

CONSTRUCTION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION $f : x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit $q > 0$ un réel strictement positif. (u_n) est la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = q^n$.
Comme (u_n) est une suite géométrique, pour tous entiers naturels m et p , on a :

$$u_m \times u_p = q^m \times q^p = q^{m+p} = u_{m+p}$$

On considère le nuage de points M_i représentatif de la suite q^n .

ÉTAPE 1 : prolongement sur les négatifs.

Sachant que pour tout réel $q > 0$

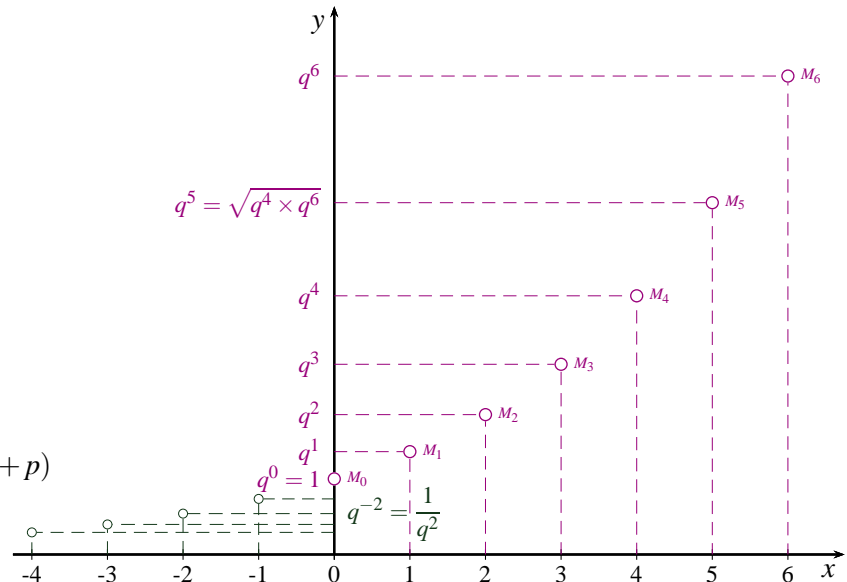
et pour tout entier n , $q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$.

On complète le graphique à l'aide de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{q}$.

On définit ainsi, une fonction f telle que pour tout entier relatif n , $f(n) = q^n$.

Pour tous entiers relatifs m et p ,

$$f(m) \times f(p) = q^m \times q^p = q^{m+p} = f(m+p)$$



ÉTAPE 2 : prolongement par dichotomie.

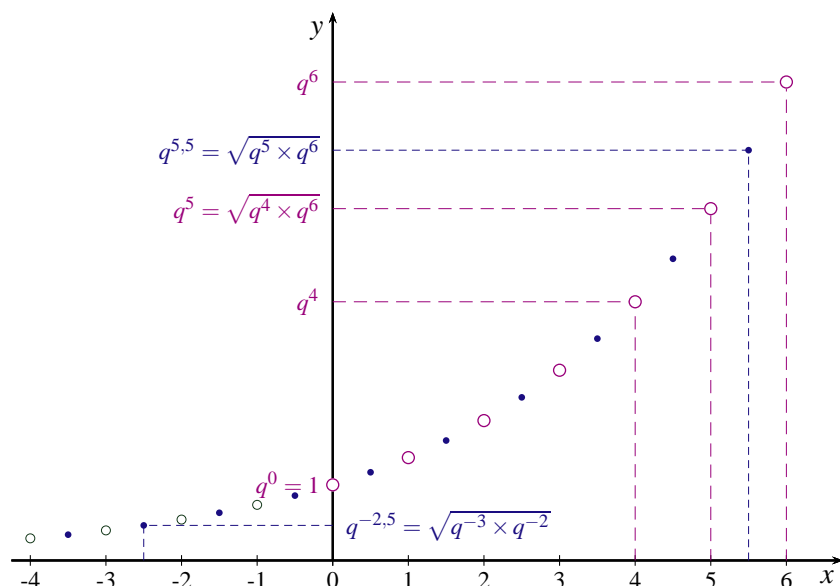
RAPPEL

Trois réels a , b et c sont, dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique de a et c (c'est à dire : $b = \sqrt{ac}$)

– Points d'abscisses $n + 0,5$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Au point d'abscisse $n + 0,5 = \frac{n + (n+1)}{2}$ on associe la moyenne géométrique des deux termes consécutifs :

$$f(n + 0,5) = \sqrt{f(n) \times f(n+1)} = \sqrt{q^n \times q^{n+1}}$$



Pour tout entier relatif n :

$$f(n + 0,5) = \sqrt{q^n \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1}{2}} = q^n \times q^{0,5} = f(n) \times f(0,5)$$

– On obtient de nouveaux points en réitérant ce processus :

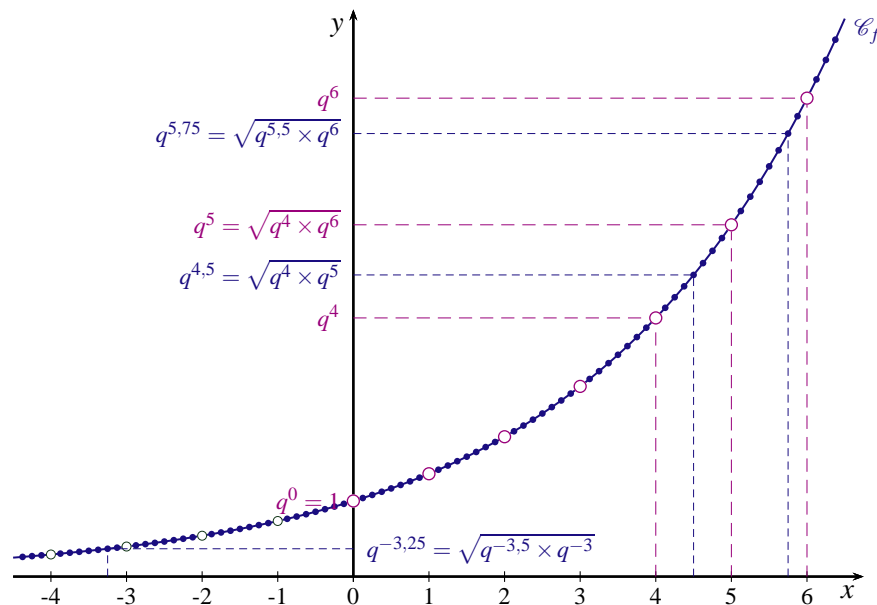
Au point d'abscisse $n + 0,25 = \frac{n + (n + 0,5)}{2} = \frac{2n + 0,5}{2}$, on associe le réel :

$$f(n + 0,25) = \sqrt{q^n \times q^{n+0,5}} = q^{\frac{2n+0,5}{2}} = q^n \times q^{0,25} = f(n) \times f(0,25)$$

Au point d'abscisse $n + 0,75 = \frac{(n + 0,5) + (n + 1)}{2} = \frac{2n + 1,5}{2}$ on associe le réel :

$$f(n + 0,75) = \sqrt{q^{n+0,5} \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1,5}{2}} = q^n \times q^{0,75} = f(n) \times f(0,75)$$

Plus généralement soient $A(a; q^a)$ et $B(b; q^b)$ deux points de la courbe \mathcal{C}_f , ce processus permet d'obtenir le point $M\left(\frac{a+b}{2}; \sqrt{q^a \times q^b}\right)$ appartenant à la courbe \mathcal{C}_f .



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{q^a \times q^b} = q^{\frac{a+b}{2}} = q^{\frac{a}{2}} \times q^{\frac{b}{2}} = f\left(\frac{a}{2}\right) \times f\left(\frac{b}{2}\right)$$

La fonction f vérifie la relation $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

DES FONCTIONS « TRANSFORMANT LES SOMMES EN PRODUITS »

Soit f une fonction continue vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x+y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

1. En écrivant que pour tout réel x , $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$, montrer que pour tout réel x , $f(x) > 0$.
2. Calculer $f(0)$
3. Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{x}$
4. On pose $f(1) = q$.
 - a) Calculer $f(2)$ et $f(3)$.
 - b) Calculer $f(-1)$ et $f(-2)$.
5. Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$ est une suite géométrique.
6. Soit $n \neq 0$ un entier non nul. Montrer que $f\left(\frac{1}{n}\right)$ est la racine n -ième de q .
7. Montrer que pour tout rationnel $r = \frac{m}{n}$ avec m entier relatif et n entier non nul, $f\left(\frac{m}{n}\right) = q^{\frac{m}{n}}$.

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q .
Elle est dérivable sur \mathbb{R} .

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.
Une valeur approchée de l'image de $-5,3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : $0.8 \wedge (-5.3)$.

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

– Pour tout réel x , $q^x > 0$.

En effet, $q^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = (q^{\frac{x}{2}})^2$ avec $q^x \neq 0$.

– Pour tous réels x et y , $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ et $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$.

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \frac{q^x}{q^y}$

– Pour tout réel x , $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$, et en particulier $q^{0,5} = \sqrt{q}$

En effet, $q^x = (q^{\frac{x}{2}})^2$ et $q^x > 0$.

– Pour tout réel x et tout entier relatif m , $(q^x)^m = q^{mx}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

– Pour tout entier naturel $n > 0$, $q^{\frac{1}{n}}$ est « la racine n -ième » de q

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\frac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $(q^{\frac{1}{n}})^n = q$

2 SENS DE VARIATION

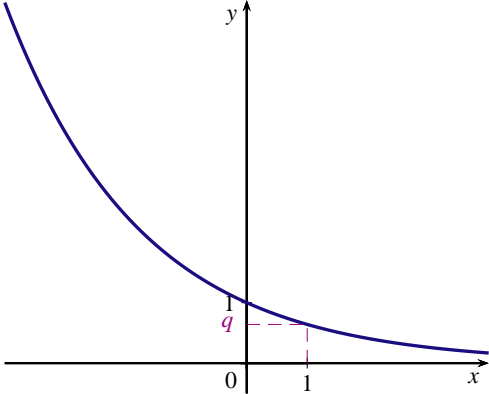
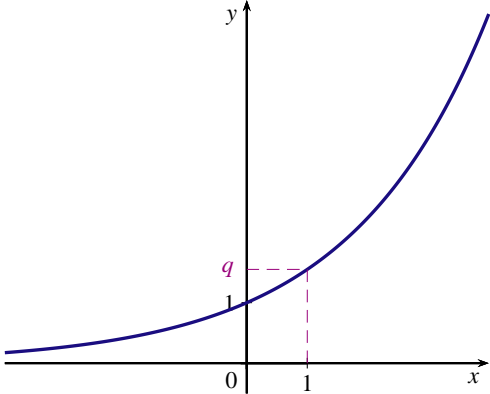
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- Si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est constante sur \mathbb{R} .
- Si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

CONSÉQUENCE

Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

3 PROPRIÉTÉS

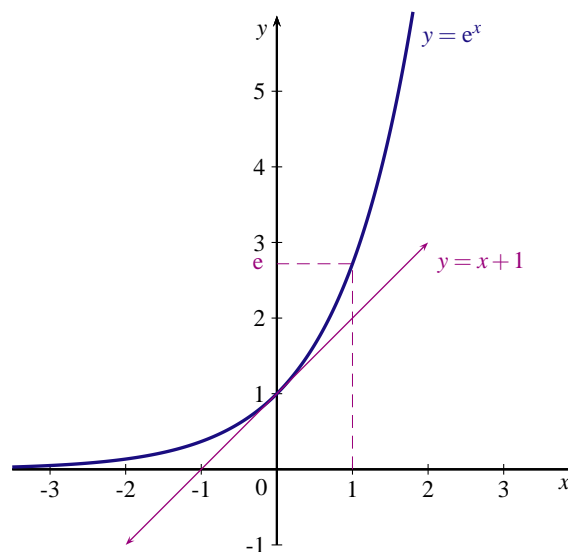
$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur \mathbb{R} .	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur \mathbb{R} .
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty$
	
La fonction est convexe sur \mathbb{R}	

II LA FONCTION EXPONENTIELLE

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles $x \mapsto q^x$ il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.

Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0; 1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière du réel q est notée e .

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $e \approx 2,71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \mapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x \mapsto e^x$$

CONSÉQUENCES

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = e^x$
- $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$, $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $\exp(0,5) = e^{0,5} = \sqrt{e}$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} : pour tout nombre réel x , $e^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif m

$$e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad (e^x)^m = e^{mx}$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x ,

$$\exp'(x) = e^x$$

DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

Or $\exp'(0) = 1$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa dérivée.

Or pour tout réel x , $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

CONSÉQUENCES

- Pour tout réel $x \leq 0$, $0 < e^x \leq 1$
- Pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$
- Pour tous réels x et y , $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ et $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$$e^{1-3x} < e^{2x-3} \Leftrightarrow 1-3x < 2x-3 \Leftrightarrow -5x < -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$$

$$\text{D'où l'ensemble solution } S = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{x^2-1} \geq 1$

$$e^{x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2-1} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

D'où l'ensemble solution $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R}

DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

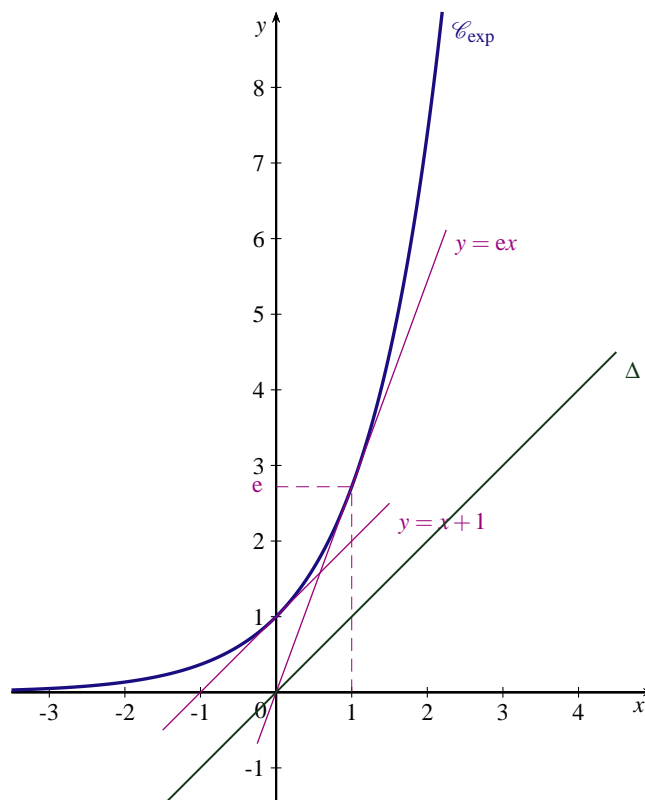
$e > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim_{n \rightarrow -\infty} e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$. Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit $y = ex$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
(Voir l'exercice n° 10)



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I .

La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = e^u$.

EXEMPLES

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = e^u$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5e^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 0,5x - 3$

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = e^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
Pour tout réel x , on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = -1$.
Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -e^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x^2-2x+1}$.
Pour tout réel x , posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = x - 2$.
Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = (x - 2)e^{0,5x^2-2x+1}$.

2 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

Démonstration

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

- Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$
Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $e^{u(b)} < e^{u(a)}$
Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^u est décroissante sur I .
- Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$
De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $e^{u(a)} < e^{u(b)}$
Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^u est croissante sur I .

REMARQUE

Si u est dérivable sur I , alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Or pour tout réel $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.

EXERCICE 1

Les réels suivants sont ils des entiers ?

$$A = 8^{\frac{1}{3}};$$

$$B = 32^{\frac{3}{5}};$$

$$C = 27^{\frac{2}{3}};$$

$$D = 36^{\frac{3}{4}}.$$

EXERCICE 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1,69^{0,7} \times 1,69^{1,2}}{1,69^{1,4}}; \quad B = \frac{(0,8^{\frac{2}{3}})^6 \times 0,8^{-1,6}}{0,8^{3,4}}; \quad C = \frac{4^{x+0,5} + (2^x)^2}{16^x}; \quad D = (1 - 0,36^x)^2 - 0,6^{4x}.$$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2,5^x - 0,4^x$.

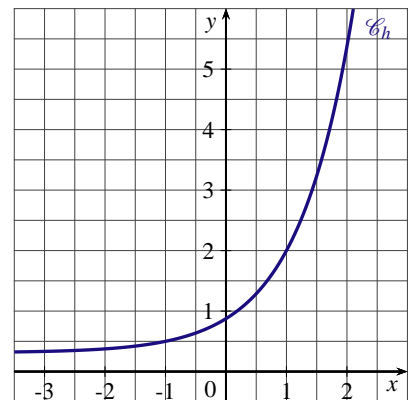
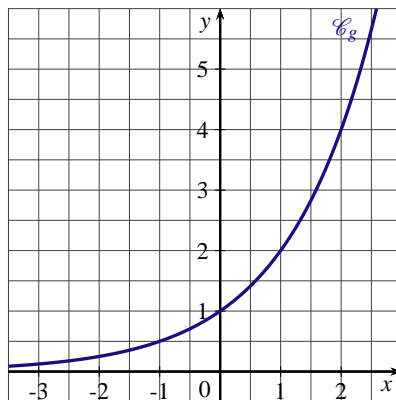
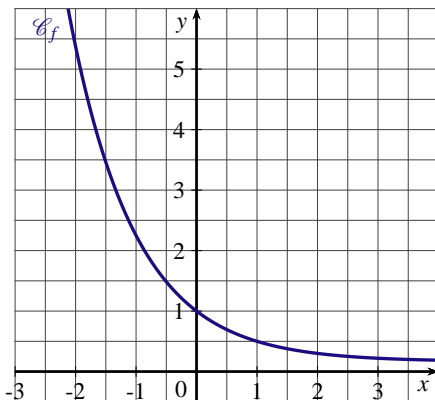
1. Calculer $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.

Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Montrer que pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$

EXERCICE 4

On a tracé ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} .



1. Une seule de ces trois fonctions est une fonction exponentielle de base q . Laquelle est-ce ?
2. Quelle est la valeur du réel q ?

EXERCICE 5

En janvier 2005, le cours moyen d'un lingot d'or d'un kg est de 10 363 €, contre 30 880 € en octobre 2013. Calculer le pourcentage annuel moyen d'évolution du cours du lingot d'or entre ces deux dates.

EXERCICE 6

(D'après sujet bac Amérique du nord, 2005)

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
 - a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
 - b) Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

EXERCICE 7

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = 1$ et vérifiant pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f(x) \neq 0$. En déduire que $f(0) = 1$.
2. a) Montrer que pour tout réel x et tout réel h non nul, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \times \frac{f(h) - 1}{h}$
b) En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$.

EXERCICE 8

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}; \quad B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2; \quad C = e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right); \quad D = \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}; \quad E = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}.$$

EXERCICE 9

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+x-1} = 1$
2. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $e^{\frac{1}{x}} \geq e$
5. $e^{2x} \leq e^x$
6. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f , en déduire que f admet un minimum.
3. Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$.

EXERCICE 11

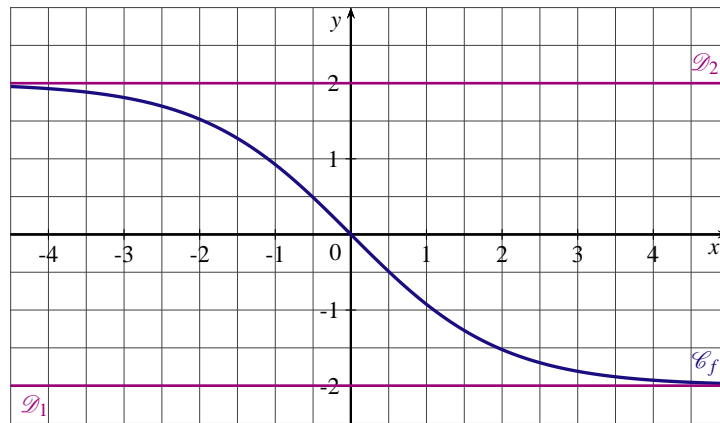
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f .
a) Calculer $f'(x)$.
b) Donner le tableau de variations de f .
c) En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f .
a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = f(x)$.
b) Étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$.

On a tracé ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f représentant la fonction f et les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives $y = -2$ et $y = 2$



1. Étudier les positions relatives de la courbe \mathcal{C}_f avec les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Étudier la convexité de la fonction f .
4. La courbe \mathcal{C}_f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 13

(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion 2013)

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0 ; 3,6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

On a représenté, en annexe, la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

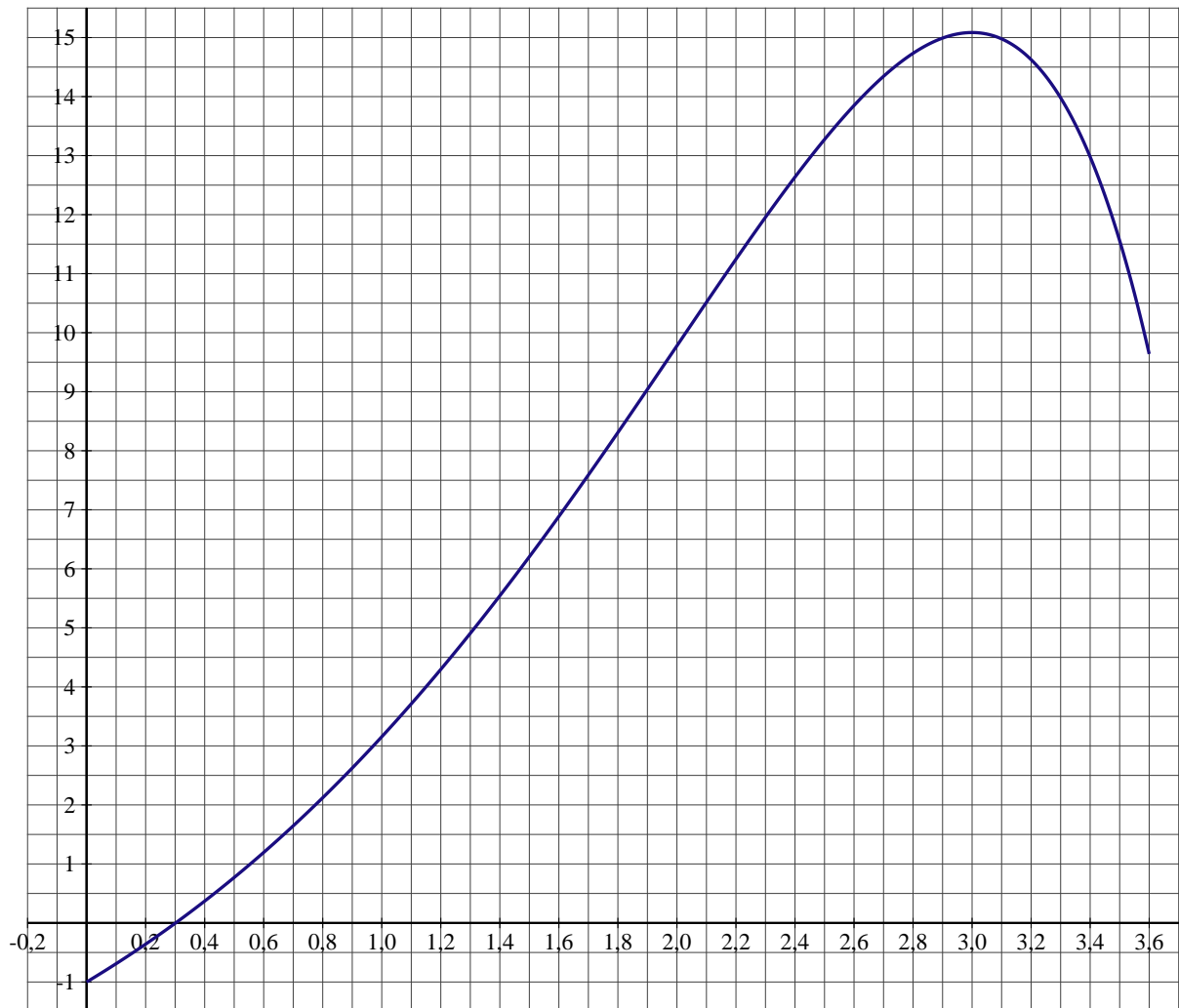
1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

PARTIE B : ÉTUDE THÉORIQUE

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4 - x)e^x$.

1. a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0 ; 3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$.
b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .
c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I . On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ l'autre dans l'intervalle $[3 ; 3,6]$.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

ANNEXE



EXERCICE 14

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$
4. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-0,5x}$

EXERCICE 15

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe qui sera rendu avec la copie.

On souhaite tracer la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
- Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.
- Le minimum de la fonction f est 1.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

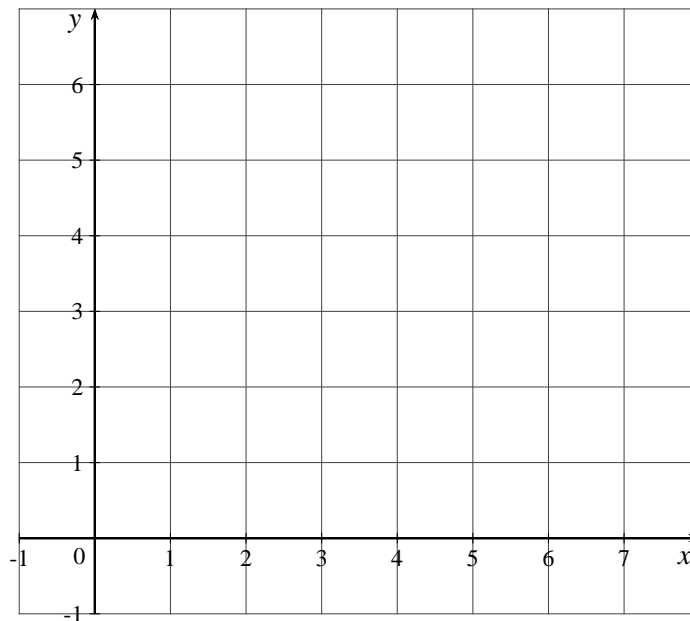
– Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0	4	6
signe de $f'(x)$	–	0	+

- Donner le tableau de variations de la fonction f . On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.
- Donner l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 6.
- Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.

On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

ANNEXE



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

- Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

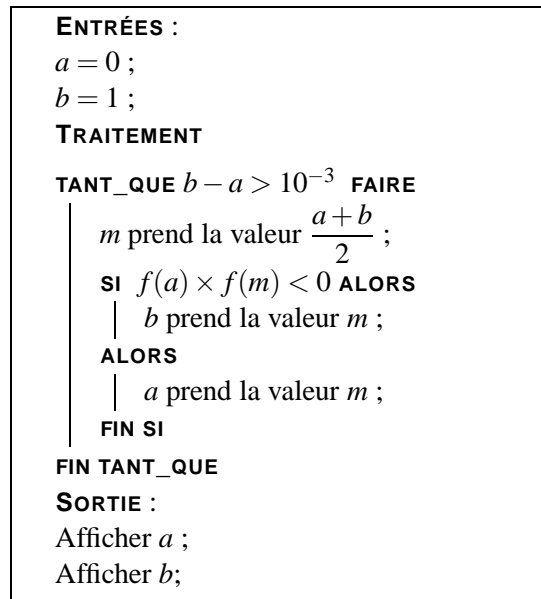
Donner le tableau de variation de la fonction g . On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

- Déterminer $g'(0)$.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - e^{-0,5x^2}$

- On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
- Étudier les variations de la fonction f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
 - On considère l'algorithme suivant



Les valeurs de sortie de cet algorithme sont $a \approx 0,7529$ et $b \approx 0,7539$. Que signifie ce résultat ?

4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE 17

(D'après sujet bac Liban 2013)

PARTIE A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par $C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$.

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .

Montrer que, pour tout $x \in [5 ; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$.
 - a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5 ; 60]$.
 - c) Donner un encadrement à l'unité de α .
 - d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
 - a) $C(x) = 2$.
 - b) $C(x) = 5$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.