# PREPARACIÓN BÁSICA

# PB

CAMILO GONZÁLEZ DELGADO

# PREPARACIÓN BÁSICA

RESUMEN DE CONTENIDOS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR

B-2025-CUBA

LIC. CAMILO GONZÁLEZ DELGADO

El presente texto tiene como objetivos recopilar, organizar y presentar de la forma más simple los conocimientos adquiridos durante el nivel de enseñanza media superior. Dichos conocimientos constituyen la base para superar con éxito exámenes parciales y finales, así como el examen de ingreso a la educación superior. El objetivo es resumir el contenido facilitando el uso de dichas herramientas, para resolver los ejercicios a los que se deben enfrentar los alumnos. Este texto puede considerarse como un resumen y solo eso, por la falta de profundidad en muchos aspectos. Este material solo muestra lo que el estudiante debería saber. La idea es facilitarle el proceso de resumir el contenido por él mismo, lo que traería complicaciones, por no ser un especialista en la materia.

Un texto muy bien elaborado que cuenta con todo lo que el alumno necesitara para enfrentarse al examen de ingreso. Una consulta bibliográfica inmediata que garantiza efectividad total.

**Observación1:** este folleto constituye un trabajo ampliado del texto básico que utilizó el autor en sus clases privadas. En un primer, momento tenía como objetivo los exámenes de ingresos, pero por solicitudes de los lectores se amplió a los demás grados del preuniversitario cubano.

**Observación 2:** este folleto está configurado de manera que al imprimirlo usted tendrán un perfecto libro, por ello posee páginas en blanco para poder imprimir a doble cara y conformar un folleto.

**Importante:** se debe tener presente que este no es un texto definitivo, se modificará en función de los errores que se detecten, además se le añadirán elementos que los estudiantes necesiten. Solo debes fijarse en la portada y verificar la versión y el año del documento (A-2019-Cuba). Para más información envié un correo a camilo.kdt09@gmail.com y se le enviara el documento más actualizado o puede descargarlo y mantenerse al tanto de las ultimas modificaciones.

**Sitio oficial para la descarga directa:** https://kdt09289.github.io/preparacionbasica/

En este apartado se detallarán cuales fueros las últimas modificaciones respecto al documento anterior. De esta manera el lector sabrá específicamente que ha sido modificado y podrá corregir o agregar en caso de que haya impreso el documento.

#1. Cambio en el tipo de hoja A4 por formato carta estándar para facilitar la impresión.

#2. Numeración de páginas para facilitar la búsqueda digital o impresa.

#3. Actualización del índice.

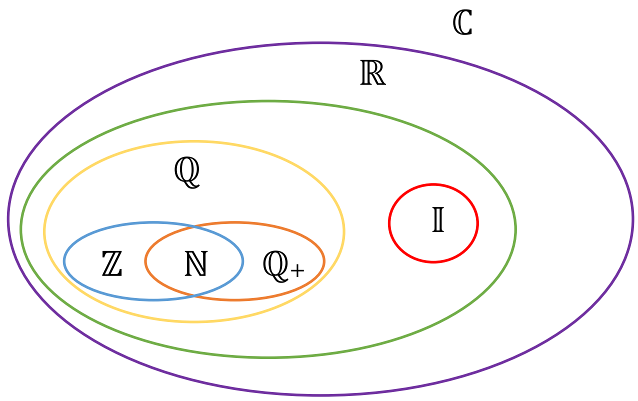
#4. Incluir un apartado con las modificaciones que se realicen.

#5. Subtitulo en los encabezados para aprovechar los márgenes de la hoja y detallar el contenido.

#6. Cambio de colores fuertes por tenues para favorecer el costo de impresión.

#7. Se agregó o modificó elementos en la sección TEORÍA DE CONJUNTOS, EXPRESIONES ALGEBRAICAS, TRABAJO CON VARIABLES, RADICALES, FUNCIONES, TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES.

## DOMINIOS NUMÉRICOS




$\mathbb{N} \rightarrow 0\,;1\,;\ 2\,;\ 3\ldots$

$\mathbb{Z} \rightarrow \ldots -2\,;-1\,;0\,;1\,;\ 2\,;\ 3\ldots$

$\mathbb{Q}_{+} \rightarrow 0\,;6\,;1{,}5\,;3{,}\overline{6}\,;\ \frac{7}{2}$

$\mathbb{Q} \rightarrow 0\,;4\,;\ -3\,;1{,}5\,;\ -3{,}25\ \,;0{,}\overline{6}\,;-1{,}\overline{3}\,;\ \frac{1}{5}\ ;\ -\frac{9}{4}$

$\mathbb{I}\ \rightarrow\ \ 1{,}345\ldots;\ \sqrt{2}\,;\ \sqrt[3]{5}\,;\ \pi\,;-\sqrt{3}$

$\mathbb{R} \rightarrow\ \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{C} \rightarrow\ \ 5+3i\,;\ \ 4i\ \ ;\ -7$

## OPERACIONES CON CONJUNTOS

| Operación | Símbolo | Descripción |
|---|---|---|
| Intersección | $\cap$ | Tiene los elementos comunes de ambos conjuntos. |
| Unión | $\cup$ | Tiene todos los elementos de ambos conjuntos. |
| Diferencia | $\setminus$ | Tiene los elementos del 1ro que no están en el 2do conjunto. |
| Complemento | $A^c$ | Tiene los elementos que le faltan al conjunto para completar Universo. |

## FORMA TABULAR

Dados los conjuntos:

$A = \{a\,;b\,;c\,;d\}\ ,\ B = \{n\,;a\,;h\,;d\}$

Entonces:

$A \cap B = \{a\,;d\}$

$A \cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;n\,;h\}$

$A \setminus B = \{b\,;c\}$

$B \setminus A = \{n\,;h\}$

$A^c = \{e\,;f\,;g;\ldots el\ resto\ del\ abecedario\}$

Entonces en notación constructiva

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x < 2\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 9\}$

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 9\}$

$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R}: x < 1\}$

$A^c = \{x \in \mathbb{R}: x < 1; x > 9\}$

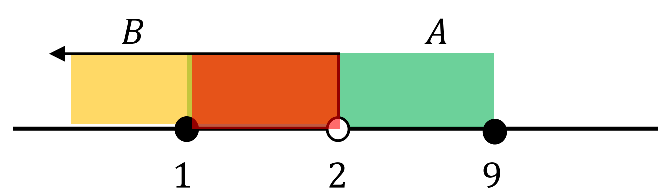
$B^c = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$

## FORMA DE INTERVALO O CONSTRUCTIVA

Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 9\}\ ,\ B = (-\infty; 2)$

Representación gráfica:




Entonces en notación de intervalo

$A \cap B = [1; 2)$ rojo

$A \cup B = (-\infty; 9]$ amarillo + rojo + verde

$A \setminus B = [2; 9]$ verde

$B \setminus A = (-\infty; 1)$ amarillo

$A^c = (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$ amarillo + blanco

$B^c = [2; +\infty)$ verde + blanco

## DOMINIOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

| Expresiones con limitaciones en su dominio | | Condición para la que está definida |
|---|---|---|
| Radical de índice par | $\sqrt[n]{x}$ | $x \geq 0$ |
| Logaritmo | $log_a x$ | $x > 0\,; a > 0\,; a \neq 1$ |
| Fracción algebraica | $\frac{k}{x}$ | $x \neq 0$ |

## EJEMPLO

Dominio de la expresión:

$$F(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{log_3(x-1)}$$

A. Se determina el domino de cada expresión por separado

1. Raíz de índice par $\sqrt{x+3}$

Condición: $x + 3 \geq 0$ se resuelve una inecuación lineal que conduce al resultado $x \geq -3$.

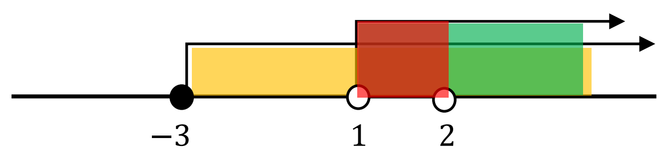
2. Logaritmo $log_3(x-1)$

Condición: $x - 1 > 0$ se resuelve una inecuación lineal que conduce al resultado $x > 1$.

3. Fracción algebraica $\frac{\sqrt{x+3}}{log_3(x-1)}$

Condición: $log_3(x-1) \neq 0$ se iguala a cero y se resuelve una ecuación lineal que conduce al resultado $x \neq 2$.

B. Se representan todas las condiciones en una recta numérica.




C. Se determina el conjunto intersección como dominio

$$Dom\ F = \{x \in \mathbb{R}: x > 1; x \neq 2\}$$

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

Es una fracción en cuyo denominador aparece al menos una variable.

Ejemplos que SON fracciones algebraicas:

$\frac{3}{x}$ ; $\frac{x-6}{x+2}$ ; $\frac{5x}{x^2-3x}$

Ejemplos que NO son fracciones algebraicas:

$\frac{3}{7}$ ; $\frac{x}{2}$ ; $\frac{x-6}{5}$

Valores que anulan una FA

Son los $CN \neq CD$ los valores que hacen $\frac{0}{D}$ con $D \neq 0$

Valores que indefinen una FA

Son los $CD \neq CN$ los valores que hacen $\frac{N}{0}$ indefinida

Valores para los cuales está definida o dominio de una FA

Son los $\{x \in \mathbb{R}: x \neq CD\}$

Valores que indeterminan una FA

Son los $CN = CD$ los valores que hacen $\frac{0}{0}$ indeterminada

## PRODUCTOS NOTABLES

Termino por binomio

$x(x+a) = x^2 + xa$

Binomio por binomio

$(x+b)(x+a) = x^2 + (a+b)x + ab$

Binomio por conjugado

$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

Binomio al cuadrado

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Binomio por un trinomio

$(x+a)(x^2 + bx + c) =$

$= x^3 + bx^2 + cx + ax^2 + abx + ac$

## ¿QUÉ ES UN TÉRMINO O MONOMIO?

Es un número o una variable o la combinación de ambos mediante las operaciones multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

## EJEMPLOS DE TÉRMINOS O MONOMIOS

| | |
|---|---|
| $2$ | Un número |
| $x$ | Una variable |
| $5y$ | Combinación por multiplicación |
| $\frac{d}{3}$ | Combinación por división |
| $z^4$ | Combinación por potenciación |
| $\sqrt{t}$ | Combinación por radicación |
| $\log_3 h$ | Combinación por logaritmación |

## FACTORIZACIÓN

Factor común

$x^2 + xa = x(x+a)$

Diferencia de cuadrados perfectos

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

Trinomio $mx^2 + px + q$

$$\begin{array}{lcl} mx^2 + px + q & & \\ ax & & c \\ bx & & d \\ \hline bcx & + & adx = px \end{array} \qquad \begin{array}{c} ax \cdot bx = mx^2 \\ c \cdot d = q \end{array}$$

Polinomios de grado 3 o mayores

$x^3 + 4x^2 + x - 6$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | −6 |
| 1 | | 1 | 5 | 6 |
| | 1 | 5 | 6 | 0 |

Divisores de $-6$

$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$(1x^2 + 5x + 6)(x-1)$

$1x^2 + 5x + 6$

$$\begin{array}{lr} 1x & 3 \\ 1x & 2 \\ \hline \end{array}$$

$(x+3)(x+2)(x-1)$

## ELEMENTOS DE UN TÉRMINO

Coeficiente = 5

Parte literal = X

Exponente = 3

$5x^3$

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Cuando los índices son iguales

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$$

Se mantiene el índice del radical y se opera con los radicandos.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{5\cdot 7}=\sqrt[4]{35}$$

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Cuando los índices son distintos

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{y}=\sqrt[k\cdot n]{x^k}\cdot\sqrt[s\cdot m]{y^s}=\sqrt[h]{x^k}\cdot\sqrt[h]{y^s}=\sqrt[n]{x^k\cdot y^s}$$

Teniendo en cuenta que $k\cdot n=h$ y $s\cdot m=h$

Se busca un M.C.M entre los índices h llegar a índices iguales.

Ejemplo:

$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{5^7}$ el M.C.M de 4 y 6 es 12.

$$\sqrt[3\cdot 4]{3^3}\cdot\sqrt[2\cdot 6]{5^{2\cdot 7}}=\sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{5^{14}}=\sqrt[12]{3^3\cdot 5^{14}}$$

## ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Condición: radicales semejantes

$$a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x}=(a+b)\sqrt[n]{x}$$

Radicales semejantes: igual índice e igual radicando.

Ejemplo:

$$13\sqrt[7]{5}+2\sqrt[7]{5}=(13+2)\sqrt[7]{5}=15\sqrt[7]{5}$$

## RACIONALIZACIÓN

Caso 1. Término

$\frac{k}{\sqrt[n]{x}}$ Se multiplica y se divide por un radical que garantice la eliminación del radical del denominador.

$$\frac{k}{\sqrt[n]{x^p}}\cdot\frac{\sqrt[n]{x^s}}{\sqrt[n]{x^s}}=\frac{k\cdot\sqrt[n]{x^s}}{\sqrt[n]{x^p}\cdot\sqrt[n]{x^s}}=\frac{k\sqrt[n]{x^s}}{\sqrt[n]{x^n}}=\frac{k\sqrt[n]{x^s}}{x}$$

Trabajo con el denominador.

$$\sqrt[n]{x^p}\cdot\sqrt[n]{x^s}=\sqrt[n]{x^p\cdot x^s}=\sqrt[n]{x^n}=x\ ;\ p+s=n$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt[7]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}}=\frac{5\cdot\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[7]{2^4}}=\frac{5\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}}=\frac{5\sqrt[7]{2^4}}{2}$$

Caso 2. Binomio

$\frac{k}{a+\sqrt{x}}$ Se multiplica y se divide por el conjugado del denominador.

$$\frac{k}{a+\sqrt{x}}\cdot\frac{a-\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}=\frac{k(a-\sqrt{x})}{a^2-\sqrt{x}^2}$$

El conjugado es la misma expresión, pero solo se cambia el signo de un término.

El conjugado de $8+\sqrt{2}$ es $8-\sqrt{2}$ o $-8+\sqrt{2}$

El conjugado de $\sqrt{5}-3$ es $\sqrt{5}+3$ o $-\sqrt{5}-3$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

## PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

$log_a a = 1$

$log_a 1 = 0$

$a^{log_a b} = b$

$x log_a b = log_a b^x$

$x log_a b = log_{a^{\frac{1}{x}}} b$

$log_a x + log_a y = log_a xy$

$log_a x - log_a y = log_a \frac{x}{y}$

$log_a b = \frac{log_n b}{log_n a}$

$log_a b \cdot log_n a = log_n b$

## PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

## PROPIEDADES DE LOS RADICALES

$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$

$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$

$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a : b}$

$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[x \cdot y]{a}$

## DEFINICIÓN

$log_a b = c \quad ssi \quad a^c = b$

con la condición $b > 0 \,; a > 0 \,; a \neq 1$

## CÁLCULOS LOGARÍTMICOS POR LA DEFINICIÓN

Calcule $log_5 25$

$log_5 25 = x \rightarrow 5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

$log_5 25 = 2$

Calcule $log_2 \frac{1}{8}$

$log_2 \frac{1}{8} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{8}$

$2^x = 8^{-1}$

$2^x = (2^3)^{-1}$

$2^x = 2^{-3}$

$x = -3$

$log_2 \frac{1}{8} = -3$

Calcule $log_7 \sqrt[5]{49}$

$log_7 \sqrt[5]{49} = x \rightarrow 7^x = \sqrt[5]{49}$

$7^x = 49^{\frac{1}{5}}$

$7^x = (7^2)^{\frac{1}{5}}$

$7^x = 7^{\frac{2}{5}}$

$x = \frac{2}{5}$

$log_7 \sqrt[5]{49} = \frac{2}{5}$

## FUNCIÓN LINEAL

**1.EXPRESIÓN ANALÍTICA**

$f(x) = mx + n$

$m: pendiente\ de\ la\ recta$

$n: intersecto\ con\ el\ eje\ "y"$

**2.QNRG**

Dos puntos (pueden ser los interceptos con los ejes coordenados)

**3.INTERCEPTO CON "$x$"**

Se iguala la función a cero

$y = 0\ \rightarrow (x; 0)$

$0 = mx + n$ se resuelve la ecuación

**4.INTERCEPTO CON "$y$"**

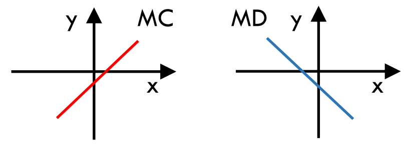
Se evalúa la función en cero

$x = 0\ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = m(0) + n$

se determina el valor de $y$

**5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA**




**6.MONOTONÍA**

$m > 0\ es\ MC$

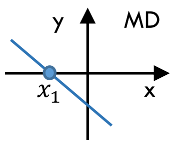
$m < 0\ es\ MD$

**7.SIGNO**

Depende del cero de la función

$(+) \rightarrow (-\infty; x_1)$

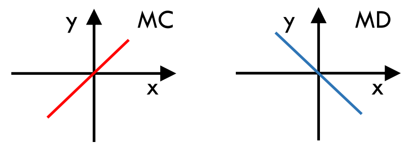
$(-) \rightarrow (x_1; +\infty)$




**8.PARIDAD**

La función solo será impar cuando:

$f(x) = mx\ ;\quad n = 0$




**9.INYECTIVIDAD**

Si es inyectiva

**10.SOBREYECTIVIDAD**

Si es sobreyectiva para su imagen

**11.BIYECTIVIDAD**

Si es biyectiva

**12.DOMINIO E IMAGEN**

$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = y \in \mathbb{R}$

## FUNCIÓN CUADRÁTICA-1

**1.EXPRESIÓN ANALÍTICA**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

**2.QNRG**

$V(x_v; y_v)$

$x_v = \frac{-b}{2a}\ ;\ y_v = f(x_v)$

Hacia donde abre la función

Hacia arriba $\rightarrow\ +ax^2$

Hacia abajo $\rightarrow\ -ax^2$

**3.INTERCEPTO CON "$x$"**

Se iguala la función a cero

$y = 0\ \rightarrow (x; 0)$

$0 = ax^2 + bx + c$ se resuelve la ecuación

**4.INTERCEPTO CON "$y$"**

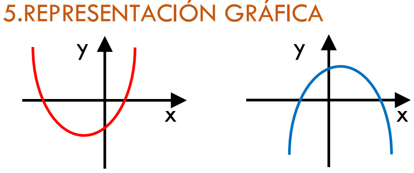
Se evalúa la función en cero

$x = 0\ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$

se determina el valor de $y$

**5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA**

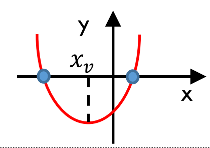



**6.MONOTONÍA**

Depende de la $x_v$

$MD\ \ (-\infty; x_v)$

$MC\ \ (x_v; +\infty)$



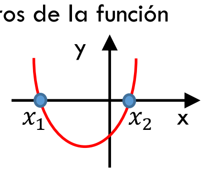

**7.SIGNO**

Depende del/los ceros de la función

$(+)\ \ (-\infty; x_1)$

$(-)\ \ (x_1; x_2)$

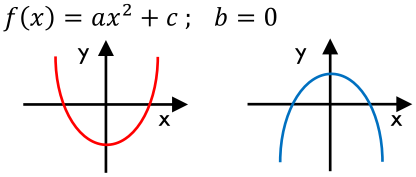
$(+)\ \ (x_2; +\infty)$




**8.PARIDAD**

La función solo será par cuando:

$f(x) = ax^2 + c\ ;\quad b = 0$




**9.INYECTIVIDAD**

No es inyectiva en todo su dominio

**10.SOBREYECTIVIDAD**

Si es sobreyectiva para su imagen

**11.BIYECTIVIDAD**

No es biyectiva

**12.DOMINIO E IMAGEN**

$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_v\}$ **abre arriba**

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_v\}$ **abre abajo**

## FUNCIÓN CUADRÁTICA-2

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA

$f(x) = (x + d)^2 + e$

### 2.QNRG

$V(-d; e)$

Hacia donde abre la función

Hacia arriba → $+(x + d)^2$

Hacia abajo → $-(x + d)^2$

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"

Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

$0 = (x + d)^2 + e$ se resuelve la ecuación

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"

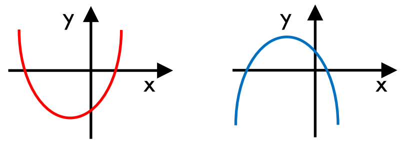
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = ((0) + d)^2 + e$

se determina el valor de $y$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA

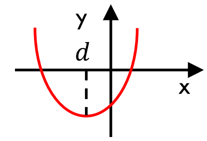



### 6.MONOTONÍA

Depende de la $d$

$MD \ (-\infty; d)$

$MC \ (d; +\infty)$



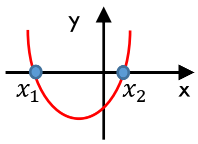

### 7.SIGNO

Depende del/los ceros de la función

$(+) \ (-\infty; x_1)$

$(-) \ (x_1; x_2)$

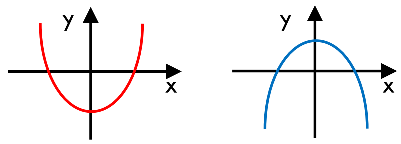
$(+) \ (x_2; +\infty)$




### 8.PARIDAD

La función solo será par cuando:

$f(x) = x^2 + e \ ; \quad d = 0$




### 9.INYECTIVIDAD

No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD

Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD

No es biyectiva

### 10.DOMINIO E IMAGEN

$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_v\}$ abre arriba

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_v\}$ abre abajo

## FUNCIÓN CÚBICA

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA

$f(x) = (x + d)^3 + e$

### 2.QNRG

$P(-d; e)$

Monotonía

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"

Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

$0 = (x + d)^3 + e$ se resuelve la ecuación

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"

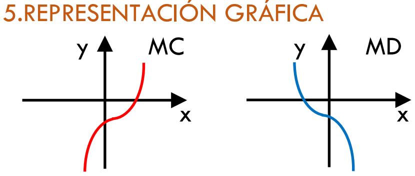
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = ((0) + d)^3 + e$

se determina el valor de $y$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA




### 6.MONOTONÍA

MC → $+(x + d)^3$

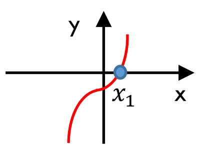
MD → $-(x + d)^3$

### 7.SIGNO

Depende del cero de la función

$(-) \rightarrow (-\infty; x_1)$

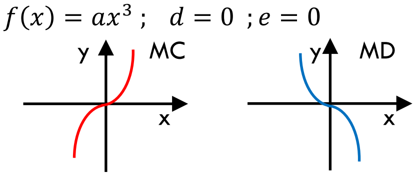
$(+) \rightarrow (x_1; +\infty)$




### 8.PARIDAD

La función solo será impar cuando:

$f(x) = ax^3 \ ; \quad d = 0 \ ; e = 0$




### 9.INYECTIVIDAD

Si es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD

Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD

Si es biyectiva

### 12.DOMINIO E IMAGEN

$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = y \in \mathbb{R}$

## FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO O MODULAR

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA
$f(x) = |x + d| + e$

### 2.QNRG
$V(-d; e)$

Hacia donde abre la función

Hacia arriba → $+|x + d|$

Hacia abajo → $-|x + d|$

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"
Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

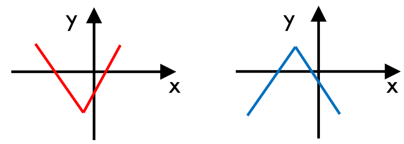
$0 = |x + d| + e$ se resuelve la ecuación

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = |(0) + d| + e$

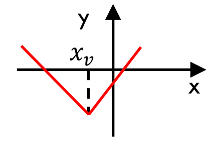
se determina el valor de $y$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA



### 6.MONOTONÍA
Depende de la $x_v$

$MD \ (-\infty; x_v)$

$MC \ (x_v; +\infty)$

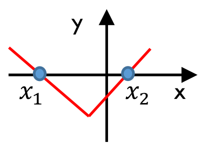



### 7.SIGNO
Depende del/los ceros de la función

$(+) \ (-\infty; x_1)$

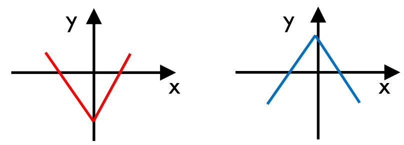
$(-) \ (x_1; x_2)$

$(+) \ (x_2; +\infty)$




### 8.PARIDAD
La función solo será par cuando:

$f(x) = |x| + e \ ; \quad d = 0$




### 9.INYECTIVIDAD
No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD
Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD
No es biyectiva

### 12.DOMINIO E IMAGEN
$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_v\}$ abre arriba

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_v\}$ abre abajo

## FUNCIÓN PROPORCIONALIDAD INVERSA O FRACCIONARIA O RACIONAL

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA
$$f(x) = \frac{k}{x + d} + e$$

### 2.QNRG
Asíntotas

AV → $\ x = -d$

AH → $\ y = e$

Monotonía

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"
Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

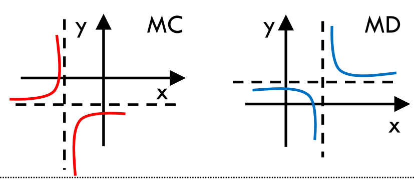
$0 = \frac{k}{x+d} + e$ se resuelve la ecuación

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = \frac{k}{(0)+d} + e$

se determina el valor de $y$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA



### 6.MONOTONÍA
MD → $+\frac{k}{x+d}$

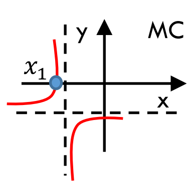
MC → $-\frac{k}{x+d}$

### 7.SIGNO
Depende del cero de la función y de la asíntota vertical

$(-) \ (-\infty; x_1)$

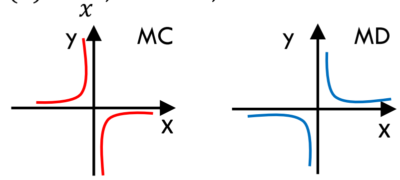
$(+) \ (x_1; AV)$

$(-) \ (AV; +\infty)$




### 8.PARIDAD
La función solo será impar cuando:

$f(x) = \frac{k}{x} \ ; \quad d = 0 \ ; \ e = 0$




### 9.INYECTIVIDAD
Si es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD
Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD
Si es biyectiva

### 12.DOMINIO E IMAGEN
$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq AV\}$

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \neq AH\}$

## FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

**1.EXPRESIÓN ANALÍTICA**

$f(x) = \sqrt{x+d} + e$

**2.QNRG**

$P(-d; e)$

Monotonía

**3.INTERCEPTO CON "$x$"**

Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

$0 = \sqrt{x+d} + e$ se resuelve la ecuación

**4.INTERCEPTO CON "$y$"**

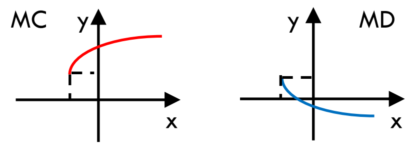
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = \sqrt{(0)+d} + e$

se determina el valor de $y$

**5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA**




**6.MONOTONÍA**

MC → $+\sqrt{x+d}$

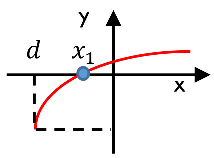
MD → $-\sqrt{x+d}$

**7.SIGNO**

Depende del cero de la función

$(-)\ \ (d; x_1)$

$(+)\ \ (x_1; +\infty)$




**8.PARIDAD**

La función no es par ni impar

**9.INYECTIVIDAD**

Si es inyectiva en todo su dominio

**10.SOBREYECTIVIDAD**

Si es sobreyectiva para su imagen

**11.BIYECTIVIDAD**

Si es biyectiva

**12.DOMINIO E IMAGEN**

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -d\}$

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq e\}$ cuando es MC

$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq e\}$ cuando es MD

## FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA

**1.EXPRESIÓN ANALÍTICA**

$f(x) = \sqrt[3]{x+d} + e$

**2.QNRG**

$P(-d; e)$

Monotonía

**3.INTERCEPTO CON "$x$"**

Se iguala la función a cero

$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$

$0 = \sqrt[3]{x+d} + e$ se resuelve la ecuación

**4.INTERCEPTO CON "$y$"**

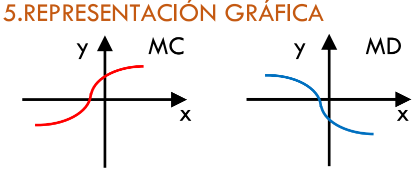
Se evalúa la función en cero

$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$

$f(0) = \sqrt[3]{(0)+d} + e$

se determina el valor de $y$

**5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA**




**6.MONOTONÍA**

MC → $+\sqrt[3]{x+d}$

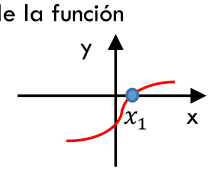
MD → $-\sqrt[3]{x+d}$

**7.SIGNO**

Depende del cero de la función

$(-) \rightarrow (-\infty; x_1)$

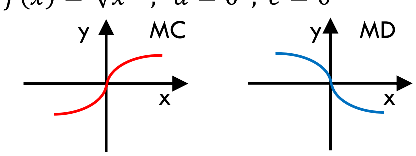
$(+) \rightarrow (x_1; +\infty)$




**8.PARIDAD**

La función solo será impar cuando:

$f(x) = \sqrt[3]{x} \ \ ; \ d = 0 \ ; \ e = 0$




**9.INYECTIVIDAD**

Si es inyectiva en todo su dominio

**10.SOBREYECTIVIDAD**

Si es sobreyectiva para su imagen

**11.BIYECTIVIDAD**

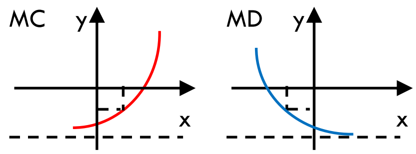
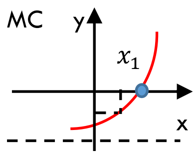
Si es biyectiva

**12.DOMINIO E IMAGEN**

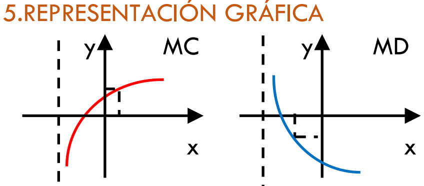
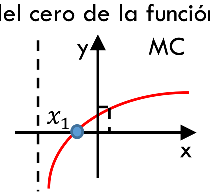
$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = y \in \mathbb{R}$

## FUNCIÓN EXPONENCIAL

| | | |
|---|---|---|
| 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA<br>$f(x) = a^{x+d} + e$ | 2.QNRG<br>AH → $y = e$<br>$P(-d; e+1)$ | 3.INTERCEPTO CON "$x$"<br>Se iguala la función a cero<br>$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$<br>$0 = a^{x+d} + e$ se resuelve la ecuación |
| 4.INTERCEPTO CON "$y$"<br>Se evalúa la función en cero<br>$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$<br>$f(0) = a^{(0)+d} + e$<br>Se determina el valor de "$y$" | 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA<br> | 6.MONOTONÍA<br>MC → $a > 1$<br>MD → $0 < a < 1$ |
| 7.SIGNO<br>Depende del cero de la función<br>$(-) \rightarrow (-\infty; x_1)$<br>$(+) \rightarrow (x_1; +\infty)$<br> | 8.PARIDAD<br>La función no es par ni impar | 9.INYECTIVIDAD<br>Si es inyectiva en todo su dominio<br>10.SOBREYECTIVIDAD<br>Si es sobreyectiva para su imagen<br>11.BIYECTIVIDAD<br>Si es biyectiva |
| 12.DOMINIO E IMAGEN<br>$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$<br>$Im\ f = \{y \in \mathbb{R}: y > AH\}$ | | |

## FUNCIÓN LOGARÍTMICA

| | | |
|---|---|---|
| 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA<br>$f(x) = \log_a(x+d) + e$ | 2.QNRG<br>AV → $x = -d$<br>$P(-d+1; e)$ | 3.INTERCEPTO CON "$x$"<br>Se iguala la función a cero<br>$y = 0 \ \rightarrow (x; 0)$<br>$0 = \log_a(x+d) + e$ se resuelve la ecuación |
| 4.INTERCEPTO CON "$y$"<br>Se evalúa la función en cero<br>$x = 0 \ \rightarrow (0; y)$<br>$f(0) = \log_a((0)+d) + e$ | 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA<br> | 6.MONOTONÍA<br>MC → $a > 1$<br>MD → $0 < a < 1$ |
| 7.SIGNO<br>Depende de la $AV$ del cero de la función<br>$(-)\ (AV; x_1)$<br>$(+)\ (x_1; +\infty)$<br> | 8.PARIDAD<br>La función no es par ni impar | 9.INYECTIVIDAD<br>Si es inyectiva en todo su dominio<br>10.SOBREYECTIVIDAD<br>Si es sobreyectiva para su imagen<br>11.BIYECTIVIDAD<br>Si es biyectiva |
| 12.DOMINIO E IMAGEN<br>$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}: x > AV\}$<br>$Im\ f = y \in \mathbb{R}$ | | |

## FUNCIÓN SENO

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA
$f(x) = AsenBx$

### 2.QNRG
Amplitud $\rightarrow$ $|A|$

$PP = \frac{2\pi}{B}$

Dividir el $PP$ por 4

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"
$x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

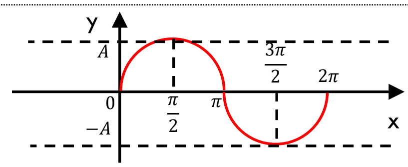
### 7.SIGNO
para $f(x) = +AsenBx$

$(-) \rightarrow (0; \pi)$

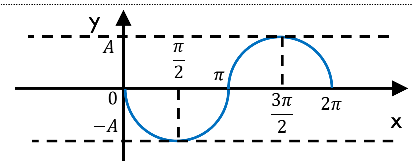
$(+) \rightarrow (\pi; 2\pi)$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA

REPRESENTACIÓN $f(x) = +AsenBx$




REPRESENTACIÓN $f(x) = -AsenBx$




### 12.DOMINIO E IMAGEN
$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = y \in [-A; A]$

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"
Tiene 1 intercepto en $y = 0$

### 8.PARIDAD
La función es impar

### 9.INYECTIVIDAD
No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD
Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD
No es biyectiva

### 6.MONOTONÍA
para $f(x) = +AsenBx$

MC $\rightarrow$ $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

MD $\rightarrow$ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

MC $\rightarrow$ $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

### 13.VALOR MAXIMO O MINIMO
para $f(x) = +AsenBx$

V. máximo $\rightarrow$ $y = A$

Lo alcanza para $\rightarrow$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

V. mínimo $\rightarrow$ $y = -A$

Lo alcanza para $\rightarrow$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

## FUNCIÓN COSENO

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA
$f(x) = AcosBx$

### 2.QNRG
Amplitud $\rightarrow$ $|A|$

$PP = \frac{2\pi}{B}$

Dividir el $PP$ por 4

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"
$x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

### 7.SIGNO
para $f(x) = +AcosBx$

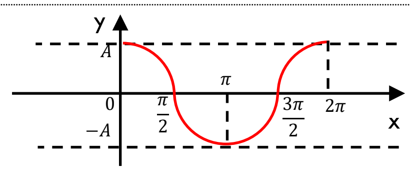
$(+) \rightarrow \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$(-) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

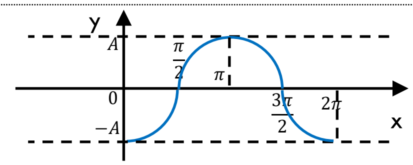
$(+) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA

REPRESENTACIÓN $f(x) = +AcosBx$




REPRESENTACIÓN $f(x) = -AcosBx$




### 12.DOMINIO E IMAGEN
$Dom\ f = x \in \mathbb{R}$

$Im\ f = y \in [-A; A]$

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"
Tiene 1 intercepto en $y = -A$ ó $y = A$

### 8.PARIDAD
La función es impar

### 9.INYECTIVIDAD
No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD
Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD
No es biyectiva

### 6.MONOTONÍA
para $f(x) = +AcosBx$

MD $\rightarrow$ $(0; \pi)$

MC $\rightarrow$ $(\pi; 2\pi)$

### 13.VALOR MAXIMO O MINIMO
para $f(x) = +AcosBx$

V. máximo $\rightarrow$ $y = A$

Lo alcanza para $\rightarrow$ $x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

V. mínimo $\rightarrow$ $y = -A$

Lo alcanza para $\rightarrow$ $x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

## FUNCIÓN TANGENTE

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA

$f(x) = AtanBx$

### 2.QNRG

$PP = \frac{2\pi}{B}$

Dividir el $PP$ por 2

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"

$x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

### 7.SIGNO

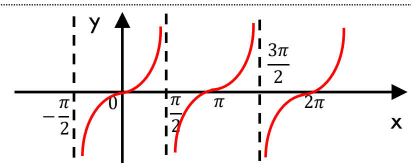
para $f(x) = +AsenBx$

$(-) \rightarrow (0; \pi)$

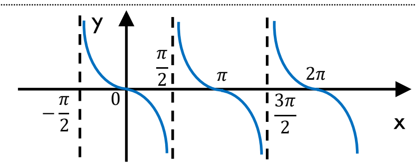
$(+) \rightarrow (\pi; 2\pi)$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA

REPRESENTACIÓN $f(x) = +AtanBx$




REPRESENTACIÓN $f(x) = -AtanBx$




### 12.DOMINIO E IMAGEN

$Dom\ f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im\ f = y \in \mathbb{R}$

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"

Tiene 1 intercepto en $y = 0$

### 8.PARIDAD

La función es impar

### 9.INYECTIVIDAD

No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD

Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD

No es biyectiva

### 6.MONOTONÍA

para $f(x) = +AtanBx$

MC → en todo su dominio

para $f(x) = -AtanBx$

MD → en todo su dominio

### 13.VALOR MAXIMO O MINIMO

V. máximo → no tiene

V. mínimo → no tiene

## FUNCIÓN COTANGENTE

### 1.EXPRESIÓN ANALÍTICA

$f(x) = AcotBx$

### 2.QNRG

$PP = \frac{2\pi}{B}$

Dividir el $PP$ por 2

### 3.INTERCEPTO CON "$x$"

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

### 7.SIGNO

para $f(x) = +AcotBx$

$(+) \rightarrow \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

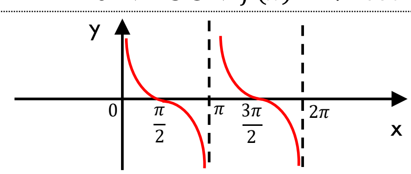
$(-) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$(+) \rightarrow \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

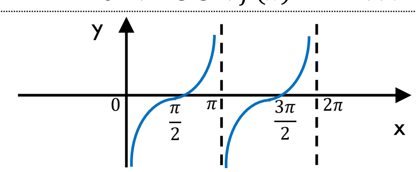
$(-) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

### 5.REPRESENTACIÓN GRÁFICA

REPRESENTACIÓN $f(x) = +AcotBx$




REPRESENTACIÓN $f(x) = -AcotBx$




### 12.DOMINIO E IMAGEN

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$Im\ f = y \in \mathbb{R}$

### 4.INTERCEPTO CON "$y$"

No tiene

### 8.PARIDAD

La función es impar

### 9.INYECTIVIDAD

No es inyectiva en todo su dominio

### 10.SOBREYECTIVIDAD

Si es sobreyectiva para su imagen

### 11.BIYECTIVIDAD

No es biyectiva

### 6.MONOTONÍA

para $f(x) = +AcotBx$

MD → en todo su dominio

para $f(x) = -AcotBx$

MC → en todo su dominio

### 13.VALOR MAXIMO O MINIMO

V. máximo → no tiene

V. mínimo → no tiene

## ASPECTOS GENERALES SOBRE FUNCIONES

1- Evaluar una función en un valor k es sustituir la variable "x" por k

Ejemplo:

Evalué la función $f(x) = 3x + 4$ en 5

Respuesta:

$f(5) = 3(5) + 4 = 19$

2- Igualar una función a cero es sustituir "y" por cero.

Ejemplo:

Iguale la función $f(x) = 2x - 10$ a cero

Respuesta:

$f(x) = 0$ ó $y = 0$ entonces $0 = 2x - 10$ se despeja la variable "x", obteniendo $x = 5$

3- Cuando dos funciones se intersecan entonces ambas funciones pueden igualarse para determinar los puntos de intersección.

Ejemplo:

La función $f(x) = x - 3$ y la función $g(x) = x^2 + 6x + 3$ se intersecan, entonces $f(x) = g(x)$, es decir $x - 3 = x^2 + 6x + 3$ se resuelve la ecuación y las soluciones representan las abscisas de los puntos.

$$x - 3 = x^2 + 6x + 3$$
$$0 = x^2 + 6x + 3 - x + 3$$
$$x^2 + 6x + 3 - x + 3 = 0$$
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x + 3)(x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0 \text{ ó } x + 2 = 0$$
$$x = -3 \text{ ó } x = -2$$

Para $x = -3$ se evalúa en cualquier función y se obtiene la ordenada de un punto.

$f(-3) = (-3) - 3 = -6$ punto de intersección $(-3; -6)$

Para $x = -2$ se evalúa en cualquier función y se obtiene la ordenada de un punto.

$f(-2) = (-2) - 3 = -5$ punto de intersección $(-2; -5)$

punto de intersección $(-2; -5)$

Si se desea comprobar se sustituyen en cualquier función.

Para el punto $(-3; -6)$

$g(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 3 = -6$

4- Función inversa

Determine la inversa de la función $f(x) = x + 5$

- ✓ Se prueba que es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva)
- ✓ Se cambia $f(x) = y$
- ✓ Se despeja la variable "x"
- ✓ Se realiza el cambio de "$x$" por "$y^{-1}$" ; "$y$" por "$x$"

Ejemplo:

$$f(x) = x + 5$$
$$y = x + 5$$
$$y - 5 = x$$
$$x - 5 = y^{-1}$$

Entonces la función inversa es:

$$y^{-1} = x - 5$$
$$f^{-1}(x) = x - 5$$

### PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

01. EXPRESIÓN ANALÍTICA

Se refiere a la ecuación que se asocia a la función.

02. QNRG

Qué Necesito para Representar Gráficamente una función.

03. INTERCEPTO CON "$x$"

Se refiere al punto por donde la grafía corta al eje "$x$"

04. INTERCEPTO CON "$y$"

Se refiere al punto por donde la grafía corta al eje "$y$"

05. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Es la línea que se forma al unir cada punto generado por la función.

06. MONOTONÍA

Es la tendencia creciente o decreciente que tiene la grafica

07. SIGNO

Es el signo de las ordenadas de cada punto de la función. Toda la grafica que este por encima del eje "$x$" es positiva y por debajo negativa.

08. PARIDAD

Es la simetría axial de una función respecto a una recta, en este caso, eje "$y$". PAR

Es la simetría central de una función respecto a un punto, en este caso el origen de coordenadas "$(0; 0)$". IMPAR

09. INYECTIVIDAD

Es cuando a cada ordenada se le hace corresponder una única abscisa. Gráficamente al trazar rectas paralelas al eje "$x$" cada una corta a la grafica en un solo punto.

10. SOBREYECTIVIDAD

Es cuando cada elemento de la imagen de una función es imagen de al menos un elemento del dominio.

11. BIYECTIVIDAD

Es cuando es inyectiva y sobreyectiva

12. DOMINIO E IMAGEN

El dominio es el conjunto de valores admisibles de la variable independiente.

La imagen o condominio es el conjunto que se obtiene como resultado de evaluar la función en el dominio.

13. VALOR MAXIMO O MINIMO

Es valor máximo o mínimo que pueden alcanzar las ordenadas de una función.

## ECUACIÓN LINEAL

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Agrupar términos con variable en un miembro y los independientes en el otro.
3. Agrupar y reducir términos semejantes.
4. Despejar la variable.
5. Expresar el conjunto solución.

$$2(x-5)-4x=-8x+3(2+x)$$
$$2x-10-4x=-8x+6+3x$$
$$2x-4x+8x-3x=6+10$$
$$3x=16$$
$$x=\frac{16}{3}$$

No es obligatorio comprobar

$$S=\left\{\frac{16}{3}\right\}$$

## ECUACIÓN CUADRÁTICA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Igualar a cero.
3. Obtener la estructura $ax^2+bx+c=0$.
4. Factorizar el polinomio.
5. Expresar el conjunto solución.

$$x(2x-3)-2=(x-2)(x+2)$$
$$2x^2-3x-2=x^2-4$$
$$2x^2-3x-2-x^2+4=0$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$
$$x-2=0 \quad \text{ó} \quad x-1=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=1$$

No es obligatorio comprobar

$$S=\{2;1\}$$

## ECUACIÓN CÚBICA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Igualar a cero.
3. Obtener la estructura $ax^3+bx^2+cx+d=0$.
4. Factorizar el polinomio.
5. Expresar el conjunto solución.

$$x^2(x-3)=2(5x-12)$$
$$x^3-3x^2=10x-24$$
$$x^3-3x^2-10x+24=0$$
$$(x+3)(x-2)(x-4)=0$$
$$x+3=0 \quad \text{ó} \quad x-2=0 \quad \text{ó} \quad x-4=0$$
$$x=-3 \qquad x=2 \qquad x=4$$

No es obligatorio comprobar

$$S=\{-3;2;4\}$$

## ECUACIÓN VALOR ABSOLUTO

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Aislar el módulo.
3. Aplicar definición de módulo.
4. Resolver la ecuación que se origina.
5. Comprobar.
6. Expresar el conjunto solución.

$$|x+4|-5=-2$$
$$|x+4|=-2+5$$
$$|x+4|=3$$

$(+)$

$$+(x+4)=3$$
$$x+4=3$$
$$x=3-4$$
$$x=-1$$

$(-)$

$$-(x+4)=3$$
$$-x-4=3$$
$$-x=3+4$$
$$-x=7$$
$$x=-7$$

Comprobar

$$S=\{-1;-7\}$$

## ECUACIÓN FRACCIONARIA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Factorizar todos los denominadores.
3. Determinar el MCD.
4. Multiplicar toda la ecuación por el MCD.
5. Resolver la ecuación que se origine.
6. Comprobar.
7. Expresar el conjunto solución.

$$\frac{9}{x-2}+\frac{4}{x+5}=\frac{2}{x^2+3x-10}$$
$$\frac{9}{x-2}+\frac{4}{x+5}=\frac{2}{(x-2)(x+5)} \quad /\cdot (x-2)(x+5)$$

Se elimina los denominadores

$$9(x+5)+4(x-2)=2$$
$$9x+45+4x-8=2$$
$$13x=-35$$
$$x=-\frac{35}{13}$$

Comprobar

$$S=\left\{-\frac{35}{13}\right\}$$

## ECUACIÓN EXPONENCIAL

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Obtener una potencia en cada miembro con bases iguales.
3. Igualar los exponentes quitando las bases.
4. Resolver la ecuación que se origina.
5. Comprobar, si existen expresiones con limitaciones.
6. Expresar el conjunto solución.

$$7^{x+2}\cdot 49^x=\frac{1}{7^{x-5}}$$
$$7^{x+2}\cdot (7^2)^x=(7^{x-5})^{-1}$$
$$7^{x+2}\cdot 7^{2x}=7^{-x+5}$$
$$7^{x+2+2x}=7^{-x+5}$$
$$7^{3x+2}=7^{-x+5}$$
$$3x+2=-x+5$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}$$

Comprobar solo si existen expresiones con limitaciones (fracciones, logaritmos, radicales…)

$$S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$$

## ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Vía-1. Definición

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Obtener un logaritmo en cada miembro con bases iguales.
3. Igualar los argumentos quitando los logaritmos.
4. Resolver la ecuación que se origina.
5. Comprobar.
6. Expresar el conjunto solución.

$$\log_3(x-1)+\log_3 5=2$$
$$\log_3(x-1)\cdot 5=2$$
$$\log_3(5x-5)=2$$
$$3^2=5x-5$$
$$9=5x-5$$
$$9+5=5x$$
$$14=5x$$
$$\frac{14}{5}=x$$

Comprobar siempre

$$S=\left\{\frac{14}{5}\right\}$$

## ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Vía-2. Igualación
1. Eliminar signos de agrupación.
2. Igualar a cero.
2. Obtener un logaritmo aplicando propiedades.
3. Aplicar definición de logaritmos.
4. Resolver la ecuación que se origina.
5. Comprobar.
6. Expresar el conjunto solución.

$$\log_3(x-1)+\log_3 5=2$$
$$\log_3(x-1)\cdot 5=2\log_3 3$$
$$\log_3(5x-5)=\log_3 3^2$$
$$5x-5=9$$
$$\frac{14}{5}=x$$

Comprobar siempre

$$S=\left\{\frac{14}{5}\right\}$$

## ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

1. Obtener la misma razón trigonométrica.
2. Despejar la razón trigonométrica.
3. Determinar el ángulo auxiliar (AA).
4. Determinar el signo de la razón trigonométrica.
5. Aplicar la fórmula de reducción por cuadrantes.
6. Determinar las soluciones de la primera vuelta.
7. Determinar las soluciones generales.

$$2senx+1=0$$
$$2senx=-1$$
$$senx=-\frac{1}{2}$$

$AA\rightarrow 30°$

$signo(seno)\rightarrow(-)$

Fórmulas de reducción

$\mathrm{III}\rightarrow 180°+30°=210°$

$\mathrm{IV}\rightarrow 360°-30°=330°$

$$x_1=210° \quad x_1=\frac{7\pi}{6}$$
$$x_2=330° \quad x_2=\frac{11\pi}{6}$$

$$S=\{210°+360°k;330°+360°k;k\in\mathbb{Z}\}$$
$$S=\left\{\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{11\pi}{6}+2\pi k;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

## INECUACIÓN LINEAL

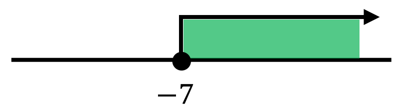
1. Eliminar signos de agrupación.
2. Agrupar términos con variable en un miembro y los independientes en el otro.
3. Agrupar y reducir términos semejantes.
4. Analizar el signo del coeficiente de la variable.

- Si $-ax = 0$ se multiplica la ecuación por $(-1)$ y se cambia el sentido de la desigualdad.
- Si $+ax = 0$ se mantiene el sentido de la desigualdad.

5. Despejar la variable.
6. Graficar en una recta numérica.
7. Expresar el conjunto solución.

$$2(x-3)-5 \leq 4x+8$$
$$2x-6-5 \leq 4x+8$$
$$2x-4x \leq 8+6$$
$$-2x \leq 14$$
$$-2x \leq 14 \quad /\cdot(-1)$$
$$2x \geq -14$$
$$x \geq \frac{-14}{2}$$
$$x \geq -7$$

Representación gráfica




Conjunto solución

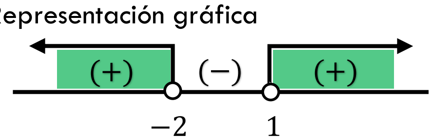
$S = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -7\}$

## INECUACIÓN CUADRÁTICA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Comparar con cero.
3. Igualar a cero.
4. Determinar los ceros de la ecuación.
5. Ubicar los ceros en una recta numérica.
6. Delimitar los intervalos.
7. Identificar el signo por intervalos.
8. Determinar los intervalos de la solución.
9. Expresar el conjunto solución.

$$2(2x-1)+2x^2 > x(x+3)$$
$$4x-2+2x^2 > x^2+3x$$
$$4x-2+2x^2-x^2-3x > 0$$
$$x^2+x-2 > 0$$
$$x^2+x-2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x+2=0 \quad \text{ó} \quad x-1=0$$
$$x=-2 \qquad\qquad x=1$$

Representación gráfica




Conjunto solución

$S = \{x \in \mathbb{R}: x < -2; x > 1\}$

## INECUACIÓN FRACCIONARIA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Comparar con cero.
3. Determinar los ceros del numerador y del denominador.
5. Ubicar los ceros en una recta numérica.
6. Delimitar los intervalos.
7. Identificar el signo por intervalos.
8. Determinar los intervalos de la solución.
9. Expresar el conjunto solución.

$$\frac{x^2-25}{x^2-4x-5} \leq 0$$

Ceros del numerador

$x^2-25=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$x-5=0$ ó $x+5=0$

$x=5$ ó $x=-5$

Ceros del denominador

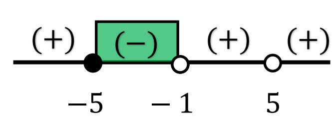
$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x-5=0$ ó $x+1=0$

$x=5 \qquad x=-1$

Representación grafica




Conjunto solución

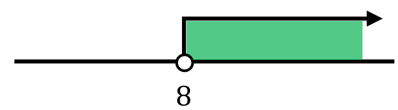
$S = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x < -1\}$

## INECUACIÓN EXPONENCIAL

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Obtener una potencia en cada miembro con bases iguales.
3. comparar los exponentes quitando las bases.
- Si $a > 1$ se mantiene el sentido de la desigualdad.
- Si $0 < a < 1$ se cambia el sentido de la desigualdad.
4. Resolver la inecuación que se origina.
6. Expresar el conjunto solución.

$$5^{x+2} - 25^{x-3} < 0$$
$$5^{x+2} < 25^{x-3}$$
$$5^{x+2} < (5^2)^{x-3}$$
$$5^{x+2} < 5^{2x-6}$$
$$x + 2 < 2x - 6$$
$$x - 2x < -6 - 2$$
$$-x < -8 \ /\cdot(-1)$$
$$x > 8$$

Representación gráfica




Conjunto solución

$S = \{x \in \mathbb{R}: x > 8\}$

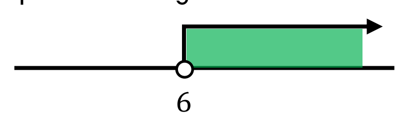
## INECUACIÓN LOGARÍTMICA

1. Eliminar signos de agrupación.
2. Obtener un logaritmo en cada miembro con bases iguales.
3. Comparar los argumentos quitando las bases.
- Si $a > 1$ se mantiene el sentido de la desigualdad.
- Si $0 < a < 1$ se cambia el sentido de la desigualdad.
4. Resolver la inecuación que se origina.
5. Representar la solución en una recta numérica.
6. Representar el dominio en una recta numérica.
7. Representar la intersección entre la solución y el dominio de la inecuación.
8. Expresar el conjunto solución.

Nota: cuado la ecuacion logaritmica posee más de un logaritmo u otras expresiones con limitaciones entonces el dominio es la interseccion de todas esas condiciones.

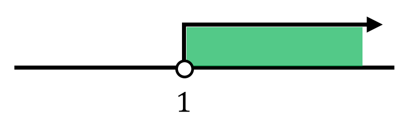
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}} 5 < 0$$
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) < \log_{\frac{1}{3}} 5$$
$$x - 1 > 5$$
$$x > 5 + 1$$
$$x > 6$$

Representación gráfica de la solución

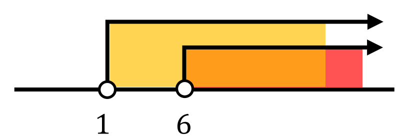



Representación gráfica del dominio de la inecuación

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1$$




Representación gráfica de la intersección entre la solución y el dominio.




Conjunto solución

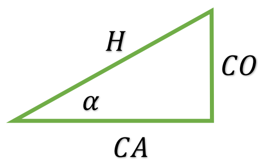
$S = \{x \in \mathbb{R}: x > 6\}$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$sen\alpha = \frac{CO}{H}$ $\quad cos\alpha = \frac{CA}{H}$

$tan\alpha = \frac{CO}{CA}$ $\quad cot\alpha = \frac{CA}{CO}$

$sec\alpha = \frac{H}{CA}$ $\quad csc\alpha = \frac{H}{CO}$




## EJEMPLOS DEL CÁLCULO TRIGONOMÉTRICOS

### CALCULAR SEN 60°

$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### CALCULAR COS 120°

$cos120° \rightarrow 120° \rightarrow \text{II}$

Signo($cos$)$\rightarrow (-)$

FR: $180° - 120° = 60°$

$$cos120° = -cos60° = -\frac{1}{2}$$

### CALCULAR TAN 180°

$$tan180° = 0$$

### CALCULAR COT 765°

$cot765° \rightarrow 765° : 360° = \underbrace{2}_{\text{Vueltas}} + \underbrace{45°}_{\sphericalangle \text{ coterminal}}$

$$cot765° = cot45° = 1$$

## CÁLCULO TRIGONOMÉTRICO

Para ángulos del primer cuadrante

- Se utiliza la tabla de los ángulos notables.

Para ángulos del segundo al cuarto cuadrante

- Se utiliza Formulas de reducción, signos de las razones trigonométricas y tabla de los ángulos notables.

Para ángulos axiales

- Se utiliza la tabla de los ángulos axiales.

Para ángulos mayores que $360°$

- Se divide el ángulo por $360°$ el resto es el ángulo coterminal, el cociente representa el número de vueltas.

Para ángulos negativos

- Se busca el múltiplo entero de mayor que el módulo del ángulo negativo y más cercano a él.
- Se le resta al múltiplo entero el ángulo negativo, la diferencia es el ángulo coterminal.

### CALCULAR SEN$(-1050°)$

$sen(-1050°) \rightarrow$ múltiplos enteros de $360°$

| $\cdot 1$ | $\cdot 2$ | $\cdot 3$ | $\cdot 4$ |
|---|---|---|---|
| $360°$ | $720°$ | $1080°$ | $1440°$ |

$$1080° - 1050° = 30°$$

$$sen(-1050°) = sen30° = \frac{1}{2}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

### A: FÓRMULAS DE LOS RECÍPRICOS

$$senx = \frac{1}{cscx} \qquad cscx = \frac{1}{senx}$$

$$cosx = \frac{1}{secx} \qquad secx = \frac{1}{cosx}$$

$$tanx = \frac{1}{cotx} \qquad cotx = \frac{1}{tanx}$$

### B: FÓRMULAS DEL COCIENTE

$$tanx = \frac{senx}{cosx} \qquad tan^2x = \frac{sen^2x}{cos^2x}$$

$$cotx = \frac{cosx}{senx} \qquad cot^2x = \frac{cos^2x}{sen^2x}$$

### C: FÓRMULAS PITAGÓRICAS

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$sen^2x = 1 - cos^2x$$

$$cos^2x = 1 - sen^2x$$

$$sec^2x = tan^2x + 1$$

$$sec^2x = \frac{1}{cos^2x}$$

$$csc^2x = cot^2x + 1$$

$$csc^2x = \frac{1}{sen^2x}$$

### D: FÓRMULAS DEL ÁNGULO DUPLO

$$sen2x = 2senx \cdot cosx \qquad tan2x = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$$

$$cos2x = cos^2x - sen^2x \qquad cot2x = \frac{cot^2x-1}{2cotx}$$

$$cos2x = 2cos^2x - 1$$

$$cos2x = 1 - 2sen^2x$$

### E: FÓRMULAS DE ADICIÓN

$$sen(x \pm y) = senx \cdot cosy \pm seny \cdot cosx$$

$$cos(x \pm y) = cosx \cdot cosy \mp seny \cdot senx$$

$$tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanx \cdot tany}$$

$$cot(x \pm y) = \frac{cotx \cdot coty \mp 1}{cotx \pm coty}$$

### F: ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

$$sen(90^\circ - x) = cosx$$

$$tan(90^\circ - x) = cotx$$

$$sec(90^\circ - x) = cscx$$

### G: ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

$$sen(180^\circ - x) = senx$$

$$cos(180^\circ - x) = -cosx$$

$$tan(180^\circ - x) = -tanx$$

$$cot(180^\circ - x) = -cotx$$

### H: ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN $(90^\circ)$

$$sen(90^\circ + x) = cosx$$

$$cos(90^\circ + x) = -senx$$

$$tan(90^\circ + x) = -cotx$$

### I: ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN $(180^\circ)$

$$sen(180^\circ + x) = -senx$$

$$cos(180^\circ + x) = -cosx$$

$$tan(180^\circ + x) = tanx$$

$$cot(180^\circ + x) = cotx$$

### J: ÁNGULOS OPUESTOS

$$sen(-x) = -senx$$

$$cos(-x) = cosx$$

$$tan(-x) = -tanx$$

$$cot(-x) = -cotx$$

## TABLA DE ÁNGULOS NOTABLES

| | | | |
|---|---|---|---|
| $gra$ | $30°$ | $60°$ | $45°$ |
| $rad$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $sen$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $cos$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $tan$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $1$ |
| $cot$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ |
| $sec$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $2$ | $\sqrt{2}$ |
| $csc$ | $2$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ |

## TABLA DE ÁNGULOS AXIALES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ | $360°$ |
| $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $1$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $1$ |
| $-$ | $1$ | $-$ | $-1$ | $-$ |

## FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

| | |
|---|---|
| $\alpha$: *ángulo del primer cuadrante* | |
| $\beta$: *ángulo del segundo al cuarto cuadrante* | |
| I | $\alpha = \alpha$ |
| II | $\alpha = 180° - \beta$ |
| III | $\alpha = \beta - 180°$ |
| IV | $\alpha = 360° - \beta$ |

## SIGNOS DE LAS RAZONES POR CUADRANTES

| | **I** | **II** | **III** | **IV** |
|---|---|---|---|---|
| $sen$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $cos$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $tan$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $cot$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $sec$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $csc$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

| CASO 1 | |
|---|---|
| LENGUAJE COMÚN | LENGUAJE ALGEBRAICO |
| Cantidad de dinero que tiene Pedro | $x$ |
| Cantidad de dinero que tiene Juan | $y$ |
| Entre pedro y juan tienen $ 30.00 | $x + y = 30$ |
| El dinero que tiene Pedro representa el doble de lo que tiene Juan | $x = 2y$ |
| El dinero que tiene Pedro es un tercio de lo que tiene Juan | $x = \frac{y}{3}$ |
| La cantidad de dinero que tiene Pedro excede en $15.00 a la cantidad que tiene Juan | $x - 15 = y$ ó $y + 15 = x$ ó $x - y = 15$ |
| La cantidad de dinero que tiene pedro excede en $7.00 al duplo de la cantidad que tiene Juan | $x - 7 = 2y$ ó $2y + 7 = x$ ó $x - 2y = 7$ |
| Pedro tiene $50.00 más que Juan | $x - 50 = y$ ó $y + 50 = x$ ó $x - y = 50$ |
| Pedro tiene $67.00 menos de lo que tiene Juan | $x + 67 = y$ ó $y - 67 = x$ ó $y - x = 15$ |
| Pedro tiene $23.00 más que el triplo de lo que tiene Juan | $x - 23 = 3y$ ó $3y + 23 = x$ ó $x - 3y = 23$ |
| Dentro de dos años la edad que tiene Pedro será el cuádruplo de la que tiene Juan | $x + 2 = 4(y + 2)$ |
| Hace cinco años la edad que tenía Pedro era el triplo de la de Juan | $x - 5 = 3(y - 5)$ |

| CASO 2 | |
|---|---|
| LENGUAJE COMÚN | LENGUAJE ALGEBRAICO |
| Contenido de un recipiente | $x$ |
| De un recipiente se extrae el 45% de su contenido | $x - 45\%x$ ó $55\%x$ |
| De un recipiente se saca el 25% de su contenido y se hecha en otro recipiente, para que ambos tengan la misma cantidad | $x - 25\%x = y + 25\%x$ |
| De un recipiente se saca el 20% del agua que contiene, mientras que de otro se saca el 40% del agua que contiene. Entre ambos se sacó 3 litros | $20\%x + 40\%y = 3$ |
| De un recipiente se saca el 25% del agua que contiene, mientras que de otro se saca el 10% del agua que contiene. Entre ambos recipientes quedaron 46 litros. | $(x - 25\%x) + (y - 10\%y) = 46$ ó $75\%x + 90\%y = 46$ |
| De un recipiente se saca el 75% del agua que contiene, mientras que de otro se saca el 85% del agua que contiene. Entre ambos recipientes se sacó un 40% de la capacidad de ambos recipientes. | $75\%x + 85\%y = 40\%(x + y)$ |
| De un recipiente se saca el 15% del agua que contiene, mientras que de otro se saca el 90% del agua que contiene. Entre ambos recipientes quedó un 60% de la capacidad de ambos recipientes. | $(x - 15\%x) + (y - 90\%y) = 60\%(x + y)$ ó $85\%x + 10\%y = 60\%(x + y)$ |

| CASO 3 | |
|---|---|
| LENGUAJE COMÚN | LENGUAJE ALGEBRAICO |
| Un número | $x$ |
| El doble de un número | $2x$ |
| El triplo de un número | $3x$ |
| El cuádruplo de un número | $4x$ |
| El quíntuplo de un número | $5x$ |
| La mitad de un número/Un medio de un número | $\frac{x}{2}$ ó $\frac{1}{2}x$ |
| La tercera parte de un número/Un tercio de un número | $\frac{x}{3}$ ó $\frac{1}{3}x$ |
| La cuarta parte de un número/Un cuarto de un número | $\frac{x}{4}$ ó $\frac{1}{4}x$ |
| La quinta parte de un número/Un quinto de un número | $\frac{x}{5}$ ó $\frac{1}{5}x$ |
| La razón entre dos números es de tres medios | $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ |
| Si al numerador de una facción se le resta cinco y al denominador se le adiciona dos entonces la razón es dos quintos | $\frac{x-5}{y+2}=\frac{2}{5}$ |
| Si a un número se le adiciona 3 y al otro se le resta su cuadrado entonces la razón es de cuatro séptimos | $\frac{x+3}{y-y^2}=\frac{4}{7}$ |

## Pasos para resolver un problema

### Que conducen a sistemas de ecuaciones

1- Datos
   Declarar las variables del problema
2- Relaciones
   Obtener las ecuaciones del sistema
3- Ajustar las ecuaciones
   Obtener la estructura
   $ax + by = c$
4- Formar el sistema de ecuaciones
   $ax + by = c$
   $dx + ey = f$
   Resolver el sistema de ecuaciones
5- Dar respuesta literal

### Que conducen a una ecuación lineal

1- Datos
   Declarar las variables del problema
2- Relaciones
   Obtener las ecuaciones del sistema
3- Ajustar las ecuaciones
   Obtener una ecuación que relacione a todas las variables o a la mayoría.
   Poner todas las variables en función de una misma variable.
   Resolver la ecuación lineal que se origine
   Obtener los valores de las demás variables
4- Dar respuesta literal

## ÁNGULOS FORMADOS ENTRE RECTAS PARALELAS

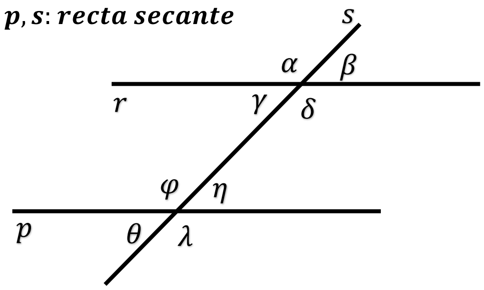
Ángulos de igual amplitud

- Opuestos por el vértice $\alpha = \delta\ ; \theta = \eta$
- Alternos $\alpha = \lambda \quad \gamma = \eta$
- Correspondientes $\alpha = \varphi$ ; $\theta = \gamma$

Ángulos suplementarios (suman $180°$)

- Adyacentes $\alpha + \beta = 180°$ ; $\varphi + \theta = 180°$
- Conjugados $\alpha + \theta = 180°$ ; $\delta + \eta = 180°$

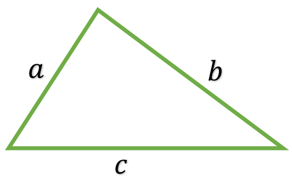
$r \parallel p, s$: *recta secante*




## TRIÁNGULOS

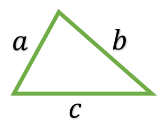
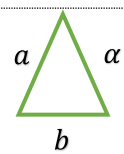
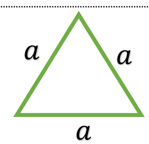
### Definición

Polígono de tres lados que cumple la condición de que la suma de dos de sus lados es siempre mayor que el tercer lado (desigualdad triangular)

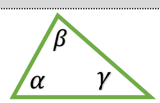
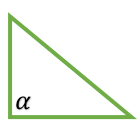



$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$c + b > a$$

### CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS LADOS

| | |
|---|---|
| Triángulo Escaleno<br>Tres lados desiguales |  |
| Triángulo Isósceles<br>Dos lados iguales |  |
| Triángulo Equilátero<br>Tres lados iguales |  |

### CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS ÁNGULOS

| | |
|---|---|
| Triángulo Acutángulo<br>(Tres ángulos agudos)<br>$\alpha, \beta, \gamma$ *son menores que* $90^o$ |  |
| Triángulo Rectángulo<br>(Un ángulo recto)<br>$\alpha = 90^o$ |  |
| Triángulo Obtusángulo<br>(Un ángulo obtuso)<br>$90^o < \alpha < 180^o$ |  |

### Propiedades Generales

1. La suma de sus ángulos interiores es $180°$
2. La suma de dos ángulos interiores es igual a la amplitud del ángulo exterior no adyacente a ellos.
3. A lados iguales se oponen ángulos iguales en un mismo triángulo o en triángulos iguales y viceversa.
4. La paralela media es el segmento que une los puntos medios de dos lados cualesquiera, su longitud es la mitad del lado que no interseca y es paralela a ese lado.

Triángulo rectángulo

5. Tiene un ángulo interior recto $(90°)$
6. La suma de los ángulos interiores no rectos es de $(90°)$

Triángulo isorectángulo

5. Tiene un ángulo interior recto.
6. Tiene los lados adyacentes al ángulo recto iguales.
7. Los ángulos no rectos son iguales y miden $(45°)$

Triángulo isósceles

5. Tiene dos lados de igual longitud.
6. Los ángulos que se oponen a los lados iguales son iguales en amplitud.
7. Todas las rectas notables coinciden respecto al lado desigual.

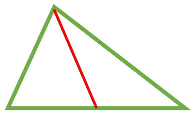
Triángulo equilátero

5. Tiene sus tres lados iguales en amplitud.
6. Tiene sus tres ángulos iguales y miden $(60°)$
7. Todas las rectas notables coinciden respecto a cualquier lado.
8. Todos los puntos notables coinciden.

## RECTAS NOTABLES

**Mediana**

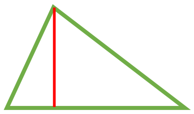
Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto



Punto medio

**Altura**

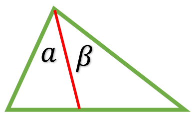
Segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o su prolongación y es perpendicular a ese lado.



Perpendicular

**Bisectriz**

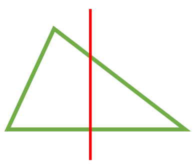
Es una semirrecta que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto y divide al ángulo de dicho vértice en dos iguales.




$\alpha = \beta$

**Mediatriz**

Es una recta perpendicular a un lado que pasa por el punto medio de ese lado.



Punto medio

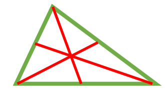
Perpendicular

## PUNTOS NOTABLES

**Baricentro**

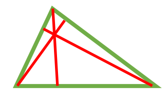
Punto de intersección de las medianas

Punto de equilibrio del triangulo



**Ortocentro**

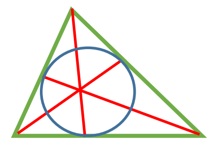
Punto de intersección de las alturas



**Incentro**

Punto de intersección de las bisectrices

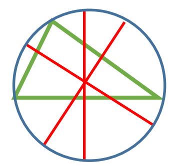
Centro de la circunferencia inscrita al triángulo



**Circuncentro**

Punto de intersección de las mediatrices

Centro de la circunferencia circunscrita al triángulo

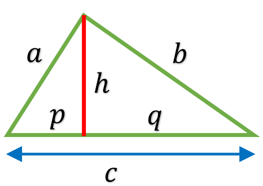


## TRIGONOMETRÍA

### GRUPO DE TEOREMAS DE PITÁGORAS (TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$




Teorema de la altura

$$h^2 = p \cdot q$$

Teorema de los catetos

$$a^2 = p \cdot c$$

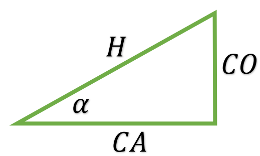
$$b^2 = q \cdot c$$

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS (TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

$$sen\alpha = \frac{CO}{H} \qquad cos\alpha = \frac{CA}{H}$$

$$tan\alpha = \frac{CO}{CA} \qquad cot\alpha = \frac{CA}{CO}$$

$$sec\alpha = \frac{H}{CA} \qquad csc\alpha = \frac{H}{CO}$$

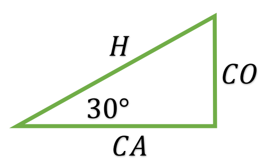



Teorema del ángulo 30°

(triángulos rectángulos)

$$H = 2 \cdot CO$$

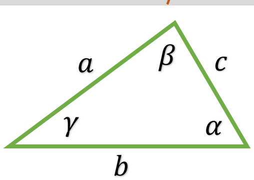
$$CA = \sqrt{3} \cdot CO$$




### LEY DEL SENO (CUALQUIER TRIÁNGULO)

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

$R$: es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

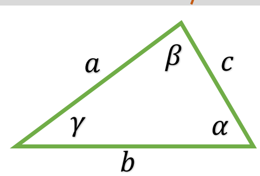



### LEY DEL COSENO (CUALQUIER TRIÁNGULO)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\gamma$$

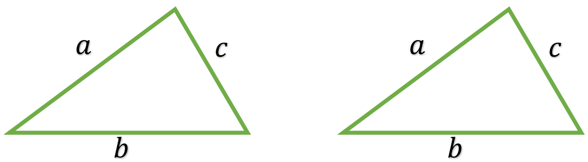


## IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

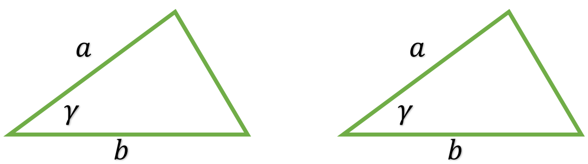
Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente iguales.

### Criterios de igualdad

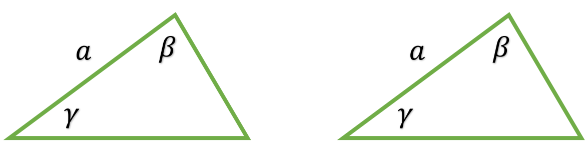
(l.l.l) Dos triángulos son iguales si tienen tres lados respectivamente iguales.




(l.a.l) Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.




(a.l.a) Dos triángulos son iguales si tienen un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales.



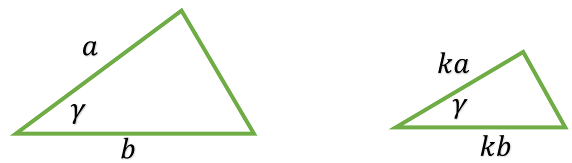

## SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

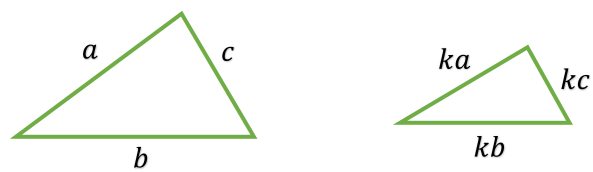
### Criterios de semejanza

(a.a) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

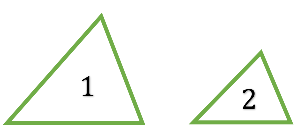

(p.a.p) Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido respectivamente igual.




(p.p.p) Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados respectivamente proporcionales.




## RELACIONES ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES




$\triangle_1 \sim \triangle_2$

k: es la razón de proporcionalidad.

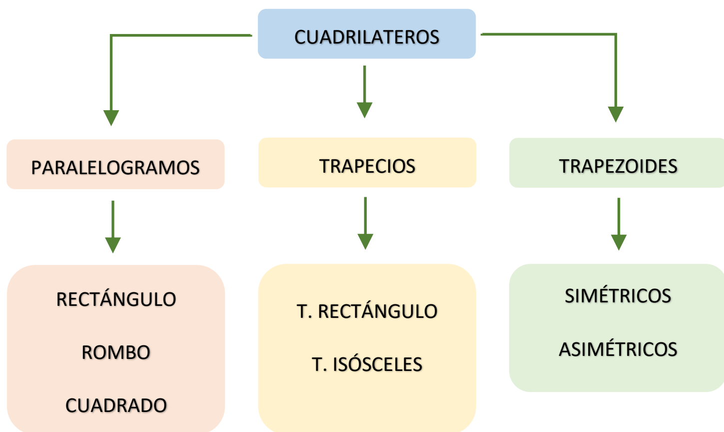
Perímetro

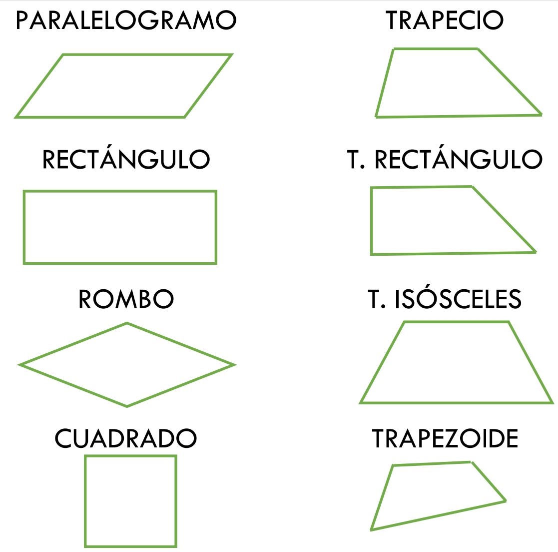
$$\frac{P_1}{P_2} = k$$

Área

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

## CUADRILÁTEROS




## PARALELOGRAMOS

Propiedades generales

1. Los lados opuestos son paralelos.
2. Los lados opuestos son iguales.
3. Los ángulos opuestos son iguales.
4. Dos ángulos consecutivos suman $180°$
5. La suma de sus ángulos interiores es $360°$
6. Las diagonales se cortan en su punto medio.

Rectángulo

7. Sus ángulos interiores son iguales y miden $90°$
8. Sus diagonales son iguales.

Rombo

7. Sus diagonales se cortan perpendicularmente.
8. Sus diagonales son bisectrices de los ángulos interiores que bisecan. 9. Sus lados son iguales.

Cuadrado

7. Tiene todas las propiedades del paralelogramo, rectángulo y del rombo.

## TRAPECIOS

Propiedades generales

1. Tiene solo dos lados paralelos.
2. La paralela media es el segmento que une el punto medio los lados no paralelos, es paralelo a las bases y su longitud se puede determinar por la semisuma de las bases.

Trapecio rectángulo

3. Uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases.

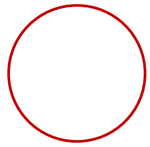
Trapecio isósceles

3. Los lados no paralelos son iguales.
4. Los ángulos adyacentes a una misma base son iguales.

## CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

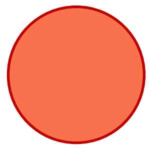
Circunferencia:
Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

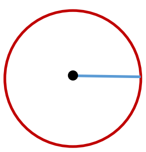
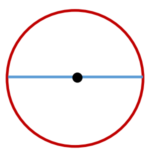
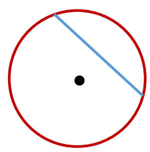
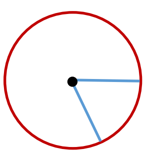
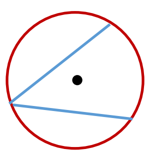
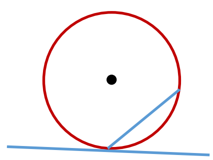
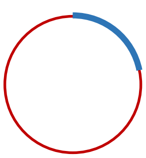
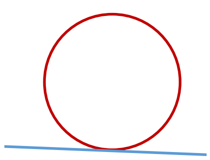
- Tiene borde
- No tiene área



Círculo:
Es el área delimitada por una circunferencia incluyendo los puntos de la misma.

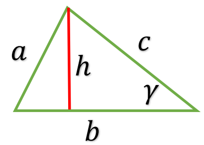
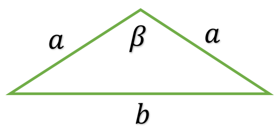
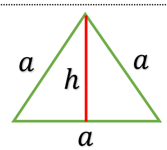
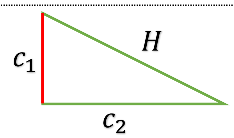
- Tiene borde
- Tiene área

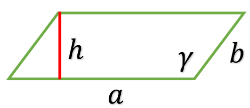
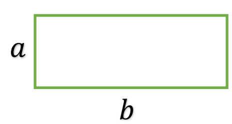
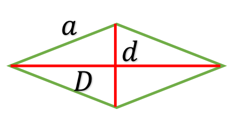
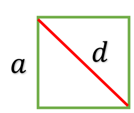


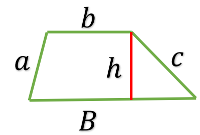
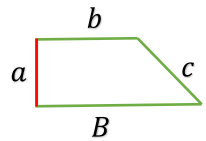
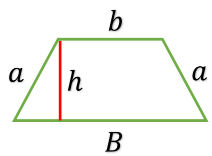
| ELEMENTOS QUE LA CONFORMAN | | |
|---|---|---|
| RADIO | DIÁMETRO | CUERDA |
|  |  |  |
| ÁNGULO CENTRAL | ÁNGULO INSCRITO | ÁNGULO SEMIINSCRITO |
|  |  |  |
| ARCO | RECTA TANGENTE | |
|  |  | |

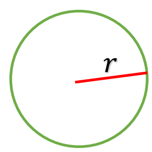
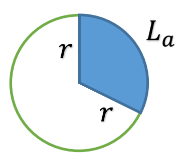
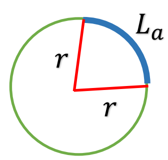
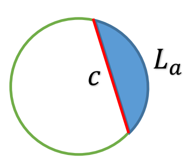
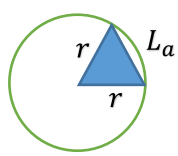
Propiedades generales

1. A dos ángulos inscritos que correspondan la misma cuerda o cuerdas iguales son iguales entre sí.
2. A dos ángulos inscritos que correspondan el mismo arco o arcos iguales son iguales entre sí.
3. A dos ángulos centrales que correspondan la misma cuerda o cuerdas iguales son iguales entre sí.
4. A dos ángulos centrales que correspondan el mismo arco o arcos iguales son iguales entre sí.
5. El diámetro es el doble del radio.
6. Si el radio o el diámetro corta perpendicularmente a una cuerda entonces lo hace en su punto medio.
7. Si el radio o el diámetro corta en su punto medio a una cuerda entonces lo hace perpendicularmente.
8. Toda recta tangente a la circunferencia corta a la circunferencia en un solo punto y es perpendicular al radio o diámetro en el punto de contacto.
9. Todo ángulo inscrito al que se le hace corresponder un diámetro o una semicircunferencia mide $90°$ (Teorema de Tales).
10. Si un ángulo central y otro inscrito le corresponden la misma cuerda o cuerdas iguales entonces se cumple que: $\sphericalangle central = 2 \cdot \sphericalangle inscrito$
11. Si un ángulo central y otro inscrito le corresponden el mismo arco o arcos iguales entonces se cumple que: $\sphericalangle central = 2 \cdot \sphericalangle inscrito$.
12. Un ángulo inscrito y otro semiinscrito correspondientes a un mismo arco son iguales.

| TRIÁNGULOS | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre | Figura | Perímetro | Área |
| Triángulo cualquiera |   | $P = a + b + c$<br>$S = \frac{P}{2}$ s: semiperimetro | $A = \frac{b \cdot h}{2}$<br>$A = \frac{c \cdot b \cdot sen\gamma}{2}$<br>$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ |
| Triángulo isósceles |   | $P = 2a + b$ | $A = \frac{a^2 \cdot sen\beta}{2}$ |
| Triángulo equilátero |   | $P = 3a$ | $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$<br>$A = \frac{\sqrt{3}h^2}{3}$ |
| Triángulo rectángulo |   | $P = C_1 + C_2 + H$ | $A = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$ |

| CUADRILÁTEROS | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre | Figura | Perímetro | Área |
| Paralelogramo cualquiera |   | $P = 2(a + b)$ | $A = a \cdot h$<br>$A = a \cdot b \cdot sen\gamma$ |
| Rectángulo |   | $P = 2(a + b)$ | $A = a \cdot b$ |
| Rombo |   | $P = 4a$ | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ |
| Cuadrado |   | $P = 4a$ | $A = a^2$<br>$A = \frac{d^2}{2}$ |

| TRAPECIOS | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre | Figura | Perímetro | Área |
| Trapecio cualquiera |  | $P = a + B + b + c$ | $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ |
| Trapecio rectángulo |  | $P = a + B + b + c$ | $A = \frac{(B+b)\cdot a}{2}$ |
| Trapecio isósceles |  | $P = 2a + B + b$ | $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ |

| CÍRCULOS | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre | Figura | Perímetro | Área |
| Círculo |  | $L_c = 2\pi r$<br>$L_c = \pi d$ | $A = \pi r^2$<br>$A = \frac{\pi d^2}{4}$ |
| Sector circular |  | $P_{sc} = 2r + L_a$ | $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$<br>$A = \frac{r^2 \cdot \alpha_{rad}}{2}$ |
| Longitud del arco |  | $L_a = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$ | |
| Segmento circular |  | $P_{sc} = c + L_a$ | $A = r^2 \left[\frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} - \frac{sen\alpha^\circ}{2}\right]$ |
| Triángulo circular |  | $P_{tc} = 2r + c$ | $A = \frac{r^2 \cdot sen\alpha^\circ}{2}$ |

## FÓRMULAS

| | |
|---|---|
| Punto medio de un segmento | $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ |
| Distancia entre dos puntos | $d(A;B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ |
| Distancia de un punto a una recta | $d(A;r) = \frac{\lvert A_x + B_y + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ |
| Pendiente de una recta | $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ |
| Ángulo de inclinación de una recta | $tan\theta = m$ |

## OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Necesito:

- ✓ Coordenadas de un punto y la pendiente.
- ✓ Coordenadas de dos puntos.
- ✓ Formula despejada $(y_A - y_B) = m(x_A - x_B)$

## EJEMPLO

Obtén la ecuación de la recta de pendiente $m = 3$ y pasa por el punto $A(2;-1)$.

Sustituir la pendiente y el punto en la fórmula despejada

$$(y_A - y_B) = m(x_A - x_B)$$
$$(y_A - (-1)) = 3(x_A - 2)$$
$$y + 1 = 3x - 6$$

Despejar la variable "y"

$y = 3x - 6 - 1$

Ecuación común

$y = 3x - 7$

igualar a cero

$y + 1 - 3x + 6 = 0$

Ecuación cartesiana

$-3x + y + 7 = 0$

## LA RECTA

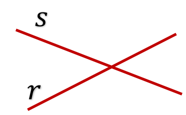
| | |
|---|---|
| Ecuación cartesiana o general de la recta | $Ax + Bx + C = 0$ |
| Ecuación común de la recta | $y = mx + n$ |
| Equivalencia entre ambas ecuaciones | $m = -\frac{A}{B}$ $n = -\frac{C}{B}$ |

## RELACIÓN DE POSICIÓN ENTRE DOS RECTAS EN EL PLANO

**Se cortan**

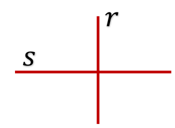
Se cortan con un ángulo no recto

$m_r \neq m_s$




Se cortan perpendicularmente

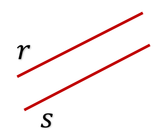
$m_r = -\frac{1}{m_s}$




**No se cortan (paralelas)**

Paralelas no coincidentes

$m_r = m_s$
$n_r \neq n_s$




Paralelas coincidentes

$m_r = m_s$
$n_r = n_s$

# TEORÍA DEL ESPACIO

## RECTA

1. Una recta está determinada de manera única por dos puntos, o sea por dos puntos pasa una y solo una recta.
2. Por un punto pasan infinitas rectas.

## RELACIÓN DE POSICIÓN RECTA - RECTA

1. Dos rectas en el plano:
   - Se cortan si tienen un punto en común.
   - No se cortan (paralelas) si no tienen puntos en común.
2. Dos rectas en el espacio:
   - Se cortan si tienen un punto en común.
   - No se cortan (paralelas) si no tienen puntos en común.
   - Son alabeadas o se cruzan si no están contenidas en el mismo plano.
3. En el plano, si $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ son dos rectas paralelas y $\boldsymbol{r}$ es perpendicular con $\boldsymbol{p}$ entonces $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{p}$
4. En el plano, si una recta $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{s}$ y otra recta $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{r}$ entonces $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{s}$

## RELACIÓN DE POSICIÓN PLANO - PLANO

1. Dos planos son paralelos si no se intersecan.
2. Dos planos son paralelos si son perpendiculares a una misma recta.
3. Dos planos son paralelos si uno de ellos es paralelo a dos rectas que se cortan en el otro.
4. Por un punto exterior a un plano se puede trazar uno y solo un plano paralelo a él.
5. Si dos planos paralelos son cortados por un tercero las rectas de intersección que resultan son paralelas.
6. Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.
7. Si dos planos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son perpendiculares, todas las rectas de $\boldsymbol{\alpha}$ que sean perpendiculares a la recta de intersección son perpendiculares a $\boldsymbol{\beta}$

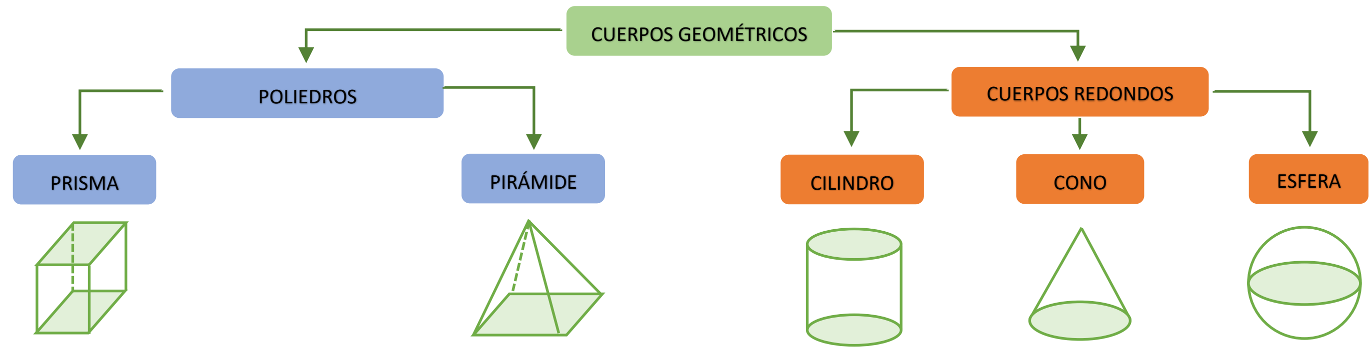
## PLANO

1. Un plano está determinado de manera única por:
   - Tres puntos no alineados.
   - Dos rectas que se cortan.
   - Dos rectas paralelas.
   - Una recta y un punto exterior a ella.

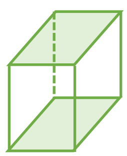
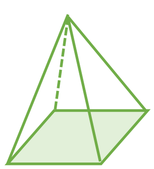
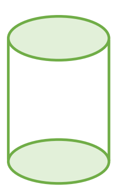
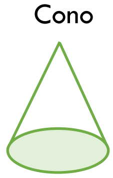
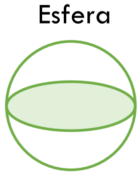
## RELACIÓN DE POSICIÓN RECTA - PLANO

1. Una recta y un plano:
   - Se cortan si tienen uno y solo un punto en común.
   - No se cortan (paralelas) si no tienen puntos en común.
2. Si una recta tiene al menos dos puntos comunes con un plano entonces pertenece al plano.
3. Si una recta no tiene puntos comunes con un plano entonces es paralela al plano.
4. Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en dicho plano.
5. Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que se cortan en su pie entonces es perpendicular al plano.
6. La distancia de un punto a un plano es un segmento perpendicular al plano que une un punto único del plano con dicho punto exterior.
7. Si una e dos rectas paralelas es perpendicular a un plano, la otra también lo es.
8. Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.
9. Si una recta corta a un plano entonces existe al menos una recta que pasa por su pie y es perpendicular a ella.

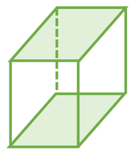
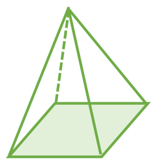
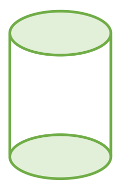
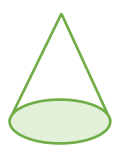
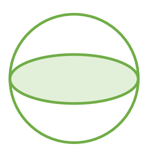
## CUERPOS GEOMÉTRICOS




## PROPIEDADES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

| | | |
|---|---|---|
| Prisma<br> | Prisma<br>1. Dos caras son iguales y paralelas (bases).<br>2. Las caras laterales son paralelogramos.<br>Prisma recto<br>3. Sus caras laterales son perpendiculares a sus bases.<br>4. Sus aristas laterales son perpendiculares a sus bases. | Prisma regular<br>4. Es un prisma recto<br>5. Sus bases son polígonos regulares.<br>6. Sus caras laterales son rectángulos.<br>Ortoedro<br>3. Todas sus caras son rectángulos.<br>Cubo<br>3. Todas sus caras son cuadrados. |
| Pirámide<br> | Pirámide<br>1. Tiene una base y sus caras laterales son triángulos que tienen un vértice común.<br>2. Tiene un vértice principal.<br>Pirámide recta<br>3. La altura de la figura es el segmento perpendicular a la base que une el vértice principal y el centro de la base. | Pirámide regular<br>3. Es una pirámide recta.<br>4. Tiene una base regular.<br>5. Sus caras son triángulos isósceles.<br>6. Sus aristas laterales son iguales. |
| Cilindro<br> | Cilindro<br>1. Tiene dos caras paralelas e iguales (bases).<br>2. Sus bases son círculos. | Cilindro circular recto<br>3. La altura del cilindro es el segmento perpendicular a las bases que une los centros de las bases.<br>4. La altura coincide con las generatrices. |
| Cono<br> | Cono<br>1. Tiene una base circular.<br>2. Tiene un vértice principal donde se intersecan todas las generatrices. | Cono recto<br>3. La altura de la figura es el segmento perpendicular a la base que une el vértice principal y el centro de la base. |
| Esfera<br> | Esfera<br>1. Es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro.<br>2. Está compuesto por infinitos círculos.<br>3. La distancia de cualquier punto de la superficie hasta el centro es la misma (r) | |

## FÓRMULAS DE ÁREA Y VOLUMEN

| Nombre | Figura | Volumen | Área |
|---|---|---|---|
| Prisma |  | $V = A_B \cdot h$ | $A_L = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$<br>(Suma de sus caras laterales)<br>$A_T = 2A_B + A_L$<br>$A_L = P_b \cdot h$ |
| Pirámide |  | $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$ | $A_L = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$<br>(Suma de sus caras laterales)<br>$A_T = A_B + A_L$ |
| Cilindro |  | $V = A_B \cdot h$<br>$V = \pi r^2 \cdot h$ | $A_L = 2\pi rh$<br>$A_T = 2A_B + A_L$<br>$A_T = 2\pi r(r + h)$ |
| Cono |  | $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$<br>$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ | $A_L = \pi rg$<br>$A_T = A_B + A_L$<br>$A_T = \pi r(r + g)$ |
| Esfera |  | $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ | $A_T = 4\pi r^2$ |

## HERRAMIENTAS DE CONTEO

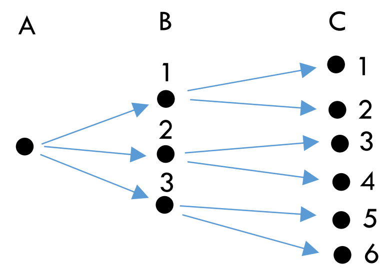
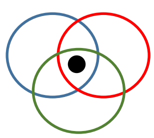
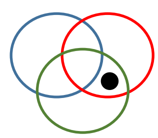
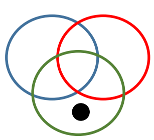
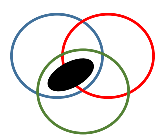
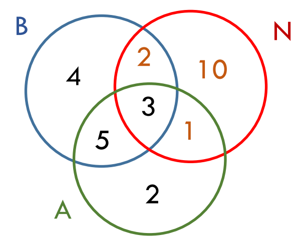
| DESCRIPCIÓN | SITUACIÓN | SOLUCIÓN |
|---|---|---|
| **Diagrama del árbol:** es una forma representativa en la que se ramifican las diferentes maneras en las que pueden ocurrir dos o más sucesos uno continuación del otro. | Un objeto puede trasladarse de un punto A, a un punto B por 3 caminos distintos y de este último a un punto C de 2 maneras distintas ¿De cuántas formas distintas se puede trasladarse desde A hasta C? | <br>Se puede trasladar de 6 maneras |
| **Principio de multiplicación:** es un método que nos permite calcular la cantidad de maneras distintas en la que pueden ocurrir dos o más sucesos continuos. | Para vestir a un niño se tienen 3 camisas y 2 pantalones ¿De cuantas maneras distintas podemos vestirlos? | Cantidad de camisas: 3<br>Cantidad de pantalones: 2<br>3 x 2 = 6 |

**Diagrama conjuntista:** es una forma gráfica de representar conjuntos que se interceptan.

De un grupo de 30 alumnos 16 practican natación, 14 beisbol y 11 atletismo. Si 3 alumnos practican los tres deportes, 5 practican solo beisbol y atletismo, mientras que 2 solo practican en atletismo y 4 solo practican beisbol.

Tener en cuenta:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Las 3 condiciones simultaneas |  | Solo 2 condiciones simultaneas |  |
| Solo 1 condición |  | 2 condiciones simultaneas |  |




Los números en negro se completan con las condiciones explicadas, mientras que los números naranjas se completan restándole al total de categorías (16, 14, 12).

B = 14 entonces 14 – (4 + 5 + 3) = 2

A = 12 entonces 12 – (2 + 5 + 3) = 1

N = 16 entonces 16 – (2 + 3 + 1) = 10

**Respuestas:**

Practican solo beisbol 4, practican solo atletismo 2, practican solo natación 10.

Prantican solo besibol y atletismo 5, prantican solo atletismo y natacion 1, Prantican solo natacion y beisbol 2.

Practican besibol y atletismo 8(5+3), practican atletismo y natacion 4(3+1), Prantican natación y beisbol 5(2+3).

Practican los tres deportes 3.

Practica algún deporte 27(4+2+3+5+2+1+10).

No practican ningún deporte 3(30-27)

No practican beisbol 13(10+1+2)

No practican natación ni atletismo 7(4 que solo practican B + 3 que no practican ningún deporte)

| COMBINATORIA | | |
|---|---|---|
| Descripción | Símbolo | Ecuación |
| **Factorial de un número:** es un número que se obtiene por la multiplicación de es número y sus antecesores. Debe tenerse en cuanta que la factorial de cero es uno. $0! = 1$ | ! | $n! = n(n-1)!$ <br> Ejemplo: <br> $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 120$ |
| **Permutación:** es la cantidad de conjuntos que se pueden formar con todos los elementos teniendo en cuenta un orden. | $P_n$ | $P_n = n!$ <br> Ejemplo: <br> $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 6$ |
| **Variación:** es la cantidad de conjuntos que se pueden formar de "n" elementos tomados "p" a "p" teniendo en cuenta un orden, n: total de elementos, p: cantidad de elementos a tomar. | $\mathrm{V}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}}$ | $\mathrm{V}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \frac{n!}{(n-p)!}$ <br> Ejemplo: <br> $\mathrm{V}_{2}^{5} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$ <br> Se pueden simplificar los términos $3!$ |
| **Combinación:** es la cantidad de conjuntos que se pueden formar de "n" elementos tomados "p" a "p" sin tener en cuenta un orden, n: total de elementos, p: cantidad de elementos a tomar. | $\mathrm{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}}$ | $\mathrm{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ <br> Ejemplo: <br> $\mathrm{C}_{5}^{7} = \frac{7!}{(7-5)!\,5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!\,5!} = 21$ <br> Se recomienda desplegar la factorial del numerador hasta coincidir con el mayor factorial del denominador. |

| DIFERENCIAR ENTE PERMUTACIONES, VARIACIONES Y COMBINACIONES | | | |
|---|---|---|---|
| IOE | UTE | Ecuación | Ejemplos |
| Si | Si | $P_n = n!$ | ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 4, 7 y 8? <br> $P_3 = 3! = 6$ |
| Si | No | $\mathrm{V}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \frac{n!}{(n-p)!}$ | ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 7, 8 y 9? <br> $\mathrm{V}_{5}^{7} = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$ |
| No | No | $\mathrm{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ | ¿De cuántas formas se pueden otorgar dos premios iguales a dos alumnos de un grupo de 10? <br> $\mathrm{C}_{2}^{10} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = 45$ |

Leyenda: (IOE) Importa el orden en que aparecen los elementos
(UTE) Utilizan todos los elementos dados es decir $p = n$

## PROBABILIDAD

| Descripción | Símbolo | Ecuación | |
|---|---|---|---|
| **Probabilidad:** es el grado de certeza de que un evento o suceso ocurra como se pronostica. | $P_{(A)}$ | $P_{(A)} = \frac{n_A}{n}$ | $n_A$: $casos\ probables\ o\ favorables$<br>$n$: $casos\ posibles$ |

| | |
|---|---|
| Ejemplo:<br>¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda sea la cara que escojamos?<br>$n_A$: 1 (solo una cara favorece nuestra condición).<br>$n$: 2 (las caras de una moneda)<br>Llamemos al suceso M. La probabilidad de que el suceso M ocurra se calcula:<br>$P_{(M)} = \frac{n_M}{n} = \frac{1}{2}$ | Nota:<br>La respuesta se puede expresar de tres maneras, como fracción $\left[\frac{1}{2}\right]$, como expresión decimal $[0.5]$ o en porcentaje $[50\%]$. |

## PROBABILIDAD EN CASOS COMPLEJOS

En una caja se tienen 5 canicas azules y 3 verdes ¿Cuál es la probabilidad de escoger dos canicas verdes al azar?

Análisis:

| | | |
|---|---|---|
| 1. En primer lugar llamaremos al suceso C, luego planteamos la fórmula:<br>$P_{(C)} = \frac{n_C}{n}$<br>Dejamos el espacio para completar con las incógnitas faltantes.<br>$P_{(C)} = \frac{?}{?}$<br>$P_{(C)} = ?$ | 2. En segundo lugar determinamos todos nuestros casos posibles. Como tengo que escoger parejas y no importa el orden, utilizo la fórmula de combinatoria para determinar todas las parejas que podría formar (AA, VV y AV)<br>$C\,^8_2 = \frac{8!}{(8-2)!\,2!} = 28$<br>Con 8(5+3) canicas puedo formar 28 parejas distintas. | 3. En tercer lugar determinamos todos nuestros casos favorables. Como tengo que escoger parejas de un mismo color azul y no importa el orden, utilizo la fórmula de combinatoria para determinar todas las parejas que podría formar VV.<br>$C\,^3_2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3$<br>Con 3 canicas verdes puedo formar 3 parejas distintas. |

4. Puedo regresar al paso 1 y completar la formula $P_{(C)} = \frac{3}{28}$ y calcular. Ver posibles respuestas a continuación

Posibles respuestas:

a) La probabilidad de escoger dos canicas verdes al azar es de $\frac{3}{28}$

b) La probabilidad de escoger dos canicas verdes al azar es de $0.1071$

a) La probabilidad de escoger dos canicas verdes al azar es de $10{,}71\%$

## ESTRUCTURA DE UNA SERIE NUMÉRICA

Serie numérica: es la sumatoria de todos los términos de una sucesión.

$$\underbrace{2+4+6}_{\text{Términos de la serie}}+\cdots+\overbrace{2n}^{\text{Ley de formación}}=\underbrace{n(n+1)}_{\text{Sumatoria}}$$

## PREGUNTAS SOBRE LAS SERIES

a) Determine el término o sumando que ocupa el quinto lugar.

Solución:

Se sustituye en la ley de formación.

$$\overbrace{2n}^{\text{Ley de formación}}=2(5)=10$$

R./ El término de la serie que ocupa el quinto lugar es el 10.

---

b) Determine la suma de los siete primeros números.

Solución:

Se sustituye en sumatoria.

$$\overbrace{n(n+1)}^{\text{Sumatoria}}=7(7+1)=56$$

R./ La suma de los siete primeros números es 10.

---

c) Determine el lugar o posición que ocupa el término 16.

Solución:

Se iguala con la ley de formación.

$$\overbrace{2n}^{\text{Ley de formación}}=16$$

$$n=\frac{16}{2}$$

$$n=8$$

R./ La posición que ocupa el termino 20 en la serie es la sexta.

---

d) Determine la cantidad de números sumados si la sumatoria de los “n” primeros números es 110.

Solución:

Se iguala con la sumatoria.

Nota: es para la sumatoria de los primeros “n” números

$$\overbrace{n(n+1)}^{\text{Sumatoria}}=110$$

$$n^2+n-110=0$$

$$n-10=0 \text{ ó } n+11=0$$

$$n=10 \text{ ó } n=-11$$

Solo tomamos el valor positivo porque en esta situación nos referimos a posición.

R./ La posición que ocupa el término 20 en la serie es la sexta.

## DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES UTILIZANDO EL P.I.C

**Pasos a seguir:**

**1-Proposición:** plantear lo que piden como una serie.

**2-Inicio de la inducción:** Probar con el primer valor.

**3-Hipótesis:** remplazar "$n$" por "$k$" en la proposición.

**4-Tesis:** remplazar "$n$" por "$(k+1)$" en la proposición.

**5-Demostración:** adicionar el MI de la tesis a ambos miembros la hipótesis.

**6-Conclusión:** se cumple o no la propiedad y bajo qué condiciones.

### ADICIÓN DE UNA FRACCIÓN Y UN BINOMIO

Ejemplo 1:

$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ a la expresión sin denominador se multiplica y se divide por el denominador de la otra fracción.

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

Ahora se pueden sumar los numeradores manteniendo el mismo denominador.

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{k(k-2)}{5} - (3k-2)$$

$$\frac{k(k-2)}{5} - \frac{5(3k-2)}{5}$$

$$\frac{k(k-2)-5(3k-2)}{5}$$

$$\frac{k^2-2k-15k+10}{5}$$

$$\frac{k^2-17k+10}{5}$$

Conociendo que $S_{(n)} = 1+2+3+\ldots+n$ demuestre por el principio de inducción completa que $S_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$.

1-Proposición.

Demostrar que $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$

2-Inicio de la inducción

Demostrar que la proposición se cumple para $n = 1$

$MI = n \qquad MD = \frac{n(n+1)}{2}$

$MI = 1 \qquad MD = \frac{1(1+1)}{2} \qquad MI = MD$

$MD = 1$

Concusión: La proposición es verdadera para $n = 1$

3-Hipótesis

Supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

4-Tesis

Entonces la proposición será verdadera para $n = k+1$

$$1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)[k+2]}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

5-Demostración

Demostrar la tesis a partir de la hipótesis adicionando el término $(k+1)$ a ambos miembros de la hipótesis.

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Desarrollando el miembro derecho

$$MD = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{k^2+3k+2}{2}$$

6-Conclusión: La proposición es verdadera para $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$

## EQUIVALENCIA ENTRE ÁNGULOS DE DISTINTOS SISTEMAS DE MEDIDAS

| | Ángulos notables | | | Ángulos axiales | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grados | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $0°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ | $360°$ |
| radianes | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

| | Ángulos del segundo cuadrante | | | Ángulos del tercer cuadrante | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| grados | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $210°$ | $225°$ | $240°$ |
| radianes | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ |

| | Ángulos del cuarto cuadrante | | | Forma general para convertir | |
|---|---|---|---|---|---|
| grados | $300°$ | $315°$ | $330°$ | Llevar a radianes | Llevar a grados |
| radianes | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}$ | $\alpha_{rad} \cdot \frac{180°}{\pi}$ |

## CÁLCULO APROXIMADO

### Cifras significativas

Es la cantidad de cifras de un número, contando hacia la derecha, a partir de la primera cifra no nula.

Explicación:

1- Buscas de izquierda a derecha la primera cifra distinta de cero.
2- Comienzas a contar todas las cifras del número.

Aclaración:

En notación científica, los ceros de la potencia no cuentan como cifras significativas.

A la derecha de donde la primera cifra no nula se cuenta todo, hasta los ceros.

A la izquierda de la primera cifra no nula no se cuenta ningún cero.

### Ejemplos

La señalización representa a partir de donde se cuenta.

Números completos

$\underbrace{3}4500$ → Tiene 5 cifras significativas.

$\underbrace{3}6545{,}00$ → Tiene 7 cifras significativas.

$\underbrace{7},45$ → Tiene 3 cifras significativas.

$\underbrace{3}0{,}40$ → Tiene 4 cifras significativas.

$\underbrace{3},00$ → Tiene 3 cifras significativas.

$0{,}00\underbrace{8}05$ → Tiene 3 cifras significativas.

$0{,}\underbrace{5}050$ → Tiene 4 cifras significativas.

$0{,}\underbrace{6}$ → Tiene 1 cifras significativas.

$\underbrace{5},0$ → Tiene 2 cifras significativas.

Números en notación científica

$\underbrace{3},45 \cdot 10^7$ → Tiene 3 cifras significativas.

$\underbrace{3},0 \cdot 10^{-9}$ → Tiene 2 cifras significativas.

$\underbrace{3} \cdot 10^5$ → Tiene 1 cifras significativas.

## RESULTADO DEL CÁLCULO APROXIMADO

El resultado final o respuesta se expresa con la misma cantidad de cifras significativas que tenga el dato del ejercicio dado, con la menor cantidad de cifras significativas.

Ejemplo-1

El ejercicio nos ofrece los siguientes datos: $\overline{AB} = 5{,}0\ cm$ , $P = 24{,}3\ cm$ , $A = 301{,}1\ cm^2$

La respuesta final fue $V = 30{,}8\ cm^3$

Se debe expresar como $V = 31\ cm^3$ porque el dato de menor cifras significativas $\overline{AB}$ tiene dos cifras significativas.

Ejemplo-2

El ejercicio nos ofrece los siguientes datos: $\overline{AB} = 3{,}18\ cm$ , $P = 23\ cm$ , $V = 401\ cm^3$

La respuesta final fue $A = 4254{,}7\ cm^2$

Se debe expresar como $A = 4{,}2 \cdot 10^3\ cm^2$ porque el dato de menor cifras significativas $P$ tiene dos cifras significativas.

Ejemplo-3

El ejercicio nos ofrece los siguientes datos: $\overline{AB} = 7\ dm$ , $P = 43{,}5\ dm$ , $V = 701\ dm^3$

La respuesta final fue $A = 0{,}00000420\ cm^2$

Se debe expresar como $A = 4 \cdot 10^{-6}\ cm^2$ porque el dato de menor cifras significativas $\overline{AB}$ tiene una cifra significativa.