXERCICE 8

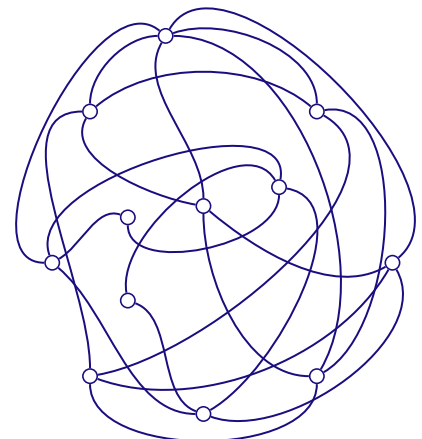
Pour chacun des graphes suivants, existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?



Graphe G



Graphe H



Graphe I

EXERCICE 9

1. Dessiner le graphe simple d'ordre 8 dont l'ensemble des arêtes est :

$$A = \{(1;2), (1;3), (2;3), (2;4), (2;7), (3;5), (3;6), (3;7), (4;5), (4;7), (5;6), (5;7), (6;7), (6;8), (7;8)\}$$

2. Donner la matrice M associée à ce graphe.

- Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 permettant de se rendre du sommet 1 au sommet 8 ?
Les donner tous.
- Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de ce graphe sans passer plus d'une fois par la même arête ?
Si oui donner un parcours possible.
- Existe-il un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ?

EXERCICE 10

- Dessiner un graphe simple dont la liste des degrés des sommets est $(6, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
 - qui possède une chaîne eulérienne ;
 - qui ne possède pas de chaîne eulérienne.
- Est-il possible d'avoir un graphe qui possède un cycle eulérien si la liste des degrés des sommets est $(6, 6, 4, 2, 2, 2, 2, 2)$?

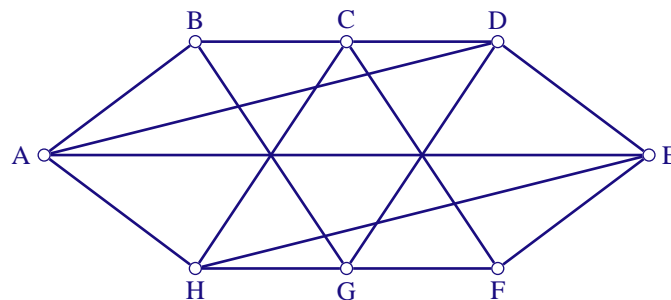
EXERCICE 11

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 0, 1, 2, 3 ou 4.

- En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
 - Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
 - Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
- Avec des dominos dont les faces sont numérotées de 0 à n , est-il toujours possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

EXERCICE 12

On considère le graphe suivant :



- Le graphe est-il connexe ?
- Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
- Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe . Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
- Soit M la matrice associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

On donne $M^3 =$

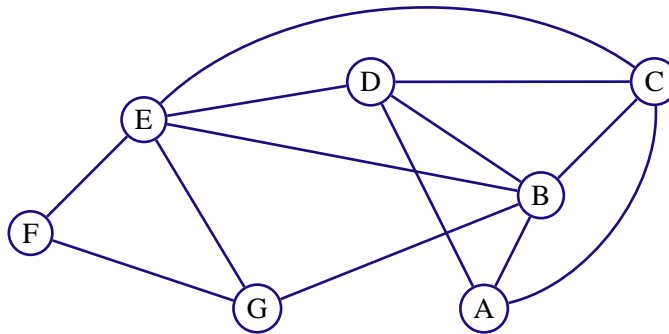
$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet G et aboutissant au sommet E.
Citer alors toutes ces chaînes.

EXERCICE 13

(D'après sujet bac Polynésie 2006)

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe \mathcal{G} suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe \mathcal{G} est-il complet ? Quel est l'ordre de \mathcal{G} ?
2. En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à \mathcal{G} .
3. On donne :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?

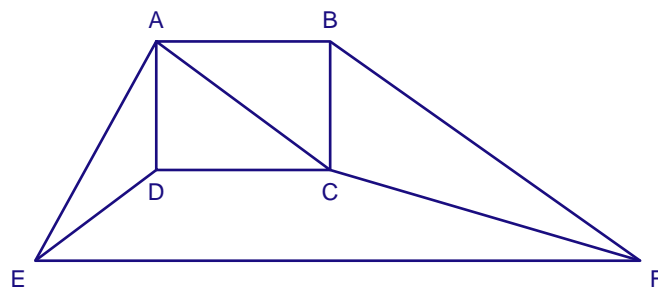
4. a) Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
b) Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

EXERCICE 14

(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion Septembre 2007)

PARTIE I

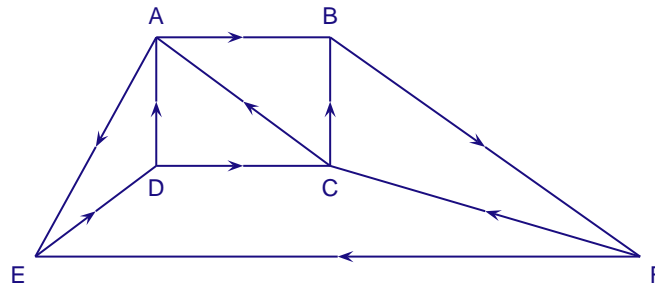
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

PARTIE II

Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.

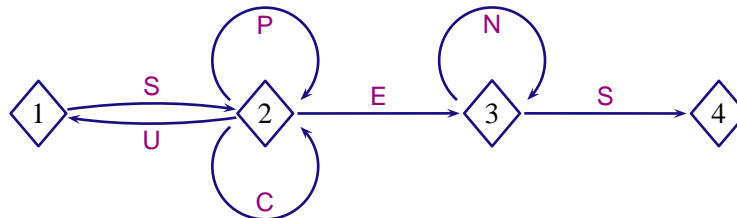


1. Écrire la matrice M associée à ce graphe. (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?

EXERCICE 15

(D'après sujet bac Asie 2013)

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

SUCCES

SCENES

SUSPENS

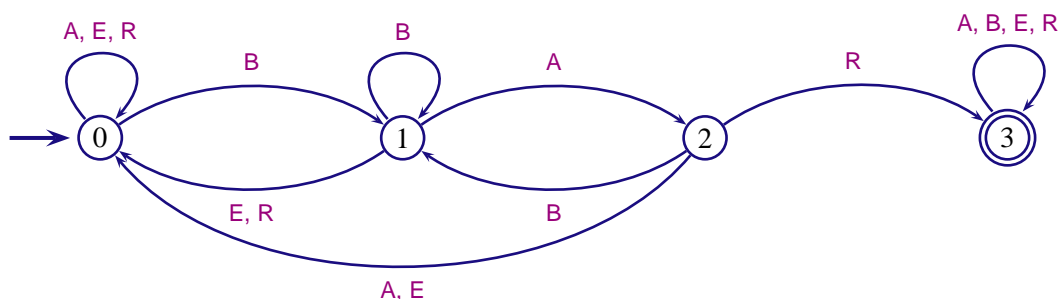
2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Quel est le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe ? Quels sont ces codes ?

EXERCICE 16

On considère l'automate G défini par le graphe suivant :



1. Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par l'automate.

BARBARE

BARBE

BABAR

BARBERA

REBARRER

ARBRE

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence M associée au graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Quel est le nombre de mots de 4 lettres reconnus par l'automate ? Quels sont ces mots ?

4. Caractériser les mots reconnus par l'automate.

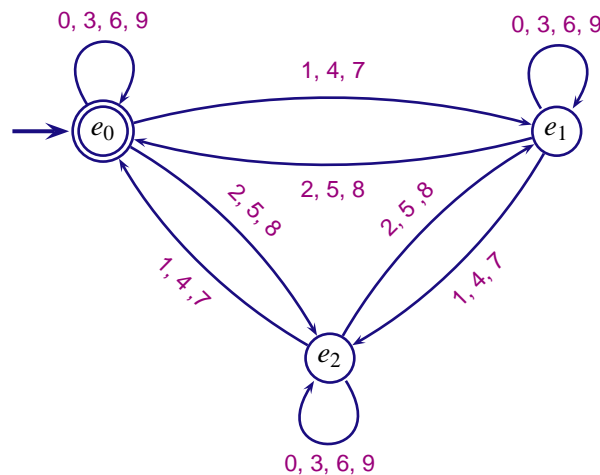
EXERCICE 17

1. Construire un automate reconnaissant les puissances de 10.

2. Construire un automate sur l'alphabet $\{0; 1\}$ reconnaissant les mots comportant un nombre pair de 1.

EXERCICE 18

On considère l'automate M défini par le graphe suivant :



1. Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par l'automate ?

136

150

222105

5106

12391

144

2. Comment caractériser l'ensemble des mots acceptés par M ?

POUR INFORMATION :

Automate reconnaissant les entiers binaires qui sont des multiples de 3

