LOI NORMALE

I. Obtention de la table normale centrée réduite ;

Sur certaines calculatrices graphiques casio et texas instruments (à partir du modèle 82), la fonction ϕ est préprogrammée.

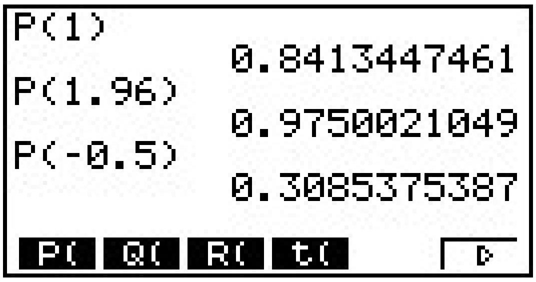
1.1 Rappel.

Pour tout u appartenant à $\mathbb{R}$, $\phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

1.2 Procédure.

Notée **P(** sur les casio, elle est accessible en mode calcul (menu **run**) en appuyant sur la touche **OPTN** (pour "Options").

Procédure :

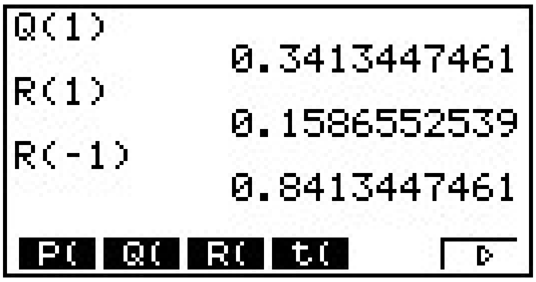


OPTN ; **F6** ; **PROB** ; **F6** ; **P(** ; **1** ; **)** ; **EXE**.

Faire suivre **P(** de la valeur de u_0, fermer la parenthèse (facultatif), puis valider (touche **EXE**) pour obtenir $\phi(u_0)$.

On obtient sans avoir recours à la relation $\phi(-u) = 1 - \phi(u)$, les valeurs de $\phi(u)$ quand u est négatif.

Les fonctions **Q** et **R**, d'un intérêt très limité, donnent respectivement :



Si $u \geq 0$: $\mathbf{Q}(u) = \phi(u) - 0{,}5$ soit $\mathbf{Q}(u) = \text{Prob}(0 \leq U \leq u)$

Si $u \leq 0$: $\mathbf{Q}(u) = 0{,}5 - \phi(u)$ soit $\mathbf{Q}(u) = \text{Prob}(u \leq U \leq 0)$

$\mathbf{R}(u) = 1 - \phi(u)$ soit $\mathbf{R}(u) = P(U > u)$

1.3 Illustration graphique

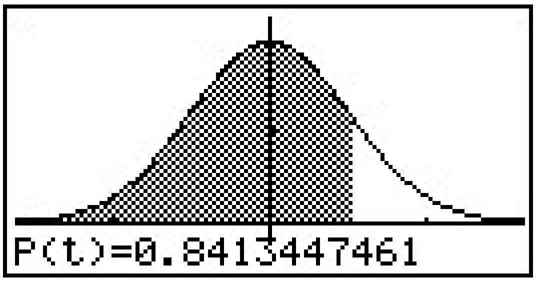
Attention sur les casio Graph 35+ la calculatrice doit obligatoirement être réglée de la manière suivante : Menu Run ; Shift ; Setup ; ligne Input/Output : **linear**.

Calcul de $\text{Prob}(U \leq 1)$

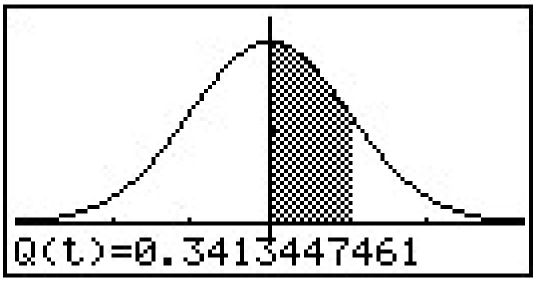
Sélectionner le mode **run** (calcul) puis :

Shift ; **sketch** (dessin) ; **GRPH** ; **Y=** ; **OPTN** ; **F6** ; **PROB** ; **F6** ; **P(** ; **1** ; **)** ; **EXE**

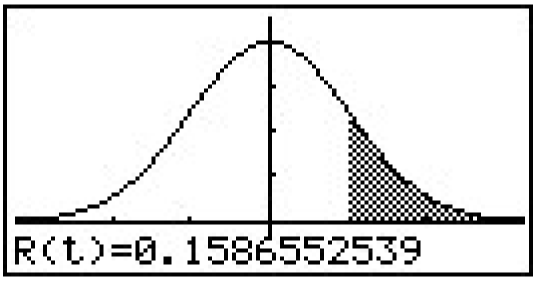
Calcul de $\mathbf{P}(1) = \mathrm{Prob}(\leq U \leq 1)$



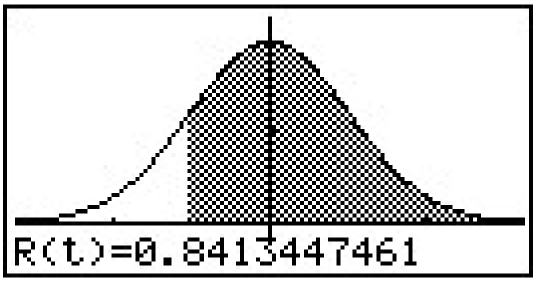
Calcul de $\mathbf{Q}(1) = \mathrm{Prob}(0 \leq U \leq 1)$



Calcul de $\mathbf{R}(1) = \mathrm{Prob}(U > 1)$



Calcul de $\mathbf{R}(-1) = \mathrm{Prob}(U > -1)$

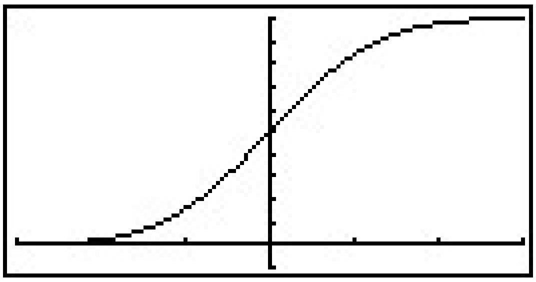


1.4 Courbe de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite

Il faut d'abord choisir les échelles graphiques :

$\boxed{\text{Shift}}$; $\boxed{\text{V-Windows}}$; puis saisir les valeurs suivantes.

Xmin : −3 ; **max** : 3 ; **scale** : 1 :
Ymin : −0.1 ; **max** : 1 ; **scale** : 0.1.



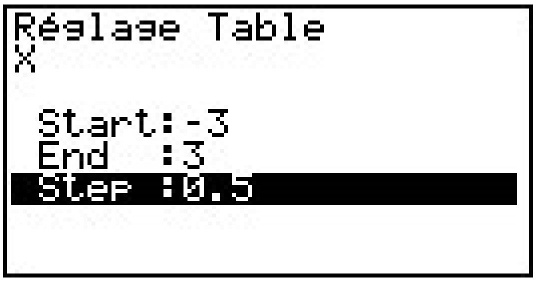
Menu $\boxed{\text{GRAPH}}$; $\boxed{\text{Y1}}$ par exemple ; $\boxed{\text{OPTN}}$;

$\boxed{\text{F6}}$; $\boxed{\text{PROB}}$; $\boxed{\text{F6}}$; $\boxed{\text{P(}}$; $\boxed{\text{X}}$; $\boxed{\text{)}}$; $\boxed{\text{EXE}}$; $\boxed{\text{DRAW}}$

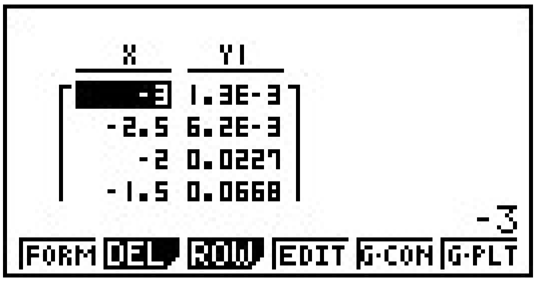
Puis avec le menu $\boxed{\text{TABL}}$.

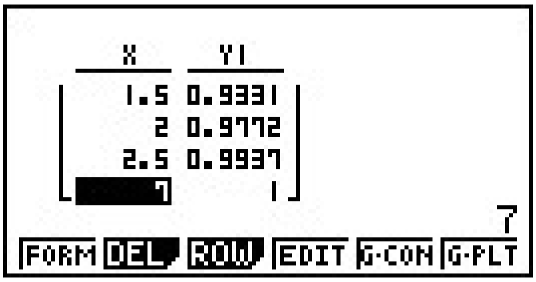
On règle les échelles avec $\boxed{\text{RANG}}$ ou $\boxed{\text{SET}}$;

$\boxed{\text{TABL}}$.



Si l'on se positionne sur une valeur de **X** et que l'on saisit une nouvelle valeur, la valeur correspondante de **Y1** est automatiquement recalculée.





III. Compléments.

Dans le menu statistique **STAT**; et sans qu'il soit nécessaire de saisir la moindre donnée ; on peut accéder aux modèles de certaines distributions de probabilité dont le modèle normal.

Pour les casio : **DIST** ; **NORM**

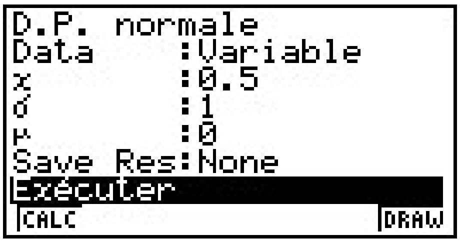
Pour les texas instruments : **2nd** puis appuyer sur la touche **DISTR**.

Voici différentes fonctions disponibles sur ces calculatrices :

3.1 Fonction densité de probabilité de la loi normale.

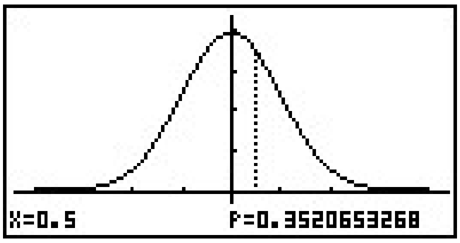
Npd pour casio ou **normalpdf** sur texas instruments

Elles permettent d'obtenir les valeurs de la fonction densité de probabilité $f_{\mu,\sigma}$ de n'importe quelle loi Normale.



En considérant la loi normale centrée réduite ($\mu = 0$ et $\sigma = 1$), pour une valeur de x, on obtient une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Ainsi, pour $x = 0,5$, les casio renvoient :



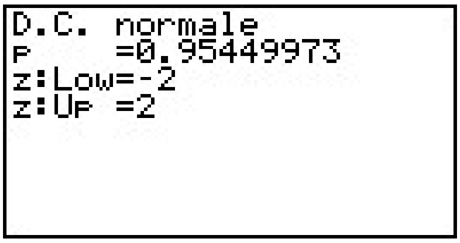
3.2 Fonction de répartition de la loi normale.

Ncd pour casio ou **normalcdf** sur texas instruments

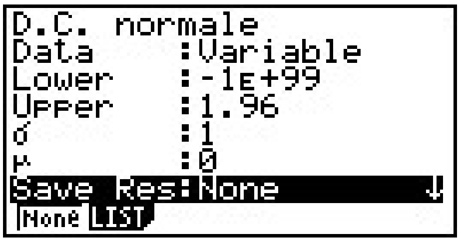
Elles permettent de calculer $\int_a^b f_{\mu\sigma}(x).dx = F(b) - F(a)$, où F est la fonction de répartition associée à la loi normale considérée.

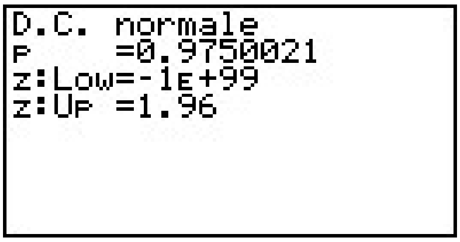
On obtient donc directement $\text{Prob}(a \leq X \leq b)$.

Voici un exemple sur casio : déterminons $\text{Prob}(2\,900 \leq X \leq 3\,100)$ où X est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(3\,000 ; 50)$.

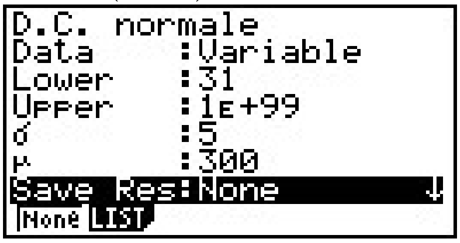


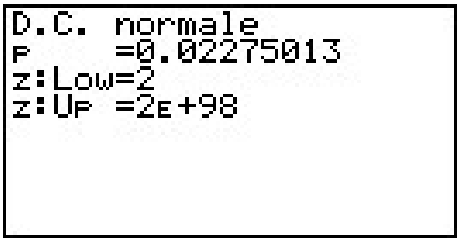
Si a est très petit (prendre par exemple -10^{99}), on obtient une "bonne" valeur approchée de $\text{Prob}(X \leq b)$.
On obtient ainsi $\text{Prob}(X \leq 1{,}96) = 0{,}975$.





Si b est très grand (prendre par exemple 10^{99}), on obtient une "bonne" valeur approchée de $\text{Prob}(X \geq a)$. On obtient ainsi $\text{Prob}(X \geq 3\,100) = 0{,}02275013$.





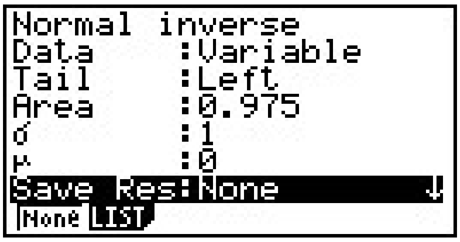
Cette fonctionnalité de la calculatrice permet le calcul de $\text{Prob}(a \leq X \leq b)$, de $\text{Prob}(X \leq b)$ et de $\text{Prob}(X \geq a)$ sans recours à la loi normale centrée réduite !

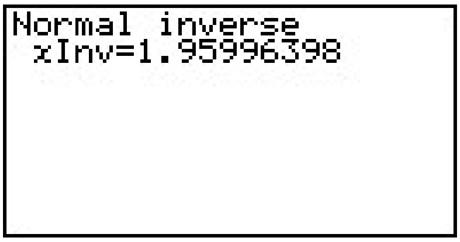
3.3 Lecture inverse de la loi normale.

InvN pour casio ou **invNorm** pour texas instruments

Elles donnent la valeur de *x* telle que *F(x)* = A avec A est un réel compris entre 0 et 1 (fonction réciproque de la fonction de répartition *F* associée à une loi normale).

Considérons X distribuée suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et déterminons x tel que $\text{Prob}(X \leq x) = 0{,}975$.





Considérons X distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(300;5)$.
Déterminons x tel que $\text{Prob}(X \leq x) = 0{,}975$.

Déterminons x tel que $\text{Prob}(X \geq x) = 0{,}975$.

IV. Exercice

Dans une région céréalière, une partie de la production de maïs des exploitations agricoles est livrée à une usine de conditionnement d'aliments pour le bétail.

On choisit au hasard une exploitation et on note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le rendement de maïs de ces exploitations en quintaux par hectare.

On admet que la loi de X est la loi normale de moyenne 75 et d'écart-type 15.

Déterminer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite :

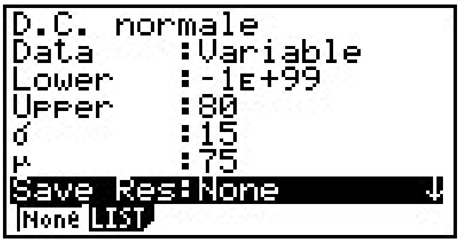
$\text{Prob}(X \prec 80)$; $\text{Prob}(X \geq 95)$ et $\text{Prob}(50 \leq X \leq 100)$.

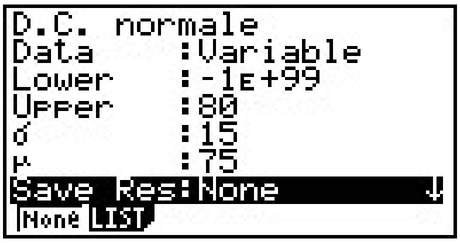
Correction.

Distribution normale de paramètres $\mu = 75$ et $\sigma = 15$;

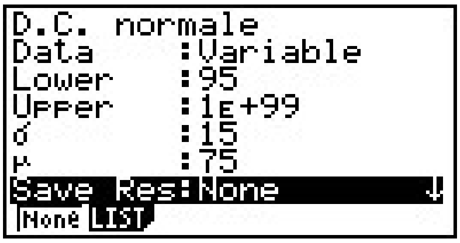
Menu **STAT** ; **DIST** ; **NORM** ; **Ncd** ;

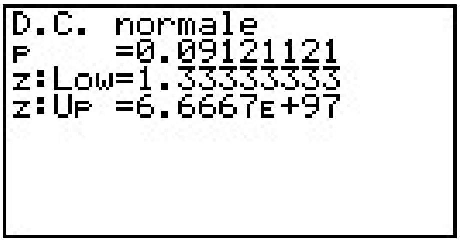
- $\text{Prob}(X \prec 80) = 0{,}63055$



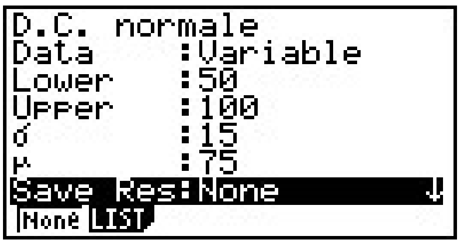


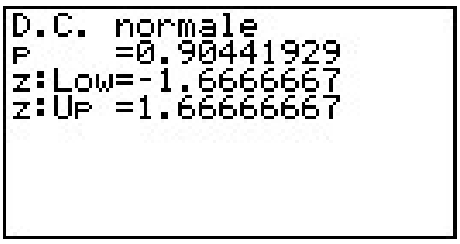
- $\text{Prob}(X \geq 95) = 0{,}091211$





- $\text{Prob}(50 \leq X \leq 100) = 0{,}90441$





Malheureusement, ce type de réponse n'est pas satisfaisant puisque les élèves sont tenus de mettre en œuvre une démarche claire et cohérente, en ayant recours à des graphiques.