单摆法测重力加速度 实验报告

(中国科学技术大学 李若贤 安徽合肥 230000)

(指导老师:浦其荣)

摘要 本文使用单摆法测量了合肥的重力加速度,固定摆长测得的值为$9.829m/s^2$,其标准不确定度为$0.098m/s^2$,符合相对不确定度控制在1%以内的实验要求. 改变摆长测得了多组不同的数据,通过最小二乘法拟合得到重力加速度为$9.815m/s^2$.使用 tracker 视频追踪软件拟合了小球的运动方程,得到修正后的重力加速度$g' = 9.797m/s^2$,还通过振幅的变化研究了空气阻力对单摆周期的修正.

关键词 单摆 重力加速度 视频追踪 空气阻力

1.引言 [1]

单摆实验是一个经典实验.16 世纪末,意大利科学家伽利略在观察吊灯的摆动时,首次发现了单摆的等时性,并指出了单摆的周期与其摆长的平方根的正比关系.17 世纪,荷兰科学家惠更斯对单摆展开了更加深入的研究,并发明了第一个实用的摆钟,极大地提高了计时的精度.对单摆的研究既推动了钟表技术的发展,也为物理动力学理论的建立奠定了深厚的基础.

2.实验仪器与原理 [2]

2.1 实验仪器

单摆(带标尺,平面镜;摆线长度可调,调整上限约为 $100cm$),钢卷尺,电子秒表, 智能手机

2.2 实验原理

理想的单摆仅由一根无质量的细绳系着一个质点组成,其在真空中垂直于地面的平面内做小角度摆动($\theta < 5°$).这在实际生活中是不存在的.在实际中,单摆的周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m}\left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m}\right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16}\right)$$

式中T是单摆的周期,l, m_0是单摆摆线的长度和质量,d, m, ρ是摆球的直径、质量和密度,ρ_0是空气密度,θ是摆角.

一般情况下,摆角($\theta < 5°$),摆球的几何形状,摆线的质量,空气的阻力与浮力对T的修正都小于10^{-3}.本实验的精度要求在1%以内,这些修正项都可以忽略不计,在一级近似下,单摆的周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

由此得重力加速度的计算公式为:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

通过测量单摆摆长与周期的数据,可以求得当地的重力加速度.

3.实验方案设计

3.1 估算一次测量最少要测的周期数

为将固定摆长测量时的结果的相对不确定度控制在1%以内,下面估算一次需要测量的周期数. 设u_g, u_l, u_T分别是测量重力加速度,摆长,周期的标准不确定度,由不确定度传递公式:

$$\frac{u_g}{g} = \frac{1}{g}\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}u_T\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{l}u_l\right)^2 + \left(\frac{2}{T}u_T\right)^2}$$

在估算中,长度测量的不确定度可取$u_l = 0.2cm$,一次周期测量的不确定度可取$u_T = 0.2$s,设摆长$l = 0.7m$.

取$g = 9.8m/s^2$,代入单摆的周期公式,得$T = 1.68s$.

测量一次得到的不确定度:

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{0.2\times 10^{-2}m}{0.7m}\right)^2 + \left(2\times\frac{0.2s}{1.68s}\right)^2}$$

$$= 23.8\% > 1\%$$

所以只测量一次不符合要求,设至少要测量n_T次才能满足要求,由不确定度均分原理,每一次周期的不确定度为$\frac{1}{n_T}u_T$:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{l}u_l\right)^2 + \left(\frac{2}{n_T T}u_T\right)^2} < 1\%$$

解得:

$$n > 24.8$$

即至少测量 25 个周期才能满足要求.

3.2 固定摆长测量重力加速度

调整单摆装置,使摆长固定为$l = 70cm$,使摆球自然下垂,测量并记录此时的摆长l,在摆平面内拉开小球(摆角 $\theta < 5°$),无初速度地释放小球,当小球经过最低点时开始计时, 测量并记录小球摆动 25 个周期所用的时间$25T$,重复测量 6 次,将测量的摆长与周期的平均值代入公式,求出重力加速度g.

3.3 改变摆长测量重力加速度

逐次改变摆长,测量每次的摆长l与周期T,对$4\pi^2 l$与T^2做线性拟合,得出直线的斜率b,则重力加速度$g = b$.

3.4 利用 tracker 软件研究大摆角下单摆的运动

拉开小球至大摆角($\theta \approx 10°$)的位置静止释放,使用分辨率为 30FPS 的智能手机录制一段小球运动的视频,导入 tracker 软件中进行拟合,并研究小球的运动规律,使用摆角修正后的公式计算重力加速度,并与原结果对比.

4.实验结果与讨论

4.1 固定摆长测量重力加速度

实验测得的数据如下表:

次序	摆长l/cm	25 个周期的时间$25T/s$	周期T/s
1	70.00	42.02	1.6808
2	70.10	42.02	1.6808
3	70.00	42.00	1.6800
4	70.05	42.03	1.6812
5	70.00	42.07	1.6828
6	70.05	41.96	1.6784
平均	70.03	42.02	1.6807

由以上摆长和周期均值求得:

$$g = 9.829 m/s^2$$

下面对测量结果进行不确定度分析,长度的测量模型为:

$$l = l_1 + l_2$$

其中l_1是测量读数,l_2是测量悬点到球心距离的误差,其中对l_1可适用 A 类不确定度评定:

$$u_{l_1} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\left(l_i - \bar{l}\right)^2}{n_l(n_l - 1)}$$

其中$n_l = 6$是长度测量的次数,$\bar{l}$是长度测量的平均值.

对于l_2,其产生的主要原因是钢卷尺测量时难以与球心对齐,可估计其标准不确定度为

$$u_{l_2} = 0.2cm$$

长度测量的总不确定度为: $u_l = \sqrt{u_{l_1}^2 + u_{l_2}^2}$.

周期的测量模型为:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

其中T_1是 g 根据读数的测量值,T_2是人启动、按停秒表反应时间产生的误差,T_3是秒表本身计时产生的误差.

对T_1可适用 A 类不确定度评定:

$$u_{T_1} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\left(T_i - \overline{T}\right)^2}{n_T(n_T - 1)}$$

其中$n_T = 6$是长度测量的次数,$\overline{T}$是周期测量的平均值.

对T_2,人启动、停止秒表产生的不确定度约为$u_{人} = 0.2s$,由不确定度均分原理,一次周期由T_2带来的不确定度为:

$$u_{T_2} = \frac{u_{人}}{n_T} s$$

对T_3,可适用 B 类不确定度评估,秒表的最大允差为$\Delta_{秒} = 0.05s$,测量误差近似服从正态分布,故其标准不确定度为:

$$u_{T_3} = \frac{\Delta_{秒}}{3n_T} s$$

周期测量的总不确定度为: $u_T = \sqrt{u_{T_1}^2 + u_{T_2}^2 + u_{T_3}^2}$.

重力加速度的标准不确定度合成公式:

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{1}{l} u_l\right)^2 + \left(\frac{2}{T} u_T\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\left(l_i - \bar{l}\right)^2}{n_l(n_l - 1)} + u_B^2\right) + \left(\frac{2}{T}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n_T} \frac{\left(T_i - \overline{T}\right)^2}{n_T(n_T - 1)} + \left(\frac{\Delta_{秒}}{3n_T}\right)^2 + \left(\frac{u_{人}}{n_T}\right)^2\right)}$$

式中摆长和周期测量了n_l, n_T次,均值为$\bar{l}, \overline{T}$,u_B是钢卷尺测量不确定度,约为$0.2cm$,$u_{人}$是人测量时间的不确定度,约为$0.2s$,$\Delta_{秒}$是秒表的最大允差,约为$0.05s$.

代入公式可求得测量得出的重力加速度的标准不确定度为:

$$u_g = 0.098 m/s^2$$

故最终得到的重力加速度为:

$$g = 9.829(98) m/s^2$$

4.2 改变摆长测量重力加速度

实验测得的数据如下表:

次序	摆长l/cm	$4\pi^2 l/m$	25 个周期的时间$25T/s$	周期T/s	T^2/s^2
1	70.00	27.63	41.94	1.6776	2.814
2	82.20	32.45	45.55	1.8220	3.320
3	93.50	36.91	48.56	1.9424	3.773
4	106.35	41.99	51.62	2.0648	4.263
5	128.50	50.73	56.89	2.2756	5.178
6	138.36	54.62	60.50	2.4200	5.856

设$y = 4\pi^2 l$与$x = T^2$使用函数模型

$$y = bx + a$$

进行线性拟合:

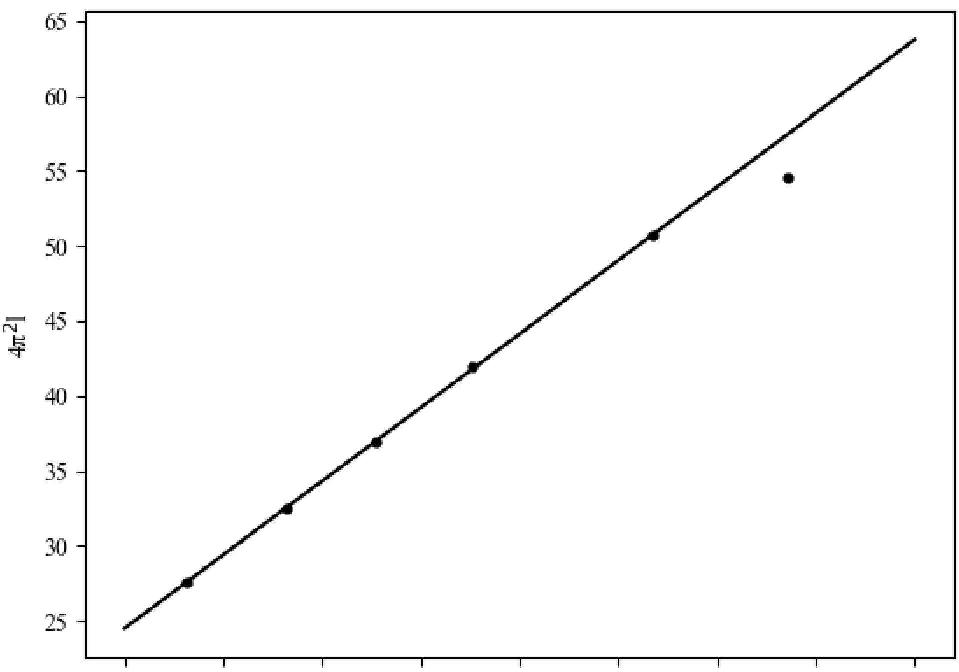


图 1 $4\pi^2 l$与T^2之间的线性拟合

在拟合中,最后一组数据明显偏离其他数据的直线,这可能是实验操作或记录的失误导致的,舍去该组数据,得到上图.

拟合得到的统计参数为:相关系数$r = 0.9999$,$b = 9.815m/s^2$,$a = -0.039m$.由此得到重力加速度$g = b = 9.815m/s^2$

其 A 类不确定度[3] 为:

$$u_g = \frac{s}{S_x}$$

$$S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2}$$

得:

$$u_g = 0.067 m/s^2$$

这里简单地使用 A 类不确定度来代替整体的不确定度.故最终得到的重力加速度为:

$$g = 9.815(67) m/s^2$$

4.3 利用 tracker 软件研究大摆角下单摆的运动

4.3.1 研究大摆角对重力加速度测量结果的修正

对 10°摆角的大角度单摆运动视频导入 tracker 软件,对小球进行轨迹追踪,得到有效数据 1499 组.

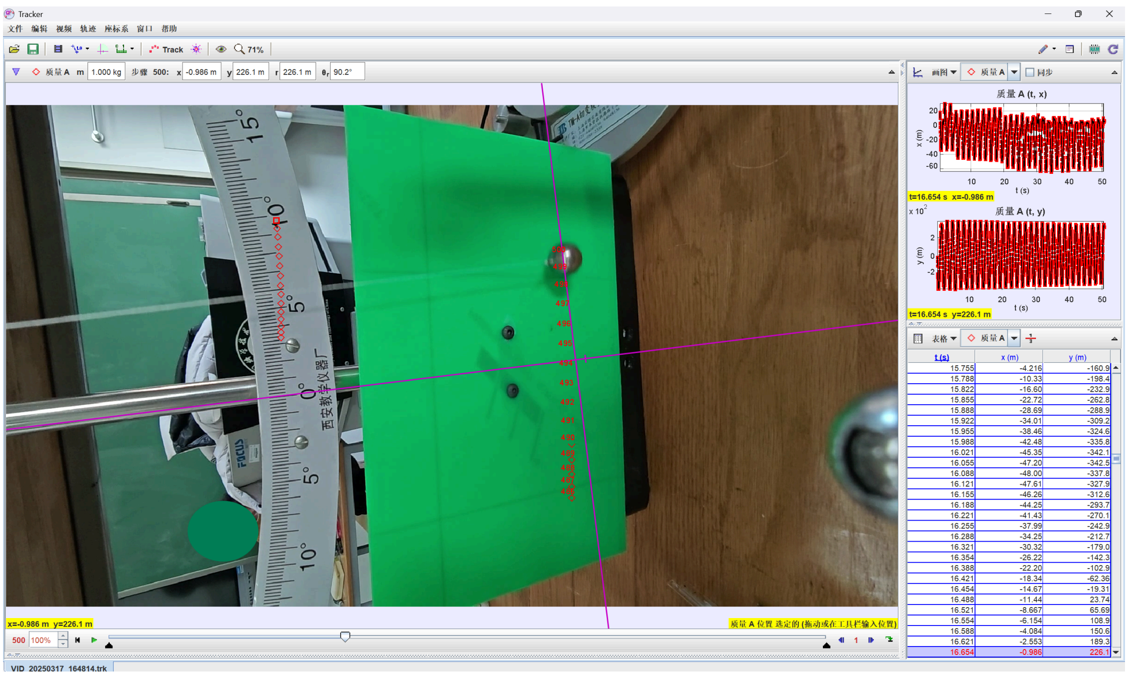


图 2　使用 tracker 软件对小球运动轨迹进行追踪

对小球运动的y坐标(单位:m,未按照实际长度定标)与时间$t(s)$之间使用三角函数模型

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) + b$$

拟合,得到的统计参数:$\omega = 3.734 s^{-1}$, $A = 3.461 m$, $\varphi = -4.959$, $b = 0.116 m$.

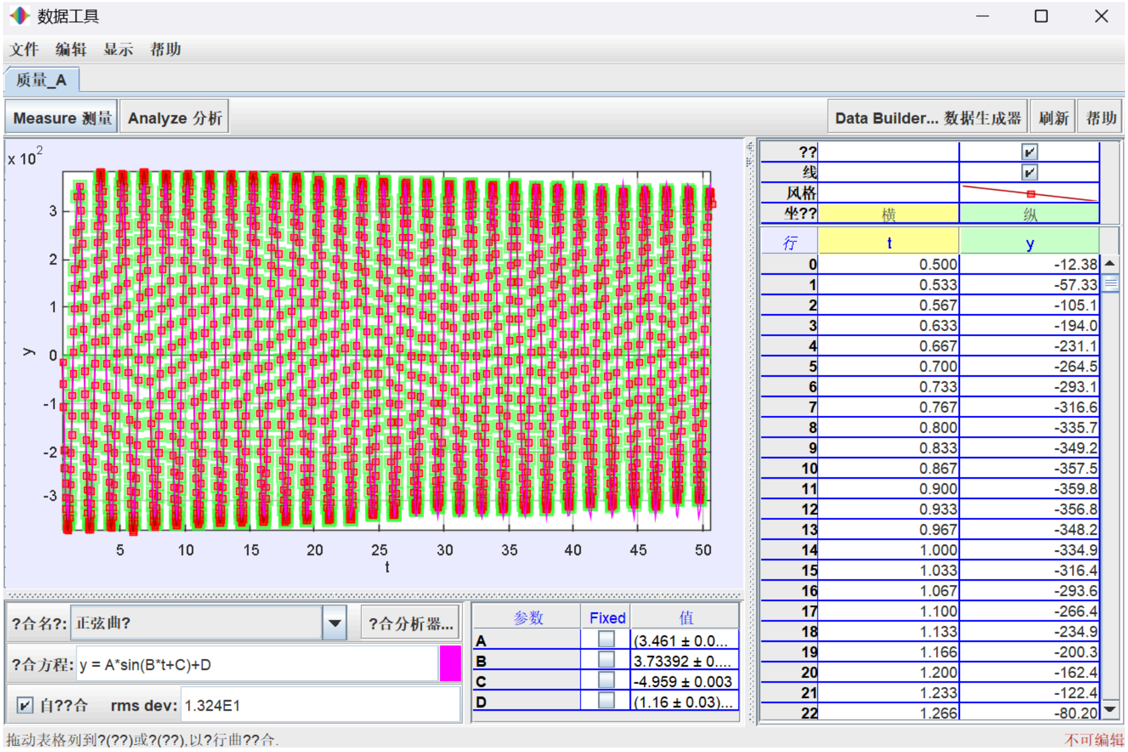


图 3 使用 tracker 软件拟合正弦曲线

其中ω 是单摆振动的圆频率,使用一级近似公式,则可以求出重力加速度:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = l\omega^2 = 9.760m/s^2$$

考虑到大摆角的修正后的周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}\left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$$

据此可以求出修正后的重力加速度为:

$$g' = l\omega^2\left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)^2 = 9.797m/s^2$$

可以看到,使用修正后的公式得出的重力加速度与合肥市重力加速度参考值$g_0 = 9.795m/s^2$差距很小,测量精度较高.

4.3.2 研究空气阻力对单摆周期的修正

在下面的内容中,以小球相邻两次到达y坐标极大与极小点的中间时刻作为时间参数t,相邻两次y坐标的极大值与极小值的差作为振幅参数A.

实验录制了较长时间的单摆运动视频,编写程序,在$2.9975s$到$49.2920s$的有效数据中共得到了 27 组A与t的数据.

时间参数t/s	振幅参数A/cm	时间参数t/s	振幅参数A/cm	时间参数t/s	振幅参数A/cm
2.9975	740.1	4.6960	736.2	7.2105	734.8
8.9095	728.9	11.4240	727.4	13.1055	722.8
14.7880	720.6	16.4695	712.6	18.1510	714.4
19.8335	705.4	21.5150	701.1	24.0465	700.2
25.7285	687.8	27.3935	688.4	29.0925	676.4
30.7745	671.0	32.4560	672.8	34.1380	672.2
35.8365	665.7	37.5015	668.1	39.2005	664.3
40.8655	655.7	42.5645	648.3	44.2295	654.3
45.9450	650.6	47.5935	653.1	49.2920	641.3

设阻力满足的模型为 [4]

$$f = -kv$$

则由阻尼振动的解,振幅参数随时间的变化为:

$$A = A_0 e^{-\frac{k}{2m}t} = A_0 e^{-\beta t}$$

其中m是小球的质量,v是小球的速度, 使用函数模型$A = \alpha e^{-\beta t} + \gamma$进行拟合,得到统计参数: $\beta = 0.0058 s^{-1}$, $\alpha = 443.7cm$, $\gamma = 308.6cm$.

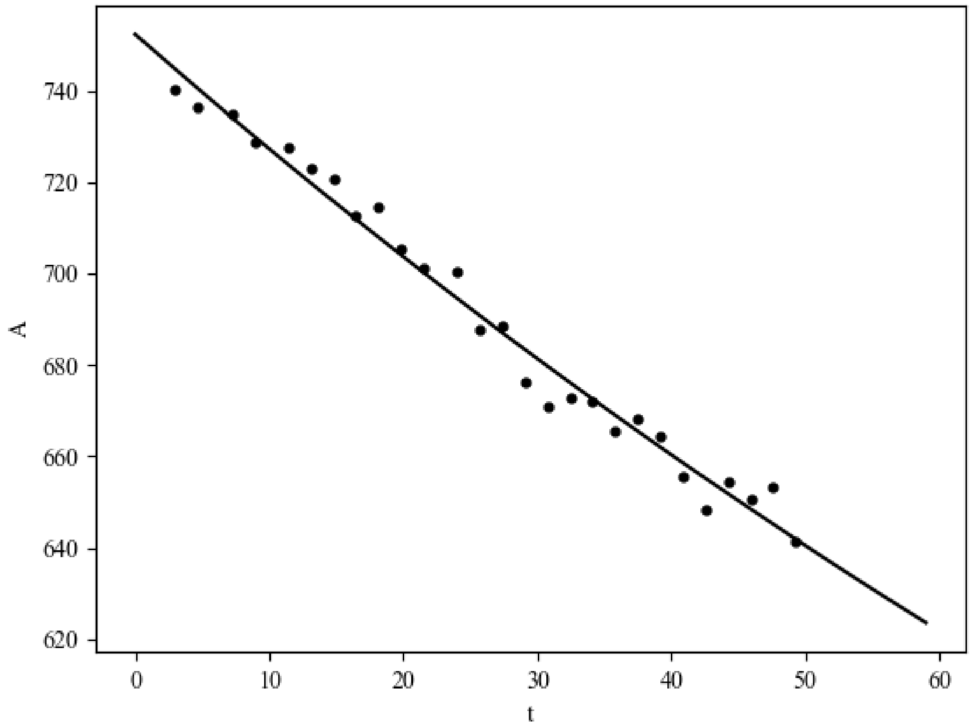


图 4 A随t的变化关系

在考虑空气阻力后,单摆的周期:

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2\right) = T\left(1 + 1.206 \times 10^{-6}\right)$$

可以看到,空气阻力对周期T的修正项在10^{-6}量级,故在本实验的精度要求下空气阻力的修正完全可以忽略不计.

5.结论

本文使用单摆法测量了合肥的重力加速度.通过固定摆长测得的值为$9.829m/s^2$,其标准不确定度为$0.098m/s^2$,满足相对不确定度控制在1%以内的实验要求. 改变摆长测得了多组不同的摆长与周期的数据,通过最小二乘法拟合得到重力加速度为$9.815m/s^2$,其 A 类不确定度为$0.067m/s^2$. 同时通过 tracker 视频追踪软件拟合了大摆角小球的运动方程,得到修正后的重力加速度$g' = 9.797m/s^2$,发现大摆角修正后的重力加速度更接近于参考值. 还通过振幅的变化研究了空气阻力对单摆周期的修正,得出空气阻力对周期的修正项在10^{-6}数量级,因此在精度要求为1%的实验中完全可以忽略空气阻力的影响.

参考文献

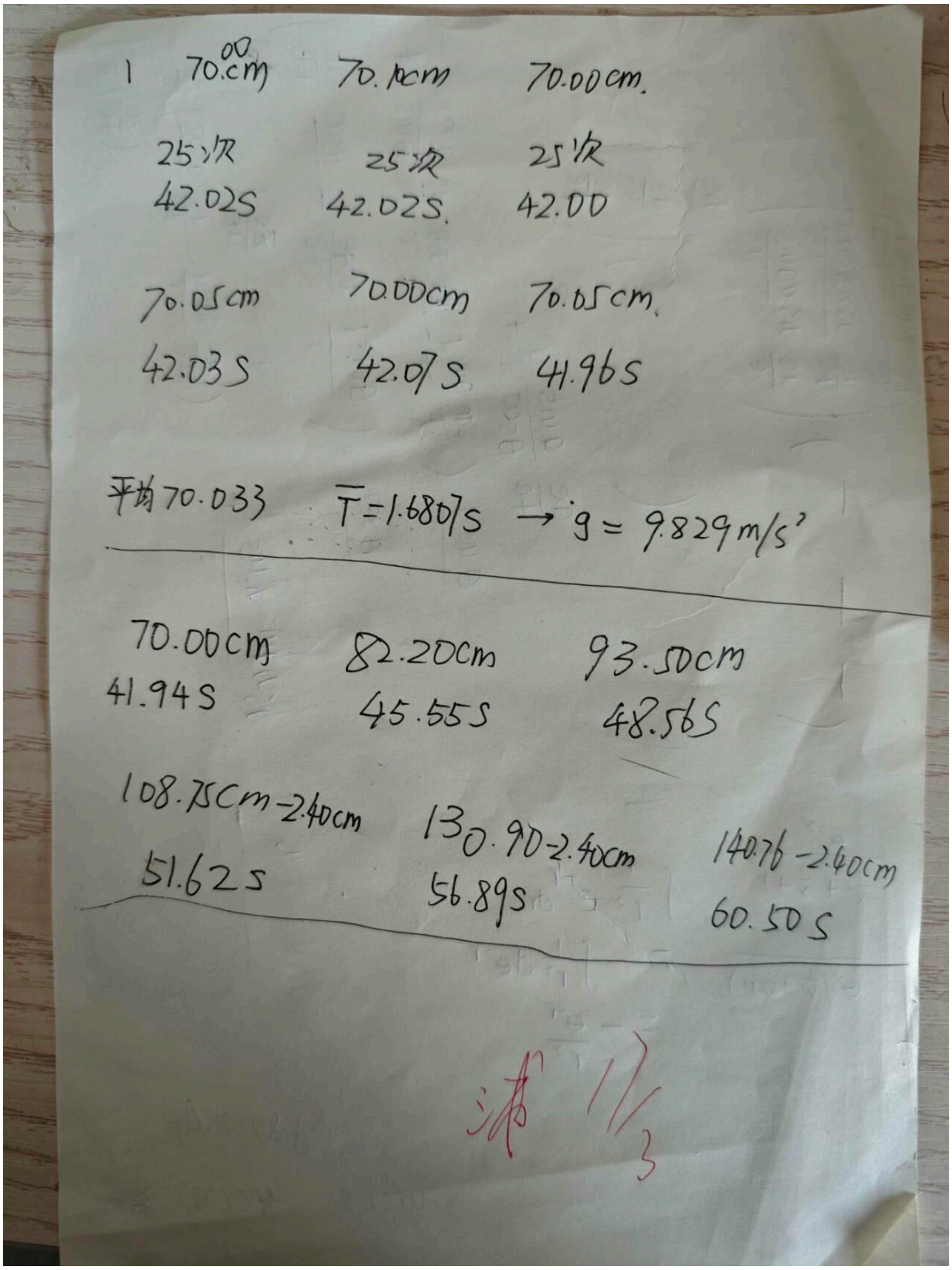
[1] 张增明等, 编, 大学物理实验 第一册. 高等教育出版社.

[2] 大学物理 单摆实验讲义.

[3] 吴平等, 理科物理实验教程. 清华大学出版社.

[4] 舒幼生, 力学（物理类）. 北京大学出版社.

附:原始数据


1 70.00cm 70.10cm 70.00cm.
25次 25次 25次
42.02S 42.02S. 42.00

70.05cm 70.00cm 70.05cm.
42.03S 42.07S 41.96S

平均70.033 $\bar{T}=1.6807s \rightarrow g = 9.829 m/s^2$

70.00cm 82.20cm 93.50cm
41.94S 45.55S 48.56S

108.75cm−2.40cm 130.90−2.40cm 140.76−2.40cm
51.62S 56.89S 60.50S

沛 1/3