ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET UNIVERSITAIRE
UNIVERSITE PROTESTANTE AU CONGO
(U.P.C.)

FACULTE DES SCIENCES INFORMATIQUES

KINSHASA / LINGWALA

SYLLABUS DU COURS DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

Pour les étudiants de L1 FASI
(TRONC COMMUN)

Par :

Dr Israël DISASHI KABADI
Professeur Associé

Année académique : 2024 – 2025.

COURS : Recherche Opérationnelle (3Credits).
PROMOTION : L4 LMD FASI.
ANNEE ACADEMIQUE : 2024 – 2025.

A. Objectif du cours.

L'objectif du cours de Recherche Opérationnelle est l'**aide** à la **décision**. Les deux termes sont essentiels. En fait, ce que l'on cherche premièrement à garantir, ce n'est pas la valeur du résultat, mais l'optimalité de la décision. Cela étant, et bien que nous ne sommes pas maîtres des situations qui constituent le cadre de nos actions, nous maîtrisons néanmoins nos choix pour lesquels il est préférable de ne pas avoir des regrets par la suite. Du reste, le cours de Recherche Opérationnelle n'as pas pour but de prendre des décisions, mais de clarifier le contexte dans lequel ces décisions sont prises. Il est vrai qu'un choix réel ne peut se faire qu'en connaissance des causes ; cependant, on ne peut attendre de tout connaître avant d'avancer.

Ainsi, ce cours vise la formation des étudiants à la modélisation des problèmes de gestion de manière à souligner l'interaction entre la création des modèles, la résolution algorithmique et la compréhension des solutions obtenues.

B. Contenu du cours.

Le cours est développé, hormis l'introduction, en trois chapitres ci-après :

Introduction

1. Présentation.
2. Historique succinct.
3. Exercices.

Chapitre I. Théorie des graphes et notions d'ordonnancement.

A. Théorie des graphes.

1.1 Généralités.
1.2 Représentation graphique.
1.3 Diamètre d'un graphe.
1.4 Les graphes planaires.
1.5 Les graphes réseaux.
1.6 Exercices.

B. Notions d'ordonnancement.

1.7 Notions de projet.
1.8 Méthodes existantes (GANT; PERT; MPM).
1.9 Chemin critique.
1.10 Exemple.
1.11. Exercices.

Chapitre II. Programmation linéaire.

2.1 Généralités.
2.2 Méthodes de résolution.
   A. Méthode graphique.
   B. Méthode du simplexe (Algorithme primal du simplexe et tableau du simplexe).
2.3 Exercices.

Chapitre III. Théorie des jeux.

3.1 Introduction.
3.2 Définition
3.3 Règle de jeu.
3.4 Sortes des Jeux.
3.5 But d'un joueur.
3.6 Exemples.
3.7 Stratégies et équilibres.
3.8 Position et gains du jeu.
3.9 Résolution d'un jeu.
3.10 Exercices.

Prof. Dr. **DISASHI KABADI Israël**

Introduction.

1. Présentation.

a). Problématique.

Comment trouver la (les) solution (s) à un problème avec des ressources tout en tenant compte de la diversité des façons de regarder les choses (les différentes facettes) ?

b). Définition.

- La Recherche Opérationnelle (RO) est un ensemble de méthodes et d'outils d'analyse et de synthèse des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer des meilleures décisions.

- La RO est une discipline – carrefour entre l'informatique, la mathématique et l'économie d'entreprise (Robert FAURE : Le concepteur de la RO).

2. Historique succinct.

a). Les précurseurs.

- 1840 : COURNOT → Théories mathématiques des richesses.
- 1850 : Fermat, Pascal → Espérance mathématique.
- 1917 : Emille Ernag → File d'attente (Réseaux téléphoniques).
- 1925 : BOREL → Théorie mathématique des jeux.
- 1936 : Koenig → Théorie des graphes.
- 1939 : Kantorovitch → Programmation linéaire.

b). Les domaines d'application dans l'entreprise.

(1°). Production.

1. Allocation des ressources limitées pour l'obtention d'un objectif.
2. Ordonnancement :

1960 : Méthode PERT (Programme Evaluation Review Technique-Fusées Polaris) suite opérationnelle d'instructions dans les ordinateurs multiprocesseurs.

(2°). Gestion des stocks.

(3°). Logistique.

1. Localisation optimale des dépôts.
2. Apprendre les clients à partir des dépôts afin de minimiser les coûts globaux du transport.
3. Choix des meilleurs chemins : Voyages, transport, déplacement des pièces dans un atelier.

(4°). Problèmes combinatoires.

1. Exercice : Nombre de possibilités pour 8 personnes d'avoir chacun 2 repas par jour.
2. Définition des investissements les plus rentables.
3. Ordonnancements.
4. …

(5°). Problèmes aléatoires ou stochastiques.

1. Exemple : Files d'attentes, pointes de trafics, …
2. Problème de structure.

(6°). Problème de situation de concurrence.

1. Exemple : Situation avec un concurrent.
2. Définition d'une politique de vente, d'approvisionnement.

c). Quelques applications.

(1°). Les applications militaires.

1. Angleterre 1940 :

Equipe Blackett (Prix Nobel 1948 en Physique) a réalisé
l'efficacité optimale et globale des stations de surveillance radars (Bataille d'Angleterre) et l'efficacité due à l'hétérogénéité de l'équipe.

2. USA 1940 :

Groupe Operation Resarch dans les états majors ont su gérer
l'organisation des convois des navires, le blocus des ports japonais,…

3. France :

Après la seconde guerre mondiale, il y a eu la mise en place de groupe RO en armée.

(2°). Les applications en d'autres entreprises.

1. Après la seconde guerre mondiale, la France a mis en place de groupe RO dans les grandes entreprises : 6 en EDF, 6 en SNCF, …
2. 1948 : Enseignement de la RO au MIT (en baisse de reconnaissance en 1970).
3. La gestion pratique de RO (Pour les informaticiens) aide à concevoir les différents logiciels et à connaître les limites des algorithmes utilisés.

d). Exemple d'un problème de RO : La bataille d'Angleterre.

(1°). Comment sauver l'Angleterre ?

Positionnement des radars :

1. Complexité du problème.
2. Localisation des radars (algorithme de positionnement).
3. traitement des données – délai (réseau).
4. Répartition du problème : détection, riposte, transmission.
5. bonne fiabilité.
6. maintenance pour la défaillance.
7. Organisation des tâches (gestion des tâches –chemin critique).
8. Stratégie informatique (espionnage).
9. arborescence du groupe [Civil – régulation, donnée – chercher (exhaustivité)].
10. Redondance (Réseau … optimisation des réseaux).
11. arborescence des moyens de défense.
12. Normalisation.
13. Finance / Coût – optimisation de la répartition budgétaire.
14. Approvisionnement (Vivres / matières premières).
15. But / Procédures.
16. Gestion du temps (Notion de contrainte), (tenir un planning).
17. Formation : maintenance, avion, procédure, … (gestion d'information).
18. Multiplier / repartir les postes de décision / optimiser (Redondance)
19. Gestion information (adressage interne / externe).
20. Cryptage des informations (appareiller les gens à leurs fonctions).
21. Gestion des ressources d'un site pilote ou de sites pilotes.

(2°). Ce qui y caractérise la RO.

1. Localisation : Où installer les radars en nombre limité ?
2. Transmission et traitements de données.
3. Comment assurer un bon fonctionnement des systèmes en conditions opérationnelles avec du personnel hétérogène ?

(3°). Les caractères de RO qui en découlent :

1. Bien poser le problème (qui souvent se construit) et inventorier les voies de traitement.
2. Vision globale.
3. Recours à des disciplines multiples.
4. Primauté accordée à la démarche rationnelle et aux méthodes quantitatives.
5. Rôle important des ordinateurs et de l'information.
6. Une attention portée aux conditions réelles (et non seulement théoriques).

3. Exercices.

1. Multiprocesseurs.

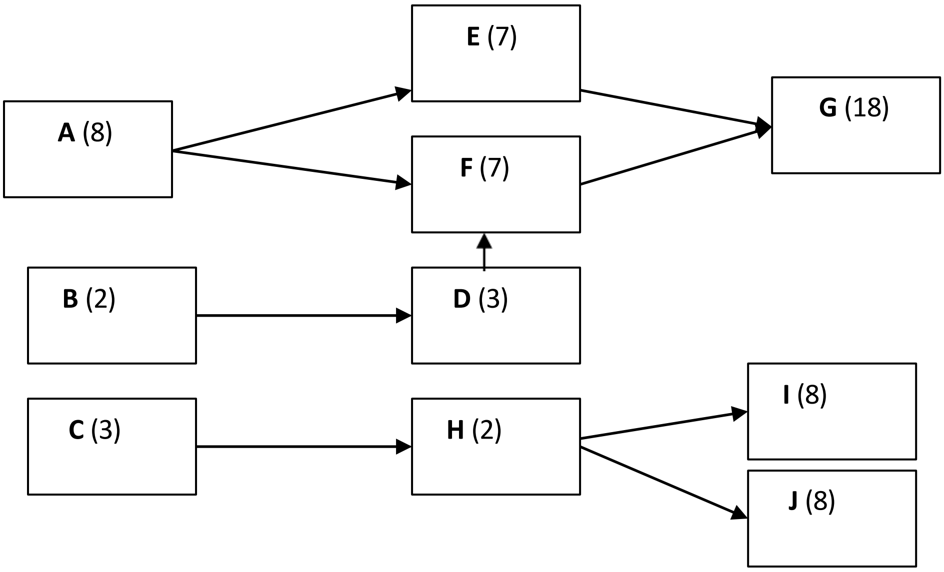
On a les règles ci-après pour l'exécution des tâches :

- Une tâche ne peut être commencée que si la précédente est terminée.
- Toute tâche commencée ne peut pas être interrompue.
- S'il y a choix de démarrer plusieurs tâches possibles, le choix se ferra par ordre alphabétique.
- Les tâches sont attribuées au processeur par numéro d'ordre processeur croissant.

Il y a 4 cas de figures à envisager :

- Cas N°1 : Durée nominale, 2 processeurs.
- Cas N°2 : Durée réduite (-1), 2 processeurs.
- Cas N°3 : Durée normale, 3 processeurs.
- Cas N°4 : Durée réduite (-1), 3 processeurs.

On demande de déterminer le cas de figure le plus rapide, si on a les tâches définies comme ci-après :



2. Combien de temps, vais-je avoir le temps de faire toutes les combinaisons possibles ?
   a) 8 places autour d'une table + 2 repas par jour.
   b) 20 personnes à 20 postes différents.
   c) 100 personnes à 100 postes différents.

Chapitre I. Théorie des graphes et notions d'ordonnancement.

A. Théorie des graphes.

1.1. Généralités.

1. Définition.

Un graphe est un ensemble de sommets (ou objets) reliés entre eux.

2. Vocabulaires.

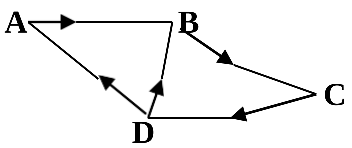
1°/ **Arc** : Une paire ordonnée des sommets (ou objets). Notation : (A,B) ou A⟶B ou AB pour l'arc reliant les sommets A et B.
2°/ **Arête** : Une paire non ordonnée des sommets (ou objets) autrement dit un arc non orienté. Notation : A — B pour l'arête_reliant les sommets A et B.
3°/ **Sommets adjacents** : Deux sommets reliés par un arc (ou une arête).
4°/ **Chemin hamiltonien** : Un chemin qui passe une fois et une seule fois sur tous les sommets (et qui comprend l'ensemble des sommets).
5°/ **Chemin simple** : Un chemin qui passe une et une seule fois sur un arc.
6°/ **Chemin élémentaire** : Un chemin qui passe une et une seule fois par les sommets qu'il utilise.
7°/ **Chemin** : Une succession des arcs successifs.
8°/ **Circuit** : Un chemin qui se referme sur lui-même.
9°/ **Chaine** : Une succession d'arêtes successives.
10°/ **Cycle** : Une chaine qui se referme sur elle-même.
11°/ **Ordre d'un graphe** : Le nombre de sommets (ou d'objets) de ce graphe.
12°/ **Matrices associées** : Un graphe peut être défini par sa matrice associée dans l'une de deux formes ci-après :

- forme **booléenne.**
- forme **explicite** (matrice en arcs).

3. Exemples.

Exemple 1.

Soit le graphe ci-après :



Trouvez :
- Les arcs et l'ordre du graphe.
- Les sommets adjacents.
- Les chemins.
- Les chemins hamiltoniens.
- Les chemins simples.
- Les chemins élémentaires.
- Les circuits et les matrices du graphe.

Solution.

Matrices du graphe.

(a) Forme booléenne (Forme booléenne).

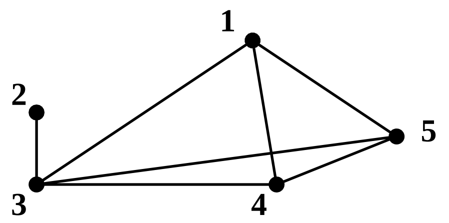
	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	1	1	0	0

(b) Forme explicite (Forme explicite).

	A	B	C	D
A		**AB**		
B			**BC**	
C				**CD**
D	**DA**	**DB**		

Exemple 2.

Soit le graphe ci-après :



Trouvez :
- Les arêtes et l'ordre du graphe.
- Les sommets adjacents.
- Les chaines.
- Les chaines hamiltoniennes.
- Les chaines simples.
- Les chaines élémentaires.
- Les cycles et les matrices du graphe.

Solution : En exercice.

4. Remarques.

- Un graphe dont les sommets (ou les objets) sont reliés par les arêtes est dit **graphe non orienté** tandis que celui dont les sommets sont reliés par les arcs est dit **graphe orienté ou digraphe.**
- Un digraphe fini G = (V, E) est défini par l'ensemble $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ($|V| = n$) dont les éléments sont appelés les sommets, et par l'ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ($|E| = m$) dont les éléments sont appelés arcs.
- Si un arc e = (u, v), on dira que u est l'extrémité initiale de e et v est l'extrémité finale de e.
- Dans le cadre de digraphe G en particulier, on peut définir une application qui à un sommet (extrémité initiale) de ce G associe pour valeur la terminaison (extrémité finale).

D'où : Mathématiquement, un graphe G est complètement défini si on connaît l'ensemble V de sommets et l'application k qui, à un sommet, associe la valeur de la terminaison de l'arc qui y est issu. Donc, G = {V, k}.

Par exemple : Le graphe de l'exemple 1 peut être défini comme ceci :
G = {V, k} où V = {A, B, C, D} et k définie par :

$k : V \longrightarrow V$, telle que
$k(A) = \{B\}$
$k(B) = \{C\}$
$k(C) = \{D\}$
$k(D) = \{A, D\}$.

1.2. Représentation graphique.

1. Définition.

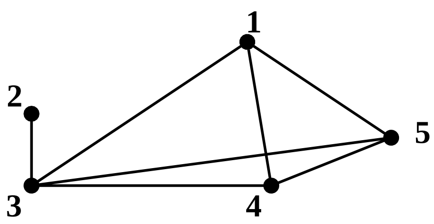
Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondants aux extrémités de chaque arête.

2. Exemple.

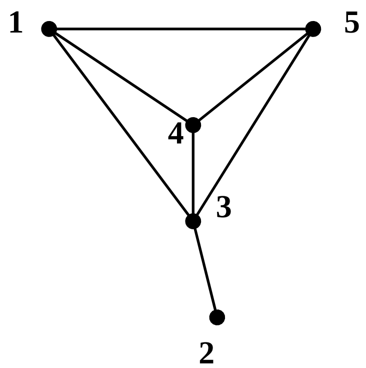
Soit le graphe G = (V, E) défini par l'ensemble V de ses sommets et l'ensemble E de ses arêtes tels que :

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.

On a les représentations ci-après :



Une représentation non planaire de G.



Une représentation planaire de G.

3. Quelques types de graphes.

a). Définitions.

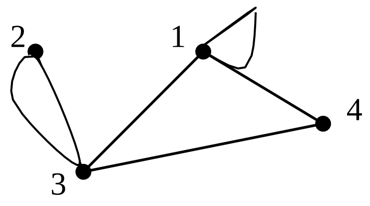
- 1. On dit que le graphe est **planaire** si on arrive à dessiner le graphe sans qu'aucune arête n'en coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes).
- 2. Les graphes ci-dessus sont **simple**s, mais on peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. Dans ce cas, on parle de **multigraphe**.
- 3. On dit qu'un graphe est **connexe, s'**il est possible à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe **non connexe** se décompose en composantes connexes.
- 4. On dit qu'un graphe est **complet** si chacun de ses sommets est relié directement à tous les autres sommets.
- 5. On dit qu'un graphe est **bipartite** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y de sorte que toutes ses arêtes relient un sommet dans X à un sommet dans Y.

- 6. On dit qu'un graphe est **eulérien** (ou **semi-eulérien**) s'il est possible de trouver un cycle (ou une chaine) passant une et une seule fois par toutes les arêtes.
- 7. On dit qu'un graphe est **probabiliste** s'il est orienté, et pondéré tel que la somme des poids des arcs sortant de chaque sommet donné vaut 1. Un graphe probabiliste est aussi définit par sa **matrice de transition.**
- 8. On dit qu'un graphe est **coloré** si on a affecté à chacun de ses sommets une couleur de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. **Le nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre des couleurs permettant de le colorer. Dans le cas où on a coloré les arcs, on parlera de **l'indice chromatique**.

b). Exemples.

(1). Soit le graphe G = (E, V) où V = {1, 2, 3, 4} et E = {{1,1}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,3}, {3,4}}.

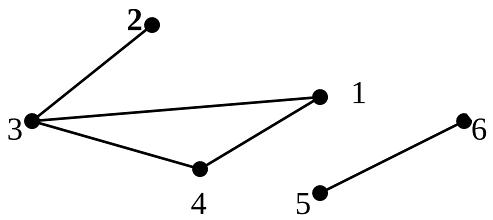
- Le graphe G est : un multigraphe, connexe, eulérien, semi-eulérien et planaire.
- Le graphe G n'est pas : complet, biparti, simple.



Représentation graphique

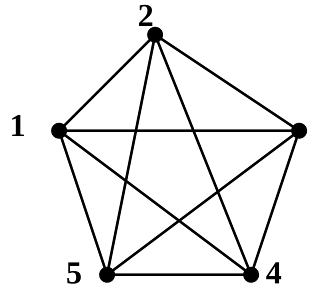
(2). Soit le graphe G = (E, V) où V = {1,2,3,4,5,6} et E = {{1,3},{1,4},{2,3},{3,4}, {5,6}}.

- Le graphe est : planaire et simple.
- Le graphe n'est pas : un multigraphe, connexe, complet, biparti, eulérien, semi-eulérien.



Représentation graphique

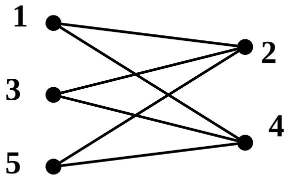
(3).Soit le graphe G=(E,V) où V={1,2,3,4,5} et E={{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4},{2,5},{3,4},{3,5},{4,5}}.



Représentation graphique

- ➢ Le graphe est : complet (appelé K_5), eulérien, semi-eulérien, connexe, et simple.
- ➢ Le graphe n’est pas : biparti, planaire, un multigraphe.

(4). Soit le graphe G = (E,V) où V = {1,2,3,4,5} et E={{1,2},{1,4},{2,3},{2,5},{3,4},{4,5}}.



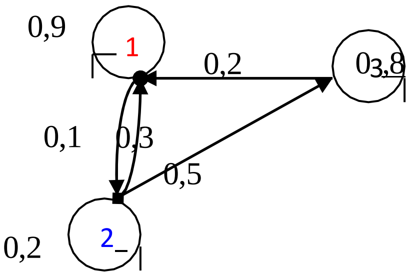
Représentation graphique

- ➢ Le graphe est : biparti, semi-eulérien, simple et planaire.
- ➢ Le graphe n’est pas : connexe, eulérien, complet, un multigraphe.

(5). Soit le graphe orienté G = (E, V) où V = {1, 2, 3} et E = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)}, et dont la matrice de transition est :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) On a la représentation graphique ci-après :

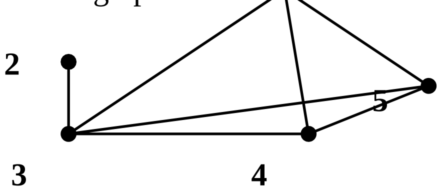


(b) Ce graphe est : probabiliste, un multigraphe, connexe, semi-eulérien, planaire, coloré.
(c) Ce graphe n’est pas : biparti, complet, eulérien, simple.

1.3. <u>Diamètre d’un graphe.</u>

1. <u>Définitions</u>.
   - La **distance** entre deux sommets d’un graphe est la plus courte longueur des chaines qui les relient. Notation : dist.
   - Le **diamètre** d’un graphe est la plus grande distance entre deux sommets. Notation : diam.

2. <u>Exemple</u>. Soit ce graphe G



On a : - dist(2,3) = 1, dist(2 ,4) = 2, dist(3,5) = 1.
- Diamètre de ce graphe G est : diam(G) = 2.

1.4. Les graphes planaires.

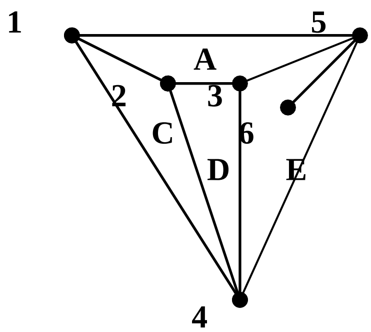
1. Définitions.

- On appelle une **carte**, ou graphe planaire topologique, une représentation particulière d'un multigraphe planaire fini.
- Une carte divise le plan en plusieurs **régions**.
- On appelle le **degré d'une** région **r**, notée **deg(r)**, la longueur du cycle ou de la chaine fermée qui limite **r**.

N.B. : - On dit qu'une carte est connexe si son graphe l'est.

2. Exemple.

Soit le graphe G = (E, V) où V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et E = {{1,2},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4},{3,4},{3,5},{4,5},{5,6}}.



Représentation graphique

- Cette carte a six sommets ; neuf arêtes ; et elle divise le plan en 5 régions : A, B, C, D, E.
- On a : deg(A) = 4, deg(B) = 3, deg(C) = 3, deg(D) = 5, deg(E) = 3.

3. Lemme.

La somme des degrés des régions d'une carte connexe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

4. Théorème 1. (EULER)

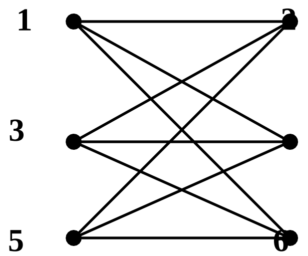
Pour toute carte connexe, le nombre **S** de sommets, le nombre **A** d'arêtes et le nombre **R** de régions vérifient la relation ci-après :

$$\boxed{\mathbf{S - A + R = 2.}}$$

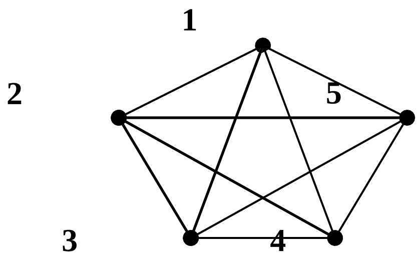
N.B. : Léonard Euler (1707 – 1783) est un mathématicien suisse qui a établit cette formule.

5. Théorème 2. (KURATOWSKI)

Un graphe est non planaire si, et seulement si, il contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,\,3}$ ou à K_5.



$K_{3,\,3}$



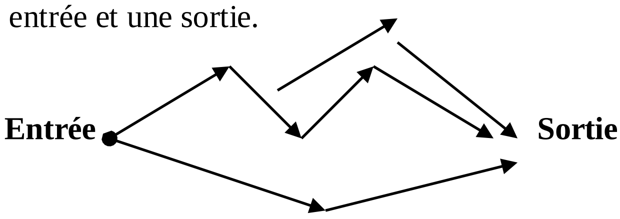
K_5.

N.B. : K. Kuratowski est un mathématicien polonais qui a résolu en 1930 par ce théorème, le problème de la caractérisation des graphes planaires, sujet des préoccupations des mathématiciens pendant de nombreuses années.

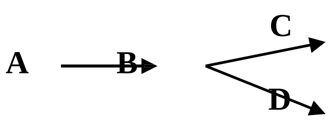
1.5. Les graphes réseaux.

1. Définitions.

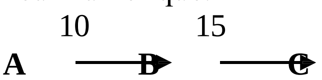
   1. On appelle **graphe réseau**, ou simplement réseau, un graphe sans boucles et qui a une entrée et une sortie.



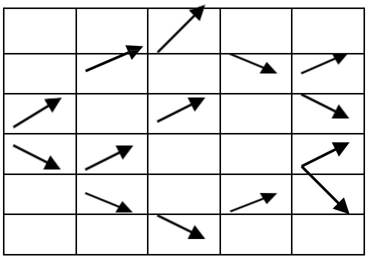
   2. On appelle **lien de précédence**, un arc tel que l'exécution (ou le traitement) de la terminaison dépend de l'exécution de l'extrémité (initiale).



   3. On appelle **graphe valué**, un graphe réseau où chacun de ses arcs est muni d'une valeur numérique.



   4. **Arborescence :** schéma graphique en forme d'arbre souvent inversé dont la racine se trouverait au sommet.



5. **Programmation dynamique certaine** :

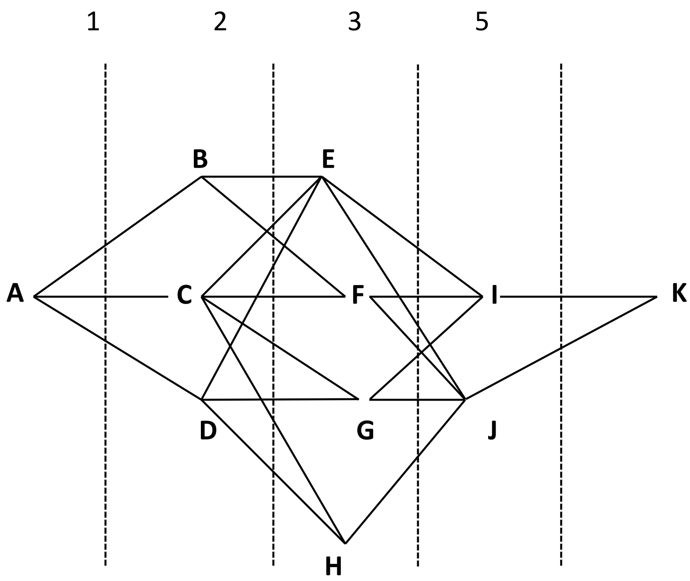
Toute partie d'un chemin optimal (par référence à un critère d'optimisation) est elle-même optimale.

2. Exemples.

Exemple 1.

On doit construire une route entre A et K en passant par des villes intermédiaires selon les phases de constructions. Les arcs sont valués par le coût total correspondant à ces arcs. On demande de choisir le meilleur tracé possible pour maintenir les coûts totaux.

1	2	3	4
AB = 8	BE = 3	EI = 4	IK = 5
AC = 5	BF = 4	EJ = 5	JK = 7
AD = 7	CE = 5	FI = 4	
	CF = 4	FJ = 4	
	CG = 6	GI = 3	
	CH = 4	GJ = 2	
	DE = 3	HJ = 4	
	DG = 2		
	DH = 3		

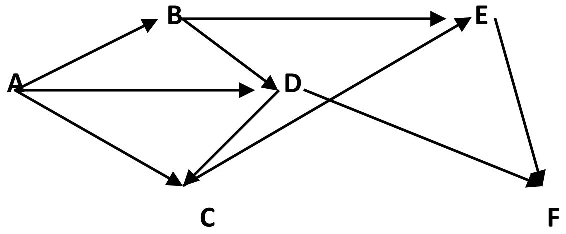


Solution : Le chemin le plus court et le moins coûteux est ADGIK et il coûte 17.

Exemple 2.

Etant donné le digraphe ci-après et dont les arcs sont valués selon le bénéfice total correspondant, on demande de choisir le meilleur chemin pour maintenir les bénéfices totaux.

AB = 3	BE = 6	DF = 7
AD = 6	CE = 1	DC = 2
AC = 8	EF = 2	BD = 2



Solution : Le chemin le plus long et le plus bénéfique est ADF et il apporte 13.

3. Méthodes d'optimisation (Calcul des valeurs optimales).

1. A. Algorithme de Ford : Pour recherche de la valeur maximale.

A.1. Définition.

Etant donné un graphe d'ordre n et valué, l'algorithme de Ford permet de trouver la valeur maximale de ce réseau en suivant les étapes de calculs suivantes :

- Etape 1 : Numéroter les sommets d'une façon quelconque, sauf le sommet initial X_0 et le sommet final X_{n-1} (n étant le nombre de sommets du graphe réseau).
- Etape 2 : Afficher des valeurs $\lambda_i \geq 0$ à chacun des sommets X_i $(0 \leq i \leq n-1)$, avec pour valeur initiale zéro.
- Etape 3 : Pour tout i fixé $(0 \leq i \leq n-2)$, on a :

  Pour tout sommet X_j tel que l'arc (X_i, X_j) existe dans le graphe, on fait ceci :

  - Calculer $\varepsilon_{ji} = \lambda_j - \lambda_i$.
  - Si ε_{ji} ▪ $\mu(X_i, X_j)$ = valuation arc (X_i, X_j) alors λ_j est remplacé par

$\lambda_j = \lambda_i + \mu(X_i, X_j)$, sinon λ_j reste inchangé.

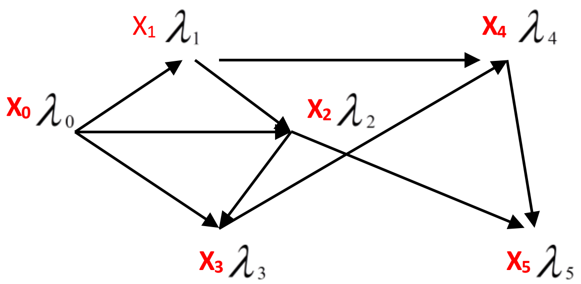
- Etape 4 : On continue les itérations (Etape 3) jusqu'à ce que l'on ne puisse pas augmenter i, en tenant compte des liens de précédence.
- Etape 5 : La valeur de λ_{n-1} à la fin de toutes les itérations est la valeur maximale du réseau, et elle nous permet de trouver le chemin correspondant à cette valeur trouvée.

A.2. Exemples.

Exemple 1.

Pour l'exemple 2 ci-haut, on considère son graphe valué. On recherche la valeur maximale en utilisant l'algorithme de FORD.

1. Etape 1 : X_0 = A et X_5 = F, car n = 6. Puis on considère par exemple : X_1 = B, X_2 = D, X_3 = C, X_4 = E.
2. Etape 2 : Le graphe valué se présente ainsi :



Avec $\lambda_i = 0$, pour tout i $(0 \leq i \leq 5)$.

3. Etape 3 : En effet, on a : $0 \leq i \leq 4$.

   (a). i = 0 $\Rightarrow$ X_0 et il existe les arcs (X_0, X_1), (X_0, X_2), (X_0, X_3).

- Pour X_1, on a : $\varepsilon_{10} = \lambda_1 - \lambda_0$ = 0-0=0 **et** $\mu(X_0, X_1)$= 3.

Comme $\varepsilon_{10} = 0$ ▪ $3 = \mu(X_0, X_1) \Rightarrow \varepsilon_{10}$ ▪ $\mu(X_0, X_1)$ alors λ_1 devient

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \mu(X_0, X_1) = 0 + 3 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3.$$

- Pour X_2, on a : $\varepsilon_{20} = \lambda_2 - \lambda_0 = 0\text{-}0 = 0$ et $\mu(X_0, X_2) = 6$.

Comme $\varepsilon_{20} = 0$ ▪ $6 = \mu(X_0, X_2) \Rightarrow \varepsilon_{20}$ ▪ $\mu(X_0, X_2)$ alors λ_2 devient

$$\lambda_2 = \lambda_0 + \mu(X_0, X_2) = 0 + 6 = 6 \Rightarrow \lambda_2 = 6.$$

- Pour X_3, on a : $\varepsilon_{30} = \lambda_3 - \lambda_0 = 0\text{-}0 = 0$ et $\mu(X_0, X_3) = 8$.

  Comme $\varepsilon_{30} = 0$ ▪ $8 = \mu(X_0, X_3) \Rightarrow \varepsilon_{30}$ ▪ $\mu(X_0, X_3)$ alors λ_3 devient

$$\lambda_3 = \lambda_0 + \mu(X_0, X_3) = 0 + 8 = 8 \Rightarrow \lambda_3 = 8.$$

4. Etape 4 : (b). $i = 1 \Rightarrow X_1$ et il existe les arcs (X_1, X_2), (X_1, X_4).

- Pour X_2, on a : $\varepsilon_{21} = \lambda_2 - \lambda_1 = 6 - 3 = 3$ et $\mu(X_1, X_2) = 2$.

Comme $\varepsilon_{21} = 3$ ▪ $2 = \mu(X_1, X_2) \Rightarrow \varepsilon_{21}$ ▪ $\mu(X_1, X_2)$ alors λ_2 ne change pas, donc $\lambda_2 = 6$.

- Pour X_4, on a : $\varepsilon_{41} = \lambda_4 - \lambda_1 = 0 - 3 = -3$ et $\mu(X_1, X_4) = 6$.

Comme $\varepsilon_{41} = -3$ ▪ $6 = \mu(X_1, X_4) \Rightarrow \varepsilon_{41}$ ▪ $\mu(X_1, X_4)$ alors λ_4 devient

$$\lambda_4 = \lambda_1 + \mu(X_1, X_4) = 3 + 6 = 9 \Rightarrow \lambda_4 = 9.$$

(c) $i = 2 \Rightarrow X_2$ et il existe les arcs (X_2, X_3), (X_2, X_5).

- Pour X_3, on a : $\varepsilon_{32} = \lambda_3 - \lambda_2 = 8 - 6 = 2$ et $\mu(X_2, X_3) = 2$.

  Comme $\varepsilon_{32} = 2 = \mu(X_2, X_3) \Rightarrow \varepsilon_{32} = \mu(X_2, X_3)$ alors λ_3 ne change pas, et donc $\lambda_3 = 8$.

- Pour X_5, on a : $\varepsilon_{52} = \lambda_5 - \lambda_2 = 0 - 6 = -6$ et $\mu(X_2, X_5) = 7$.

Comme $\varepsilon_{52} = -6$ ▪ $7 = \mu(X_2, X_5) \Rightarrow \varepsilon_{52}$ ▪ $\mu(X_2, X_5)$ alors λ_5 devient

$$\lambda_5 = \lambda_2 + \mu(X_2, X_5) = 6 + 7 = 13 \Rightarrow \lambda_5 = 13.$$

(d) $i = 3 \Rightarrow X_3$ et il existe l'arc (X_3, X_4).

Pour X_4, on a : $\varepsilon_{43} = \lambda_4 - \lambda_3 = 9 - 8 = 1$ et $\mu(X_3, X_4) = 1$.

Comme $\varepsilon_{43} = 1 = \mu(X_3, X_4) = 1 \Rightarrow \varepsilon_{43} = \mu(X_3, X_4)$ alors λ_4 ne change pas, et donc $\lambda_4 = 9$.

(e) $i = 4 \Rightarrow X_4$ et il existe l'arc (X_4, X_5).

Pour X_5, on a : $\varepsilon_{54} = \lambda_5 - \lambda_4 = 13 - 9 = 4$ et $\mu(X_4, X_5) = 2$.

Comme $\varepsilon_{54} = 4$ ▪ $2 = \mu(X_4, X_5) \Rightarrow \varepsilon_{54}$ ▪ $\mu(X_4, X_5)$ alors λ_5 ne change pas, et donc $\lambda_5 = 15$.

5. Etape 5 : Les itérations étant terminées, $\lambda_5 = 13 \Rightarrow$ la valeur maximale est 13, et le chemin le plus long est celui qui correspond à cette valeur, et donc le chemin $X_0\,X_2\,X_5$, soit le chemin ADF.

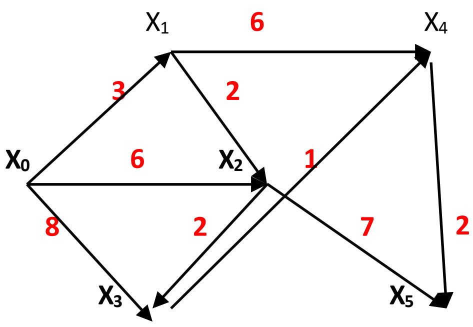
<u>Exemple 2</u>.

Appliquer l'algorithme de FORD pour trouver la valeur maximale du graphe valué de l'exemple 1 ci-haut (Voir le point 2.Exemples).

<u>Solution</u> : En exercice.

2. B. <u>Autre méthode</u> : Pour la recherche des valeurs optimales.

Par exemple, en considérant le graphe valué sous la forme ci-après :



B.1. <u>Recherche de la valeur maximale et du plus long chemin</u>.

On a : X_1 (X_0, 3)
X_2 (X_0, 6) (X_1, 3+2 =5)
X_3 (X_0, 8) (X_2, 6 + 2 =8)
X_4 (X_1, 3 + 6 = 9) (X_3, 8 + 1 = 9)
X_5 (X_2, 6 + 7 = 13) (X_4, 9 + 2 = 11)

D'où le chemin :
X_5 (X_2, 13)
X_2 (X_0, 6)
X_0

Soit le chemin X_0 X_2 X_5 est le plus long chemin et de longueur maximale 13.

B.2. <u>Recherche de la valeur minimale et du plus court chemin</u>

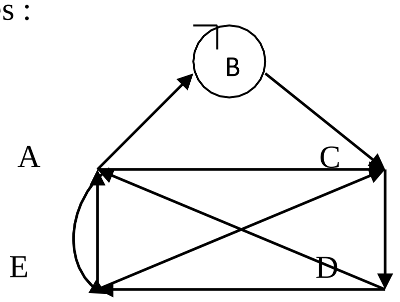
On a : X_1 (X_0, 3)
X_2 (X_0, 6) (X_1, 3+2 =5)
X_3 (X_0, 8) (X_2, 5 + 2 = 7)
X_4 (X_1, 3 + 6 = 9) (X_3, 7 + 1 = 8)
X_5 (X_2, 5 + 7 = 12) (X_4, 8 + 2 = 10)

D'où le chemin :
X_5 (X_4, 10)
X_4 (X_3, 8)
X_3 (X_2, 7)
X_2 (X_1, 5)
X_1 (X_0, 3)
X_0

Soit le chemin $X_0\, X_1\, X_2\, X_3\, X_4\, X_5$ est le plus court chemin et de longueur minimale 10.

1.6. Exercices.

1. Soit le graphe ci-après :



On demande :
(a). DAEAEA est –il un chemin simple ? Pourquoi ?
(b). DAEA est-il un chemin élémentaire ? Pourquoi ?
(c). DAE est-il un chemin élémentaire ? Pourquoi ?
(d). Donner la matrice aux arcs.
(e). Donner la matrice booléenne.
(f). Donner une définition mathématique de ce graphe.
(g). Y a-t-il un chemin hamiltonien ? Si oui lequel.
(h). Quel est l'ordre de ce graphe ?

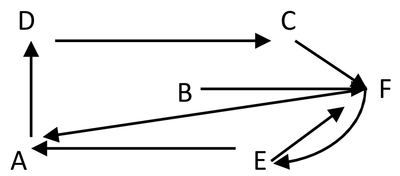
2. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12, et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de » et définir ce graphe mathématiquement.

3. On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant. Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir. Dessinez un graphe illustrant cette situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe. Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

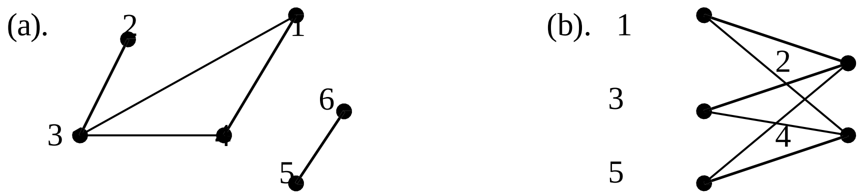
4. Trois professeurs P_1, P_2, P_3 doivent donner ce lundi un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, et C_3 :
   - P_1 doit donner deux heures de cours à C_1 et une heure à C_2.
   - P_2 doit donner une heure de cours à C_1, une heure à C_2 et une heure à C_3.
   - P_3 doit donner une heure de cours à C_1, une heure à C_2 et deux heures à C_3.

(a). Comment représenter cette situation par un graphe ?
(b). Quel type de graphe obtenez-vous ?
(c). Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
(d). Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

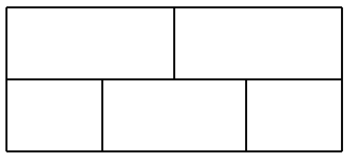
5. Soit le graphe ci-contre, on demande de trouver :
(a). le dictionnaire des précédents (prédécesseurs).
(b). le dictionnaire des suivants (successeurs).
(c). la matrice aux arcs de taille 1, 2, 3, 4.
(d). les chemins hamiltoniens.
(e). les circuits.



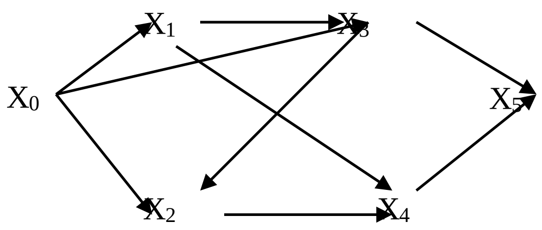
6. Démontrer le théorème d'Euler. Indication : Procéder par induction.
7. Les graphes suivants sont-ils eulériens (semi-eulériens) ?



8. Construire un graphe réseau valué et appliquer l'algorithme de FORD.
9. Donnez un critère permettant de dire à coup sûr si un graphe est eulérien.
10. Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?
11. Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



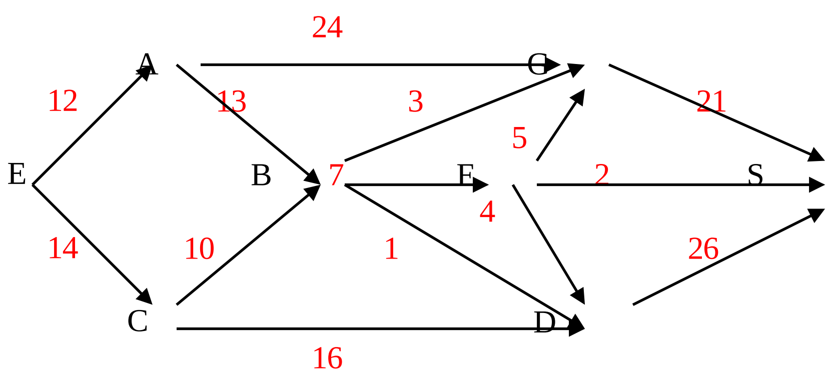
12. Soit le graphe valué ci-après :



$X_0X_1 = 3$	$X_1X_3 = 2$	$X_3X_2 = 2$
$X_0X_3 = 6$	$X_1X_4 = 6$	$X_3X_5 = 7$
$X_0X_2 = 8$	$X_2X_4 = 1$	$X_4X_5 = 2$

Trouver les chemins optimums et leurs valeurs.

13. Soit le graphe ci-après :



Trouver, en appliquant l'algorithme de FORD, le plus long chemin ainsi que sa longueur.

B. Notions d’ordonnancement.

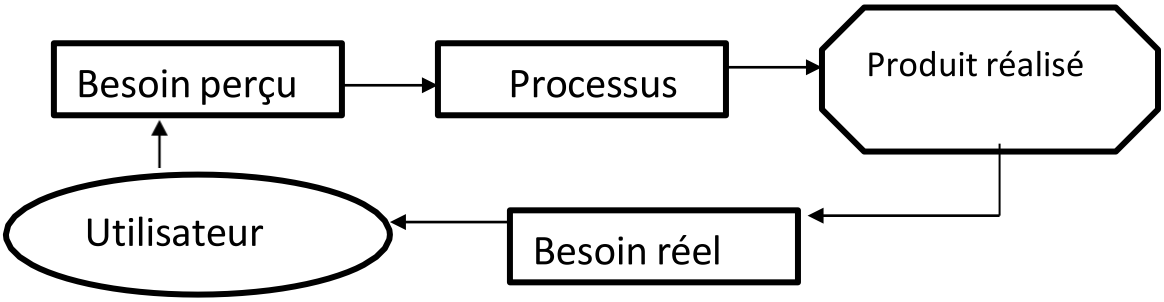
1.7 Notions de projet.

a). Notion de projet.

Il y a une différence entre planification et gestion de projet. La notion de projet est liée à un ensemble des tâches. Cependant, la notion de tâche et de projet sont toutes relatives. Néanmoins, sur un projet, il est nécessaire de ne jamais descendre sur une tâche inférieure à 15 jours.

b). Projet.

Un projet est un ensemble des tâches ayant pour but l’obtention des objectifs coûts performances délais.



c). Contraintes.

Il existe différentes contraintes auxquelles on peut faire face dans la planification et la gestion d’un projet.

1°) Contraintes potentielles

(1) La préséance : Par exemple, une tâche B ne peut commencer que si la tâche V est terminée.

(2) La localisation temporelle : contraintes par rapport aux dates. Par exemple, une tâche doit commencer à une date donnée (1/1/96).

2°) Contraintes disjonctives

Par exemple, la machine A ne doit pas fonctionner en même temps que la tâche B.

3°) Contraintes cumulatives.

1.8 Méthodes existantes

1.8.1. Introduction

Il y a trois grandes méthodes, à savoir :

- Méthode de GANT.
- Méthode PERT (Program Evaluation and Research Task) .
- Méthode MPM (Méthode des potentiels Métra).

Les deux dernières méthodes sont classiquement utilisées pour l’ordonnancement et elles utilisent toutes deux des graphes pour résoudre le problème posé. Pour ordonnancer, calculer des délais de fin de projet, des marges (latitudes), il s’avère qu’il sera de fois obliger de :

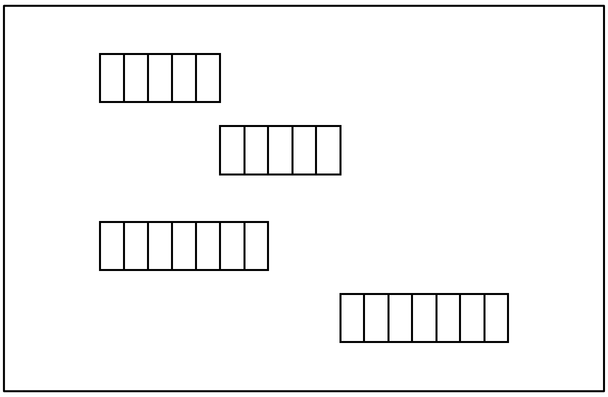
- créer un schéma ;
- créer nécessairement des choses abstraites ;
- créer des tâches inexistantes dans le projet.

La méthode de GANT se fait remplacer par la méthode de CPM (Chemin de la Méthode Critique, soit en anglais : Critical Method Path) et la méthode PERT.

1.8.2. Méthode (Diagramme) de GANT.

1°) Objectifs

Elle a pour objectif de mettre en évidence les durées des tâches et leurs positionnements.
Par exemple,



2°) Avantages

- Elle est extrêmement compréhensible par tous.
- Elle permet de suivre le déroulement des opérations dans le temps.
- Elle permet une certaine synthèse de l'ensemble du projet.

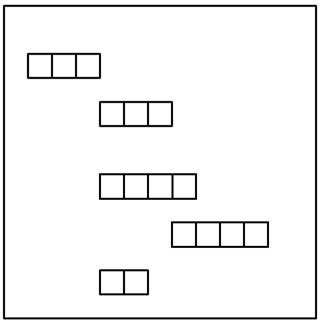
3°) Inconvénients

- Elle ne prend pas en compte les contraintes,
- Elle ne permet pas de connaître le chemin critique,
- Elle a une difficulté de remise à jour (pour les systèmes manuels).

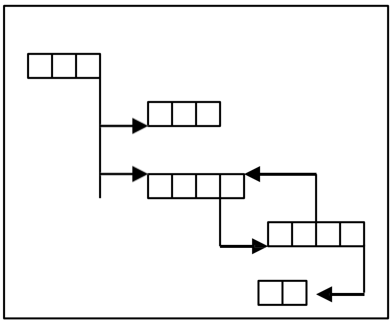
4°) Remarque

Il existe une variante (méthode) entre PERT/GANT illustrée comme ci-après :

Gestion Atelier



GANT



PERT/GANT

Gestion De projet

Ainsi, le tableau ci-après nous permet d'illustrer cette situation.

TACHES	DUREES PREVUES	TACHE PRECEDENTE	DUREE PLANIFIEE	DUREE REALISEE
A	4mois (4)		4	4
B	2 mois (3)	A	2	
C	3 mois (2)	B	3	
D	5 mois (5)	C	5	
E	6 mois (7)	C	6	
F	1 mois (2)	A	1	

Légende : - Nombre normal = tableau à l'état initial,
- Nombre souligné = valeurs prévues dans le planifié,
- Nombre encerclé = version 2 de la planification.

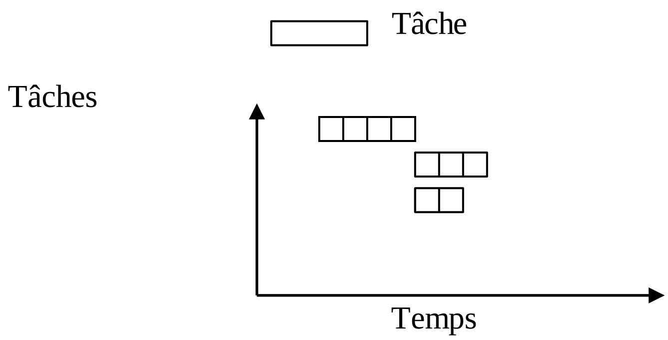
D'où nous avons ci-après la 1ère planification :

TEMPS EN MOIS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A															
B															
C															
D															
E															
F															

N.B. : Faire en exercice :
- la 2ème planification.
- la combinaison (la mise ensemble) des deux planifications.

5°) En résumé

Cette méthode se résume ainsi :



1.8.3. Méthode PERT.

1°) Objectif.

L'objectif de cette méthode est la mise en évidence des différentes liaisons du projet, c'est-à-dire celles existantes entre les tâches du projet.

2°) Structure.

La méthode PERT a la structure ci-après :

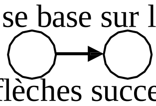
- rattacher la notion de temps à chaque tâche ;
- bâtir le graphe correspondant aux tâches et à leurs contraintes ;

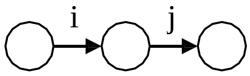
- observer le chemin critique (celui tel que toute augmentation de la durée d'une de ces tâches retarde d'autant la fin du projet).

3°) <u>Construction d'un réseau PERT.</u>

(a) <u>Règles de construction</u>.

Pour construire un réseau PERT, on se base sur les règles suivantes :

1. Une tâche est représentée par un arc : 
2. Deux tâches successives sont représentées par deux flèches successives



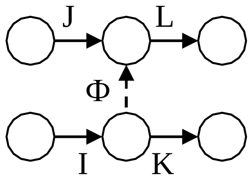
3. Le graphe doit avoir une seule entrée.
4. Le graphe doit avoir une seule sortie.
5. Le graphe ne doit pas se comporter comme une boucle.
6. Chaque étape (événement) est identifiée par un numéro.

(b) <u>Remarques</u>.

Pour représenter les contraintes d'un projet on utilise de fois les tâches fictives. Ces dernières, notées Φ, sont souvent en pointillées et ont une valeur nulle.
Par exemple, pour représenter les contraintes suivantes :

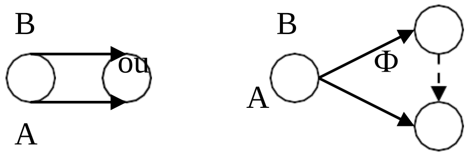
1. « L succède à J ; I précède K (et L) »

On a le graphe ci-après :



2. « A et B fonctionnent en parallèle »

On a les graphes ci-après :



4°) <u>Intérêt et variante.</u>

L'intérêt de cette méthode réside dans la possibilité de fixer une date. La variante de cette méthode est que « la longueur de la tâche est proportionnelle à la durée de sa représentation comme tâche visuelle ».

5°) <u>Autres notions.</u>

A. <u>Définitions</u>

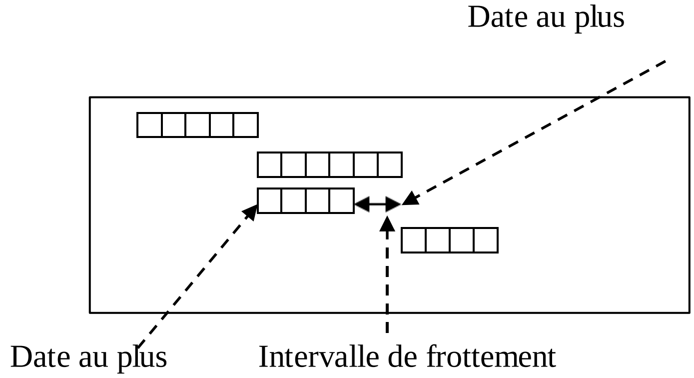
A.1. <u>Date au plus tôt et date au plus tard.</u>

Les notions de date au plus tôt et date au plus tard concernent le début ou la fin d'une tâche d'un projet. Elles caractérisent donc tout événement du projet, en général.
Ainsi on parle de:
- date de début au plus tôt ;
- date de début au plus tard ;
- date de fin au plus tôt ;
- date de fin au plus tard ;

Par exemple, avec une situation comme celle ci-après :

Tâches	A	B	C	D
Précédents		A	A	B, C

On a la présentation ci-après :



A.2. <u>Intervalle de frottement et marges.</u>

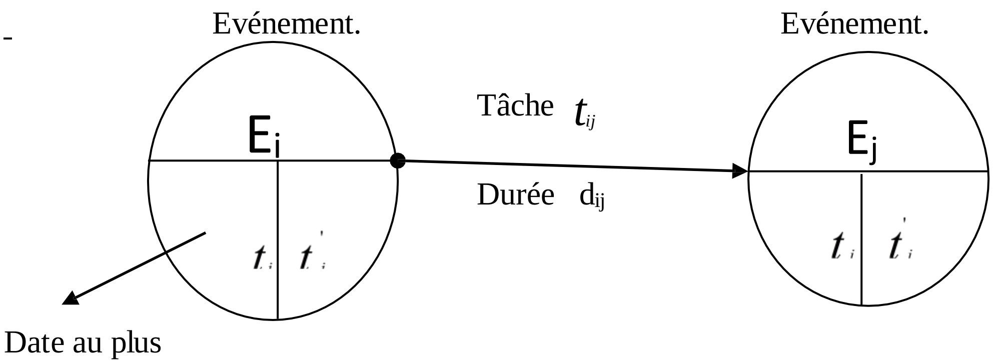
L'intervalle de frottement d'une tâche est la valeur de retard maximal de cette tâche dans le projet.

La marge libre d'une tâche est la durée de frottement ou retard maximal de la tâche, sans perturbation de la date au plus tôt de l'événement suivant.

La marge totale d'une tâche est la durée de frottement ou retard maximal de la tâche, sans perturbation de fin du projet.

B. <u>Calculs</u>

Soit le graphe ci-après



B.1. <u>Calcul des dates au plus tôt t_j.</u>

$$t_j = Max_i \left\{ t_i + d_{ij} \right\}$$

<u>N.B.</u> : Pour calculer dates au plus tard t'_i on inversera le graphe, c'est-à-dire :

- l'entrée devient l'événement de sortie ;
- la sortie devient l'événement d'entrée.
- on inverse les flèches.

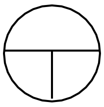
$$t'_i = Min_j \left\{ t'_j - d_{ij} \right\}$$

B.2. Calculs des marges.

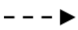
- Marge libre de t_{ij} : $M_L(t_{ij}) = t'_j - t_i - d_{ij}$.
- Marge totale de t_{ij} : $M_T(t_{ij}) = t'_j - t'_i - d_{ij}$.
- Marge certaine de t_{ij} : $M_C(t_{ij}) = t_j - t'_i - d_{ij}$.

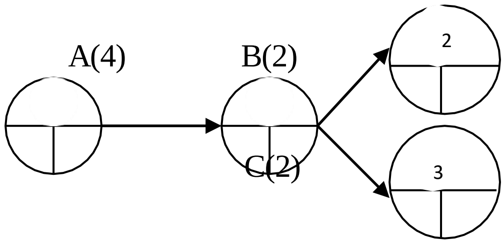
6°) En résumé.

Cette méthode se résume ainsi :

 Un événement, un rendez-vous technique.

 Une tâche.

 Une tâche fantôme Φ de durée nulle.



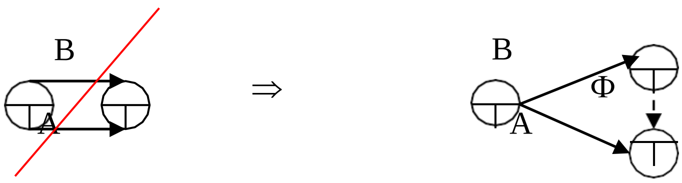
7°) Mise au point et gestion d'un PERT.

Pour mettre au point et gérer un PERT, on a en vue les actions ci-après :

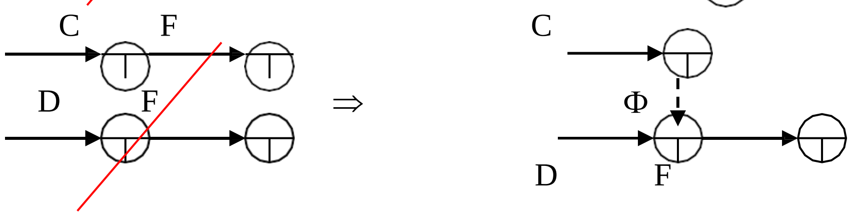
1. Recueillir des informations : les tâches, les implications des tâches, les durées de chacune des tâches, …
2. Etablir les feuillets de remise à jour + procédure.
3. Dépouiller, traiter, analyser.
4. Agir en responsable (par des actions correctives).

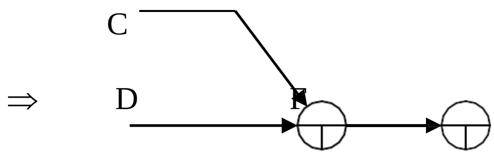
8°) Remarques.

(a)

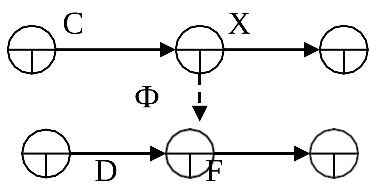


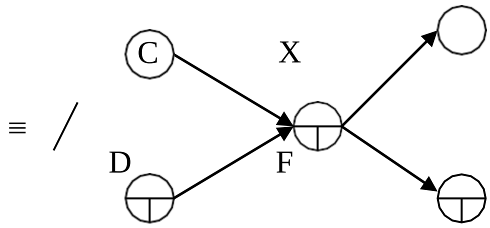
(b)





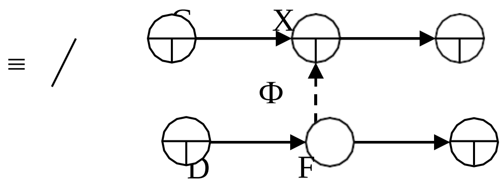
(c) Trois graphes différents.





X démarre après C
F démarre après C et D

X démarre après C et D



F démarre après D

1.8.4. Méthode MPM.

1°) Construction du graphe

Pour construire un graphe selon la méthode des potentiels Métra (tâches), on considère ceci :

- Un sommet correspond à une tâche.
- Un arc définit une relation d'antériorité.
- La valeur de l'arc définit le temps minimum séparant deux tâches successives.
- Chaque sommet de la représentation graphique est figuré par un rectangle

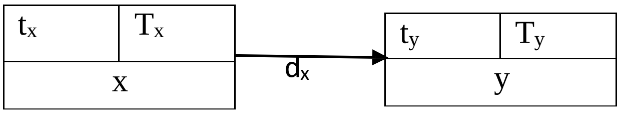
t_x	T_x
x	

Où x = nom de la tâche.
t_x = date de début (DD) au plus tôt de la tâche x.
T_x = date de début (DD) au plus tard de la tâche x.

- Un sommet terminal permettant de dater la fin des travaux est rajouté au graphe.
- La représentation graphique est ordonnée par niveaux des sommets, c'est-à-dire des tâches.

2°) <u>Calculs des marges</u>.

Soient x et y deux tâches telles que d_x est la durée de la tâche x



(a). Marge Totale [M_T] d'une tâche x est calculée par :

$$M_T(x) = T_x - t_x .$$

(b). Marge Libre [M_L] d'une tâche x est calculée par :

$$M_L(x) = \mathrm{Min}_y \{t_y - t_x - d_x / \text{ avec y une tâche qui suit la tâche x } \}$$

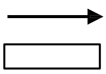
(c). Marge Certaine [M_C] d'une tâche x est calculée par :

$$M_C(x) = \mathrm{Min}_y \{t_y - T_x - d_x / \text{ avec y une tâche qui suit la tâche x} \} \text{ si } t_y - T_x - d_x > 0$$

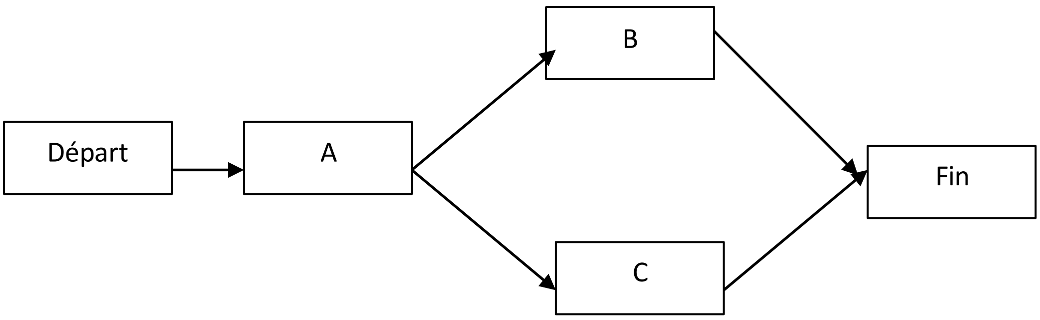
sinon la marge certaine $M_C(x) = 0$.

3°) <u>En résumé</u>.

Cette méthode se résume ainsi :



Lien de dépendance.
Tâche, forme indépendante de la durée de la tâche.



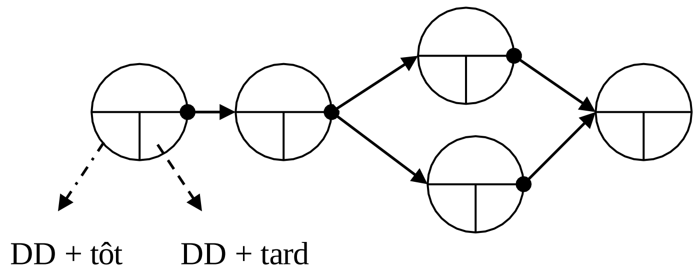
1.9 <u>Chemin critique.</u>

a). <u>Définition</u>.

Le chemin critique est le chemin le plus long et de durée maximale du projet.

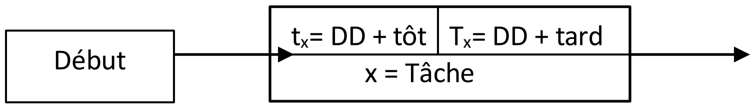
b). <u>Détermination du chemin critique</u>.

1°/ <u>A partir de PERT</u>.



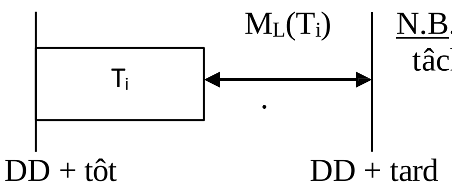
Chemin critique : celui qui part de l'entrée à la sortie du réseau et dont chacune de ses tâches est critique.

2°) A partir de MPM.



Chemin critique : celui dont DD + tôt = DD + tard, pour chacune de ses tâches.

3°) A partir du calcul des marges libres des taches.



N.B.: Une Tâche critique T_i est une tâche tq $M_L(T_i) = 0$.

Chemin critique : Le chemin constitué exclusivement des tâches critiques et de durée maximale du projet.

4°) A partir du tableau des potentiels.

Chemin critique : Le chemin dont toutes les tâches ont des marges libres nulles.

1.10 Exemple.

Etant donné le tableau ci-dessous, on demande de :

1. trouver : a) le réseau GANT,
   b) le réseau PERT;
   c) le réseau MPM ;
2. calculer : a) les dates au plutôt et au plus tard ;
   b) les marges ;
   c) le chemin critique ;

TACHES	A	B	C	D
PRECEDENTS		A	A	B, C
DUREE	4	3	2	1

1.11 Exercices

1. Pour la réalisation d'un ouvrage, on a les informations ci-après :

- Les tâches sont : A, B, C, D, E, F, G et H.
- Les durées (en jours) sont : 2 pour A, 4 pour B, 4 pour C, 2 pour D, 6 pour E, 2 pour F, 4 pour G, et 1 pour H.
- Les contraintes sont :

TACHES	A	B	C	D	E	F	G	H
PRECEDENTS			A	B	A	C, D	B	F, G
DUREE	2	4	4	2	6	2	4	1

On demande :
1). La construction d'un réseau PERT.
2). Les calculs des dates au plutôt.
3). Les calculs des dates au plus tard.
4). Les calculs des marges.
5). Le chemin critique.

2. La société EVENEMENT SPORTIF S.A. souhaite lancer une nouvelle course cycliste. Elle choisit de gérer la mise au point et lancement de celle-ci sous la forme d'un projet.

Elle a donc recensé les tâches nécessaires pour mener à bien les diverses actions à réaliser. Puis elle a évalué les délais nécessaires à la réalisation de chaque tâche. L'ensemble des informations sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

N° TACHE	**NO M TACHE**	**DUREE(en jours)**	**PREDECESSEURS**
1	Choix du lieu et de la date de course	1	
2	Obtention des autorisations nécessaires	20	1
3	Engagement des sponsors	12	1
4	Création des différents formulaires	15	3
5	Commande des maillots	9	3
6	Recrutement des bénévoles	3	3 ; 5
7	Enregistrement des participants	25	4 ; 2 ; 6
8	Numérotation des dossards	4	7
9	Réalisation du parcours et de la course	5	8
10	Aménagement des zones de départ et d'arrivée	5	8
11	Remise des prix	1	9 ; 10
12	Nettoyage du site	3	11
13	Clôture de la course	1	12

On demande de :
1) tracer le graphe en utilisant la méthode des potentiels (éventuellement PERT).
2) Déterminer le chemin critique.
3) Déterminer la durée totale du projet, évalué en jours, sans tenir compte des vacances éventuelles.
4) Déterminer les marges des tâches.
5) Tracer le diagramme de GANT.

3. Soit le tableau ci-après des tâches avec leurs codes, leurs noms, leurs durées et leurs prédécesseurs.

CODE TACHE	NOM TACHE	DUREE(en jours)	PREDECESSEURS
A	Lancement	10	
B	Création groupe prototype	5	A
C	Diagnostic de l'existant	30	A
D	Prototype Intranet	25	A, B
E	Validation architecture	20	D
F	Bilan	10	C, D
G	Expressions des besoins	40	F
H	Déploiements navigateurs	10	F
I	Etude organisationnelle	60	G
J	Spécifications générales	5	G, H
K	Spécifications détaillées	10	J
L	Programmation	30	K
M	Recette programme	10	L
N	Mise en œuvre	0	E, I, M

On demande de :

1) déterminer le chemin critique, les marges, ainsi que la durée totale du projet.
2) réaliser le diagramme de GANT.
3) tracer le diagramme d'enchaînement des tâches selon la méthode tâches potentielles(MPM).

CHAPITRE II. **PROGRAMMATION LINEAIRE.**

2.1. **Généralités.**

A. Ensembles convexes.

A.1. Définition.

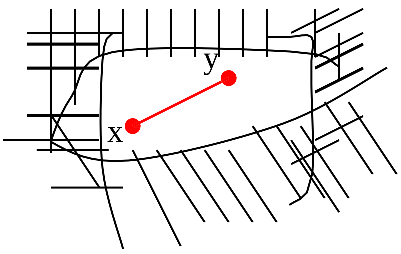
Un ensemble $S \subset R^n$ est dit **convexe** si, et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in S \\ \forall y \in S \\ \forall \lambda \in [0,1]\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ \lambda x + (1-\lambda) y\ \right] \in S .$$

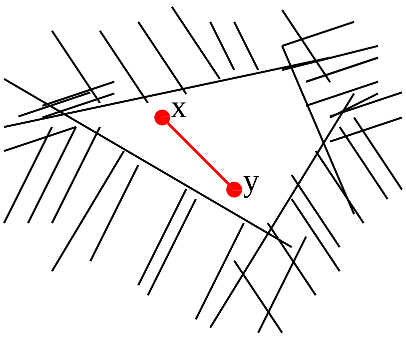
D'une façon équivalente, on peut dire que :

S est convexe $\Leftrightarrow \forall x, y$ deux points pris dans S, le segment $[x, y] \subset S$.

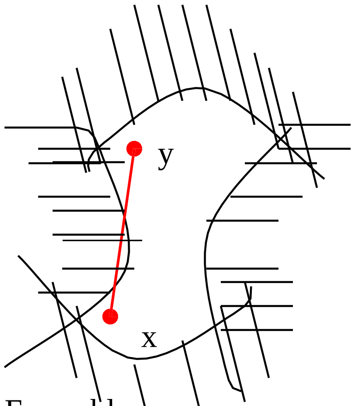
A.2. Exemples.



Ensemble Convexe



Ensemble convexe (Polyèdre)



Ensemble non convexe

A.3. Remarques.

1°) Un ensemble convexe de la forme $X = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$ est appelé un **polytope** convexe.
2°) Un polytope borné sera appelé un **polyèdre connexe**.

B. Fonctions convexes.

B.1. Définition.

On dit qu'une fonction $f : R^n \to R$ définie sur S convexe est convexe si elle vérifie : $\forall x \in S, \forall y \in S, \forall \lambda \in [0,1]: f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
F est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est toujours vérifiée pour : $x \neq y,\ et\ ,\ \lambda \in]0,1[$.

B.2. Remarques.

1). On appelle ***épigraphe*** d'une fonction f, noté épi(f), l'ensemble des vecteurs à n+1 composantes (μ, x) défini par :

$$\left\{ (\mu, x) / f(x) \leq \mu,\ x \in R^n,\ \mu \in R \right\} \subset R^{n+1}$$

2). Une fonction f est convexe si et seulement épi(f) est convexe.

C. Programmation linéaire.

C.1. Définition.

On appelle ***programmation linéaire*** le problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire à plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes.

IL s'agit donc d'un programme mathématique de la forme (dite **canonique**) :

Optimiser f(x) sous les contraintes :

$$(P_o)\quad \begin{cases} g_i = 0,\ \forall i \in I^0 & \text{(Contraintes égalité)} \\ \left.\begin{array}{l} g_i \le 0,\ \forall i \in I^- \\ g_i \ge 0,\ \forall i \in I^+ \end{array}\right\} & \text{(Contraintes inégalité)} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \ge 0 & \text{(Contraintes positivité)} \end{cases}$$

où les fonctions f et g (pour tout i, $i \in I = I^0 \cup I^- \cup I^+$) sont des fonctions linéaires (affines) des variables x_1, x_2, …, x_n.

C.2. Remarques.

(1). S'il existe une variable x_j (j=1,…, n) pouvant prendre une valeur négative, on pourra remplacer x_j par la différence $x_j^+ - x_j^+$ de deux variables x_j^+ et x_j^- astreintes, elles, à ne prendre que des valeurs positives (i.e. non négatives).

(2). On dit qu'un programme linéaire est mis sous forme **standard** si toutes ses contraintes (en dehors des contraintes de non-négativité des variables) sont des égalités.

C.3. Exemples.

(1) Sous forme canonique, on a le programme linéaire :

$$\textit{Maximiser } Z = x_1 - 2x_2 \quad \textit{sous les contraintes :}$$

$$(P_1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + 3x_2 \le -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(2) Sous forme standard, on a le programme linéaire :

$$(P_2)\quad \begin{cases} \textit{Minimiser } Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \textit{sous les contraintes} \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Equivalent au programme ci-après :

$$(P_2^{'})\begin{cases} Minimiser \quad Z \quad sous\ les\ contraintes \\ c_1x_1+\dots+c_nx_n-z=0 \\ a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \quad x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m\geq 0 \end{cases}$$

2.2. **Méthodes de résolutions**.

A. Méthode graphique.

A.1. Avantage.

Cette méthode n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables. Son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique.

A.2. Définition de la méthode graphique.

On représente toutes les contraintes graphiquement par des demi-plans dont l'intersection est un ensemble convexe. Ce denier est appelé région des solutions admissibles. Et si les solutions existent elles appartiennent donc à cet ensemble. On trouvera donc le couple des points qui optimise la fonction objectif.

A.3. Exemples.

(1). Soit à résoudre le problème suivant :

Une usine fabrique 2 pièces P_1 et P_2 usinées dans deux ateliers A_1 et A_2.

Les temps d'usinage sont :

- Pour P_1 : de 3 heures dans l'atelier A_1 et de 6 heures dans l'atelier A_2.
- Pour P_2 : de 4 heures dans l'atelier A_1 et de 3 heures dans l'atelier A_2.

Le temps de disponibilité hebdomadaire de l'atelier A_1 est de 160 heures et celui de l'atelier A_2 de 180 heures.

La marge bénéficiaire est de 1200 F pour une pièce P_1 et 1000 F pour une pièce P_2.

Quelle production de chaque type doit-on fabriquer pour maximiser la marge bénéficiaire ?

Solution.

Formalisation du problème :

Les variables économiques ou d'activité sont les inconnues :

x_1 = quantité de pièces P_1 à fabriquer.

x_2 = quantité de pièces P_2 à fabriquer.

Les contraintes économiques :

$3x_1 + 4x_2 \leq 160$ (Atelier A_1)

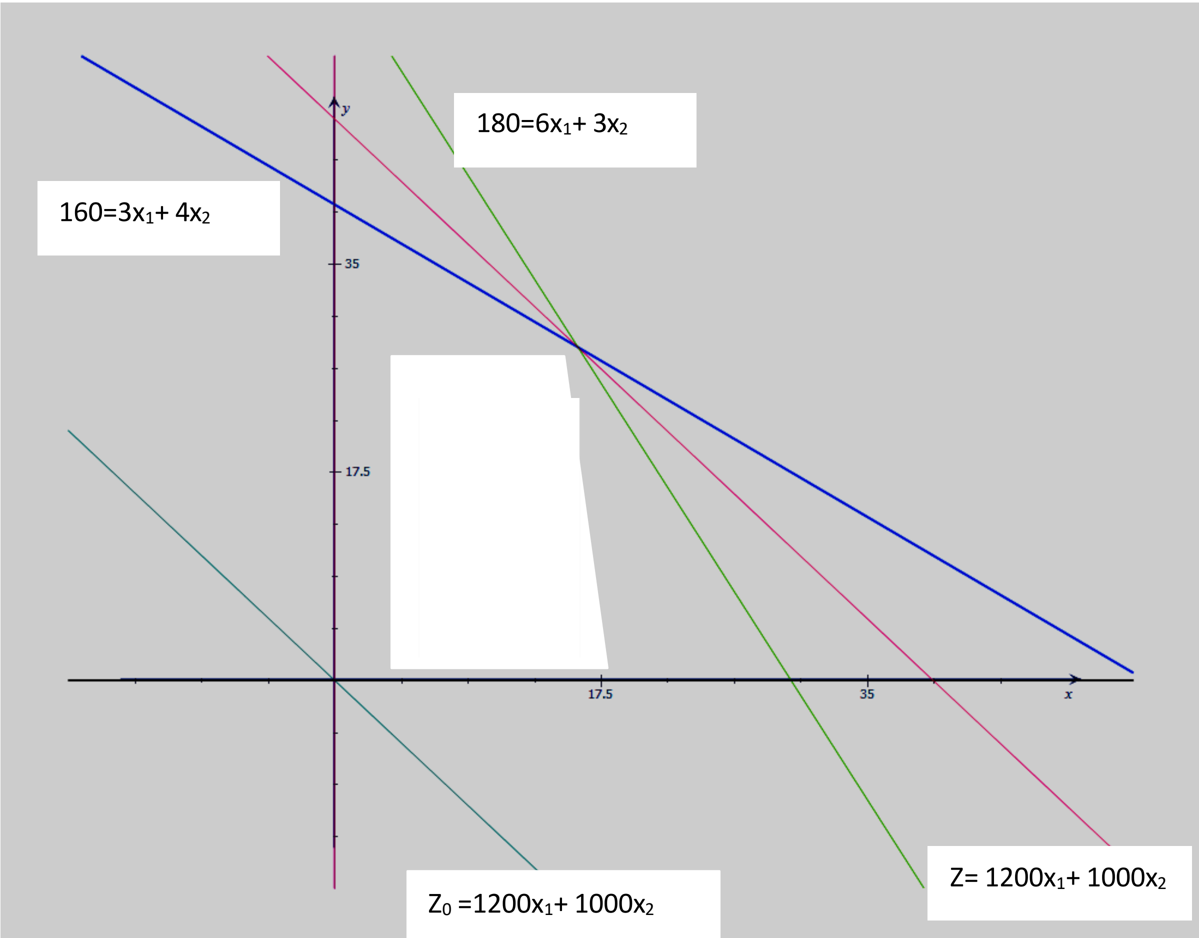
$6x_1 + 3x_2 \leq 180$ (Atelier A_2)

Les contraintes de signe :
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
La fonction économique (ou objectif) :
$Z = 1200\ x_1 + 1000\ x_2$ à maximiser.

D'où le programme linéaire à résoudre :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 1200x_1 + 1000x_2 \\ \text{Sous les contraintes :} \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

On cherche d'abord la région des solutions admissibles en représentant graphiquement les contraintes.



Il s'agit de trouver à l'intérieur de cette région (ce domaine), le couple (x_1, x_2) qui maximise la fonction objectif.

L'équation $Z_k \equiv 1200x_1 + 1000x_2 = k$ est représentée par la droite de pente -1,2 et dont les points fournissent la même valeur k de Z (la fonction économique).

En particulier, la droite $Z_0 \equiv 1200x_1 + 1000\ x_2 = 0$ passe par l'origine et donne une valeur nulle à la fonction économique.

Pour augmenter (et donc maximiser) la valeur Z (et donc la fonction économique), il suffit d'éloigner de l'origine (dans le quart de plan $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) la droite de pente –1,2 ; et en respectant les contraintes, cette droite sera déplacée jusqu'à l'extrême limite où il n'y aura qu'un point d'intersection (éventuellement un segment) avec la région des solutions admissibles.

La solution optimale sera nécessairement sur le pourtour de la région des solutions admissibles. Pour ce cas, la solution est aussi sur les deux droites d'équations :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 160 \\ 6x_1 + 3x_2 = 180 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à la solution $x_1=16$ et $x_2 = 28$. D'où Z = 47.200. D'où, pour avoir une marge hebdomadaire maximum, il faut produire 16 pièces P_1 et 28 pièces P_2.

(2). Optimiser la production d'un atelier de fonction économique $Z = 4x_1 + 12x_2$ en choisissant les quantités x_1 et x_2 à produire, sous les contraintes ci-après :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ x_1 \leq 1000 \text{ et } x_2 \leq 500, \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 4200. \end{cases}$$

Solution : En exercice.

B. Méthode du simplexe.

B.1. Algorithme primal du simplexe.

1). Définitions.

- Une contrainte ***majoration*** est une inégalité de la forme $f(M) \leq c^{te}$, (avec une c^{te} positive).
- Une contrainte ***minoration*** est une inégalité de la forme $c^{te} \leq f(M)$, (avec une c^{te} positive).
- Une contrainte ***égalité*** est une égalité de la forme $f(M) = c^{te}$, (avec une c^{te} positive).

2). Remarques.

- La contrainte ***égalité*** ne peut pas être utilisée directement pour réduire le nombre des variables, car il faut conserver la contrainte de positivité sur chaque variable.
- On utilise le programme linéaire sous sa forme standard obtenue en introduisant des variables supplémentaires (vérifiant la contrainte de positivité) de la manière ci-après:

  - Pour chaque contrainte ***majoration***, on ajoute à la fonction une variable de face(ou d'écart) « y », pour obtenir une égalité. i.e. $f(M) \leq c^{te} \Rightarrow f(M) + y = c^{te}$.
  - Pour chaque contrainte ***égalité***, on ajoute à la fonction une variable artificielle « k », pour contrôler la positivité des variables. i.e. $f(M) = c^{te} \Rightarrow f(M) + k = c^{te}$.
  - Pour chaque contrainte ***minoration***, on introduit une variable de face (ou d'écart) « t », et une variable artificielle « k ». i.e. $f(M) \geq c^{te} \Rightarrow f(M) - t + k = c^{te}$.

3). <u>Exemples</u>.

<u>Exemple (1)</u>

$$(P_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } Z_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3, \text{ sachant que :} \\ \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad - x_1 + 3x_2 = -4, \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{array}\right.$$

On ajoute deux variables artificielles y_1 et y_2 avec un coût $M \gg 0$ très grand, et l'on résout le nouveau problème :

$$(P_1^{'})\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min} = Z_1^{'}\, x_1 - 2x_2 + 2x_3 + My_1 + My_2, \text{ sachant que:} \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 3, \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3 - x_1 - x_2 + x_3. \\ \quad - x_1 + 3x_2 - y_2 = -4, \quad \Rightarrow \quad y_2 = 4 - x_1 + 3x_2. \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

<u>Exemple</u> (2).

$$(P_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } Z_2 = x_1 - 2x_2, \text{ sachant que :} \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 3, \\ \qquad - x_1 + 3x_2 \leq -4, \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

On ajoute une variable d'écart $s_1 \geq 0$ dans la $1^{\text{ère}}$ contrainte, une variable d'écart $s_2 \geq 0$ et une variable artificielle $y_2 \geq 0$ dans la seconde contrainte. On attribue à y_2 un coût M ($M \gg 0$ très grand), et on résout le nouveau problème :

$$(P_2^{'})\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } Z_2^{'} = x_1 - 2x_2 + My_2 + 0.s_1 + 0.s_2, \text{ sachant que:} \\ \quad x_1 + x_2 + s_1 = 3, \qquad \Rightarrow \quad s_1 = 3 - x_1 - x_2 + x_3. \\ \quad - x_1 + 3x_2 + s_2 - y_2 = -4, \quad \Rightarrow \quad y_2 = 4 - x_1 + 3x_2 + s_2. \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

<u>Exemple (3)</u>.

$$(P_3)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Max } Z = 5x_1 - 3x_2, \text{ sachant que :} \\ \qquad x_1 - x_2 \geq 2, \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

On retranche la variable d'écart $x_3 \geq 0$ et on ajoute la variable artificielle $x_4 \geq 0$ dans la $1^{\text{ère}}$ contrainte, et on ajoute la variable d'écart $x_5 \geq 0$ dans la seconde contrainte. Et on résout enfin le nouveau problème :

$$(P_3^{'})\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Max } Z^{'} = 5x_1 - 3x_2 + Mx_4 - 0x_3 - 0x_5, \text{ sachant que :} \\ \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2 - x_1 + x_2 + x_3. \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 4, \quad \Rightarrow \quad x_5 = 4 - 2x_1 - 3x_2. \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{array}\right.$$

Ainsi une forme standard d'un programme linéaire peut s'écrire :

$$(P)\begin{cases} \text{Optimiser } z = c.x, \text{ sachant que :} \\ Ax = b. \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Où
$$\begin{cases} n & : \text{nombre de variables.} \\ m & : \text{nombre de contraintes.} \\ c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) & : \text{vecteur ligne des coûts.} \\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T & : \text{m-vecteurs des seconds membres.} \\ Z = c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j. & : \text{fonction (dite « objectif » ou « économique ») à minimiser.} \end{cases}$$

4). <u>Systèmes faciles</u>.

(a). <u>Définition</u>.

Un système *facile* est un système où il n'y a que des contraintes majoration.

(b). <u>Caractérisation</u>.

Un système *facile* est un système tel que l'origine des coordonnées soit un point acceptable (i.e. vérifiant l'ensemble des contraintes).

(c). <u>Méthodologie</u>.

On met au préalable le système sous la forme standard, et puis on commence les itérations d'optimisation (maximisation ou minimisation) de la fonction économique à partir d'une solution admissible évidente. Ces itérations s'arrêteront dès que tous les coefficients des variables de la fonction économique seront précédés du signe négatif, et on obtient ainsi la dernière valeur de la fonction économique.

(d). <u>Remarque</u>.

Le résultat de ce calcul n'est pas la valeur du bénéfice escompté (qui dépend de la validité du modèle et des diverses influences extérieures) mais la décision conseillée.

(e). <u>Exemples</u>.

<u>Exemple 1 : Système facile en dimension 2</u>.

Soit le système ci-après à résoudre :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 12x_2, \text{ sachant que :}$$

$$(S)\quad\begin{cases} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 500 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 4200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Solution</u>

1. On introduit les nouvelles variables : x_3, x_4, x_5 (variables d'écart), et le système devient :

$$(S)\begin{cases} \text{Max } Z = 4x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5, \text{ sachant que :} \\ x_1 + x_3 = 1000 \\ x_2 + x_4 = 500 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_5 = 4200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \\ \text{(Les contraintes de positivité)} \end{cases}$$

2. comme l'origine des coordonnées $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ est une solution admissible de (S), le problème revient à optimiser la fonction économique $Z = 4x_1 + 12x_2$ à partir du point des coordonnées : $x_1=0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1000$, $x_4 = 500$, $x_5 = 4200$, et où le système s'écrit :

$$(S)\begin{cases} \text{Max } Z = 4x_1 + 12x_2, \text{ sachant que :} \\ x_3 = 1000 - x_1 \quad (1) \\ x_4 = 500 - x_2 \quad (2) \\ x_5 = 4200 - 3x_1 - 6x_2 \quad (3) \end{cases}$$

avec x_1 et x_2 les variables principales (hors base).

3. Pour maximiser Z, nous avons le choix de modifier soit x_1, soit x_2, car leurs coefficients sont positifs. On choisit de modifier x_1, et donc de garder $x_2 = 0$. Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1) et (3)] :

$$(1) : \quad x_3 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 1000.$$
$$(3) : \quad x_5 \geq 0 \Rightarrow 4200 - 3x_1 - 6x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 1400.$$

$x_1 \leq 1000$ et $x_1 \leq 1400$ $\Rightarrow$ le meilleur choix est $x_1 = 1000$, et par voie de conséquence:

$$(1) \Rightarrow x_3 = 0\ ;\ (2) \Rightarrow x_4 = 500\ ;\ (3) \Rightarrow x_5 = 1200.$$

Ceci nous conduit au sommet des coordonnées : $x_1 = 1000$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 500$, $x_5 = 1200$. De ce nouveau sommet acceptable, le système devient :

$$(S)\begin{cases} \text{Max } Z = 4000 + 12x_2 - 4x_3, \text{ sachant que :} \\ x_1 = 1000 - x_3 \quad (1) \\ x_4 = 500 - x_2 \quad (2) \\ x_5 = 1200 - 6x_2 + 3x_3 \quad (3) \end{cases}$$

4. Vu les coefficients de Z, le seul changement à faire pour le maximiser est celui consistant à augmenter x_2 (et donc à garder $x_3 = 0$). Les contraintes de positivité imposent [pour respectivement (2) et (3)]:

$$(2): x_4 \geq 0 \Rightarrow 500 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 500$$
$$(3): x_5 \geq 0 \Rightarrow 1200 - 6x_2 + 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 200$$

$x_2 \leq 500$ et $x_2 \leq 200$ $\Rightarrow$ le meilleur choix est $x_2 = 200$, et par voie de conséquence :

$$(2) \Rightarrow x_4 = 300\ ;\ (3) \Rightarrow x_5 = 0.$$

Ceci nous conduit au sommet des coordonnées : $x_1 = 1000$; $x_2 = 200$; $x_3 = x_5 = 0$; $x_4 = 300$. De ce nouveau sommet, le système devient :

$$(S)\quad \begin{cases} \text{Max } Z = 6400 + 2x_3 - 2x_5, \text{ sachant que :} \\ x_1 = 1000 - x_3 & (1) \\ x_4 = 300 + \left(\frac{1}{6}\right)x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_3 & (2) \\ x_2 = 1200 - \left(\frac{1}{6}\right)x_5 + \left(\frac{1}{2}\right)x_3 & (3) \end{cases}$$

5. Vu les coefficients de Z, la seule variable à modifier, c'est x_3 (et donc garder $x_5 = 0$). Les contraintes de positivité imposent [pour respectivement (1), (2) et (3)]:

$$(1) : x_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1000.$$
$$(2) : x_4 \geq 0 \Rightarrow 300 + \left(\frac{1}{6}\right)x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 600.$$
$$(3) : x_2 \geq 0 \Rightarrow 1200 - \left(\frac{1}{6}\right)x_5 + \left(\frac{1}{2}\right)x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq -400.$$

$x_3 \leq 1000$, $x_3 \leq 600$ et $x_3 \geq -400 \Rightarrow$ le meilleur choix est $x_3 = 600$, et par voie de conséquence :

$$(1) \Rightarrow x_1 = 400,\ (2) \Rightarrow x_4 = 0,\ (3) \Rightarrow x_2 = 500.$$

Ceci nous conduit au sommet des coordonnées : $x_1 = 400$, $x_2 = 500$, $x_3 = 600$, $x_4 = x_5 = 0$. De ce nouveau sommet, le système devient :

$$(S)\quad \begin{cases} \text{Max } Z = 7600 - 4x_4 - \left(\frac{4}{3}\right)x_5, \text{ sachant que :} \\ x_1 = 400 + 2x_2 - \left(\frac{1}{3}\right)x_5 & (1) \\ x_2 = 500 - x_4 & (2) \\ x_3 = 600 - 2x_4 + \left(\frac{1}{3}\right)x_5 & (3) \end{cases}$$

6. Vu que tous les coefficients de la fonction de bénéfice sont négatifs, on est au sommet optimal (et comme tous les coefficients sont nuls, ce sommet optimal est le seul).

Le bénéfice maximal escompté est donc : $Z = \boxed{7600}$

7. Le résultat de ce calcul n'est pas la valeur du bénéfice escompté, mais la décision conseillée qui est :

$$\boxed{x_1 = 400 \text{ et } x_2 = 500.}$$

Exemple 2 : Système facile en dimension 3.

Soit le système ci-après à résoudre :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3, \text{ sachant que ;} \\ x_1 \leq 1000,\ x_2 \leq 500,\ x_3 \leq 1500, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Solution : en exercice.

5). Autres systèmes : Contraintes minoration ou égalité.
a). Remarques.

a.1.). Comme l'origine des coordonnées n'est pas un point acceptable, il faut :
- soit trouver un sommet acceptable et à partir de ce sommet appliquer l'algorithme comme dans le cas des systèmes faciles.
- soit démontrer qu'il n'existe pas de sommet acceptable sans se contenter de constat d'échec seulement.

a.2.). Dans le cas ci-dessus, un sommet acceptable est celui qui vérifie que toutes les variables artificielles ont pour valeur zéro.

b). Méthodes des variables auxiliaires.

b.1.). En plus des variables naturelles x_k du problème, on introduit :
- autant des variables de face que d'inégalités ;
- autant des variables artificielles que des relations non satisfaites par l'origine (contraintes égalité ou minoration).

b.2.) On cherche un sommet acceptable du problème initial, celui qui vérifie que toute le variable a la valeur zéro.

Si l'origine ne vérifie pas cette condition, alors :
b.3.) On pose un nouveau problème dont :
- les variables principales sont les variables naturelles x_k du problème initial ainsi que les variables de face s_k issues des contraintes minoration.
- les équations linéaires sont celles du problème initial.
- la fonction de bénéfice est :

$$f = -\sum z_m$$

(Avec z_m les variables artificielles.).

b.4.) La nouvelle origine (la dimension ayant augmenté, ce n'est plus le même espace) est un point acceptable pour le nouveau problème.

b.5.) Si l'on arrive à max f · 0, nous aurons montré que le problème initial est insoluble (contraintes contradictoires).

b.6.) Si l'on arrive à max f =0, nous aurons montré que toutes les variables artificielles ont pour valeur 0, puisque ces variables sont positives.

Et donc, les variables principales x_k et s_k du nouveau problème sont caractéristiques d'un sommet acceptable du problème initial. D'où on va résoudre le problème initial à partir de ce sommet acceptable.

c). Exemples.

c.1). Soit à résoudre le problème ci-après

$$\text{Max } (4x_1 + 12\, x_2) \text{ sachant que } \begin{cases} x_1 \leq 1000 & (1) \\ x_2 \leq 500 & (2) \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 4200 & (3) \\ 1000 \leq x_1 + x_2 & (4) \\ 1200 \leq x_1 + 2x_2 & (5) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & (6) \end{cases}$$

<u>Solution</u>

Nous constatons que l'origine du système initial ne vérifie pas les contraintes (4) et (5), d'où nous sommes obligés de poser un nouveau problème en obtenant d'abord la forme standard du problème initial comme ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x_1 + s_1 = 1000 \\ (2) & x_2 + s_2 = 500 \\ (3) & 3x_1 + 6x_2 + s_3 = 4200 \\ (4) & x_1 + x_2 - s_4 + z_1 = 1000 \\ (5) & x_1 + 2x_2 - s_5 + z_2 = 1200 \end{array}\right\} \text{Max } (4x_1 + 12\, x_2)$$

Le nouveau problème à résoudre est:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & s_1 = 1000 - x_1 \\ (2) & s_2 = 500 - x_2 \\ (3) & s_3 = 4200 - 3x_1 - 6x_2 \\ (4) & z_1 = 1000 - x_1 - x_2 + s_4 \\ (5) & z_2 = 1200 - x_1 - 2x_2 + s_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Max } (f = -z_1 - z_2) \\ \text{Max } (f = -2200 + 2x_1 + 3x_2 - s_4 - s_5) \end{array}$$

Nous allons donc maximiser la fonction f à partir du point admissible (acceptable) ci-après : $x_1 = x_2 = s_4 = s_5 = 0$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 500$,
$s_3 = 4200$, $z_1 = 1000$, $z_2 = 1200$.

On choisit de modifier x_2 (garder $x_3 = 0$) pour augmenter la fonction bénéfice f. Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (2), (3), (4) et (5)] :

$$\begin{array}{llll} (2): & s_2 \geq 0 \Rightarrow 500 - x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 500. \\ (3): & s_3 \geq 0 \Rightarrow 4200 - 6x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 700. \\ (4): & z_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 1000. \\ (5): & z_2 \geq 0 \Rightarrow 1200 - 2x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 600. \end{array}$$

On doit choisir x_2 de sorte que toutes les conditions de positivité soient remplies, avoir donc $x_2 \leq 500$, $x_2 \leq 700$, $x_2 \leq 1000$ et $x_2 \leq 600$. D'où le meilleur choix est $x_2 = 500$ obtenu à partir de la relation (2), et donc $x_2 = 500 - s_2$. Ce qui nous permet d'obtenir un nouveau sommet (avec les coordonnées : $x_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$, $x_2 = 500$, $s_1 = 1000$, $s_3 = 1200$, $z_1 = 500$, $z_2 = 200$) par lequel le système devient:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ s_1 = 1000 - x_1 \\ (2)\ x_2 = 500 - s_2 \\ (3)\ s_3 = 1200 - 3x_1 + 6s_2 \\ (4)\ z_1 = 500 - x_1 + s_2 + s_4 \\ (5)\ z_2 = 200 - x_1 + 2s_2 + s_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Max } [f = -2200 + 2x_1 + 3(500 - s_2) \\ \qquad - s_4 - s_5] \\ \Rightarrow \text{Max } (f = -700 + 2x_1 - 3s_2 - s_3 - s_5) \end{array}$$

Pour maximiser f, on doit modifier x_1. Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1), (3), (4) et (5)] :

(1) : $s_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1000$.
(3) : $s_3 \geq 0 \Rightarrow 1200 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 400$.
(4) : $z_1 \geq 0 \Rightarrow 500 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 500$.
(5) : $z_2 \geq 0 \Rightarrow 200 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 200$.

On doit choisir x_1 de sorte que toutes les conditions de positivité soient remplies : $x_1 \leq 1000$, $x_1 \leq 400$, $x_1 \leq 500$ et $x_1 \leq 200$. D'où le meilleur choix est $x_1 = 200$, obtenu à partir de la relation (5), et donc $x_1 = 200 - z_2 + 2s_2 + s_5$. On obtient ainsi le nouveau sommet : $z_2 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$, $x_1 = 200$, $x_2 = 500$, $s_1 = 800$, $s_3 = 600$, $z_1 = 300$. Et par rapport à ce nouveau sommet, le système devient :

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ s_1 = 800 + z_2 - 2s_2 - s_5 \\
(2)\ x_2 = 500 - s_2 \\
(3)\ s_3 = 600 + 3z_2 - 3s_5 \\
(4)\ z_1 = 300 + z_2 - s_2 + s_4 - s_5 \\
(5)\ x_1 = 200 - z_2 + 2s_2 + s_5
\end{array}\right\} \quad
\begin{array}{l}
\text{Max } [f = -700 + 2(200 - z_2 + 2s_2 + s_5) \\
\qquad - 3s_2 - s_3 - s_5] \\
\Rightarrow \text{Max } (f = -300 - 2z_2 + s_2 - s_4 + s_5).
\end{array}$$

Pour maximiser f, on choisit de modifier s_2 (on garde $s_5 = 0$). Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1), (2), (4) et (5)] :

(1) : $s_1 \geq 0 \Rightarrow 800 - 2s_2 \geq 0 \Rightarrow s_2 \leq 400$.
(2) : $x_2 \geq 0 \Rightarrow 500 - s_2 \geq 0 \Rightarrow s_2 \leq 500$.
(4) : $z_1 \geq 0 \Rightarrow 300 - s_2 \geq 0 \Rightarrow s_2 \leq 300$.
(5) : $x_1 \geq 0 \Rightarrow 200 + 2s_2 \geq 0 \Rightarrow s_2 \geq -100$.

On doit choisir s_2 de sorte que toutes les conditions de positivité soient remplies, i.e. $s_2 \leq 400$, $s_2 \leq 500$, $s_2 \leq 300$ et $s_2 \geq -100$. D'où le meilleur choix est $s_2 = 300$, à partir de la relation (4), et donc $s_2 = 300 - z_1 + z_2 + s_4 - s_5$. On obtient ainsi le nouveau sommet : $z_1 = z_2 = s_4 = s_5 = 0$, $x_1 = 800$, $x_2 = 200$, $s_1 = 200$, $s_2 = 300$, $s_3 = 600$. Et par rapport à ce nouveau sommet, le système devient :

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ s_1 = 200 + 2z_1 - z_2 - 2s_4 + s_5 \\
(2)\ x_2 = 200 + z_1 - z_2 - s_4 + s_5 \\
(3)\ s_3 = 600 + 3z_2 - 3s_5 \\
(4)\ s_2 = 300 - z_1 + z_2 + s_4 - s_5 \\
(5)\ x_1 = 800 - 2z_1 + z_2 + 2s_4 - s_5
\end{array}\right\} \quad
\begin{array}{l}
\text{Max } [f = -300 - 2z_2 + (300 - z_1 + z_2 + \\
\qquad s_4 - s_5) - s_4 + s_5.] \\
\Rightarrow \text{Max } (f = -z_1 - z_2).
\end{array}$$

Nous constatons que Max (f) = 0 avec $z_1 = z_2 = 0$, donc toutes les variables artificielles ont pour valeur zéro. Ainsi les variables principales du nouveau système sont caractéristiques d'un sommet admissible (acceptable) du problème initial. Ce point (sommet) admissible du problème initial est caractérisé par $\mathbf{z_1 = z_2 = 0}$.

Nous pouvons donc nous débarrasser des variables artificielles z_1 et z_2 et résoudre le problème initial comme ci-après, à partir du système ci-dessus :

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ s_1 = 200 - 2s_4 + s_5 \\
(2)\ x_2 = 200 - s_4 + s_5 \\
(3)\ s_3 = 600 - 3s_5 \\
(4)\ s_2 = 300 + s_4 - s_5 \\
(5)\ x_1 = 800 + 2s_4 - s_5
\end{array}\right\} \quad
\begin{array}{l}
\text{Max } (4x_1 + 12x_2) \\
= \text{Max } [4(800 + 2s_4 - s_5) + 12(200 - s_4 \\
\qquad + s_5)].
\end{array}$$

Soit donc le système :

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ s_1 = 200 - 2s_4 + s_5 \\ (2)\ s_2 = 300 + s_4 - s_5 \\ (3)\ s_3 = 600 - 3s_5 \\ (4)\ x_1 = 800 + 2s_4 - s_5 \\ (5)\ x_2 = 200 - s_4 + s_5 \end{array}\right\} \quad \text{Max } (5600 - 4s_4 + 8s_5)$$

à résoudre par la méthode usuelle à partir du sommet ci-après : $x_1 = 800$, $x_2 = 200$, $s_1 = 200$, $s_2 = 300$, $s_3 = 600$, $s_4 = s_5 = 0$.

Pour maximiser la fonction économique, il faut augmenter la valeur de s_5 (maintenir $s_4 = 0$). Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1), (2), (3), (4), et (5)]:

(1) : $s_1 \geq 0 \Rightarrow 200 + s_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 \geq -200$.
(2) : $s_2 \geq 0 \Rightarrow 300 - s_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 \leq 300$.
(3) : $s_3 \geq 0 \Rightarrow 600 - 3s_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 \leq 200$.
(4) : $x_1 \geq 0 \Rightarrow 800 - s_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 \leq 800$.
(5) : $x_2 \geq 0 \Rightarrow 200 + s_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 \geq -200$.

D'où le meilleur choix est $s_5 = 200$, à partir de la relation (3), et donc $s_5 = 200 - \frac{1}{3} s_3$. On obtient le nouveau sommet : $x_1 = 400$, $x_2 = 600$, $s_1 = 400$, $s_2 = 100$, $s_5 = 200$, $s_3 = s_4 = 0$. Et par rapport à ce nouveau sommet, le système devient :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 600 + \frac{1}{3} s_3 + 2s_4 \\ x_2 = 400 - \frac{1}{3} s_3 - s_4 \\ s_1 = 400 - \frac{1}{3} s_3 - 2s_4 \\ s_2 = 100 + \frac{1}{3} s_3 + s_4 \\ s_5 = 200 - \frac{1}{3} s_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \max[5600 - 4s_4 + 8(200 - \frac{1}{3} s_3)] \\ = \max (7200 - \frac{8}{3} s_3 - 4s_4) = 7200. \end{array}$$

Puisque dans la fonction bénéfice tous les coefficients des variables sont négatifs, l'algorithme s'arrête. Et donc, la décision à conseiller est :

$$\boxed{x_1 = 600 \text{ et } x_2 = 400}$$

pour un bénéfice escompté de :

$$\boxed{7200 \text{ FC}}$$

N.B. : Ce type d'exercice est dit « en deux phases ».

c.2). (Exemple des contraintes redondantes).

Soit à résoudre le système de l'exemple précédent, c.-à-d.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ s_1 = 1000 - x_1\\ (2)\ s_2 = 500 - x_2\\ (3)\ s_3 = 4200 - 3x_1 - 6x_2\\ (4)\ z_1 = 1000 - x_1 - x_2 + s_4\\ (5)\ z_2 = 1200 - x_1 - 2x_2 + s_5\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Max } (f = -z_1 - z_2) =\\ \text{Max } (f = -2200 + 2x_1 + 3x_2 - s_4 - s_5)\end{array}$$

à partir du point admissible : $x_1 = x_2 = s_4 = s_5 = 0$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 500$, $s_3 = 4200$, $z_1 = 1000$, et $z_2 = 1200$.

Pour maximiser f, on choisit cette fois-ci de modifier d'abord x_1 (en gardant $x_2 = 0$). Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1), (3), (4) et (5)] :

(1) : $s_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1000$.
(3) : $s_3 \geq 0 \Rightarrow 4200 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1400$.
(4) : $z_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1000$.
(5) : $z_2 \geq 0 \Rightarrow 1200 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1200$.

D'où le meilleur choix est $x_1 = 1000$ à partir des deux relations (1) et (4), contraintes redondantes. Si nous considérons la relation (1), on aura donc $x_1 = 1000 - s_1$ et on obtient le nouveau sommet : $x_2 = z_1 = s_4 = s_5 = 0$, $x_1 = 1000$, $s_2 = 500$, $s_3 = 1200$, $z_2 = 200$. De ce sommet, le système devient :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x_1 = 1000 - s_1\\ (2)\ s_2 = 500 - x_2\\ (3)\ s_3 = 1200 + 3s_1 - 6x_2\\ (4)\ z_1 = + s_1 - x_2 + s_4\\ (5)\ z_2 = 200 + s_1 - 2x_2 + s_5\end{array}\right\}\quad \text{Max } f = -200 + 3x_2 - 2s_1 - s_4 - s_5.$$

A ce niveau on ne peut plus bouger. En effet, la variable x_2 qui est la seule à influencer positivement la fonction de bénéfice est telle que la relation $z_1 = -x_2 + s_1 + s_4$ avec $s_1 = s_4 = 0$ et $x_2 \geq 0$, $z_1 \geq 0$, imposent $x_2 = z_1 = 0$. Donc, pas moyen de changer x_2 car sinon z_1 aura une valeur négative (contradiction sur la positivité de z_1).

Or l'équation $x_2 = s_1 + (s_4 - z_1)$ exprime que l'information $x_2 \geq 0$ est une simple conséquence des contraintes :

$$x_1 \leq 1000 \text{ et } 1000 \leq x_1 + x_2.$$

Ainsi, on peut se ramener à un système avec une inconnue de moins et une contrainte de moins par la substitution :
$y_1 = x_1$, $y_2 = 500 - x_2$, (à partir du système de départ). Et on obtient le système ci-après à résoudre :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_1 \leq 1000\\ (2)\ 3y_1 - 6y_2 \leq 1200\\ (3)\ 500 \leq y_1 - y_2\\ (4)\ 200 \leq y_1 - 2y_2\\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\end{array}\right\}\quad \text{Max } (6000 + 4y_1 - 12y_2).$$

Comme l'origine des coordonnées n'est pas un point admissible, vu les contraintes minorations, on transforme le problème à partir de la forme standard du système initial comme ci-après :

$$\left.\begin{array}{c}(1)\ y_1 + s_1 = 1000 \\ (2)\ 3y_1 - 6y_2 + s_2 = 1200 \\ (3)\ y_1 - y_2 - s_3 + z_1 = 500 \\ (4)\ y_1 - 2y_2 - s_4 + z_2 = 200 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\end{array}\right\}\quad \text{Max } f = -z_1 - z_2$$

au point admissible : $y_1 = y_2 = s_3 = s_4 = 0$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 1200$, $z_1 = 500$, $z_2 = 200$.

On a donc à résoudre le système ci-après :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ s_1 = 1000 - y_1 \\ (2)\ s_2 = 1200 - 3y_1 + 6y_2 \\ (3)\ z_1 = 500 - y_1 + y_2 + s_3 \\ (4)\ z_2 = 200 - y_1 + 2y_2 + s_4 \\ \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Max } f = -z_1 - z_2 \\ \quad = -(500 - y_1 + y_2 + s_3) - (200 \\ -y_1 + 2y_2 + s_4). \\ \quad = -700 + 2y_1 - 3y_2 - s_3 - s_4.\end{array}$$

On choisit de modifier uniquement y_1 pour maximiser f. Les contraintes de positivité imposent [resp. à (1), (2), (3) et (4)] :

(1) $s_1 \geq 0 \Rightarrow 1000 - y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \leq 1000.$
(2) $S_2 \geq 0 \Rightarrow 1200 - 3y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \leq 400.$
(3) $z_1 \geq 0 \Rightarrow 500 - y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \leq 500.$
(4) $z_2 \geq 0 \Rightarrow 200 - y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \leq 200.$

Le meilleur choix est donc $y_1 = 200$ à partir de la relation (4), et donc $y_1 = 200 - z_2 + 2y_2 + s_4$. On obtient ainsi le nouveau sommet admissible : $y_2 = s_3 = s_4 = z_2 = 0$, $s_1 = 800$, $s_2 = 600$, $z_1 = 300$, $y_1 = 200$. Et le système s'y écrit :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ s_1 = 800 + z_2 - 2y_2 - s_4 \\ (2)\ s_2 = 600 + 3z_2 - 3s_4 \\ (3)\ z_1 = 300 + z_2 - y_2 + s_3 - s_4 \\ (4)\ y_1 = 200 - z_2 + 2y_2 + s_4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Max } f = -700 + 2(200 - z_2 + 2y_2 + \\ \quad s_4) - 3y_2 - s_3 - s_4 \\ \quad = -300 - 2z_2 + y_2 - s_3 + s_4.\end{array}$$

On choisit de modifier y_2 (on garde $s_4 = 0$) pour maximiser f. Les contraintes de positivité imposent [pour les relations (1), (3), (5)]:

(1) $s_1 \geq 0 \Rightarrow 800 - 2y_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \leq 400.$
(3) $z_1 \geq 0 \Rightarrow 300 - y_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \leq 300.$
(4) $y_1 \geq 0 \Rightarrow 200 + 2y_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq -100.$

D'où le meilleur choix est $y_2 = 300$, obtenu à partir de la relation (3), et donc $y_2 = 300 - z_1 + z_2 + s_3 - s_4$. On obtient alors le nouveau sommet : $z_1 = z_2 = s_3 = s_4 = 0$, $y_2 = 300$, $s_1 = 200$, $s_2 = 600$, $y_1 = 800$. Et le système devient :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ s_1 = 200 - z_2 + 2z_1 - 2s_3 + s_4 \\ (2)\ s_2 = 600 + 3z_2 - 3s_4 \\ (3)\ y_2 = 300 - z_1 + z_2 + s_3 - s_4 \\ (4)\ y_1 = 800 - 2z_1 + z_2 + 2s_3 - s_4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Max } f = -300 - 2z_2 + y_2 - s_3 + s_4. \\ \quad = -300 - 2z_2 + 300 + z_2 - z_1 \\ \quad + s_3 - s_4. \\ \quad = - z_1 - z_2.\end{array}$$

et max f = 0. Donc, les variables principales y_k, s_3 et s_4 sont caractéristiques d'un sommet acceptable pour le système initial car toutes les variables artificielles ont pour valeur zéro.

Ainsi on va se débarrasser des z_k pour obtenir le système ci-après à résoudre :

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ s_1 = 200 - 2s_3 + s_4 \\ (2)\ s_2 = 600 - 3s_4 \\ (3)\ y_2 = 300 + s_3 - s_4 \\ (4)\ y_1 = 800 + 2s_3 - s_4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Max } (6000 + 4y_1 - 12y_2) \\ = \text{Max } [6000 + 4(800 + 2s_3 - \\ \quad s_4) - 12(300 + s_3 - s_4)] \\ = \text{Max } (5600 - 4s_3 + 8s_4). \end{array}$$

à partir du sommet : $s_3 = s_4 = 0$, $y_1 = 800$, $y_2 = 300$, $s_1 = 200$, $s_2 = 600$.

On choisit de modifier s_4 pour maximiser la fonction bénéfice. Les contraintes de positivité imposent [respectivement pour (1), (2), (3) et (4)] :

(1) $s_1 \geq 0 \Rightarrow 200 + s_4 \geq 0 \Rightarrow s_4 \geq -200$
(2) $s_2 \geq 0 \Rightarrow 600 - 3s_4 \geq 0 \Rightarrow s_4 \leq 200$
(3) $y_2 \geq 0 \Rightarrow 300 - s_4 \geq 0 \Rightarrow s_4 \leq 300$
(4) $y_1 \geq 0 \Rightarrow 800 - s_4 \geq 0 \Rightarrow s_4 \leq 400$

Le meilleur choix est $s_4 = 200$, obtenu à partir de la relation (2), et donc, $s_4 = 200 - \frac{1}{3} s_2$. D'où l'on obtient le nouveau sommet : $s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = 200$, $s_1 = 400$, $y_1 = 600$, $y_2 = 100$. Et le système devient:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ s_1 = 400 - \frac{1}{3} s_2 - 2s_3. \\ (2)\ s_4 = 200 - \frac{1}{3} s_2. \\ (3)\ y_2 = 100 + \frac{1}{3} s_2 + s_3 - s_4 \\ (4)\ y_1 = 600 + \frac{1}{3} s_2 + 2s_3 - s_4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Max } (5600 - 4s_3 + 8s_4) \\ = \text{max } [5600 - 4s_3 + 8(200 - \frac{1}{3} s_2)]. \\ = \text{max } (7200 - \frac{8}{3} s_2 - 4s_3) \\ = 7200. \end{array}$$

L'algorithme s'étant arrêté, la décision à conseiller est :

$$y_1 = 600 \text{ et } y_2 = 100.$$

Or, $y_1 = x_1$ et $y_2 = 500 - x_2 \Rightarrow$ $x_1 = 600$ et $x_2 = 400$, pour un bénéfice escompté de 7200.

B.2. Tableau du simplexe.

1°/ Avantage.

L'intérêt du tableau du simplexe est de rassembler de façon condensée tous les éléments nécessaires au déroulement de l'algorithme du simplexe.

2°/ Présentation.

L'algorithme, basé sur la méthode du Pivot de Gauss pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, est présenté sous forme de tableau. Le tableau de départ est obtenu en ne conservant que les coefficients des équations de la forme standard du système.

Le tableau contient les variables Hors Base (HB) qui se trouvent sur la première ligne, ainsi que les variables dans la Base (B) qui se trouvent dans la première colonne, et donne la première solution admissible (par exemple en cas de système facile, celle où les variables principales sont nulles). Les variables HB sont les variables principales d'un système sous sa forme standard tandis que les autres sont dans la Base (B).

HB **B**	Var 1	Var 2	Var i	Var j	C
Var i	A_{i1}	A_{i2}	A_{ii}	A_{ij}	c_i
Var j	A_{j1}	A_{j2}	A_{ji}	A_{jj}	c_j
Δ	Δ_1	Δ_2	Δ_i	Δ_j	c_Δ

On augmente la fonction économique en faisant entrer une variable dans la base, prenant la place de la variable qui va sortir de la base, en se basant sur les critères ci-après :

(a). Critère de sélection de la variable entrant dans la base.

On sélectionne la variable HB ayant le plus grand coefficient positif dans la ligne Δ.

(b).Critère de sélection de la variable sortant de la base.

HB **B**	Var 1	Var 2	Var i	Var j	C	**R**
Var i	A_{i1}	A_{i2}	A_{ii}	A_{ij}	c_i	
Var j	A_{j1}	A_{j2}	A_{ji}	A_{jj}	c_j	
Δ	Δ_1	Δ_2	Δ_i	Δ_j	c_Δ	

- On rajoute, nécessairement au tableau, une colonne R obtenue en faisant le rapport membre à membre de la colonne C à la colonne de la variable entrant dans la base.

- On sélectionne la variable dans base ayant le plus petit coefficient positif dans la colonne R.

(c). Critère de sélection du pivot.

Le pivot est l'intersection de la variable entrante et de la variable sortante.

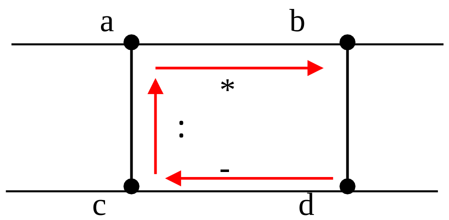
(d). Critères des itérations (leur début et leur fonctionnement).

Une fois le pivot déterminé, les itérations pour l'obtention des autres tableaux passent par l'application des règles suivantes :

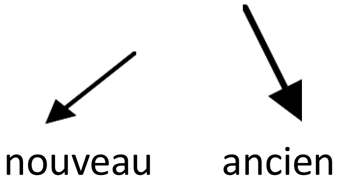
- Le pivot prend la valeur 1.
- Les coefficients de la ligne du pivot sont divisés par le pivot.

- Les coefficients de la colonne du pivot sont nuls.
- Les autres coefficients sont obtenus par la règle du rectangle.

N.B. : La règle du rectangle est définie comme ci-après :



$$\boxed{d' = d - \left(\frac{c}{a}\right)*b}$$



avec: (i). $d' = d \Leftrightarrow c*b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $c = 0$.
(ii). c et a sont pris sur la colonne du pivot.

(e). Critère d'arrêt des itérations.

Si tous les coefficients de la ligne Δ, relatifs aux variables HB, sont négatifs ou nuls, la solution trouvée est optimale, et la valeur de $-Z$ est lue à l'intersection de la colonne C et de la ligne Δ.

En effet, nous pouvons remarquer ceci sur chaque tableau:

- Les valeurs des variables dans la base se lisent dans la colonne C.
- La dernière cellule (intersection de C et Δ) donne la valeur de $-Z$.
- La ligne Δ donne les valeurs marginales ou taux marginaux de substitution.

3°/ Exemples.

Exemple 1. Soit à résoudre le programme linéaire suivant sous sa forme canonique

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 4x \\ 6x_1 + 3x_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Max } Z = 1200x_1 + 1000x_2$$

Solution

On a la forme standard ci-après

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + 1.t_1 + 0.t_2 = 160 \\ 6x_1 + 3x_2 + 0.t_1 + 1.t_2 = 180 \\ \text{Max } Z = 1200x_1 + 1000x_2 + 0.t_1 + 0.t_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

D'où nous avons le tableau 0 suivant :

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
t_1	3	4	1	0	160
t_2	6	3	0	1	180
Δ	1200	1000	0	0	0

Tableau 0

Avec la solution admissible $x_1 = x_2 = 0$, $t_1 = 160$, $t_2 = 180 \Rightarrow Z = 0$.

La variable HB qui a le plus grand coefficient positif dans la ligne Δ est x_1, donc x_1 va entrer dans la base.

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1	3	4	1	0	160	160/3
t_2	6	3	0	1	180	180/6
Δ	1200	1000	0	0	0	

Tableau 0

Dans la colonne R c'est la variable t_2 de la base B qui y a le plus petit coefficient positif, donc t_2 va sortir de la base. Et donc le pivot a la valeur 6 dans le tableau 0. D'où en appliquant les règles d'itérations, on obtient le tableau 1 ci-après de maximisation de la fonction de bénéfice.

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	70	70/(5/2)
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	30	30/(1/2)
Δ	0	400	0	-200	-3600	

Tableau 1

La variable HB qui a le plus grand coefficient positif dans la ligne Δ est x_2, donc x_2 va entrer dans la base.

Dans la colonne R c'est la variable t_1 de la base B qui y a le plus petit coefficient positif, donc t_1 va sortir de la base. Et donc le pivot a la valeur $\frac{5}{2}$ (cf. le tableau 1). D'où en appliquant les règles d'itérations, on obtient le tableau 2 ci-après de maximisation de la fonction de bénéfice.

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	28
x_1	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{4}{15}$	16
Δ	0	0	-160	-120	-47200

Tableau 2

Nous avons atteint la solution maximale car tous les coefficients de la ligne Δ sont négatifs ou nuls. Ainsi :

- Les variables hors base (HB) sont nulles : $t_1 = 0$, $t_2 = 0$. Cr qui signifie qu'il reste 0 heure d'utilisation disponible aux ateliers A_1 et A_2.
- Les valeurs des variables dans la base (B) se lisent dans la colonne C : $x_1 = 16$ et $x_2 = 28$. Cela signifie qu'on fabrique 16 pièces P_1 et 28 pièces dans.
- La dernière cellule ($C \cap \Delta$) donne la valeur –Z : $-Z = -47520 \quad \Rightarrow \quad Z = 47200$.

Donc, la marge est égale à 47200 FC.

Exemple 2.
Maximiser $z = 3x_1 + 4x_2$
Sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 1000 \\ 7x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Solution : En exercice.

4°/ Remarques.

- S'il existe une variable HB ayant un coefficient positif dans la ligne Δ et telle que tous les coefficients correspondants dans la le tableau soient nuls ou négatifs, alors la solution est infinie.
- Si, à la fin des itérations, une variable est HB avec un coefficient nul dans la ligne Δ, alors on a une arête (plan, …) optimale. Les autres sommets solutions sont obtenus en faisant rentrer cette variable dans la base.

5°/ Dual.

a. Définition.

A tout programme linéaire appelé PRIMAL correspond un programme linéaire
appelé DUAL et obtenu de la manière suivante :

PRIMAL	DUAL
m contraintes d'infériorité	n contraintes de supériorité
n variables d'activité	n variable d'écart
m variables d'écart	m variables d'activité
écriture en ligne	écriture en colonne

b. Exemple.

Primal

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ \text{Max } Z = 1200x_1 + 1000x_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dual

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \geq 1200 \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 1000 \\ \text{Min } W = 160y_1 + 180y_2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

c. Remarques.

A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes :
(1). Les fonctions objectifs Z et W ont la même la même valeur optimale.
(2). La valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme, et réciproquement.

Par exemple :

		VA		VE	
Primal	$Z = 47200$	x_1	x_2	t_1	t_2
	Valeurs optimales	16	28	0	0
	Valeurs marginales	0	0	-160	-120
Dual	$W = 47200$	u_1	u_2	y_1	y_2
	Valeurs optimales	0	0	160	120
	Valeurs marginales	-16	-28	0	0
		VE		VA	

VA = Variable d'activité.
VE = Variable d'écart.

(3). Le programme Dual peut permettre, d'un point de vue mathématique, de résoudre certains problèmes de minimisation. Il peut aussi apporter des interprétations économiques intéressantes.

2.3. **Exercices.**

1. Résoudre le programme linéaire suivant :

Maximiser $Z = 3x_1 + 4x_2$ sachant que $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 1000 \\ 7x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 200 \leq 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

2. Résoudre et trouver le primal du programme linéaire suivant :

Minimiser $W = 25y_1 - 14y_2 + 20y_3$ sachant que $\begin{cases} 500 \leq 7y_1 + 5y_2. \\ 125 \leq 6y_1 - 3y_2. \\ 1100 \leq y_1 + y_2 + y_3. \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{cases}$

3. Un atelier peut fabriquer deux types d'articles : A_1 et A_2. A_1 a la cadence de 4

objets à l'heure et A_2 en a de 2 objets à l'heure. Cette fabrication utilise une machine outil unique disponible pour 20 heures par mois.

Le bénéfice unitaire pour un article A_1 est de 4 francs et pour A_2 de 8 francs. Ces objets vendus en totalité à des grossistes : on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 54 objets du type A_1, plus de 20 du type A_2. D'autre part, chaque objet doit être successivement vérifié avant sa commercialisation ; une équipe de techniciens est chargée de cette mission. Chaque technicien prend 17 heures par mois*m La vérification d'un objet du type A_1 prend 30 minutes chez le premier technicien, 20 minutes chez le deuxième. Celui du type A_2 prend 20 minutes chez le premier technicien et 30 minutes chez le second.

- Trouver le programme mathématique de ce programme.
- Déterminer le bénéfice maximal.

4. Un Intendant se propose d'avoir un menu de coût minimum en utilisant uniquement du pain, de la viande et du fromage blanc. Il n'a pas à tenir compte des goûts des consommateurs, mais le repas doit apporter au moins mille calories et 40 grammes de protides et coûter le moins cher possible.

On suppose que : 100g de pain coûtent 0,20 FC et apportent 250 calories et 7g de protides ; 100g de viande coûtent 2 FC et apportent 200 calories et 20g de protides ; 100g de fromage coûtent 0,50 FC et apportent 100 calories et 20g de protides.

- Traduire ce problème sous une forme de modèle mathématique.
- Résoudre le problème dual.
- Déduire de ce qui précède la solution du problème de l'Intendant.

Chapitre III: Théorie des jeux

III.1. Introduction

Le premier essai de jeux est apparu depuis 1921 avec Emile Borel lorsqu'il avait construit la théorie des stratégies. La théorie des jeux a acquis son fondement en 1928 lorsque John Von Neumann a démontré les théorèmes minimaux. Cependant, c'est en 1944 que cette théorie a suscité l'intérêt général, à l'apparition de l'ouvrage de J.V. Neumann et O. Morgenstern sur la théorie des jeux et le comportement économique. De là, la théorie des jeux a pu être appliquée dans plusieurs domaines, par exemple en économie, en politique, et dans le domaine militaire.

En effet, la théorie des jeux, imaginée par E. Borel et fondée par J.V Neumann et 0. Morgenstern, doit son importance en ce qu'elle facilite la résolution de certains problèmes de conflits militaires, économiques.

L'objectif de ce chapitre est de permettre aux étudiants d'apprendre des connaissances théoriques de la théorie des jeux au travers de la compréhension relative à la signification mathématique des jeux à deux personnes, cela par un entraînement au calcul et au raisonnement.

III.2. Définition

Un jeu sur un ensemble X est considéré comme une structure définie par un ensemble des règles et des préférences.

En effet, soit X un ensemble abstrait avec d'une part $\{X_1, X_2\}$ une partition de X et d'autre part $\{(1), (2)\}$ un ensemble des personnages appelés joueurs.

Nous allons distinguer deux catégories des joueurs : N^+ pour l'ensemble des joueurs actifs et N^- pour celui des joueurs passifs.

Ainsi, nous disons qu'il y a jeu pour ces joueurs s'il existe :

1) Une application multivoque de X dans lui-même appelée règle de jeu ;
2) Deux relation R_1 et R_2 de quasi-ordre sur X appelées relations de préférence du joueur.

Les éléments de X sont des positions du Jeu, et la relation de préférence du joueur est souvent notée « ≥ ». Si une position x est un élément de X, nous disons que le droit de jouer appartient au personnage i dans la position x.

III.3. <u>Règle de jeu.</u>

Le jeu s'effectue à partir d'une position initiale x_0 et de la manière ci-après :

- Si $x_0 \in X_1$, le joueur (1), qui a le droit de jouer, choisit une position du jeu, soit x_1, dans l'ensemble Rx_0.
- Si $x_1 \in X_2$, le joueur (2), qui le droit de jouer, choisit une position du jeu, soit x_2, dans l'ensemble Rx_1.
- Si $x_2 \in X_3$, le joueur (3), qui a le droit de jouer, choisit une position du jeu, soit x_3, dans l'ensemble Rx_2.
- Si $x_{i-1} \in X_i$, le joueur (i), qui a le droit de jouer, choisit une position du jeu, soit x_i, dans l'ensemble Rx_{i-1}.

Le jeu s'arrête quand un joueur choisit une position de jeu, soit x, telle que $Rx=\varnothing$. On pose $X_o = \{x : Rx = \varnothing\}$, quitte à modifier R, on supposera que $RX_i \cap X_i = \varnothing$.

La relation de préférence R_i est définie à l'aide d'une fonction numérique bornée $f_i(x)$ de la manière ci-après :

Si $x \underset{i}{\geq} y$ alors $f_i(x) \geq f_i(y)$. La fonction f_i est une fonction de préférence du joueur i.

III.4. Sortes des Jeux.

III.4.1. Jeu de paiement

Un jeu dans un ensemble abstrait X est dit de paiement de 2 personnes si chaque joueur admet une fonction de préférence fi.

Alors le jeu est désigné par (R, f) où $f = (f_1, f_2)$ selon qu'il s'agit de 2 personnes.

III.4.2. Jeu de mat

Un jeu dans un ensemble abstrait X est de mat de 2 personnes si chaque fonction f_i est la fonction caractéristique d'un ensemble K_i des préférences pour i.

Ce jeu est désigné par (R, K), où $K= (K_1, K_2)$ selon qu'il s'agit de 2 personnes.

III.4.3. Jeu ordonné à m mouvement

Un jeu dans un ensemble abstrait X est ordonné si : $\forall x, y \in X : x \neq y$ implique $Rx \cap Ry = \varnothing$.
Et, il est à m mouvements si sa durée est limitée par un nombre m.

Nous pouvons représenter le couple (X, R) par un arbre descendant dont chaque branche a plus de m sommets à partir du sommet supérieur x_o.

L'ensemble Z des sommets terminaux est valué par des fonctions $\lambda_1(z)$ et $\lambda_2(z)$. En partant de x_o, le joueur (1) choisit un sommet x_1 en descendant une branche, puis le joueur (2) désigné par x_1 choisit à son tour un sommet x_2. Chaque sommet étant une position distincte, et en posant

$$a_i = \inf_{z \in Z} \lambda_i(z)$$

nous avons un jeu de paiement avec $i \in N^+$ et

$$f_i(x) = a_i \qquad (x \notin Z)$$

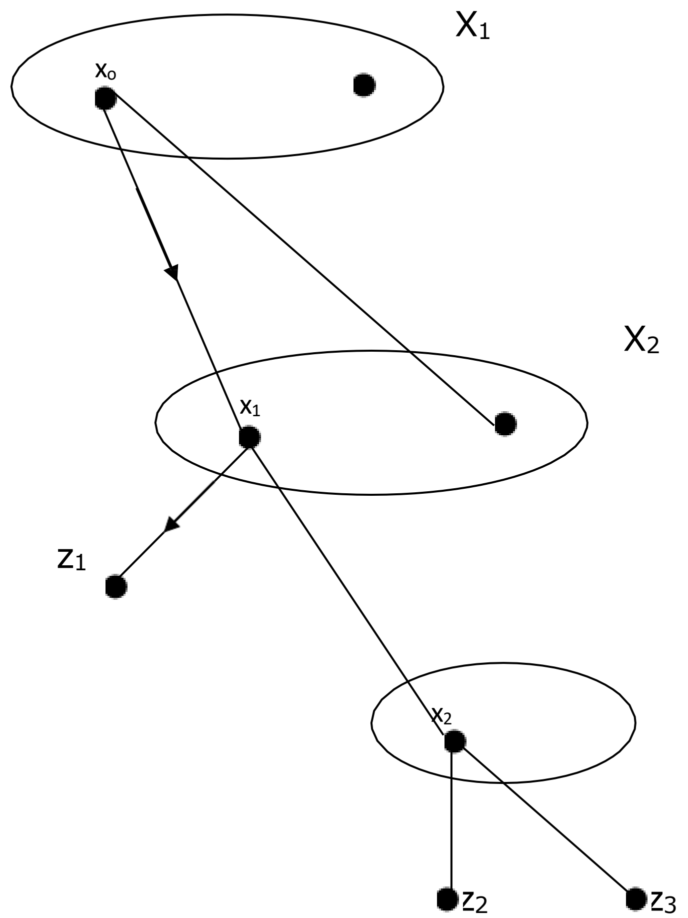
$$f_i(x) = \lambda_i(x) \qquad (x \in Z)$$

N.B. :

a) Ce jeu est comme celui des échecs et monotone car nous avons :

$$y \in Rx \qquad Y \overset{i}{\geq} x \quad (i=1,2).$$

b) Forme extensive



Les sommets terminaux sont les fins de parties.

III.5. **But d'un joueur**.

Le but d'un joueur est défini au moyen de ses relations de préférence sur toutes les possibilités rencontrées, et dépend de sa catégorie (N^+ ou N^- i.e actif ou passif).

En effet :

1. si (i) $\in N^+$, le joueur (i) cherche à obtenir tôt ou tard au cours du jeu, une position très favorable au sens de la relation « ≥ ».

Dans un jeu de paiement, on considère l'ensemble S des positions rencontrées au cours du jeu. Le gain de (i) est le nombre

$$f_i^+(S) = \underset{x \in S}{Sup}\, f_i(x)$$

Le but de (i) est d'obtenir pour gain un nombre aussi grand que possible ; ce gain pouvant être assimilé à une somme d'argent que (i) reçoit au cours du jeu. Si $f_i^+(S)$ est négatif, (i) doit payer une somme d'argent égale à $|\, f_i^+(S)\, |$

2. si (i) $\in$ N^-, le joueur (i) cherche à ne jamais obtenir une position de peu préférable au sens de la relation « ≥ ».

Dans un jeu de paiement, le gain de (i) sera alors défini par un nombre

$$f_i^-(S) = \underset{x \in S}{\inf}\, f_i(x)$$

Le but de (i) est d'obtenir pour gain un nombre aussi grand que possible.

III.6. Exemples

III.6.1. Jeu d'échecs.

En considérant une partie d'échecs où le but exclusif de chaque jouer est de donner le mat à son adversaire et m α la position sur l'échiquier M d'une pièce du jeu, alors :

A tout diagramme (m_α), on associera un entier i de l'ensemble N= $\{1,2\}$, et on prend i=1 si les blancs jouent et i=2 si les noirs jouent. On pourra définir une position du jeu par un élément :

$$x = (m_\alpha / \alpha) \times (i)$$

de l'espace produit $\underset{\alpha}{\Pi}\, M_\alpha \times N$

Nous avons ainsi un jeu de mat où les deux joueurs sont actifs et où K_1 et K_2 sont deux ensembles bien définis de X_1 et X_2, et de plus :

$K_1 \cup K_2 \subset X_0$ et $K_1 \cap K_2 = \varnothing$.

III.6.2. Jeu de poursuites

Soit un espace métrique M (la mer) où deux bateaux poursuivants, m_1 et m_2 essayent de joindre le bateau m_3 poursuivi. Cette situation est à la limite un jeu de paiement dans lequel les trois joueurs (1), (2), (3) qui dirigent respectivement les bateaux m_1, m_2, m_3 joueraient à tour de rôle toutes les secondes.

A tout diagramme m_1, m_2, m_3 nous associons un entier de $N=\{1,2,3\}$, que nous prenons égal à (i) quand le trait de jouer appartient au joueur (i). Une position du jeu pourra être définie par un élément $x=(m_1, m_2, m_3, i)$ de l'espace MxMxMxN.

La règle R sera définie de la manière suivante :

Soit Br_i (m) la boule de centre m et de rayon r_i [La plus grande distance que (i) peut parcourir en une seconde], alors :

a) Si $m_1= m_3$ ou $m_2= m_3$, nous poserons $R(m_1, m_2, m_3, i)=\varnothing$.
b) Si $m_1\neq m_3$ et $m_2\neq m_3$, nous poserons :
$R(m_1, m_2, m_3, 1) = Br_1(m_1) \times m_2 \times m_3 \times 2$
$R(m_1, m_2, m_3, 2) = m_1 \times Br_2(m_2) \times m_3 \times 3$
$R(m_1, m_2, m_3, 3) = m_1 \times m_2 \times Br_3(m_3) \times 1$

Définissons les préférences des joueurs.

Le but de (1) étant la capture de (3), nous posons:

- $1 \in N^+$, $f_1(m_1, m_2, m_3, i) = 0$ si $m_1 \neq m_3$, $m_2 \neq m_3$
  $f_1(m_1, m_2, m_3, i) = 1$ si $m_1= m_3$ ou $m_2 = m_3$

Le but du fuyard (3) est de ne pas être capturé. Nous posons:
- $3 \in N^-$, $f_3(m_1, m_2, m_3, i) = 0$ si $m_1 = m_3$, $m_2=m_3$
  $f_3(m_1, m_2, m_3, i)=1$ si $m_1 \neq m_3$, $m_2 \neq m_3$

Supposons enfin que (2), à défaut de pouvoir rattraper le fuyard, cherche à s'approcher le plus possible de (3). Si $d(m_2, m_3)$ est la distance de m_2 à m_3, nous posons :
- $2 \in N^+$, $f_2(m_1, m_2, m_3,i) = -d(m_2, m_3)$

N.B. : Le jeu ainsi défini est tel que $3 \in N^-$ et qu'il peut en être autrement.

Ainsi, nous avons un jeu de mat pour (1) et (3), et un jeu de paiement pour (2).

Donc, le jeu est alternatif car on a :

$RX_1 \subset X_2$, $RX_2 \subset X_3$, $RX_3 \subset X_1$.

III.7. Stratégies et équilibres.

III.7.1. Stratégies

a. Définitions

1) Adopter une stratégie, pour le joueur, c'est arrêter a priori sa méthode de jeu.
2) Une stratégie est un ensemble d'instructions pour jouer un certain jeu du premier au dernier coup.
3) Une stratégie est un plan qui permet au joueur de jouer du début à la fin.

L'espace des stratégies du joueur (i) est noté $\sum_i$ $(\forall i \in \{1,2\})$.

b. Remarque

En général, soient A et B deux joueurs ou deux ennemis ou encore deux concurrents qui s'affrontent. Supposons que pour ces joueurs le nombre de stratégies soit fini. Ainsi, les m stratégies de A sont numérotées de 1 à m et désignées par i=1,2,….,m les n stratégies de B sont numérotées de 1 à n et désignées par j=1,2,….n.

Ainsi, dans un jeu, il n'y a que deux coups. Au premier, A choisit une stratégie i que B ignore et au suivant, B choisit une stratégie j. ces deux choix déterminent le jeu et le gain de chaque joueur. Le résultat du jeu dépend donc de la stratégie i de A et de la stratégie j de B.

Soit a_i^j le gain de A.

Si le jeu est de somme nulle, alors le gain de B est $-a_i^j$. Dans ces conditions, la situation peut être représentée par le tableau des nombres a_i^j dans lequel A choisit une ligne i et B une colonne j. Le gain de A est ainsi déterminé par la matrice ci-après :

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_m^n \end{pmatrix}$$

Si A choisit la $i^{ème}$ stratégie (ou $i^{ème}$ ligne) et B la $j^{ème}$ stratégie (ou $j^{ème}$ colonne) alors B doit payer à A une somme d'argent égale à a_i^j. A désire que a_i^j soit aussi grand que possible mais il contrôle seulement le choix de sa stratégie i ; B désire que a_i^j soit aussi petit que possible mais il ne contrôle que sa stratégie j.

Ce jeu est de type fini car chaque joueur a un nombre fini de stratégies. Et c'est ce type de jeux que l'on va traiter dans la suite.

c. Exemples

1. Considérons le jeu suivant.

Deux enfants inventent un jeu et décident de jouer de cette façon. Appelons les joueurs A et B les deux enfants. Ils indiquent chacun un chiffre simultanément à l'aide des doigts de leur main droite.

Règle de jeu :

Si les deux chiffres sont pairs ou impairs, A donne deux millions à B. Si le chiffre de A est pair et celui de B impair, B donne trois millions à A. Si le chiffre de A est impair et celui de B pair, B donne un million à A.

Ce jeu peut être représente à l'aide du tableau suivant qui indique le gain de A suivant chaque cas.

B / A	PAIR	IMPAIR
PAIR	-2	3
IMPAIR	1	-2

2. Imaginons maintenant le jeu suivant :

L'opération qui consiste aux joueurs A et B à indiquer un chiffre se fait 2 fois consécutives et les paiements se font de la manière ci-après :

- si le nombre de chiffre pairs est 0, 2,4, A donne 2 millions à B ;
- si ce nombre est 1, B donne 1 million à A et si le nombre de chiffres pairs est 3, B donne 3 millions à A.

Ce jeu est plus compliqué que le premier étant donné que chaque joueur doit joueur deux coups et non un coup. Cependant, chacun peut commencer par définir une règle qui lui dicte en toute circonstance ce qu'il doit faire. Donc, le joueur doit commencer par adopter une stratégie. Il est possible de faire la liste des stratégies de A et B.

III.7.2. Jeux avec équilibres stratégies optimales

a. Définitions et exemples

Considérons le jeu suivant défini par la matrice ci-après :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -7 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que :

1) Si A choisit la stratégie 1=3, son gain s'élève au moins à 1 alors que le gain descend à -5 si i = 1 et à -7 si i = 2 ;
2) Si B choit ma stratégie j = 2, le gain de A ne dépassera pas 1 et ce gain égale 4 si j = 1 ou j=3.

La prudence commande à A de joueur i=3 puisque si B le veut, il peut l'obliger à ne pas gagner plus de 1, de même, B à intérêt à choisir j=2. Alors nous disons que ce jeu présente un col à i=3 et j=2 ou le couple (3,2) constitue un point d'équilibre ou un point selle qu'aucun n'a intérêt à quitter.

En définitive,

1) A a choisi la stratégie i pour laquelle son gain est maximum. Une telle stratégie est dite Maximin et le joueur A est maximisant.

2) B a choisi la stratégie j dont le gain de A est minimum. Une telle stratégie est dite Minimax et le jouer B est minimisant.

Nous avons remarqué que : $\max_i \min_j a_i^j = \min_j \max_i a_i^j$.

Dans ces conditions : les couples (i, j) est un point d'équilibre ou un point selle ou un col, les stratégies i et j sont appelées stratégies optimales respectivement de A et de B.

D'une façon générale,

Soit A = (a_i^j) [$(1 \leq i \leq n)$ et $(1 \leq j \leq m)$] la matrice des gains d'un jeu.
Si la condition

$$v = \max_i \min_j a_i^j = \min_j \max_i a_i^j$$

est vérifiée, alors le joueur A peut, en adoptant la stratégies $\bar{i}$, s'assurer au moins le gain v et B peut empêcher A de gagner d'avantage que v en choisissant la stratégie $\bar{j}$. A et B ne peuvent faire mieux que choisir $\bar{i}$ et $\bar{j}$ respectivement. Le gain de A est

$v = a_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ (Avec $\bar{i}$ et $\bar{j}$ stratégies optimales).

Ainsi pour tout i et quel que soit j, nous avons :

(α) $\qquad a_i^{\bar{j}} \leq a_{\bar{i}}^{\bar{j}} \leq a_{\bar{i}}^{j}$ (Avec $\bar{i}$ et $\bar{j}$ stratégies optimales).

En effet, lorsque la situation (α) se présente, les stratégies $\bar{i}$ et $\bar{j}$ sont appelées les stratégies optimales de A et B, et v= $a_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ est la valeur du jeu.

Cette valeur représente ce que A devrait payer à B pour compenser le résultat au début du jeu.

Les stratégies optimales de A et B ont les caractéristiques suivantes :

(a) Si A choisit $\bar{i}$, $\forall$ j de B, A a au moins un gain de v ;

(b) Si B choisit $\bar{j}$, $\forall$ i de A, B ne peut faire gagner (à A) plus de v (c.-à-d. B ne peut perdre plus de v) ;

(c) Si A annonçait avant qu'il a l'intention de jouer $\bar{i}$, B ne pouvait tirer de ce renseignement aucun profit, et réciproquement.

b. Condition nécessaire et suffisante d'un point d'équilibre.

Soit un jeu représenté par la matrice A = (a_i^j) [(1≤i ≤n) et (1≤j≤m)].

Pour que le jeu présente un col en ($\bar{i}, \bar{j}$ *) ou ait un point d'équilibre (* $\bar{i}, \bar{j}$ *), il faut et il suffit qu'il existe un élément de la matrice qui est à la fois le maximum de sa colonne et le minimum de sa ligne.*

N.B : Un jeu peut avoir plusieurs points d'équilibre, mais tous ces points ont la même valeur de jeu.

c. Exemples.

1. soit le jeu dont la matrice des gains est A= $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 3 \\ 13 & 10 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Ce jeu présente un col pour i = 2 et j = 3, ou le couple (2,3) est un point d'équilibre car 7 est le minimum de la 2ème ligne et le maximum de la 3ème colonne. Alors valeur du jeu est : v = $a_2^3 = 7$.

2. soit le jeu défini par la matrice des gains A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Les minima des lignes sont -3, 2 et 2 $\Rightarrow \max_i \min_j a_i^j$ = 2.

Les maxima des colonnes sont 2,5 et 4 $\Rightarrow \min_j \max_i a_i^j$ = 2.

Ce jeu présente deux points d'équilibre : (2,1) et (3,1). Mais la valeur du jeu v $= a_2^1 = a_3^1 = 2$.

d. théorème fondamental de la théorie des jeux

1) Théorème.

Soit A= (a_i^j) [(1≤i≤n) et (1≤j≤m)] la matrice des gains du joueur A dans un jeu tel que :

$$\max_i \min_j a_i^j = \min_j \max_i a_i^j$$

Alors A a une stratégie $\bar{i}$ *et B a une stratégie* $\bar{j}$ *telles que :*

$$a_{\bar{i}}^j \geq a_{\bar{i}}^{\bar{j}} \ , \forall \text{ j et } a_{\bar{i}}^{\bar{j}} \geq a_i^{\bar{j}} \ , \forall \text{ i} \qquad (\alpha).$$

2) <u>Remarques</u>.

- La relation (α) est le théorème fondamental de la théorie des jeux.
- Les stratégies $\bar{i}$ et $\bar{j}$ sont des stratégies optimales respectivement de A et B, et le couple $(\bar{i}, \bar{j})$ est caractéristique d'une solution du jeu trouvée en déterminant l'élément $a_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ qui est à la fois le minimum de sa ligne et le maximum de sa colonne.
- Les jeux vérifiant ce théorème ou ayant des points d'équilibres sont dits des jeux à information complète ou parfaites parce que chaque joueur joue successivement et il est renseigné sur le coup précédent, complètement, qu'il soit dû à un joueur ou au hasard.

e. <u>Jeux sans points d'équilibre – sortes de stratégies</u>.

1) <u>Exemple</u>.

Considérons le jeu défini par la matrice des gains ci-après :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a : $\max_i \min_j a_i^j =$ -2 et $\min_j \max_i a_i^j =$ 1. Ces deux valeurs sont différentes. D'où, ce jeu n'a pas de point d'équilibre. Il y a une marge d'incertitude sur laquelle chacun des deux concurrents va s'efforcer de mordre en employant la ruse pour dissimuler sa propre intention.

Supposons maintenant que le joueur A décide au hasard de faire son choix en accordant une probabilité p^1 à la 1ère

ligne p^2 à la seconde ; alors nous disons que A a adopté la stratégie mixte définie par le couple $(p^1, p^2)=p$. De même, B décide aussi de faire son choix au hasard par accordant une probabilité q^1 à la 1ère colonne et une probabilité q^2 à la seconde, nous disons que B a adopté la stratégie mixte définie par le couple $(q^1,q^2)= q$.

2) <u>Définition 1</u>.

Une stratégie mixte est une stratégie adoptée par le joueur en se fiant au hasard ou au moyen d'un processus aléatoire pour dissimuler son propre choix.

3) <u>Remarques 1</u>.

Une stratégie mixte possède les caractéristiques suivantes :

- Empêcher l'adversaire de découvrir la stratégie utilisée ;
- Fournir au joueur une méthode pour s'assurer le secret de son choix.

Alors le jeu consiste, pour les joueurs, à choisir chacun une stratégie mixte et indépendamment l'un de l'autre.

Les stratégies mixtes sont mesurées par les espérances mathématiques et représentées par des matrices colonnes. Soit x_i la probabilité de choisir la stratégie i pour A. La stratégie mixte est une distribution de probabilité X représentée par la matrice colonne ci-après :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{où } x_i \geq 0 \ (\forall\ i : 1 \leq i \leq m) \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

De même, si y_j est la probabilité de choisir j pour B, la stratégie mixte de B est représentée par la matrice colonne ci-après :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{où } y_j \geq 0 \ (\forall\ j : 1 \leq j \leq n) \ \text{ et } \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

D'où :

- L'espérance mathématique de gain de A est

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^j \cdot$$

- L'espérance mathématique de perte de B est

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} y_j a_i^j \cdot$$

Ainsi, si A choisit la stratégie X et B la stratégie Y, alors l'espérance mathématique des gains de A est :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^j x_i y_j = {}^tXAY.$$

Si x_i = 1 pour une valeur de i, nous appellerons la stratégie X une stratégie pure pour le joueur A ; de même si y_j = 1 pour une valeur de j, alors la stratégie Y est une stratégie pure pour le joueur B.

4) Définition 2.

Les stratégies pures sont des stratégies adoptées par les joueurs en se méfiant du hasard.

5) Remarques 2.

Les stratégies pures consistent à choisir une ligne ou une colonne déterminées au moyen d'un processus non aléatoire. La stratégie pure définie par la ligne i_0 s'identifie à la stratégie mixte définie par :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

f. Théorème fondamental du minimax.

1). Théorème.

Soit un jeu dont la matrice des gains est A= (a_i^j) [(1≤i≤n) et (1≤j≤m)]. Ce jeu consiste aux joueurs A et B à choisir une stratégie mixte X (pour A) et une stratégie mixte Y (pour B). Le gain de A a pour espérance mathématique le nombre

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^j x_i y_j = {}^tXAY.$$

Bien que chaque joueur choisisse sa stratégie mixte, la stratégie qui sera finalement jouée dans un jeu sera déterminée au hasard.

En adoptant la stratégie mixte X, A s'assure obtenir un gain d'au moins v valant :

$$\min_{j} \; {}^{t}X.A \,,\ (\forall\ j : 1 \leq j \leq n).$$

B aussi, en choisissant la stratégie mixte Y peut espérer une somme maximale :

$$\max_{i} \; A.Y \,,\ \ (\forall\ i : 1 \leq i \leq m).$$

Le maximum étant pris sur l'ensemble des stratégies mixtes que A peut adopter, B peut choisir Y de façon à rendre cette somme aussi petite que possible. B choisit une stratégie mixte Y qui bornera l'espérance mathématique de A à :

$$\min_{j} \max_{i} \; {}^{t}X.A.Y \,,\ \forall\ X.$$

2). <u>Remarques</u>.

- $\min_{j} \max_{i} \; {}^{t}X.A.Y \;\leq\; \max_{i} \min_{j} \; {}^{t}X.A.Y \qquad (1)$
- Le théorème du minimax de Von NEUMANN énonce qu'il y a égalité entre les deux membres de (1), et ce résultat n'est rien d'autre que le théorème fondamental de la théorie des jeux, et qui a pour rôle la recherche des points d'équilibres ou de la valeur d'un jeu au moyen des stratégies mixtes pour des jeux ne les possédant pas.

III.8. <u>Position et gains du jeu.</u>

Supposons maintenant que i $\in$ N^+.

Nous disons que, dans la position x, le joueur (i) garantit forcément la position y lorsque pour un entier m fixé par lui, (i) peut obtenir une position de jeu plus favorable ou préférable que y quoique fasse les autre joueurs. Autrement dit, le joueur (i) peut se fixer une durée limite m pour amener la position du jeu dans la section supérieure

$$\Delta_y = \left\{ x \,/\, x \overset{i}{\geq} y \right\}$$

L'ensemble des solutions initiales x dans lesquelles i peut garantir forcément y est désigné par $\bar{G}_y$.
Dans le cas où i prétend obtenir une position préférable que y sans pouvoir fixer la durée limite, nous disons que : i garantit la position y.

L'ensemble des positions initiales x dans lesquelles x peut garantir y est désigné par G_y.

Dans un jeu de paiement, nous disons que (i) garantit le gain s'il peut amener la position du jeu dans la section

$$\Delta_\gamma = \left\{ x \mathbin{/} f_i(x) \geq \gamma \right\}$$

Quoique fasse les autres joueurs.

L'ensemble des positions dans les quelles i peut garantir γ est désigné par G_γ.
Posons enfin,

$$i(x) = \text{Sup} \left\{ \gamma \mathbin{/} x \in G_\gamma \right\}.$$

la position du jeu étant x, le joueur i pourra garantir des gains supérieurs à i(x).

Alors i(x) est appelé le meilleur gain de i et f_i est sa fonction de meilleur gain ; $\bar{f}_i(x)$ est le meilleur gain fort de i et $\bar{f}_i$ est sa fonction de meilleur gain fort.

N.B. : Si la durée du jeu est fixée, ces deux fonctions coïncident.

III.9. <u>Résolution d'un jeu.</u>

Le théorème fondamental des jeux a pour conséquence l'existence d'une stratégie optimale pour chaque joueur.

L'usage des stratégies mixtes permet au joueur de s'assurer d'un gain déterminé quelle que soit celle utilisée par l'adversaire et ce gain est maximum. Celui-ci est supérieur à la valeur du jeu si l'ennemi utilise une stratégie non optimale.

D'après ce théorème, tout jeu à 2 personnes comprenant un nombre fini de stratégies admet au moins une solution dans laquelle les stratégies optimales de 2 joueurs peuvent être soit toutes les deux mixtes soit l'une mixte et l'autre pure soit encore toutes les deux pures (auquel cas il existe un point d'équilibre).

Nous avons appelé solution d'un jeu, un couple des stratégies optimales $(\bar{i}, \bar{j})$, $\bar{i}$ pour le joueur A et $\bar{j}$ pour le joueur B. La détermination des solutions d'un joueur nécessite un long calcul numérique dépendant du nombre de stratégies dont disposent les deux joueurs ou du nombre d'éléments de la matrice

$$A = (a_i^j) \quad [(1 \leq i \leq n) \text{ et } (1 \leq j \leq m)]$$

En effet, certaines méthodes permettent de trouver une solution unique. Il s'agit de :

- La vérification d'une solution devinée.
- La méthode d'approximations successives.

Et par ailleurs, certaines méthodes permettent de trouver toutes les solutions. Il s'agit de :

- La méthode des sous-matrices.
- La méthode des points fixes.

Pour ce cours, nous allons voir deux de ces méthodes.

III.9.1 **Jeu symétrique**. (Voir T.P.)

III.9.2. **Méthode de vérification d'une solution devinée**. (Voir T.P.)

III.9.3. **Méthodes des sous- matrices**. (Voir T.P.)

III.10. **Exercices.**

Exercice **1**.

Définir un jeu de paiement et le résoudre.

Exercice **2**

Lors d'une guerre, on a pu équiper les chasseurs avec les armements suivants : camions, roquettes, engins pour l'abordage. Ces chasseurs doivent être utilisés contre trois types de bombardiers caractérisés respectivement par une forte puissance de feu et une vitesse réduite, une puissance réduite et une vitesse moyenne ou une grande vitesse sans armes. Déterminer le meilleur type d'armement pour le chasseur et le meilleur modèle de bombardier. On se propose d'établir l'efficacité de chacun des chasseurs contre chacun des bombardiers. Le gain de chaque chasseur sera donc mesuré par un facteur d'efficacité.

Exercice **3**

Trouver la valeur du jeu suivant dont la matrice des gains est

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice **4**

Calculer l'espérance mathématique des gains du joueur A dans un jeu dont la matrice des gains est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si le joueur A adopte la stratégie mixte $X^*=t13,0,0,0,13,13$ et B utilise la stratégie mixte $Y^*=13,0,0,23$.

Exercice **5**

Résoudre le jeu suivant, défini par sa matrice des gains, par la méthode des sous-matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. B. DESCAMPS : « Cours de Recherche Opérationnelle », CNAM, Lille, 2002-2003.

[2]. R. FAURE : « Eléments de la Recherche Opérationnelle », Paris, 1968.

[3]. R. FAURE : « La programmation linéaire appliquée », Que sais-je ? N° 1976, P.U.F, 1979.

[4]. A. ALJ et R. FAURE : « Guide de la Recherche Opérationnelle. », édition Masson, 1985.

[5]. R.L. GRAHAM, B.L. ROTSHILD et J.H. SPENCER: « Ramsey theory », John Wiley & sons, 1980.

[6]. John MAYNARD SMITH: « Evolution and the theory games », Cambridge University Press, 1982.

[7]. Oscar MORGENSTERN, John Von NEUMANN: « The theory of Games and Economic Behavior » 3rd ed. Princeton University Press, 1953.

[8]. ROSEAUX : « Cours de Recherche Opérationnelle », t.3.

[9].ROSEAUX : « Exercices et problèmes résolus de Recherche Opérationnelle, Programmation linéaire et extensions : problèmes », t.3, Masson, Milan Barcelone Bonn, 1991.

[10]. P. TOUGNE : « Jeux sur les graphes », in La mathématique des jeux, Bibliothèques pour la science, Berlin, 1990.

[11]. J. Velu, Méthodes mathématiques pour l'informatique, cours et exercices corrigés. 5ème édition, Dunod, Paris, 2013.