钢丝杨氏模量 实验报告

(中国科学技术大学 李若贤　安徽合肥　230000)

(指导老师:吴俊杰)

摘要 本文基于光杠杆放大的原理,使用拉伸法测量了钢丝的杨氏模量,通过最小二乘法拟合数据,得到实验用钢丝的杨氏模量为$E = 1.87 \times 10^{11} Pa$,其标准不确定度为$u_E = 0.05 \times 10^{11} Pa$,相对标准不确定度为2.8%,符合实验要求,同时对实验过程的细节进行了探究.

关键词 杨氏模量 拉伸法 光杠杆 微小量放大

1.引言 [1]

杨氏模量在 1807 年由于托马斯·杨(Thomas Young)的研究成果而得名,是表征刚性材料在弹性限度内抗压或抗拉伸性能的物理量.杨氏模量的是材料本身的性质,与尺寸、外力、外形等因素无关,它的数值越大,材料就越难发生法向形变.测量材料的杨氏模量对材料的力学性能的了解与工程技术的改进有着重要意义.

2.实验原理与方法

2.1 实验原理

本文用到的符号及其代表的意义如表所示:

符号	物理意义
n	标尺读数
Δn	标尺移动的距离
b	支脚尖到刀口的距离(光杠杆的臂长)
D	标尺到平面镜的距离
L	钢丝长度
ΔL	钢丝长度变化量
d/y	钢丝直径
$\Delta d/\Delta y$	径向形变量
S	钢丝横截面积
a	砝码的个数
E	杨氏模量
m	一个砝码的质量
Y	切变模量
ν	泊松比

在材料的弹性限度内,材料受到的拉力与其法向形变满足:[2]

$$F = E\frac{\Delta L}{L}S$$

其中,ΔL是材料的伸长量,F是法向力,E是材料的杨氏模量,S是横截面积,L是材料的长度.通过测量钢丝的法向受力、长度及横截面积,可以求出其杨氏模量.

然而,通常情况下,ΔL一般都很小,难以直接测量,可以使用光杠杆法放大间接测量,实验原理如图:[3]

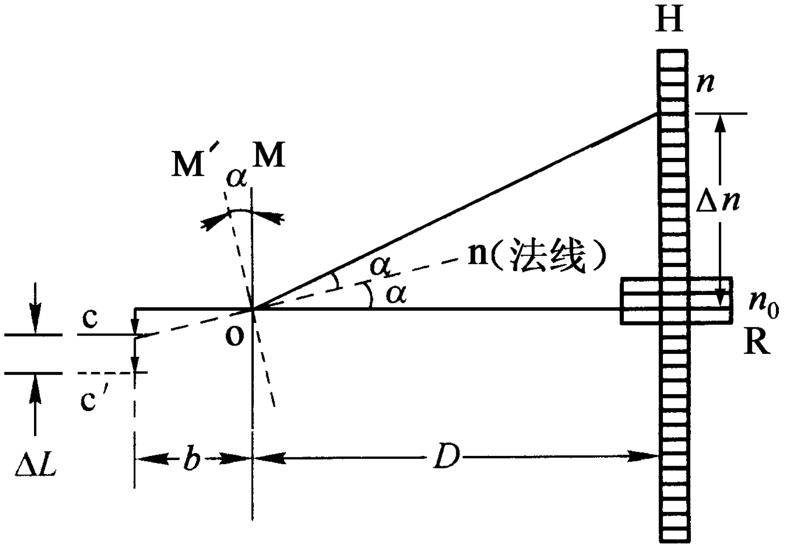


图 1　光杠杆法测杨氏模量的原理图

设b是支脚尖到刀口的垂直距离(即光杠杆的臂长),D是镜面到标尺的距离,Δn是标尺移动的距离,由于光杠杆偏转的角度α很小,则:

$$\tan 2\alpha = \frac{\Delta n}{D} \approx 2\alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta L}{b} \approx \alpha$$

可以得到:

$$\Delta L = \frac{\Delta n b}{2D}$$

从而E的表达式为:

$$E = \frac{2FLD}{bS\Delta n}$$

设望远镜中标尺的读数为n,测出D、L、S、b及一系列的n、F之后,作$n-F$图象,使用最小二乘法拟合直线并求出其斜率M.即可测出钢丝的杨氏模量为:

$$E = \frac{2LD}{bSM}$$

2.2 实验方法 [3]

实验装置如图 2 所示.调整望远镜的光路使标尺的像清晰且与望远镜中心刻度线对齐.依次在砝码盘上添加 1 至 8 块重$m = 1kg$的砝码,每添加一块后,记录望远镜中标尺的读数.

随后依次将砝码卸下,再记录一次标尺的读数,取两次的平均值作为标尺的读数n.

完成后,用卷尺测量D、L、b,用螺旋测微器测量钢丝直径d后,取平均值,计算出钢丝横截面积S.

取合肥市的重力加速度$g = 9.795m/s^2$,设砝码数量为a,则法向力大小 $F = amg$,作$n - F$图求出斜率后,代入 2.1 的公式后可以得到钢丝的杨氏模量,并对结果进行讨论.

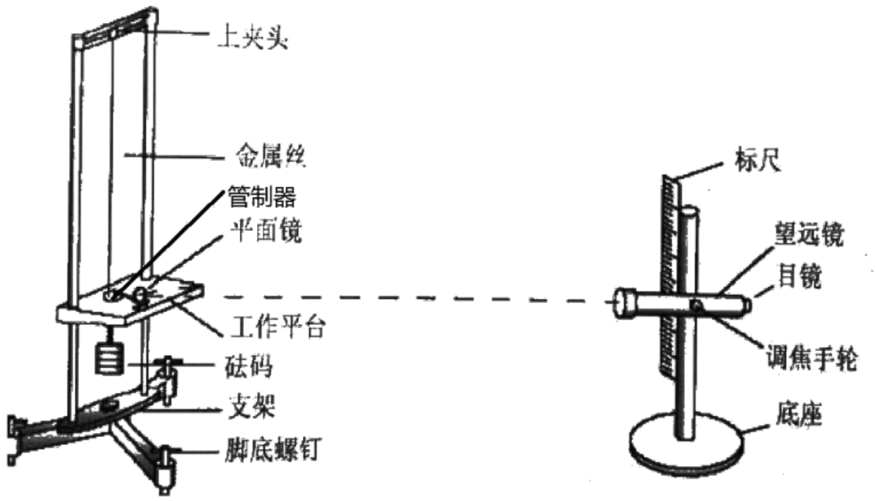


图 2　实验装置示意图

3.实验结果与讨论

3.1 杨氏模量的计算

实验测得的标尺读数n和砝码数量a的数据如下表:

砝码数量a	标尺读数(第一次)$n(cm)$	标尺读数(第二次)$n(cm)$	平均标尺读数$n(cm)$
1	5.27	5.35	5.31
2	7.41	6.80	7.11
3	8.12	7.85	7.99
4	9.25	9.00	9.13
5	10.11	10.31	10.21
6	11.39	11.57	11.48
7	12.74	12.83	12.79
8	14.05	14.15	14.10

由$F = amg = 9.795a(N)$,对n与F进行线性拟合,得到图象:

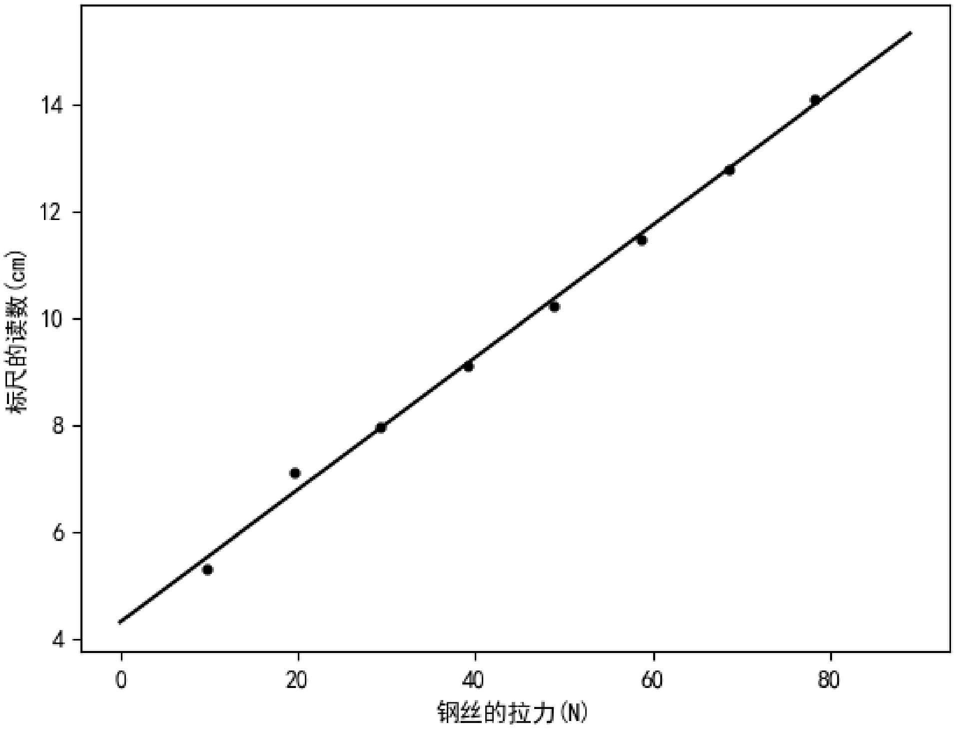


图 3　对n与F线性拟合得到的直线

得到的统计参数:

斜率M	$0.1235cm/N$
截距n_0	$4.325cm$

实验测得的钢丝长度L如下表:

测量次数	1	2	3	平均值
测量结果(cm)	73.70	73.70	73.70	73.70

实验测得的标尺到平面镜的距离D如下表:

测量次数	1	2	3	平均值
测量结果(cm)	129.00	128.20	128.40	128.53

实验测得的光杠杆的臂长b如下表:

测量次数	1	2	3	平均值
测量结果(cm)	6.30	6.31	6.30	6.30

实验测得的钢丝的直径d如下表:

螺旋测微器空程零点前移误差f(读数小于 0 为正值):

测量次数	1	2	3	平均值
测量结果(mm)	+0.008	+0.006	+0.005	+0.006

螺旋测微器读数h:

测量次数	1	2	3	4	5	6	平均值
测量结果(mm)	0.400	0.402	0.403	0.399	0.402	0.402	0.401

所以钢丝的直径$d = f + h = (0.401 + 0.006)mm = 0.407mm$

所得钢丝的横截面积$S = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0.130mm^2$

钢丝的杨氏模量

$$E = \frac{2DL}{SbM} = \frac{2 \times 1.2853 \times 0.737}{0.130 \times 10^{-6} \times 6.3 \times 10^{-2} \times 0.1235 \times 10^{-2}}Pa = 1.87 \times 10^{11}Pa$$

3.1 不确定度分析

下面求杨氏模量的标准不确定度 对于标尺到平面镜的长度D,其 A 类标准不确定度为:

$$u_{D1} = \sqrt{\frac{1}{n_D(n_D - 1)}\sum_{i=1}^{n_D}(D_i - \overline{\mathrm{D}})^2} = 0.240cm$$

取刚卷尺的最大允差$\Delta_1 = 0.12cm$,其 B 类标准不确定度近似符合正态分布:

$$u_{D2} = \frac{\Delta_1}{3} = 0.040cm$$

所以D的总合成标准不确定度为:

$$u_D = \sqrt{u_{D_1}^2 + u_{D_2}^2} = 0.243cm$$

对于钢丝长度L,同样地,有:

$$u_{L1} = \sqrt{\frac{1}{n_L(n_L - 1)}\sum_{i=1}^{n_L}(L_i - \overline{\mathrm{L}})^2} = 0$$

$$u_{L2} = \frac{\Delta_1}{3} = 0.040cm$$

$$u_L = \sqrt{u_{L_1}^2 + u_{L_2}^2} = 0.040cm$$

对于光杠杆的臂长b,同样地,有:

$$u_{b1}=\sqrt{\frac{1}{n_b(n_b-1)}\sum_{i=1}^{n_b}(b_i-\overline{\mathrm{b}})^2}=0.0041cm$$

$$u_{b2}=\frac{\Delta_1}{3}=0.040cm$$

$$u_b=\sqrt{u_{b_1}^2+u_{b_2}^2}=0.040cm$$

对于螺旋测微器的空程误差f,其 A 类标准不确定度为:

$$u_{f1}=\sqrt{\frac{1}{n_f(n_f-1)}\sum_{i=1}^{n_f}(f_i-\overline{\mathrm{f}})^2}=0.0009mm$$

取螺旋测微器的最大允差$\Delta_2=0.004mm$,其 B 类标准不确定度近似符合正态分布:

$$u_{f2}=\frac{\Delta_2}{3}=0.0013mm$$

合成标准不确定度:

$$u_f=\sqrt{u_{f1}^2+u_{f_2}^2}=0.0016mm$$

对于螺旋测微器的读数h,同样有:

$$u_{h1}=\sqrt{\frac{1}{n_h(n_h-1)}\sum_{i=1}^{n_h}(h_i-\overline{\mathrm{h}})^2}=0.0009mm$$

$$u_{h2}=\frac{\Delta_2}{3}=0.0013mm$$

$$u_h=\sqrt{u_{h1}^2+u_{h2}^2}=0.0016mm$$

钢丝的直径$d=f+h$,其标准不确定度:

$$u_d=\sqrt{u_f^2+u_h^2}=0.0023mm$$

则横截面积S的标准不确定度为:

$$u_S=\frac{\partial S}{\partial d}u_d=\frac{\pi d}{2}u_d=0.0015mm^2$$

对于斜率M,以 A 类标准不确定度代替整体标准不确定度:[4]

$$u_M=\frac{s_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_F}(F_i-\overline{\mathrm{F}})^2}}$$

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n_F}(n_i - (MF_i + n_0))^2}$$

代入得:

$$u_M = 0.0031cm/N$$

所以杨氏模量的相对标准不确定度:

$$\frac{u_E}{E} = \frac{1}{E}\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial D}u_D\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L}u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial S}u_S\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}u_b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial M}u_M\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{D}u_D\right)^2 + \left(\frac{1}{L}u_L\right)^2 + \left(\frac{1}{S}u_S\right)^2 + \left(\frac{1}{b}u_b\right)^2 + \left(\frac{1}{M}u_M\right)^2}$$

$$= 2.8\%$$

杨氏模量的总标准不确定度:

$$u_E = E \times 2.8\% = 0.05 \times 10^{11}Pa$$

最终测量结果为:

$$E = 1.87(05) \times 10^{11}Pa$$

4.思考题

4.1 利用光杠杆,把测量微小长度ΔL转变成测量标尺读数n ,光杠杆的放大率为$2D/b$,根据此式能否以增加D减小b来提高放大率,这样做有无好处？有无限度？应怎样考虑这个问题？

一定程度上,这样做的确可以提升放大率,使实验现象更加明显.

然而不能无限地这样操作下去,这是因为b太小时,其相对不确定度会很大,测量的精度会下降.同时,放大率的增大也会导致调整光路时难以快速找到标尺的像,标尺到平面镜的距离超出卷尺的测量范围,光杠杆臂长太小难以稳定放置等问题.

但是,如果D太小,放大率又可能不足,微小形变难以观察,D的测量不确定度就会增大.同时,实验中用到了近似条件$\tan\alpha \approx \alpha$,如果$b$和$D$太小,均可能导致近似条件失效,影响测量精度.

b和D两个因素实际上是互相制衡的.需要综合考虑不同的因素确定合适的D与b的值.

4.2 实验中,各个长度量用不同的仪器来测量是怎样考虑的,为什么？

测量仪器的选择是根据待测物理量的数值大小、测量精度的要求、物体的形状及仪器的性价比综合考虑的.对于标尺到平面镜的距离D,光杠杆的臂长b,钢丝长度L,它们的数值都在厘米量级,适合用卷尺测量,且卷尺的精度完全能满足其相对不确定度的要求,故无需更加贵重的仪器来测量.对于钢丝的直径d,其数值在 0.1 毫米量级,钢卷尺的分度值为 1 毫米,无法准确测

量,故必须选用更加精细的仪器,如螺旋测微器来测量.螺旋测微器的分度值达到了 0.01 毫米,可以满足对钢丝直径测量的相对不确定度要求,同时钢丝呈圆柱形,螺旋测微器带有测砧,可以固定住钢丝方便测量.

4.3 材料拉伸的同时,一般径向会收缩,调研文献,如果同时考虑纵向拉伸和径向收缩,如何定义物理量描述材料的这种性质？

在材料科学中,通常用泊松比(ν)来描述材料轴向拉伸时同时发生的径向收缩,其定义为:

$$\nu = \frac{\Delta L/L}{\Delta y/y}$$

其中ΔL为拉伸方向的形变,L为原始长度;Δy为径向的形变,y为原始的直径.它与杨氏模量E和切变模量Y的关系是:

$$Y = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

实验测得金属(如钢)的泊松比大约为$\nu \approx 0.3$,下面估计实验过程中钢丝的径向的形变量

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta nb}{2DL} \approx \frac{0.01 \times 0.06}{2 \times 1.29 \times 0.7} = 0.00033$$

$$\Delta d = d\frac{\Delta L/L}{\nu} \approx 0.4 \times \frac{0.00033}{0.3} mm = 0.00044mm$$

可以看到,在本实验中,径向的形变在万分之一毫米数量级,而螺旋测微器最多读到千分之一毫米位,因此造成的误差很小,几乎可以忽略径向形变对测量结果造成的影响.

5.结论

本文使用拉伸法测量了钢丝的杨氏模量,通过最小二乘法拟合图象,得到杨氏模量的值为$1.78(05) \times 10^{11} Pa$,相对标准不确定度为2.8%,符合实验要求.同时对实验细节进行了进一步探讨,表明光杠杆的臂长和标尺到平面镜的距离的选择应综合考虑多种因素,对不同长度物理量的测量应根据其特性选择合适的工具.同时,引入泊松比描述了钢丝在拉伸时在径向的形变,通过计算表明在本实验中可以忽略钢丝直径的变化对实验结果的影响.

参考文献

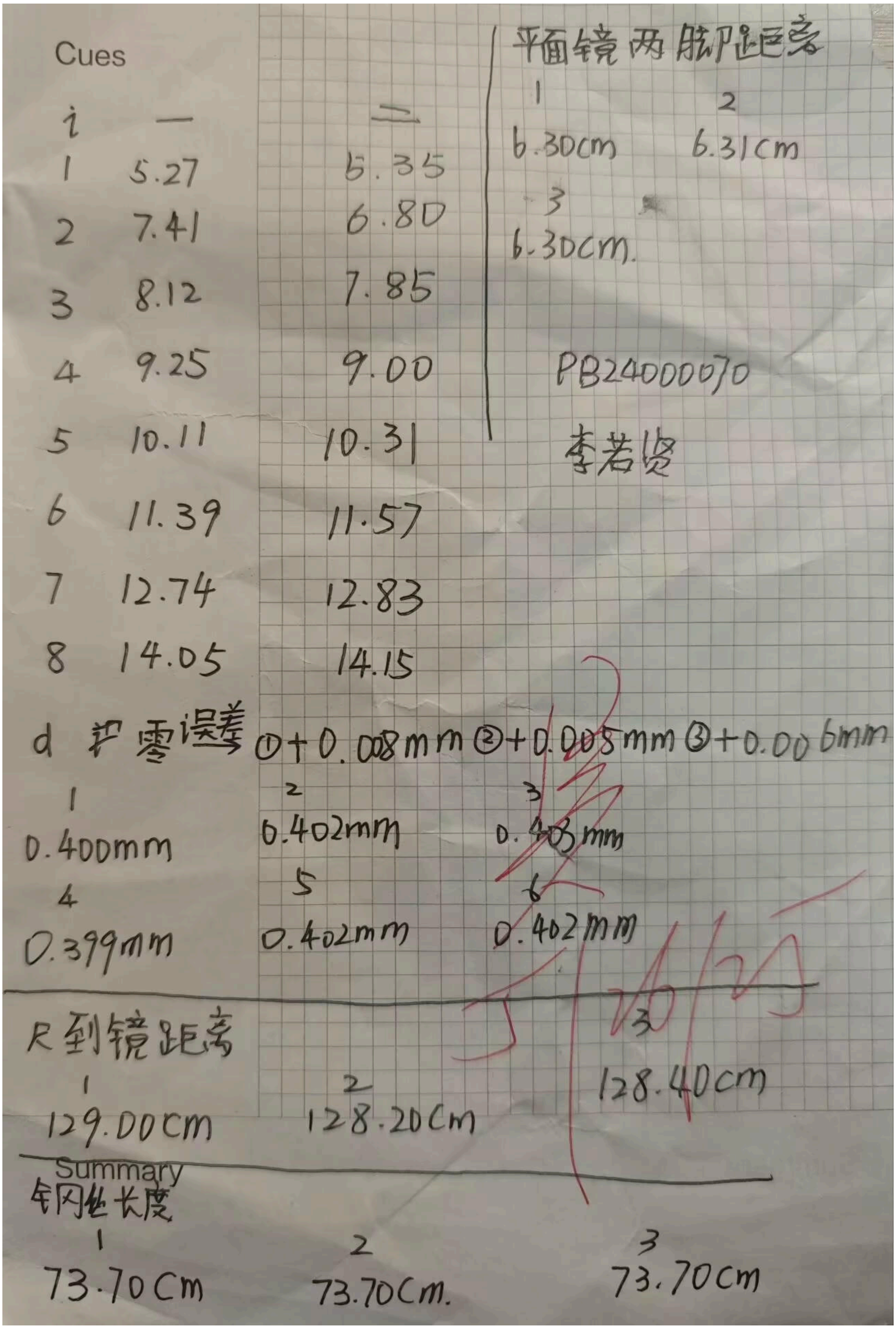
[1] 张增明等, 编, 大学物理实验 第一册. 高等教育出版社.

[2] 舒幼生, 力学（物理类）. 北京大学出版社.

[3] 梁燕, 大学物理 单摆实验讲义.

[4] 吴平等, 理科物理实验教程. 清华大学出版社.

附:原始数据



Cues

i	一	二
1	5.27	5.35
2	7.41	6.80
3	8.12	7.85
4	9.25	9.00
5	10.11	10.31
6	11.39	11.57
7	12.74	12.83
8	14.05	14.15

平面镜两脚距离

1	2	3
6.30cm	6.31cm	6.30cm.

PB24000070

李若贤

d 护零误差 ①+0.008mm ②+0.005mm ③+0.006mm

1	2	3	4	5	6
0.400mm	0.402mm	0.403mm	0.399mm	0.402mm	0.402mm

R到镜距离

1	2	3
129.00cm	128.20cm	128.40cm

Summary

钢丝长度

1	2	3
73.70cm	73.70cm.	73.70cm