

La recherche du meilleur itinéraire que ce soit en distance, en temps ou en coût d'un point à un autre peut être modélisée par la recherche du plus court chemin dans un graphe.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe entre deux sommets donnés.

I GRAPHE PONDÉRÉ

1 DÉFINITION

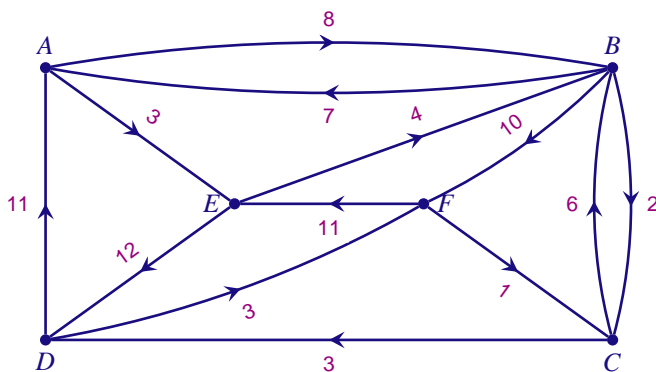
On appelle *graphe pondéré*, un graphe (orienté ou non) dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids (ou coût).

Par analogie avec la matrice d'adjacence, on peut définir la matrice des poids $P(a_{i,j})$ du graphe, dont les coefficients $a_{i,j}$ correspondent aux poids des arêtes (ou des arcs dans le cas d'un graphe orienté) :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{s'il n'existe pas d'arêtes (ou d'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \\ p_{ij} & \text{où } p_{ij} \text{ est le poids de l'arête (ou de l'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \end{cases}$$

On utilise le symbole ∞ pour indiquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets.

EXEMPLE



Les sommets du graphe étant rangés dans l'ordre alphabétique :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 7 & 0 & 2 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & 6 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & 12 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LONGUEUR D'UN CHEMIN

Soit $C(x,y)$ un chemin (ou une chaîne) dans un graphe pondéré G du sommet x vers le sommet y . La longueur de ce chemin est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.

REMARQUE

Cette définition généralise la définition de la longueur d'une chaîne dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Dans l'exemple précédent, la longueur du chemin $AEBF$ est 17.

Si on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F, on peut essayer d'énumérer tous les chemins ABF , $AEBF$, $AEDF$, $ABCDF$, $AEBCDF$ et calculer leurs longueurs. Mais avec un graphe de taille plus importante, ceci risque de devenir rapidement impossible.

Pour résoudre ce problème, on fait appel à des algorithmes.

En terminale ES, on n'étudie que le cas particulier où **les poids de tous les arcs sont des réels positifs**.

II ALGORITHME DE DIJKSTRA

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

L'algorithme comporte une phase d'initialisation. À chaque sommet on attribue un poids qui vaut 0 pour le sommet de départ et infini pour les autres sommets.

Le traitement de l'algorithme consiste à examiner les sommets les uns après les autres et à sélectionner le sommet x auquel on a affecté la plus petite distance du sommet de départ jusqu'à x .

On recommence tant qu'il reste des sommets à sélectionner.

Soit G un graphe *connexe* dont les arêtes sont pondérées par des nombres *positifs*.

Notations :

- S la liste des sommets du graphe et s le sommet du graphe à partir duquel on veut déterminer les plus courts chemins aux autres sommets.
- $l(x,y)$ le poids de l'arête entre deux sommets x et y
- $\delta_s(x)$ la longueur d'un chemin du sommets s au sommet x
- $V^+(x)$ la liste des successeurs du sommet x
- $p(x)$ le prédécesseur du sommet x
- X liste des sommets restant à traiter.
- E liste des sommets déjà traités.

INITIALISATION :

POUR_CHAQUE $x \in S$ **FAIRE** $\delta_s(x) = \infty$;

Poser $\delta_s(s) = 0$;

$X = S$;

$E = \emptyset$;

;

TRAITEMENT :

TANT_QUE $X \neq \emptyset$ **FAIRE**

 Choisir dans X le sommet x avec $\delta_s(x)$ minimum;

 Retirer x dans X et l'ajouter à E ;

POUR_CHAQUE $y \in V^+(x) \cap X$ **FAIRE** // on examine tous les successeurs de x qui ne sont pas traités

SI $\delta_s(y) > \delta_s(x) + l(x,y)$ **ALORS**

 poser $\delta_s(y) = \delta_s(x) + l(x,y)$;

$p(y) = x$;

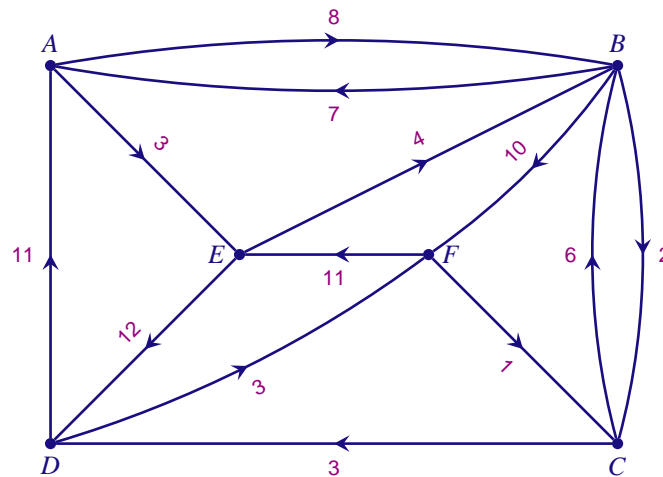
FIN SI

FIN POUR_CHAQUE

FIN TANT_QUE

EXEMPLE

Considérons le graphe suivant :



On souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F.

| A | B | C | D | E | F | Sommets sélectionnés |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | A(0) |
| | 8(A) | ∞ | ∞ | 2(A) | ∞ | E(3) |
| | 7(E) | ∞ | 15(E) | | ∞ | B(7) |
| | | 9(B) | 15(E) | | 17(B) | C(9) |
| | | | 12(C) | | 17(B) | D(12) |
| | | | | | 15(D) | F(15) |

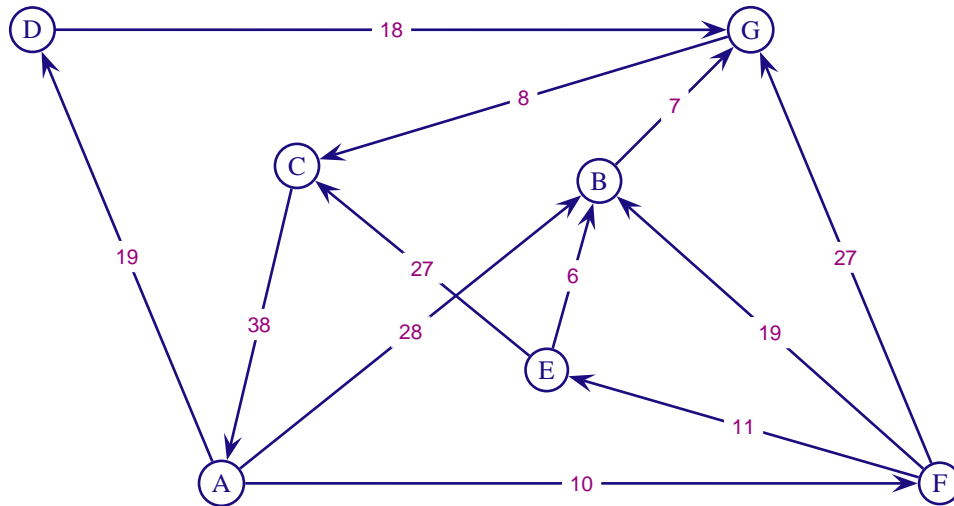
Initialisation ;
 $\delta(A) = 0$ A est sélectionné.
B et E sont les successeurs de A qui ne sont pas traités ;
 $0 + 8 < \infty$ donc $\delta(B) = 8$ et $p(B) = A$;
 $0 + 3 < \infty$ donc $\delta(E) = 3$ et $p(E) = A$;
 $\delta_{min} = 3$, Le sommet E est sélectionné.
B et D sont les successeurs de E qui ne sont pas traités ;
 $3 + 4 < 8$ donc $\delta(B) = 7$ et $p(B) = E$;
 $3 + 12 < \infty$ donc $\delta(D) = 15$ et $p(D) = E$;
 $\delta_{min} = 7$, Le sommet B est sélectionné.
C et F sont les successeurs de B qui ne sont pas traités ;
 $7 + 2 < \infty$ donc $\delta(C) = 9$ et $p(C) = B$;
 $7 + 10 < \infty$ donc $\delta(F) = 17$ et $p(F) = B$;
 $\delta_{min} = 9$, Le sommet C est sélectionné.
D est le successeur de C qui n'est pas traité ;
 $9 + 3 < 15$ donc $\delta(D) = 12$ et $p(D) = C$;
 $\delta_{min} = 12$, Le sommet D est sélectionné.
F est le successeur de D qui n'est pas traité ;
 $12 + 3 < 17$ donc $\delta(F) = 15$ et $p(F) = D$;
Le sommet F est le dernier sommet traité.

- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet x , il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de x .

Ainsi, le plus court chemin de A à F est un chemin de longueur 15.

Comme $F \leftarrow D \leftarrow C \leftarrow B \leftarrow E \leftarrow A$ on obtient que le plus court chemin de A à F est A E B C D F.

1. Existe-t-il des chaînes de longueur 2 partant du sommet A et aboutissant au sommet C ?
2. Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Le graphe pondéré ci-dessous, donne en minutes, les durées moyennes des parcours entre A et C en tenant compte des sens uniques.

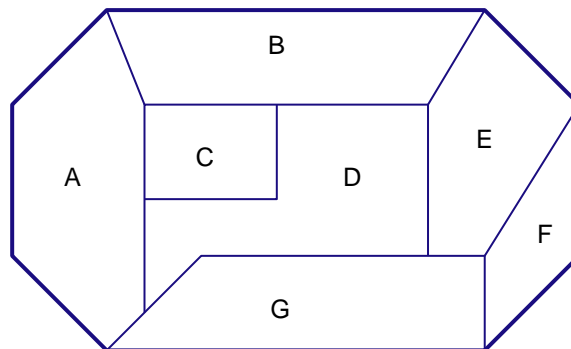


Un automobiliste doit se rendre de A à C. En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à C.

Le retour sera-t-il plus rapide que l'aller ?

EXERCICE 4

Sur la carte ci-dessous, sont représentés sept pays avec leurs frontières.



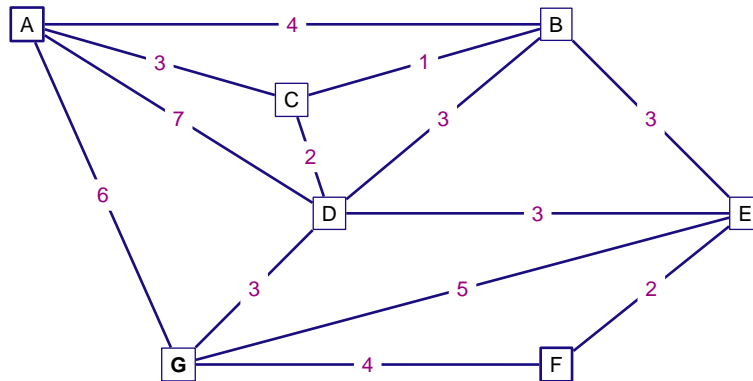
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1. On s'intéresse aux frontières séparant ces pays :
 - a) Traduire cette carte par un graphe dont les sommets sont les pays et où chaque arête représente une frontière entre deux pays.
 - b) On appelle M la matrice associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

Une des trois matrices R , S ou T est la matrice M^3 . Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3 .

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 12 & 8 & 9 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 6 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 11 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 7 & 11 & 6 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 11 & 7 & 6 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

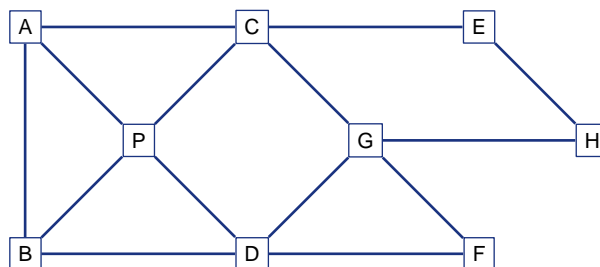
- c) Est-il possible, dans tous les cas, de se rendre d'un pays à un autre en franchissant exactement trois frontières ?
- d) Est-il possible de visiter tous les pays en franchissant une et une seule fois chacune des frontières ?
2. Une personne désire se rendre en train d'une ville située dans le pays A à une autre ville du pays F. Le graphe pondéré ci-dessous donne, en heures, les durées moyennes des liaisons ferroviaires existantes entre les différents pays en tenant compte des temps d'attente entre deux correspondances.



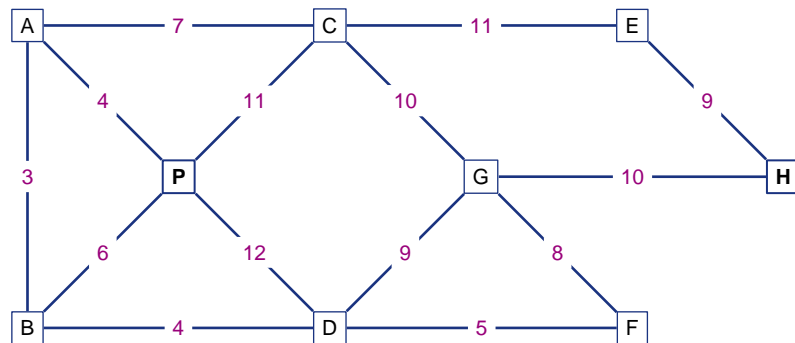
En précisant la méthode utilisée, déterminer le trajet le plus court que cette personne devra utiliser pour son voyage. Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 5

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'un quartier. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



- Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.
 - Montrer qu'un tel parcours est possible.
 - Un tel parcours est-il possible pour ce candidat en partant de sa permanence électorale située en *P* ? si oui le donner, sinon proposer un parcours possible en partant d'un autre endroit.
- Un candidat aux élections municipales se trouve dans sa permanence située en zone *P* quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone *H*.
 - Quel est le nombre minimal de voies d'accès principales que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous ?
 - Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées moyennes des trajets existants entre les différents lieux :



En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 6

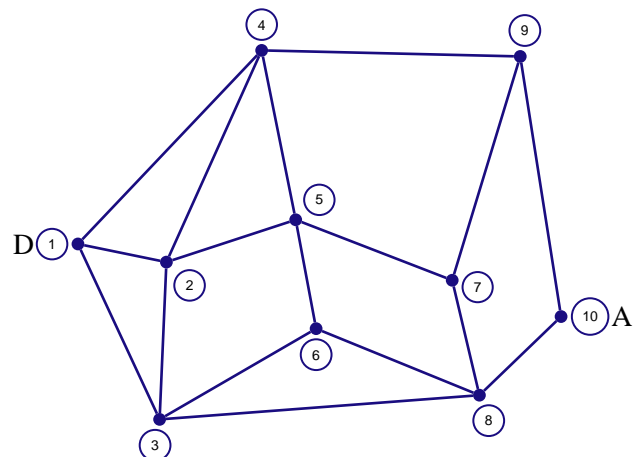
(D'après sujet bac Antilles, Guyane 2013)

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.

La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| ① Départ | ② Passerelle |
| ③ Roche percée | ④ Col des 3 vents |
| ⑤ Pic rouge | ⑥ Refuge |
| ⑦ Col vert | ⑧ Pont Napoléon |
| ⑨ Cascade des anglais | ⑩ Arrivée |



- Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
- Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ? Justifier votre réponse.

- On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5 .

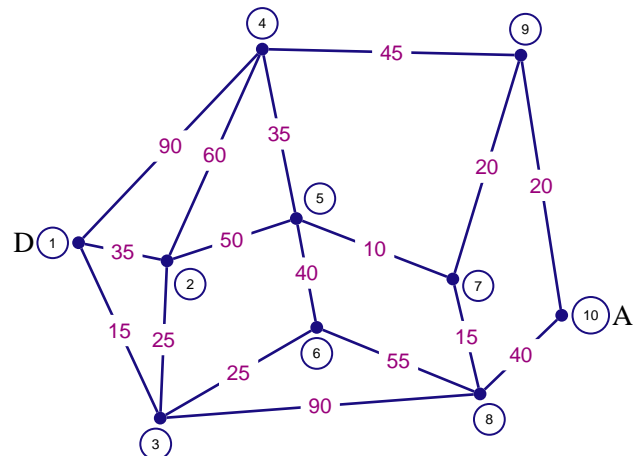
- Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
- Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.

Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.

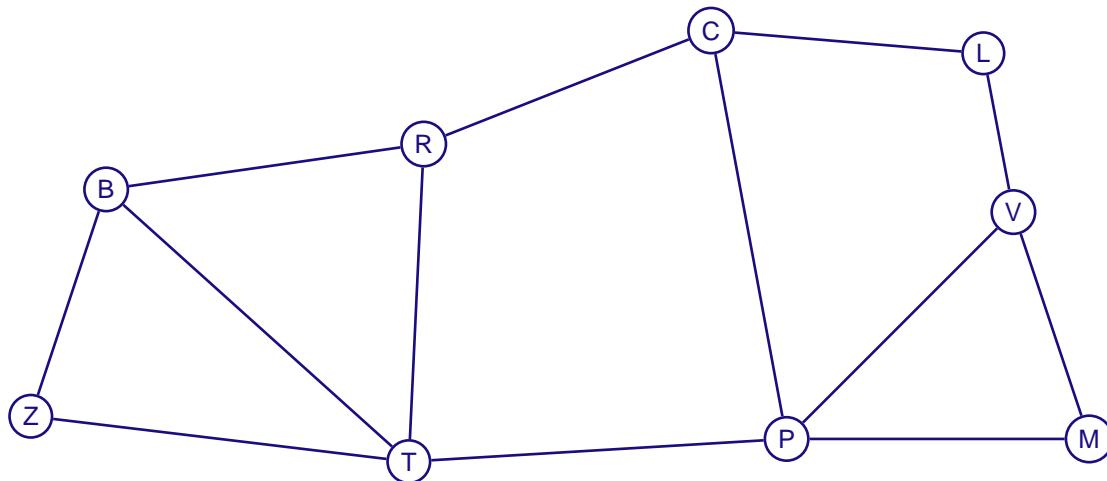
On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.



EXERCICE 7

(D'après sujet bac Liban 2013)

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

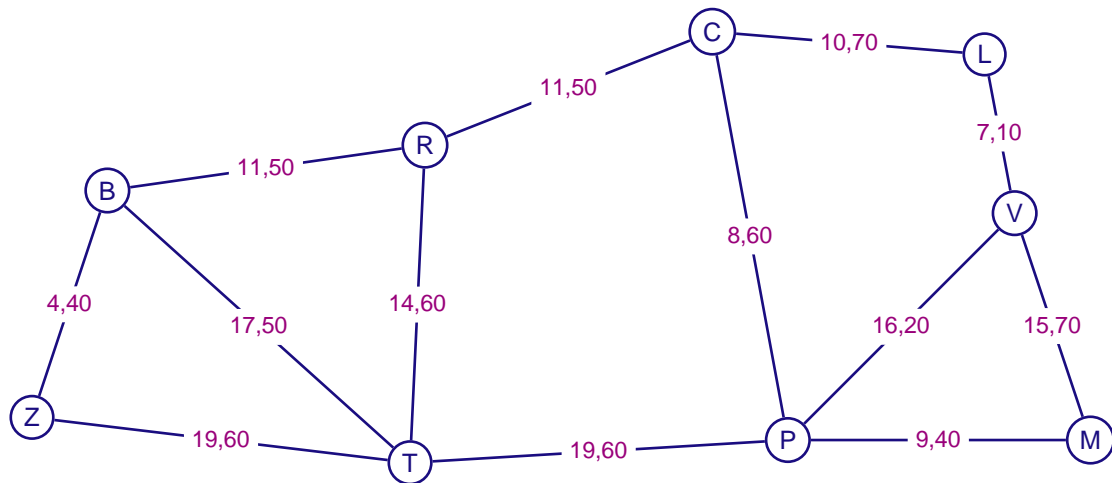


Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

- Déterminer l'ordre du graphe.
 - Déterminer si le graphe est connexe.
 - Déterminer si le graphe est complet.
- Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
- Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4 .
- b) En donner une interprétation.
4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



- a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
- b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.