I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \in]0;+\infty[$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$

On peut définir une nouvelle fonction qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = \mathrm{e}^y$$

REMARQUES

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

2 CONSÉQUENCES

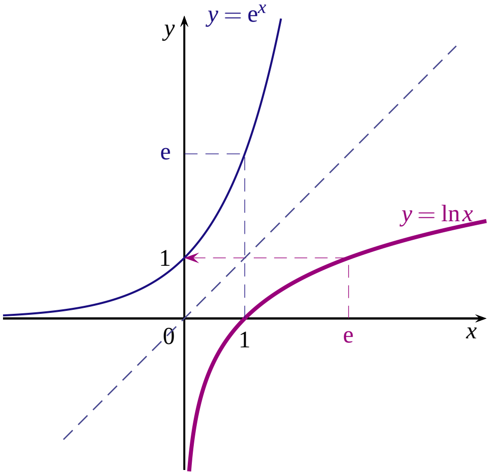
1. Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$ donc $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$ soit $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction ln : $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ et $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a\times b)}$
D'autre part, $a \times b = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$
D'où $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$. Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUES

- John Napier inventa en 1617 les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre), et une méthode de calcul transformant les multiplications en additions.
- La fonction exponentielle transforme une somme en produit, sa fonction réciproque, la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n\ln a$
4. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc
$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
2. Soit $a > 0$ et $b > 0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,
$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$
Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n\ln a$.
4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc
$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2 VARIATION

> La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Or si $x>0$ alors, $\dfrac{1}{x}>0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	

CONSÉQUENCES

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

> Pour tous réels a et b strictement positifs :
> $\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$
> $\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

Puisque $\ln 1=0$:

> Pour tout réel x strictement positif :
> $\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$
> $\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$
> $\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x>0$, $\ln x\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

> Pour tout réel k, l'équation $\ln x=k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x=\mathrm{e}^k$.

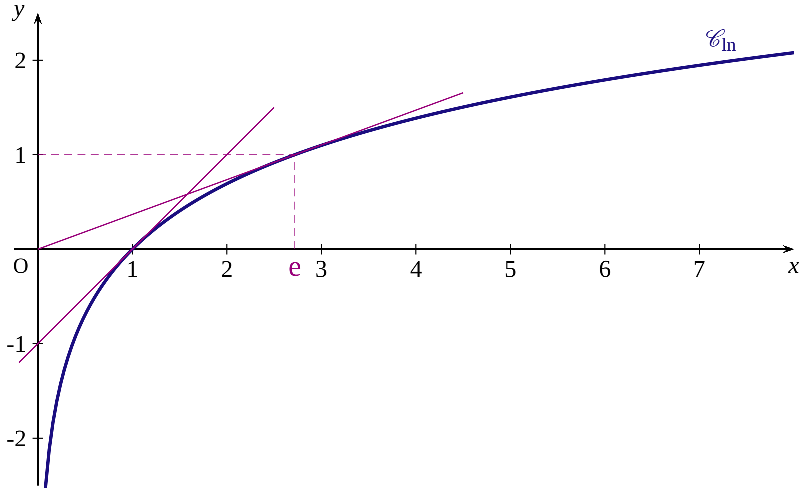
3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

– $\ln(1)=0$ et $\ln(\mathrm{e})=1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(\mathrm{e};1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.
– Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1)=1$.
  Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y=x-1$.
– Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ est $\ln'(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
  Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$$

  La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.
– Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
  Par conséquent, la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.



IV COMPLÉMENT : FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE $q > 0$

Pour tout réel q réel strictement positif , $\mathrm{e}^{\ln q} = q$. Soit q un réel strictement positif, pour tout réel x :

$$q^x = \left(\mathrm{e}^{\ln q}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln q}$$

Soit q un réel strictement positif. La fonction exponentielle de base q est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = q^x = \mathrm{e}^{x \ln q}$$

CONSÉQUENCE

Soit k un réel strictement positif. L'équation $q^x = k$ avec $q > 0$ s'écrit $\mathrm{e}^{x \ln q} = k$. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$q^x = k \Leftrightarrow x \times \ln q = \ln k \Leftrightarrow x = \frac{\ln k}{\ln q}$$

EXEMPLE

Une entreprise a chargé un centre d'appel de démarcher des clients potentiels. On a constaté qu'une personne contactée sur cinq accepte un rendez-vous avec un commercial. Ce centre d'appel contacte n personnes successivement et de manière indépendante.
Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faut démarcher pour que la probabilité qu'au moins une des personnes contactées accepte un rendez-vous avec un commercial soit supérieure à 0,99 ?

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes contactées qui acceptent un rendez-vous avec un commercial. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n et 0,2.

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$$

n est le plus petit entier tel que

$$\begin{aligned}
1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99 &\Leftrightarrow -0{,}8^n \geqslant -0{,}01 \\
&\Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0{,}8^n\right) \leqslant \ln 0{,}01 \qquad \text{La fonction } \ln \text{ est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow n \times \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6 \qquad \text{Attention } \ln 0{,}8 < 0\,!
\end{aligned}$$

Il faut démarcher au moins 21 personnes pour que la probabilité qu'au moins une des personnes contactées accepte un rendez-vous avec un commercial soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln(16)-7\ln(2)+4\ln(32)+3\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$

$B=3\ln(125)-2\ln(25)+6\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$C=8\ln(\sqrt{3})+5\ln(9)-\ln(9\sqrt{3})$

$D=\dfrac{\dfrac{1}{3}\ln 9-4\ln\sqrt{3}-\ln\dfrac{1}{3}}{\ln 3}$

$E=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

$F=\dfrac{\ln 36}{\ln 3+\ln 2}$

$G=\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$H=2\ln\sqrt{8}-3\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$I=\dfrac{\ln 5-\ln 10}{2\ln\left(\sqrt{2}\right)}$

$J=\dfrac{\ln(12)-\ln(9)}{\ln\left(\dfrac{1}{27}\right)+\ln(64)}$

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right)+\mathrm{e}^{-\ln 2}$; $B=\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}-\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$; $C=\ln\left(4\mathrm{e}^2\right)+\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$; $D=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)}{\ln 3}\times\dfrac{\ln 9}{\mathrm{e}^2}$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

1. a) $\mathrm{e}^x=5$; b) $2\mathrm{e}^x=0{,}2$; c) $\mathrm{e}^{2x-1}-3=0$; d) $\left(\mathrm{e}^x\right)^2=0{,}25$; e) $2\mathrm{e}^{x^2}-4=0$.
2. a) $\mathrm{e}^{1-2x}=3\mathrm{e}^x$; b) $3\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^{2+3x}$; c) $\dfrac{5\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{2x}}=4$; d) $\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2+3x}-2\right)=0$.

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $4\mathrm{e}^{2x+1}\leqslant 3$; b) $3\mathrm{e}^{-2x}>1$; c) $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\leqslant 0$; d) $\dfrac{5\mathrm{e}^{2-3x}}{\mathrm{e}^{2x-1}}>2$; e) $3\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^x+2\leqslant 0$.

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $]0;+\infty[$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :
   a) $\ln x=-1$; b) $2\ln x+0{,}01=0$; c) $3\ln x=\mathrm{e}^3$; d) $2(\ln x)^2=1$; e) $\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)(\ln(2x)-2)=0$.
2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :
   a) $2\ln x\leqslant -2$; b) $\ln 2x\leqslant -2$; c) $\ln 2-\ln x>3$; d) $\ln(3x)-2\ln x<5$; e) $(\ln x)^2+\dfrac{3\ln x}{2}-1\geqslant 0$.

EXERCICE 6

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x>1$, $\ln\left(x^2+x-2\right)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
3. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2;2[$, $\ln\sqrt{2-x}+\ln\sqrt{2+x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)$

EXERCICE 7

Résoudre les équations suivantes après avoir précisé l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'équation est définie.

1. $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$
2. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(2x-1)$
3. $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(3x+2)$
4. $\ln\sqrt{2x-2} = \ln(4-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 8

Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'inéquation est définie.

1. $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x+1)$
2. $\ln(3x+2) \geqslant \ln\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$
3. $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \leqslant \ln x$

EXERCICE 9

1. Résoudre les équations suivantes :
   a) $\ln\dfrac{x+2}{x} = 1$;
   b) $\ln\dfrac{x-1}{2x+1} = -1$;
   c) $2(\ln x)^2 + 3\ln x = 2$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $\ln\dfrac{x}{x+1} \leqslant -1$;
   b) $\ln(2x+1) - \ln(x-1) \leqslant 1$;
   c) $(\ln x)^2 - \ln x \leqslant 6$

EXERCICE 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

a) $1{,}05^n \geqslant 1{,}5$;
b) $0{,}92^n \leqslant 0{,}75$;
c) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$;
d) $0{,}2 \geqslant \left(1-\dfrac{9}{100}\right)^n$

EXERCICE 11

1. Actuellement, le taux du livret A d'épargne est égal à 1,25%. En supposant que ce taux reste inchangé sur le long terme, au bout de combien d'années, un capital placé sur le livret A aura-t-il plus que doublé ?
2. Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 4%. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il augmenté d'au moins 80% ?
3. Le gouvernement d'un pays envisage de baisser l'impôt de 2% par an. Au bout de combien d'années, l'impôt aura-t-il baissé de 20% ?
4. D'une année sur l'autre, un produit perd 5% de sa valeur. Au bout de combien d'années ce produit aura-t-il a perdu plus de 40% de sa valeur initiale ?
5. La population mondiale est passée à 6,9 milliards en 2010. Avec un taux de croissance annuel de 1,14% , en quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 9 milliards ?

EXERCICE 12

(*D'après sujet bac Liban 2013*)

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2\times 0{,}9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

PARTIE B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

– 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
– 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012+n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012+n$.

```
VARIABLES
    a,i,n.
INITIALISATION
    Choisir n
    a prend la valeur 10
TRAITEMENT
    Pour i allant de 1 à n,
        a prend la valeur ...
SORTIE
    Afficher a
```

3. Résoudre l'inéquation $12-2\times 0{,}9^n > 11{,}5$. En donner une interprétation.

EXERCICE 13

1. Soit a un réel tel que $0<a<1$. Comparer $\ln a$ et $-\ln a$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs, tels que $a<b$. Comparer $\ln\left(\dfrac{a+1}{a}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{b+1}{b}\right)$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \ln\sqrt{ab}$.

EXERCICE 14

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x)=x\ln x-x$; b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$; d) $f(x)=(\ln x)^2+2\ln(x)$

EXERCICE 15

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2013*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;10]$ par $f(x)=x^2-14x+15+20\ln x$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;10]$ on a : $f'(x)=\dfrac{2x^2-14x+20}{x}$.
2. Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;10]$.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$ dans l'intervalle $[1;10]$.

EXERCICE 16

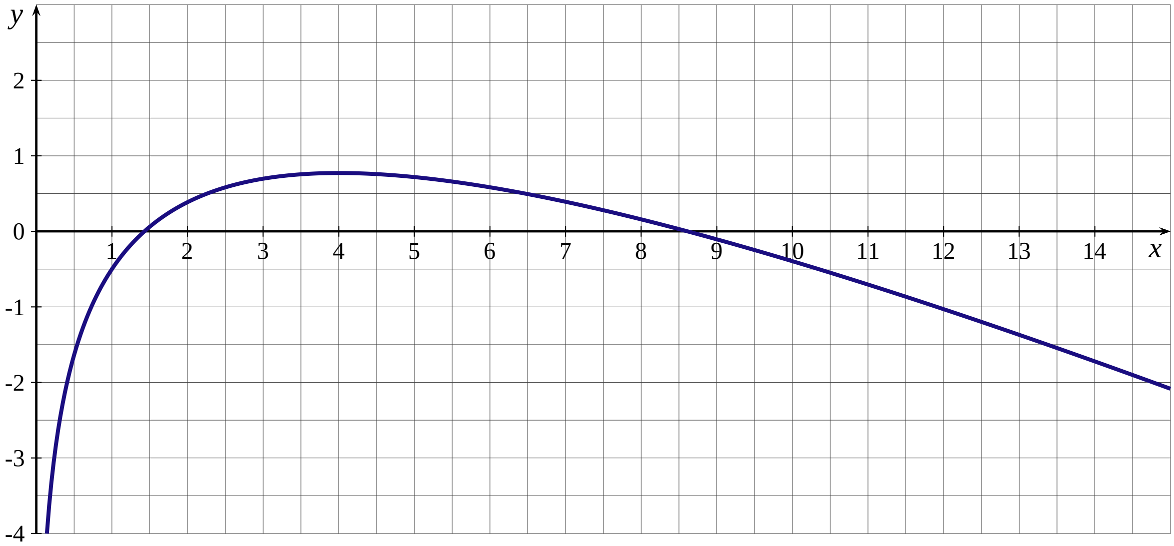
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de f.

2. Étudier la convexité de la fonction f.

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - \dfrac{x}{2}$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
3. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   b) Programmer l'algorithme de dichotomie suivant

```
ENTRÉES :
Saisir un réel strictement positif non nul a ;
Saisir un réel strictemenl positif non nul b (b > a) ;
TRAITEMENT
TANT_QUE b − a > 10^-3 FAIRE
    m prend la valeur (a+b)/2 ;
    SI f(a) × f(m) < 0 ALORS
        b prend la valeur m ;
    ALORS
        a prend la valeur m ;
    FIN SI
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher a ;
Afficher b;
```

   Déterminer un encadrement à 0,01 près de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Application économique.
   Une entreprise produit sur commande un article. La production quotidienne peut varier de 10 à 100 articles. Le bénéfice réalisé par cette production est modélisé par la fonction f de la façon suivante :
   $f(x)$ est le montant, exprimé en milliers d'euros, du bénéfice réalisé par l'entreprise pour une production de x dizaines d'articles.

a) Combien d'articles l'entreprise doit-elle produire par jour pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser alors ce bénéfice arrondi à l'euro près.

b) Combien d'articles l'entreprise doit-elle produire par jour pour ne pas travailler à perte ?

EXERCICE 18

(*D'après sujet bac Polynésie Septembre 2012*)

Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle $[1;6]$.
Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5{,}6 \quad \text{pour } x \in [1;6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle $[1;6]$.
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1;6]$.
   On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
   a) Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
   b) On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $[1;6]$ et on appelle C'_M sa fonction dérivée. Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 3{,}2 - 8\ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle $[1;6]$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;6]$ par $f(x) = x^2 - 3{,}2 - 8\ln x$.
   a) On admet que f est dérivable sur [1 ; 6]. Étudier les variations de f sur $[1;6]$.
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[2;6]$; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.
   c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1;6]$ (on ne demande pas de justification).
4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3. b.
   a) En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1;6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).
   b) Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?
5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 20

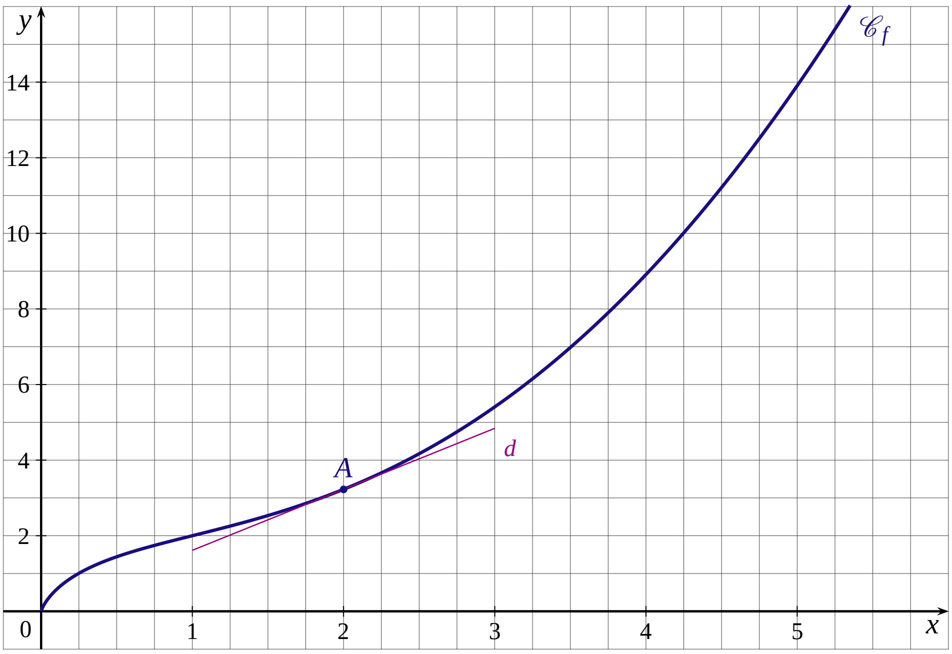
Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(x - 2\ln x + 1)$

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
2. Calculer $f''(x)$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
3. a) Étudier les variations de la fonction f'.
   b) Préciser la convexité de la fonction f suivant les valeurs du réel x.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante.

PARTIE B

La courbe représentative de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$, est tracée ci-dessous, ainsi que la droite d tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.



1. La droite d passe-t-elle par l'origine du repère ?
2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 1.
   b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite T.

EXERCICE 21

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010*)

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de g sur $[1;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1;+\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\text{e}}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$.

1. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1;+\infty[$.
2. a) Montrer que, dans l'intervalle $[2;3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

EXERCICE 22

La capacité mensuelle de production d'un certain type d'article d'une entreprise est comprise entre 500 et 12 000 articles.
On considère que le coût total de production, en milliers d'euros, lorsque x milliers d'articles sont fabriqués est modélisé par la fonction f définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[0{,}5;12]$ par :

$$f(x) = x^2 + 8x + 7 - 6x\ln x$$

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
2. a) Calculer $f''(x)$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
   b) Préciser la convexité de la fonction coût total suivant la production x.
   Que se passe-t-il pour une production de 3 000 articles ? L'interpréter en termes de rythme de croissance.
3. Justifier que la fonction coût total est strictement croissante.

PARTIE B

Le coût moyen est le quotient du coût total par la quantité produite. On note $g(x)$ le coût moyen de production.

1. a) Justifier que le coût moyen s'exprime en euros par article fabriqué.
   b) Étudier les variations de la fonction g sur $[0{,}5;12]$.
2. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total. (*On rappelle que le coût marginal est dans les mêmes unités que le coût moyen*)
   Vérifier que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.

EXERCICE 23

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x} - \dfrac{x}{2} + 1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

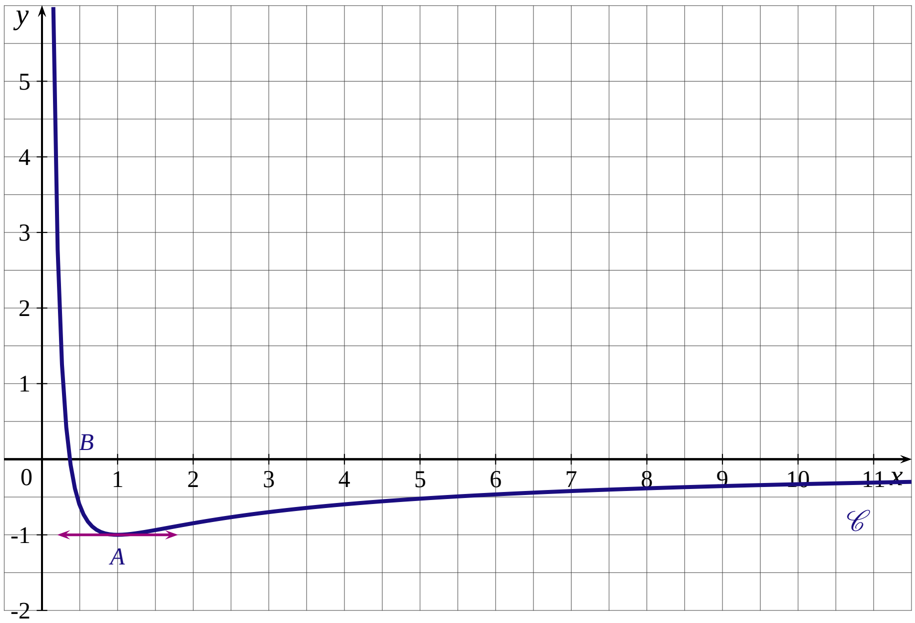
1. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
2. Soit D la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$.
   a) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la droite D et de la courbe C_f.
   b) Étudier les positions relatives de la droite D et de la courbe C_f.

EXERCICE 24

(*D'après sujet bac Antilles-Guyanne 2007*)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.

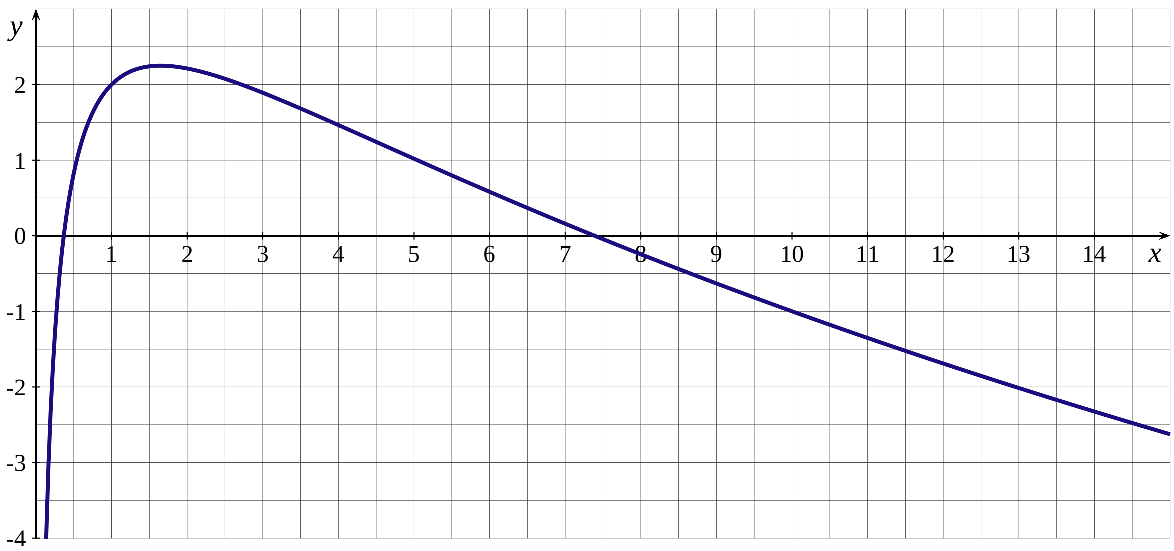
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1;-1)$ et $B\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}};0\right)$ et admet une tangente parallèle à (Ox) au point A.



1. En utilisant les données ci-dessus, déterminer sans justification :
   a) $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ et les solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
2. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$ où a et b sont deux nombres réels.
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction des réels a et b.
   b) Utiliser les résultats de la question 1a. pour montrer que $a = -1$ et $b = -1$.
   c) Retrouver les résultats de la question 1c par le calcul.

EXERCICE 25

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
   b) Montrer que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{\text{e}}$		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X)=2$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x)=2$.

EXERCICE 26

(D'après sujet bac Liban 2010)

PARTIE A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0;20]$ par $f(x)=\left(3\text{e}^2-x\right)\ln x+10$.

1. Calculer la valeur exacte de $f\left(\text{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que, pour tout x de $]0;20]$, $f'(x)=-\ln x+\dfrac{3\text{e}^2}{x}-1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0;20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0	e^2	20
$f'(x)$	‖ $+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $f'(20)$

   a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;20]$.
   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
   c) Étudier la convexité de la fonction f.

4. a) Montrer que, sur l'intervalle $[0,6;0,7]$, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.
   b) Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x\in]0;\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x\in]\alpha;20]$.

PARTIE B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0;20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

EXERCICE 27

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2009*)

PARTIE I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x)=5(1-\ln x)(\ln x-2)$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. a) Déterminer le signe de l'expression $5(1-X)(X-2)$ suivant les valeurs du réel X.

   b) En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{5(3-2\ln x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

   b) En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ puis donner une valeur approchée arrondie à 0,01 près de ces solutions.

PARTIE II : APPLICATION

Une entreprise fabrique et revend des jouets.
$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
   Interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1000 euros.
   Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.