主専攻実験第9週

信号の前処理2

- ノイズ除去ふたたび
  - 主成分分析
  - 独立成分分析
  - 経験的モード分解

多チャンネル信号

音声などの時系列信号とは異なり,
生体信号は多チャンネル計測がとても多い.
　∵**ノイズ対策**, 信号源が広く分布　などなど

例）睡眠ステージ判定の場合,
　　EEG 6ch, EOG 2ch, EMG 1ch　での計測が原則.

　具体的に, 多チャンネルの信号をどうノイズ除去に
　用いればよいのか？

周波数に着目したノイズ除去手順（おさらい）

ノイズ入りの信号

↓

周波数成分への分解

↓

信号とノイズの性質差
（ここでは周波数の違い）を利用.
ノイズのみ含まれる周波数成分を除去

↓

信号を再構成，ノイズ除去された信号に

周波数に着目したノイズ除去手順（おさらい）

ノイズ入りの信号

↓

周波数成分への分解

↓

信号とノイズの性質差
（ここでは周波数の違い）を利用.
ノイズのみ含まれる周波数成分を除去

↓

信号を再構成，ノイズ除去された信号に

周波数以外の性質も
使えるのでは？

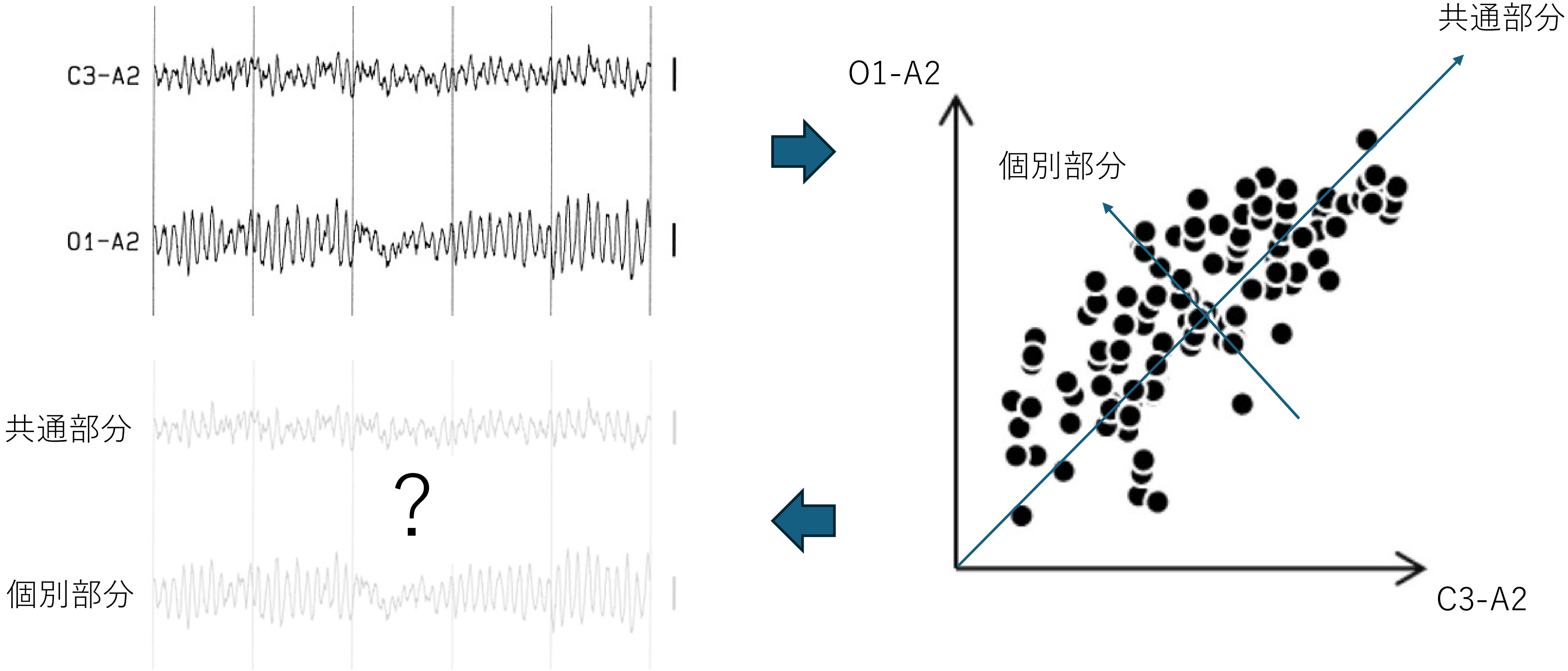
↓

周波数フィルタで
取り除けないノイズ

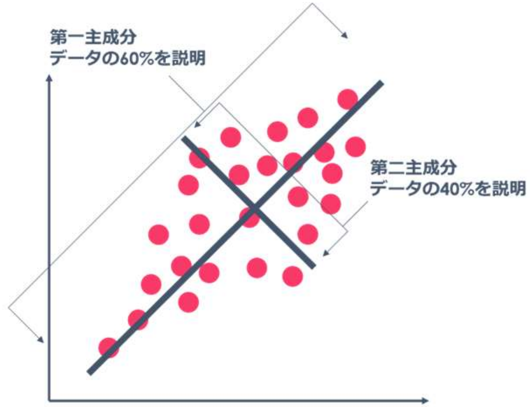
ではどのような性質が使えるのか？

1. 複数チャンネルを同時に計測して,
   「共通して現れるか否か」
   →**主成分分析**
2. 複数チャンネルで観測された信号は,
   複数の信号源から出た電位変化の重畳
   →「どの信号源から出てきたか」
   →**独立成分分析**
3. よく見る波形・変化のパターン
   →**経験的モード分解**

主成分分析による
ノイズ除去のイメージ



主成分分析

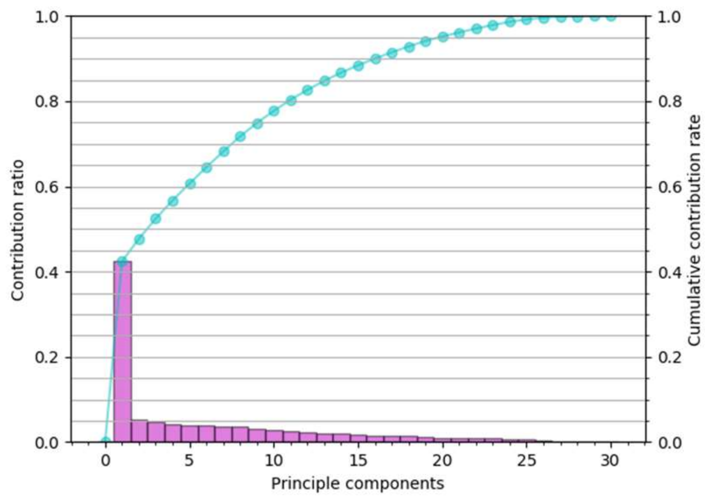


サンプルの分布を基に,
なるべく分散が大きくなる主成分を決定,
→作成済みの主成分と直交し，かつ分散が大きい主成分を，，，
（特定の条件を満たすようにした基底変換）

分散が大きい順に主成分を決定
→主成分ごとに分散が大きく異なる.

分散の全体に対する割合＝寄与率

あまり寄与していない成分を除去する
＝空間の縮退を是正し,
　同じ情報が繰り返し入力されないように



主成分分析を行列計算

主成分は，分散共分散行列の固有ベクトル

次のような列ベクトルを考える。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

このベクトルの要素が各々分散が有限である確率変数であるとき、(i, j) の要素が次のような行列 Σ を分散共分散行列という。

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{E}[\,(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\,] = \mathrm{E}(X_i X_j) - \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)$$

ただし、

$$\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$$

は、ベクトル X の i 番目の要素の期待値である。すなわち、Σ は次のような行列である。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)] \\ \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_n-\mu_n)] \end{bmatrix}$$

この行列の逆行列は Σ^{-1} は、**逆共分散行列**（英: inverse covariance matrix） または**精度行列**（英: precision matrix） と呼ばれる[1]。

主成分分析を行列計算

主成分は，分散共分散行列の固有ベクトル

次のような列ベクトルを考える。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

このベクトルの要素が各々分散が有限である確率変数であるとき、(i, j) の要素が次のような行列 Σ を分散共分散行列という。

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{E}[\,(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\,] = \mathrm{E}(X_i X_j) - \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)$$

ただし、

$$\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$$

は、ベクトル X の i 番目の要素の期待値である。すなわち、Σ は次のような行列である。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)] \\ \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_n-\mu_n)] \end{bmatrix}$$

この行列の逆行列は Σ^{-1} は、**逆共分散行列**（英: inverse covariance matrix） または**精度行列**（英: precision matrix） と呼ばれる[1]。

主成分分析を行列計算

主成分は，分散共分散行列の固有ベクトル

次のような列ベクトルを考える。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

このベクトルの要素が各々分散が有限である確率変数であるとき、(i, j) の要素が次のような行列 Σ を分散共分散行列という。

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{E}[\,(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\,] = \mathrm{E}(X_i X_j) - \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)$$

ただし、

$$\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$$

は、ベクトル X の i 番目の要素の期待値である。すなわち、Σ は次のような行列である。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] & \mathrm{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ \mathrm{E}[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & \mathrm{E}[(X_2 - \mu_2)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_2 - \mu_2)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & \mathrm{E}[(X_n - \mu_n)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_n - \mu_n)(X_n - \mu_n)] \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = V \Lambda V^{\top} = [v_1 \ldots v_d] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} [v_1 \ldots v_d]^{\top}.$$

固有値固有ベクトル分解

この行列の逆行列は Σ^{-1} は、**逆共分散行列**（英: inverse covariance matrix） または**精度行列**（英: precision matrix） と呼ばれる[1]。

生体信号への応用
サンプリング点をサンプルとして利用

生体信号X（Nチャンネル，サンプリング点T個）について考える

$$X=\begin{Bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,T} & \cdots & x_{N,T} \end{Bmatrix}$$

$$\Sigma_{ij}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_{i,t}-\mu_i)(x_{j,t}-\mu_j), \quad \mu_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{i,t}$$

生体信号への応用

生体信号X（Nチャンネル，サンプリング点T個）について考える

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \Sigma_{1,1} & \cdots & \Sigma_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{1,N} & \cdots & \Sigma_{N,N} \end{Bmatrix}$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_{i,t} - \mu_i)(x_{j,t} - \mu_j), \quad \mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{i,t}$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,T} & \cdots & x_{N,T} \end{Bmatrix}$$

生体信号への応用

生体信号X（Nチャンネル，サンプリング点T個）について考える

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_{i,t} - \mu_i)(x_{j,t} - \mu_j), \quad \mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{i,t}$$

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \Sigma_{1,1} & \cdots & \Sigma_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{1,N} & \cdots & \Sigma_{N,N} \end{Bmatrix}$$

$$\Sigma = V\Lambda V^\top = [v_1 \dots v_d] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} [v_1 \dots v_d]^\top.$$

固有値固有ベクトル分解

生体信号の分離

$$x_{i,t} = p_{i,t} + q_{i,t}$$

$p_{i,t}$： x_iに含まれる信号の時刻tにおける共通部分

$q_{i,t}$：　〃　個別部分

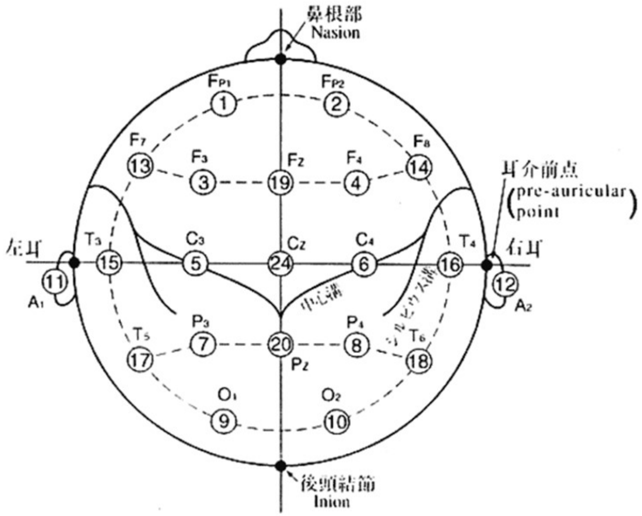
んで，どっちが信号でどっちがノイズなん？

↓

その時々で違う．．

Case 1

電極の配置（10-20 法）



眼電位とFp1, Fp2の同時計測を実施

Fp1，Fp2は眼電位の電極との
距離が近く，眼電が混入している可能性大

この場合，眼電位＆Fp1，Fp2すべてに共通する部分は
「眼電位」である可能性が高い

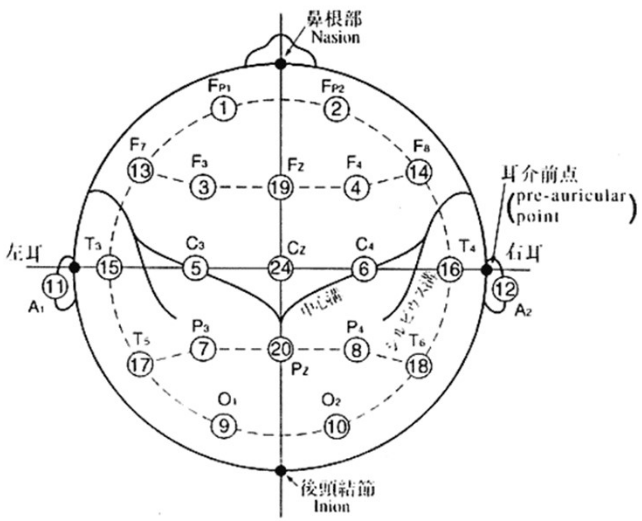
＝Fp1, Fp2にとってはノイズ
　眼電位電極にとっては信号

Fp1, Fp2にのみ共通する部分＝脳波

どれにも共有しない部分　　＝電極ノイズ

Case 2

電極の配置（10-20 法）



睡眠時の標準電極部位に設置.

・F3, F4など左右間は共通部が信号
　∵同じものを見ているはずだから

・C3, F3など前後間は共通部はノイズ？
　∵共通して観測されているなら
　　体動などの振幅の大きいノイズの混入っぽいから.

ノイズか信号かを既存の知見に基づいて見極めることが重要

本質的な問題も

医師・技師は，特徴波を
「最も見やすいチャンネルを参考にして判定している」

＝「共通部分を見ているわけではない」
　＃共通部分は平均的になりやすい

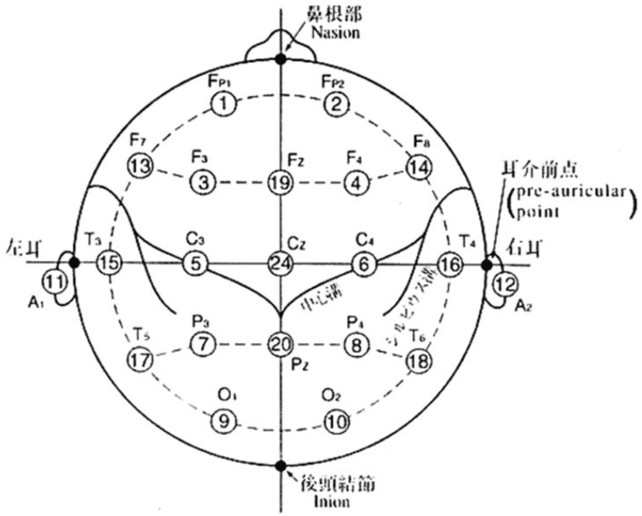
独立成分分析

本質的に，皮膚表面で計測した脳波は，
複数の信号源から発せられた脳活動を
重ね合わせて記録したものである．

$$X = AS$$

X：観測信号
A：混合行列（混ぜ合わせ方）
S：信号源から出た元信号

電極の配置（10-20 法）



独立成分分析

$$X = AS$$

この，　A, Sを求める方法が独立成分分析.

元信号の各サンプル点の分布は
正規分布に従わなくなる

元信号が互いに独立しているならば，その非ガウス性は高くなる

∵様々な特徴を持った信号を混ぜれば混ぜるほど
　その分布は正規分布に近づく

　何かしらの特徴を持った波形だけで構成されていれば，
　その分布は正規分布から離れる＝非ガウス性が高くなる

独立成分分析

$$X = AS$$

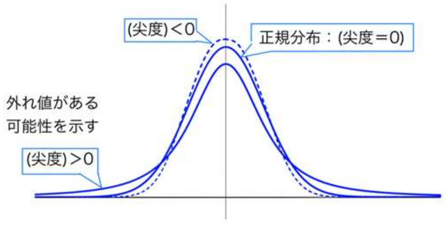
この，　A, Sを求める方法が独立成分分析.

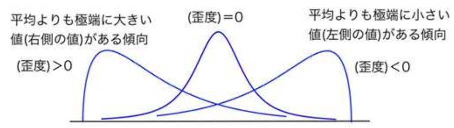
元信号の各サンプル点の分布は
正規分布に従わなくなる

元信号が互いに独立しているならば，その非ガウス性は高くなる

→Sの非ガウス性が高くなるように,
　AとSを最適化すればよい.

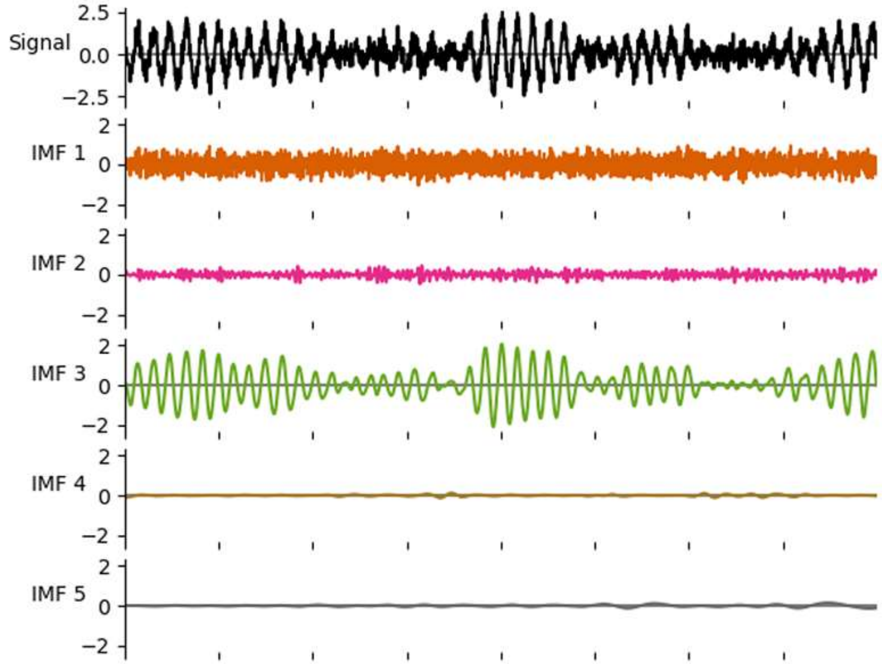
独立成分分析のアルゴリズム色々





- FastICA
  尖度や歪度から「非ガウス性」を指標化,
  これを最大化するように繰り返し計算（教師なし学習）
- Infomax Algorithm
  相互情報量の最小化
  ＝ある元信号から別の元信号が予測できない
  を目指すことで，独立成分を得る方法（教師なし学習）
- JADE（Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices）
  尖度用いて独立成分を分離する方法.
  行列計算で完結するので収束が安定.

経験的モード分解

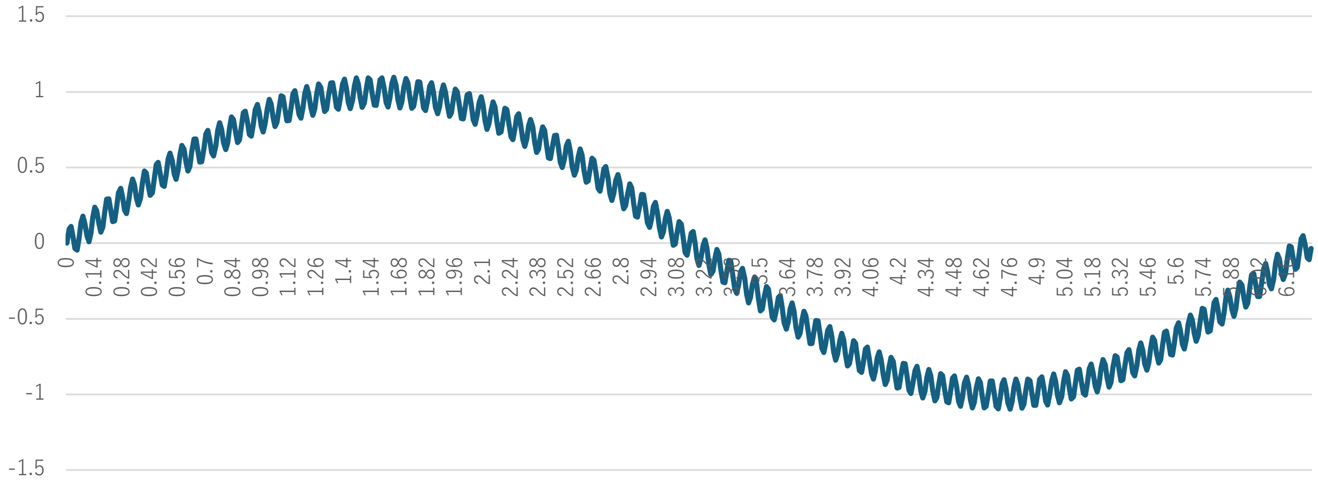


信号を複数の
<u>固有モード関数</u>に分解する手法

1. 各極値（ピークと谷）の間に
   ちょうど1つのゼロ交差点が存在する
   ＝バイアスが存在しない
2. 局所平均がゼロである
   ＝特定の周波数成分のみ含んでいる

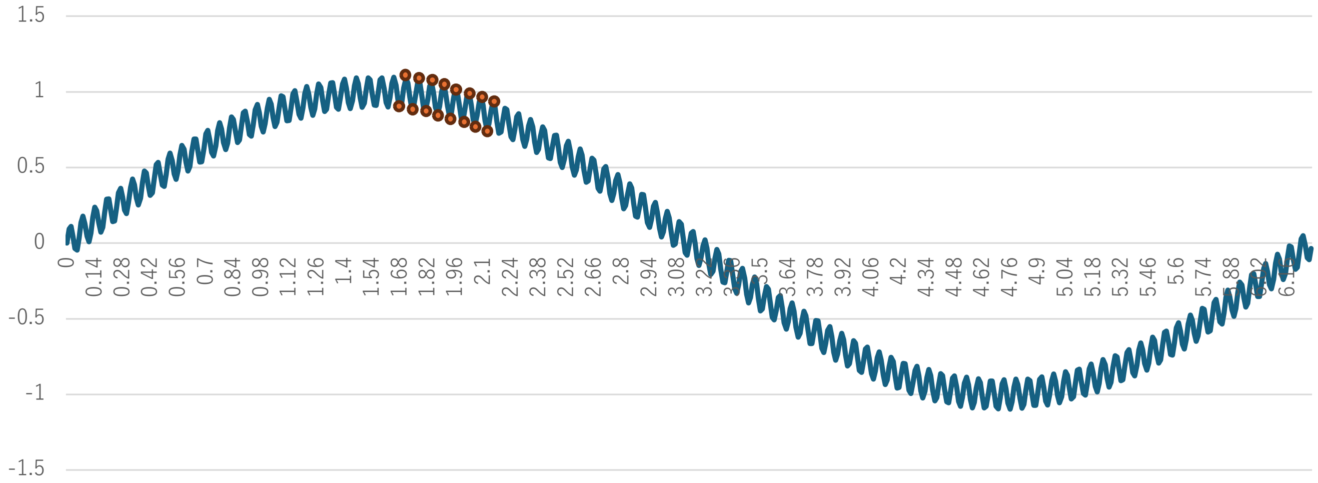
ちょっとフーリエに概念が似ている.
各周波数成分を時間軸上で分解しているイメージの操作

手順



Y = sin(x)+0.1sin(100x)

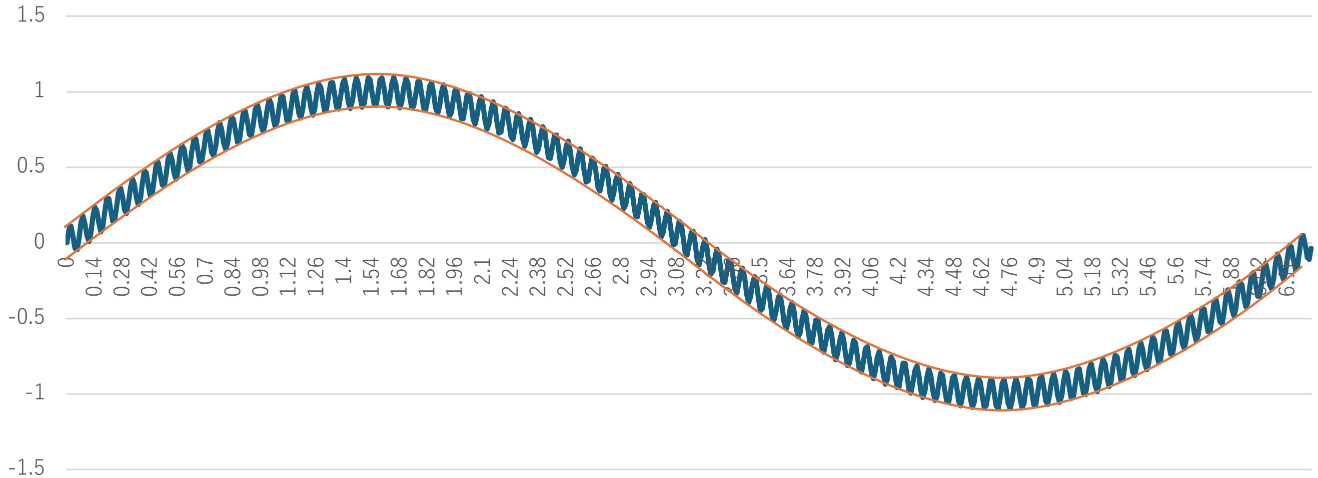
手順１極大値，極小値の検出



y = sin(x)+0.1sin(100x)

大変すぎるのでここまでで許してください．．．

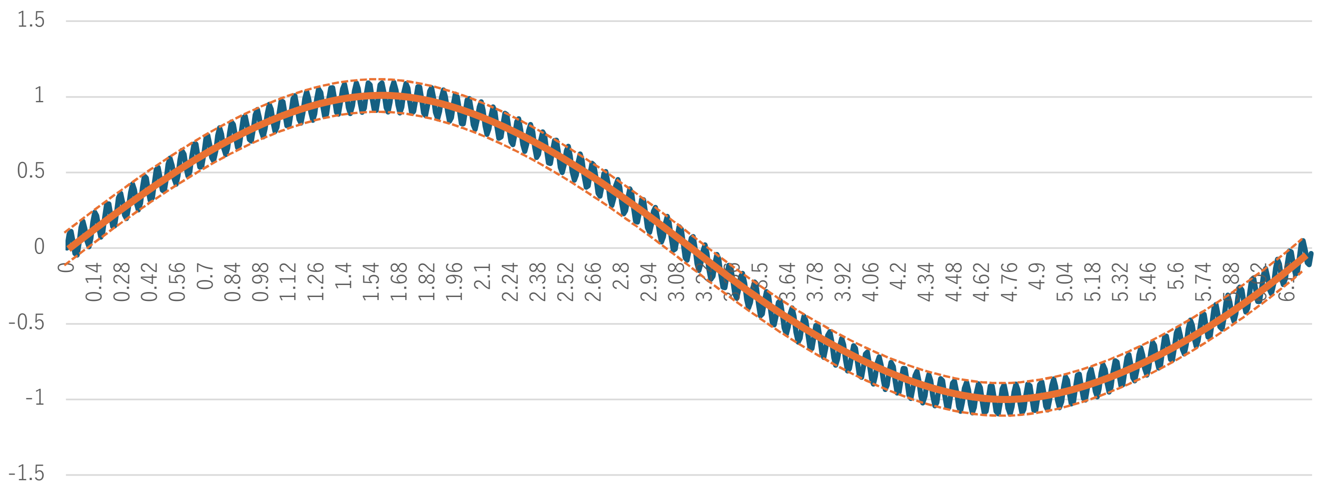
手順２包括線の作成



y = sin(x)+0.1sin(100x)

極大点同士，極小点同士を３次スプライン補完して包括線を作成

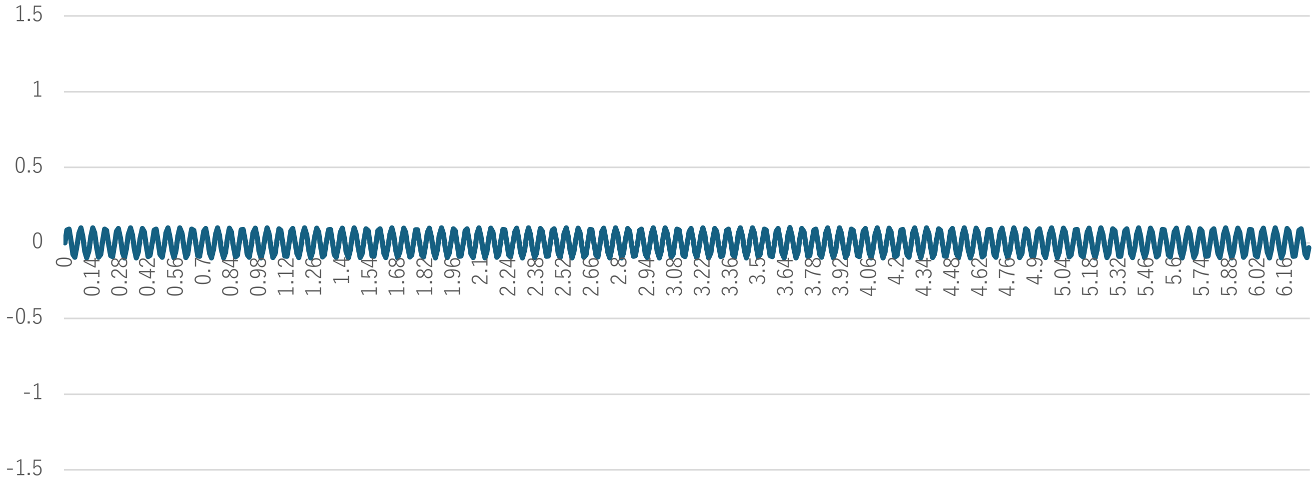
手順３ 上下の包括線の平均を取る



$y = \sin(x) + 0.1\sin(100x)$

上下の平均値とるだけ.

手順５固有モード関数候補の精査

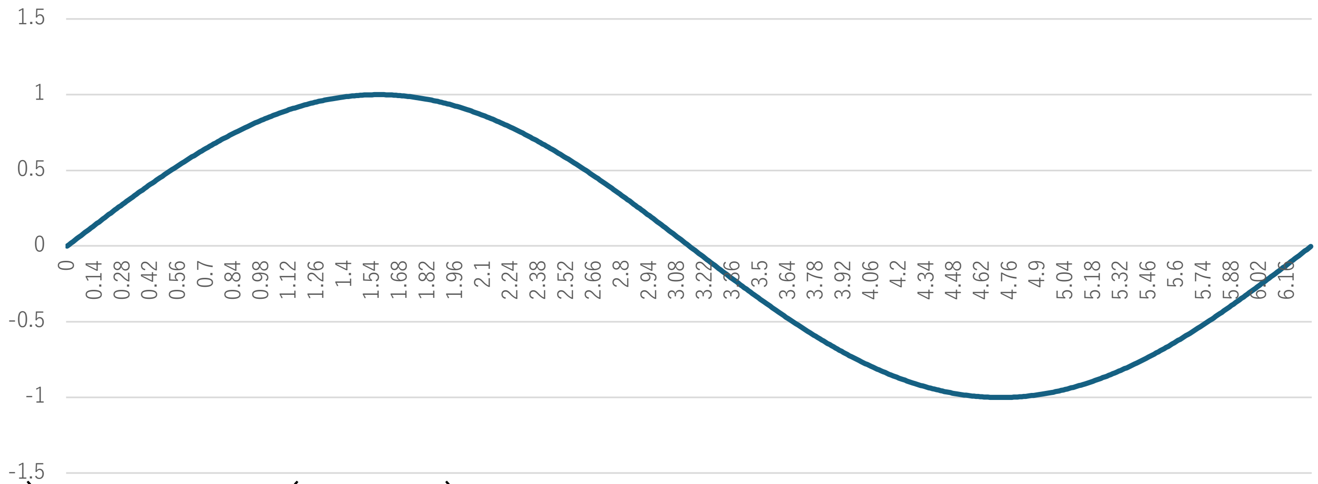


y = sin(x)+0.1sin(100x)

これが「固有モード関数の候補」

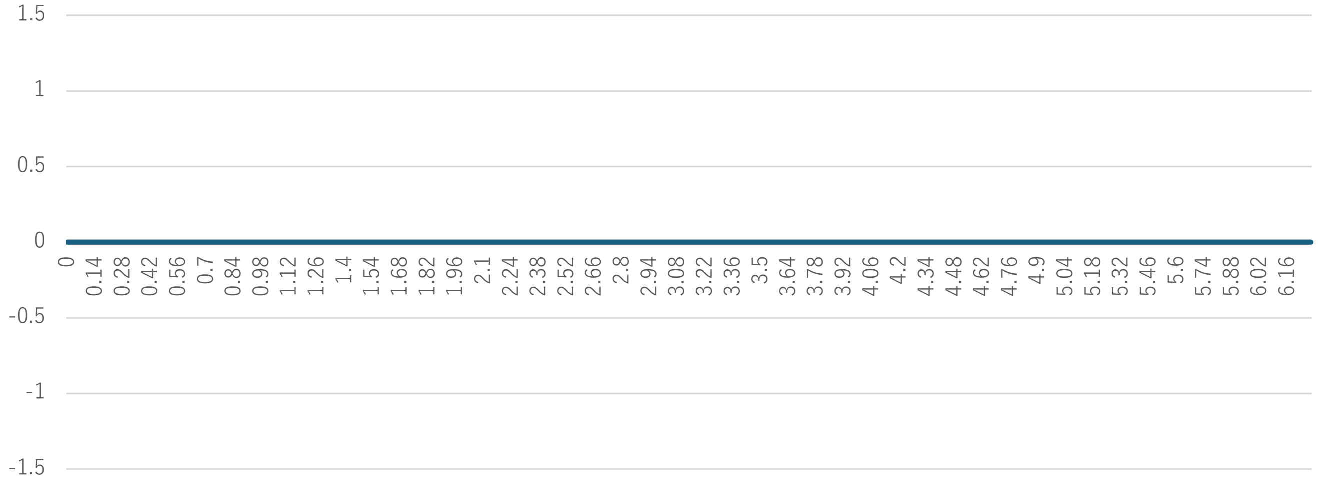
条件を満たしていれば，これを固有モードとして採用し，
元信号からこれを差っ引く．
だめならこの関数に対して１～５を繰り返す．

手順６差っ引かれたのに対して １～５を繰り返す



$y = \sin(x) + 0.1\sin(100x)$

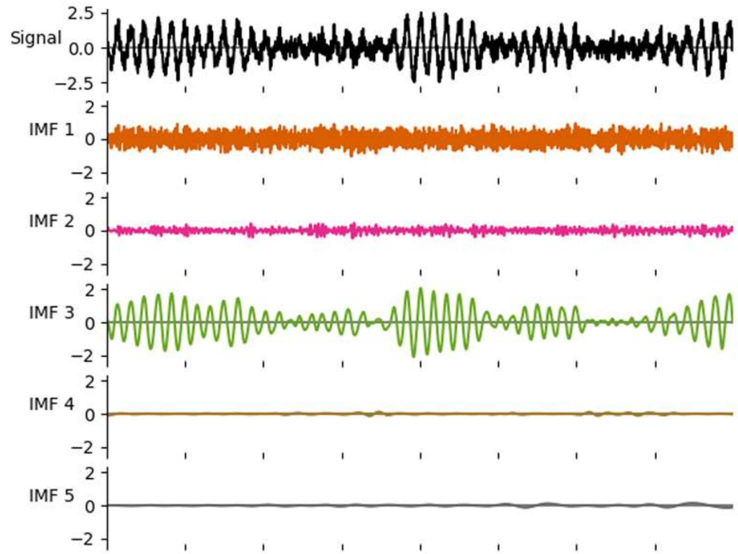
最終状態の例



最終的には，定常成分（ずっと同じ値）や
窓幅に対してずっと波長が長い成分だけ残る．
（固有モード関数の条件２が満たせないものだけ残る．）

EMDのイメージ

手順１～５では,
「元の信号から低周波成分を１つずつ取り除く」イメージ.
　最終的に１つの高周波成分が残って固有モード関数に採用.
固有モードには高周波成分から分離



→フーリエと異なり,
　非定常な波に強いのが特徴.