

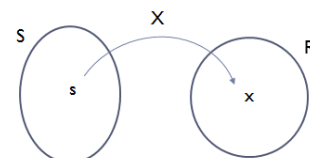
Variable Aleatoria

- Vamos a llamar **variable aleatoria** a una variable cuyo valor sería el resultado de un determinado experimento, si lo hiciéramos.
 - Ejemplo: Si el experimento consiste en arrojar un dado, podemos definir la variable aleatoria X cuyo valor será el número que salga en el dado.
- El conjunto de valores posibles de X es el espacio muestral y en general nos interesará cuál es la probabilidad de que X asuma cada valor.
- Usaremos variables porque nos permiten operar y mostrar determinadas conclusiones.

Definición

Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado a él. Una **variable aleatoria (v.a.)** es una función que asigna a cada elemento de S un número real.

$$X: S \rightarrow R \text{ tal que } X(s) = x$$



Ejemplo 2.1

Se tira una moneda dos veces. $S = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$

Sea la v.a. X : "nro. de caras obtenidas luego de los 2 tiros" entonces

$$X((c, c)) = 2 \quad ; \quad X((c, s)) = X((s, c)) = 1 \quad ; \quad X((s, s)) = 0$$

La imagen de esta v.a. X es $\{0, 1, 2\}$ y se denota R_X

Ejemplo 2.2

Se tira un dado tantas veces como sean necesarias hasta que sale el número 1 por primera vez.

$$S = \{1, 01, \underline{001}, 0001, \dots\}$$



en los dos primeros tiros no salió el número 1 y en el tercer tiro salió el 1

Sea la v.a. Y = "nro. de tiros necesarios hasta que sale el 1 por 1ra. vez" entonces

$$R_Y = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{el rango de } Y \text{ es el conjunto de los números naturales})$$

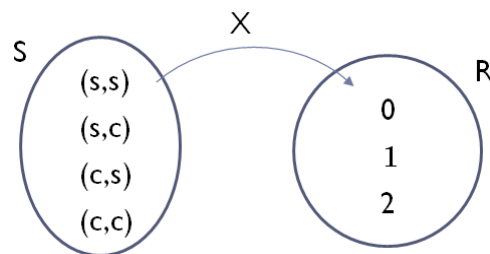
Rango de una Variable Aleatoria

El rango R_X es considerado un nuevo **espacio muestral**, y sus **subconjuntos son eventos**.

Ejemplo: Sea X : "nro. de caras obtenidas luego de tirar una moneda 2 veces"

Ejemplos

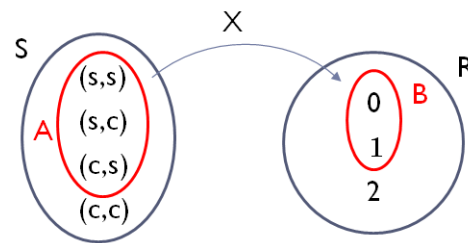
- El evento unitario $\{1\}$ lo anotamos $\{X=1\}$
- El evento $\{X \leq 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$



Eventos Equivalentes

Sea X una v.a. de S en R , y R_X es el rango de X ; dados dos eventos A y B tales que $A \subset S$ y $B \subset R_X$ se dice que A y B **son equivalentes** si $A = \{s \in S; X(s) \in B\}$

Para calcular la probabilidad de un evento B de R_X se busca el evento A en S equivalente a B y entonces $P(B) = P(A)$



$$P(B) = P(X \leq 1) = P(\{(s,s), (c,s), (s,c)\}) = 3/4$$

$$P(B) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$$

Clasificación de Variables Aleatorias

Variable Aleatoria Discreta

- **Aquella tal que la cantidad de valores posibles que puede tomar es finita o infinita pero numerable.**
- En otras palabras, aquella cuyos valores posibles son todos puntos aislados del conjunto de valores posibles.
- Dicho incluso de una tercera forma: aquella tal que si tomamos dos cualesquiera de sus valores posibles, hay entre ellos una cantidad finita de valores posibles.

Variable aleatoria continua

- **Aquella que no es discreta, es decir, aquella tal que la cantidad de valores posibles es infinita y no numerable.**

Ejercicio 2.1

Indique para cada una de las siguientes variables aleatorias si son discretas o continuas:

- El número que sale al tirar un dado.
- La cantidad de caras que salen al tirar 5 monedas.
- La cantidad de accidentes por mes
- Peso de una naranja.
- Diámetro de una arandela.
- El país donde nació una persona.
- La edad de una persona.

Función de Probabilidad

Sea X una v.a. discreta. Su rango $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si es un conjunto finito o $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ si es infinito numerable. A cada x_i se le asigna un número $p(x_i) = P(X = x_i)$ donde

$$a) \ p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$$

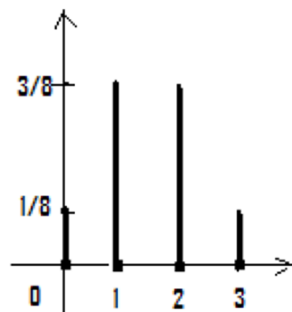
$$b) \ \sum_i p(x_i) = 1$$

La función $p(x)$ se llama **función de probabilidad o de frecuencia de la v.a. X** .

El conjunto de pares $(x_i, p(x_i))$ $i = 1, 2, \dots$ es la **distribución de probabilidad de X** .

Ejemplo de Distribución de Probabilidad

Se tira una moneda normal tres veces, sea la v.a. X : “número de caras obtenidas”



$$p(0) = P(X=0) = P(\{(s,s,s)\}) = 1/8$$

$$p(1) = P(X=1) = P(\{(c,s,s), (s,c,s), (s,s,c)\}) = 3/8$$

$$p(2) = P(X=2) = P(\{(c,c,s), (c,s,c), (s,c,c)\}) = 3/8$$

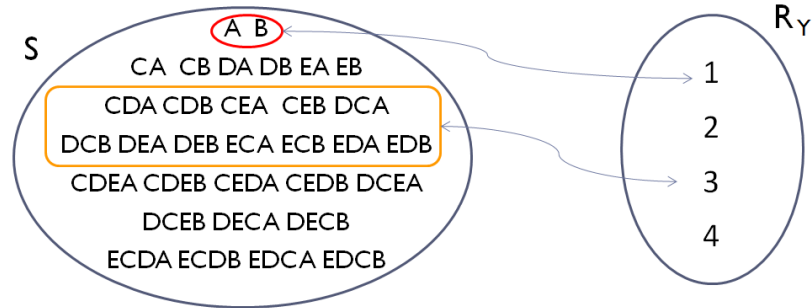
$$p(3) = P(X=3) = P(\{(c,c,c)\}) = 1/8$$

Ejemplo 2.3

De cinco dadores de sangre, A, B, C, D, E, los dos primeros tienen sangre tipo O+. Se analizan en orden aleatorio 5 muestras, una de cada individuo, hasta que se identifica un individuo O+.

$S = \{ A, B, CA, CB, DA, DB, EA, EB, CDA, CDB, CEA, CEB, DCA, DCB, DEA, DEB, ECA, ECB, EDA, EDB, CDEA, CDEB, CEDA, CEDB, DCEA, DCEB, DEC, A, DECB, ECDA, ECDB, EDCA, EDCB \}$

Sea la v.a. $Y = \text{"nro. de análisis necesarios para identificar un individuo O+"}$



Hallar la distribución de probabilidad de Y

$$p(1) = P(Y=1) = P(\text{se analiza primero A o B}) = 2/5 = 0.4$$

$$p(2) = P(Y=2) = P(\text{primero C,D o E y luego A o B}) =$$

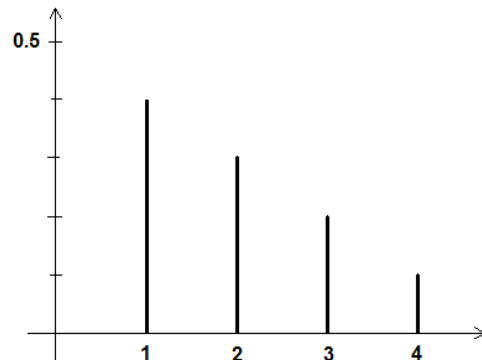
$$P(\text{primero C,D o E}) * P(\text{luego A o B} \mid \text{primero C,D o E}) = 3/5 * 2/4 = 6/20 = 0.3$$

$$p(3) = P(Y=3) = 3/5 * 2/4 * 2/3 = 2/10 = 0.2$$

$$p(4) = P(Y=4) = 3/5 * 2/4 * 1/3 * 2/2 = 1/10 = 0.1$$

$$p(y) = 0 \text{ si } y \neq 1, 2, 3, 4$$

y	1	2	3	4
p(y)	0.4	0.3	0.2	0.1



Distribución de Probabilidad de Y

Ejercicio 2.2

Un taller automotriz que se especializa en ajustes de motor sabe que el 45% de los ajustes se efectúa en autos de 4 cilindros, 40% en autos de 6 cilindros y 15% en autos de 8 cilindros.

Sea $X = \text{"nro. de cilindros del siguiente auto al cual se le realiza ajuste de motor"}$

a) Indicar la distribución de probabilidad de X

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente auto ajustado tenga más de seis cilindros?

Distribución uniforme discreta

Sea X una v.a. discreta con rango finito $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

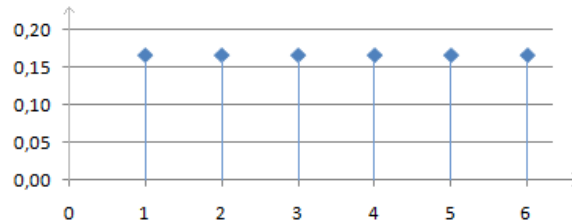
Si $P(X = x_i) = 1/n$ para cada i entonces se dice que X tiene **distribución uniforme discreta**.

Ejemplo :

Se tira un dado normal. Sea X : "número que queda en la cara superior"

La función de distribución de X es

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



X es **uniforme discreta** en el intervalo natural $[1,6]$

Función de Distribución Acumulada

Sea X una v.a. con rango R_X . Se define la **función de distribución acumulada de X** (*F.d.a* de X) como

$$F(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < \infty$$

Si X es una v.a. discreta

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad -\infty < x < \infty$$

Ejemplo: Se tira una moneda normal tres veces, sea la v.a. X : "número de caras obtenidas"

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Primero se determina el valor de $F(x)$ para cada valor de R_X

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = p(0) = 1/8$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0 \text{ o } 1) = p(0) + p(1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$$

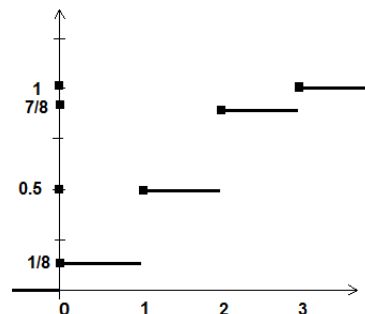
$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3) = 1$$

Para cualquier valor intermedio se considera el entero menor

Ejemplo : $F(0.7) = P(X \leq 0.7) = P(X \leq 0) = 1/8$

$$F(2.999) = P(X \leq 2.999) = P(X \leq 2) = 7/8$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



La F.d.a. de X es una función **escalonada**, los puntos de “salto” coinciden con los puntos del rango de X , y la magnitud del salto en x_i es igual a $P(X=x_i)$

Ejercicio 2.3

Se lanzan dos dados no cargados de manera independiente. Sea M = “el nro. máximo de los dos lanzamientos”. Es decir que $M(1,5)=5$; $M(3,3)=3$, etc.

- Cuál es la distribución de probabilidad de M ?
- Determine la fda de M y trace su gráfica

Obteniendo la fdp de X a partir de su Función de Distribución Acumulada

En general, si X es una v.a. discreta cualquiera, su F.d.a será una función escalonada.

Además, si x_1, x_2, \dots, x_n son los valores del rango de X ordenados de menor a mayor entonces

$$P(X=x_1) = F(x_1)$$

$$P(X=x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad i = 2, \dots, n$$

Dados dos números a y b con $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = P(X=a \text{ o } a+1 \text{ o } \dots \text{ o } b) = F(b) - F(a-1)$

\therefore Se puede obtener la función de distribución de X a partir de su F.d.a.

Ejemplo 2.4

Sea X = “nro. de días de incapacidad que toma cierto empleado elegido al azar durante determinado año”. Si el nro. máximo de días es 14, $R_X = \{0, 1, \dots, 14\}$

Supongamos que

$$F(0)=0.58 \quad F(1)=0.72 \quad F(2)=0.76 \quad F(3)=0.81 \quad F(4)=0.88 \quad F(5)=0.94$$

Calcular

$$P(2 \leq X \leq 5) =$$

$$P(X = 3) =$$

$$P(2 < X \leq 5) =$$

Esperanza de una v.a. discreta

Sea X una v.a. discreta con rango R_X . La **esperanza, valor medio o valor esperado de X** , $E(X)$ se define como

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

Otra notación usual es μ_X o μ

Ejemplo 2.5

Sea X = “el número de cursos en los que se inscribe un alumno de un máximo de 7 cursos”

X	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0.01	0.03	0.13	0.25	0.39	0.17	0.02

Se desea calcular el nro. promedio de cursos en los que se inscribe un alumno

$$E(X) =$$

Ejemplo 2.6

Una tienda compró tres máquinas a 500\$ c/u para venderlas a 1000\$ c/u. El fabricante ofreció volver a comprarlas por 200\$ si no se venden. Sea X = "el nro. de máquinas vendidas" y sea $Y = h(X)$ = "la ganancia obtenida por la venta", **calcular $E(Y)$** suponiendo que

X	0	1	2	3
p(x)	0.1	0.2	0.3	0.4

En primer lugar veamos quien es Y

$$Y = \text{ingreso} - \text{costo} = 1000X + 200(3-X) - 1500 = 800X - 900$$

Por lo tanto

Y	-900	-100	700	1500
p(y)	0.1	0.2	0.3	0.4

$$E(Y) = (-900)*0.1 + (-100)*0.2 + 700*0.3 + 1500*0.4 = 700\$$$

Esperanza de una Función

Si X es una v.a. discreta con rango R_X y distribución de probabilidad $p(x)$, entonces la esperanza de cualquier función $h(X)$ es igual a

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)p(x)$$

Propiedades de la Esperanza

Habitualmente $h(X)$ es una función lineal de X , es decir, de la forma $aX+b$. En este caso puede calcular $E(h(X))$ directamente a partir de $E(X)$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Demostración

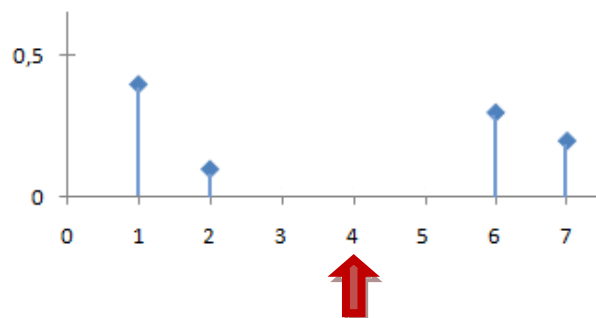
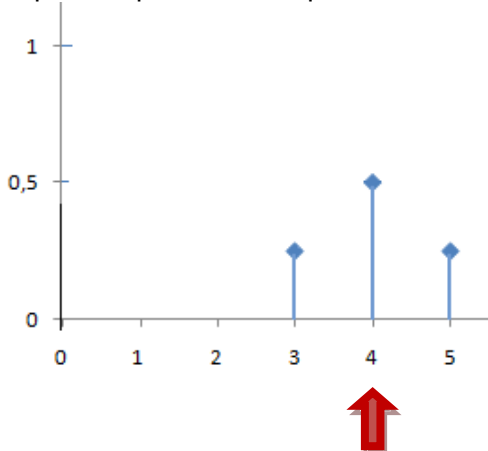
$$E(aX + b) = \sum_{x \in R_X} (ax + b)p(x) = \sum_{x \in R_X} axp(x) + \sum_{x \in R_X} bp(x) = a \sum_{x \in R_X} xp(x) + b \sum_{x \in R_X} p(x) = aE(X) + b$$

En el ejemplo anterior $h(X) = 800X - 900$ y $E(X) = 2$, luego $E(h(X)) = 800 * 2 - 900 = 700\$$

Varianza de una variable aleatoria

La varianza de una v.a. X busca medir la dispersión o variabilidad de los valores de X respecto de la media.

Por ejemplo, estas dos distribuciones tienen el mismo valor esperado pero la de la derecha tiene mayor dispersión que la de la izquierda.



Definición: Sea X una v.a. discreta con rango R_X , función de distribución de probabilidad $p(x)$ y esperanza $E(X)=\mu$, la **varianza de X** que anotamos $V(X)$, σ^2 o σ_X^2 es

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 p(x)$$

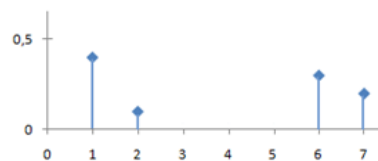
La **desviación estándar** de X es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Ejemplo 2.7: Calcular la varianza de estas distribuciones

X	3	4	5
p(x)	0.25	0.5	0.25



y	1	2	6	7
p(y)	0.35	0.11	0.35	0.19



Fórmula abreviada para obtener $V(X)$

Si se quiere reducir la cantidad de operaciones necesarias para obtener $V(X)$ puede utilizarse la siguiente expresión

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p(x) \right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dem

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 p(x) = \sum_{x \in R_X} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) \cdot p(x) \\ &= \sum_{x \in R_X} x^2 p(x) - \sum_{x \in R_X} 2\mu x p(x) + \sum_{x \in R_X} \mu^2 p(x) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8

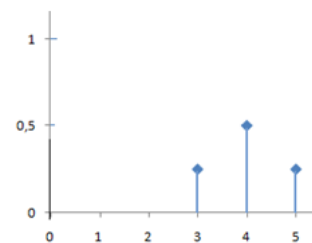
Calcular nuevamente la varianza de X usando la fórmula abreviada $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X)=4$$

$$E(X^2)=3^2 \cdot 0.25 + 4^2 \cdot 0.5 + 5^2 \cdot 0.25 = 2.25 + 8 + 6.25 = 16.5$$

$$V(X) = ?$$

X	3	4	5
p(x)	0.25	0.5	0.25



Propiedades de la Varianza

Sea X una v.a. discreta con rango R_X y función de distribución de probabilidad $p(x)$, la varianza de cualquier función $h(X)$ es

$$V(h(X)) = \sum_{x \in R_X} (h(x) - E(h(X)))^2 p(x)$$

Si $h(X)$ es una función lineal entonces

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \gamma \quad \sigma_{aX+b} = \sqrt{V(aX + b)} = |a| \sigma_X$$

Variables Aleatorias discretas importantes

Vamos a ver las siguientes distribuciones : Distribución Binomial, Distribución Geométrica, Distribución Binomial negativa, Distribución Hipergeométrica y Distribución de Poisson

Experimento Binomial

Hay varios experimentos que cumplen con estos requerimientos

- El experimento consiste en una secuencia de n experimentos más pequeños llamados ensayos, donde n se fija de antemano.
- Cada ensayo produce uno de sólo dos resultados posibles que se interpretan como éxito o fracaso.
- Los ensayos son independientes; es decir, que el resultado de uno no influye en los otros.
- La probabilidad de éxito es la misma de un ensayo a otro y se denota como p .

Ejemplo de Experimento Binomial

Se eligen al azar tres artículos de una línea de producción que pueden ser Defectuosos (D) o no defectuosos (N)

$$S = \{NNN, DNN, NDN, NND, DDN, DND, NDD, DDD\}$$

Suponga que $P(D) = 0.2$ y $\therefore P(N) = 0.8$.

Estas probabilidades son iguales para cada artículo y la clasificación de un artículo es independiente de la de otro.

Ejemplos

Decir si los siguientes experimentos son binomiales

- Se tira una moneda 4 veces en forma sucesiva e independiente, y se observa en cada tiro si sale cara o no sale cara.
 - ε sería el experimento "tirar una moneda".
 - A sería el evento "sale cara".
 - ε se repite en forma sucesiva e independiente $n = 4$ veces.
 - $P(A) = p$ es la misma en cada tiro.
- Se tiene una urna con 15 bolillas blancas y 5 verdes. Se extraen al azar con reemplazo tres bolillas y se observa si la bolilla extraída es blanca.
 -
 -
 -
 -
- Se tiene una urna con 15 bolillas blancas y 5 verdes. Se extraen al azar sin reemplazo tres bolillas y se observa si la bolilla extraída es blanca.
 - Si se extraen las bolillas **sin reemplazo entonces el experimento no es binomial**, pues **falla la independencia**:
 - Sea A_i : "se extrae bolilla blanca en la i -ésima extracción" entonces

$$P(A_1) = \frac{15}{20}$$

$$\begin{array}{ccc} P(A_2 | A_1) & \neq & P(A_2) \\ \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$$

$$P(A_2) = P(A_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | A_1^c)P(A_1^c) = \frac{14}{19} * \frac{15}{20} + \frac{5}{19} * \frac{5}{20} = \frac{15}{20}$$

Variable Aleatoria Binomial

En la mayoría de los experimentos binomiales, interesa el número total de éxitos, más que saber exactamente cuáles repeticiones produjeron los éxitos

Sea la v.a. X : “número de éxitos en las n repeticiones de ε ” (es lo mismo que el nro. de veces que ocurrió A), decimos que **X es una v.a. binomial** con parámetros n y p y lo simbolizamos como $X \sim B(n, p)$

Veamos cual es la distribución de probabilidad de X usando un ejemplo

Ejemplo 2.12

Se eligen al azar tres artículos de una línea de producción que pueden ser Defectuosos (D) o no defectuosos (N)

$$S = \{NNN, DNN, NDN, NND, DDN, DND, NDD, DDD\}$$

Suponga que $P(D) = 0.2$ y $\therefore P(N) = 0.8$. Estas probabilidades son iguales para cada artículo y la clasificación de un artículo es independiente de la de otro.

Sea $X =$ “nro. de artículos defectuosos encontrados”

x	0	1	2	3
$p(x)$				

Distribución Binomial

Si X es una v.a. **binomial** con parámetros n y p , es decir que $X \sim B(n, p)$, entonces

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Ejercicio 2.4

Supongamos que la lámpara del cañón tiene una probabilidad de 0.2 de funcionar más de 2000 hs. Si probamos 20 cañones ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k de ellos funcionen más de 2000 hs, $k = 0, 1, 2, \dots, 20$?

$$P(X = k) = \binom{20}{k} (0.2)^k (0.8)^{20-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$P(X=0) = 0.012 \quad P(X=6) = 0.109$$

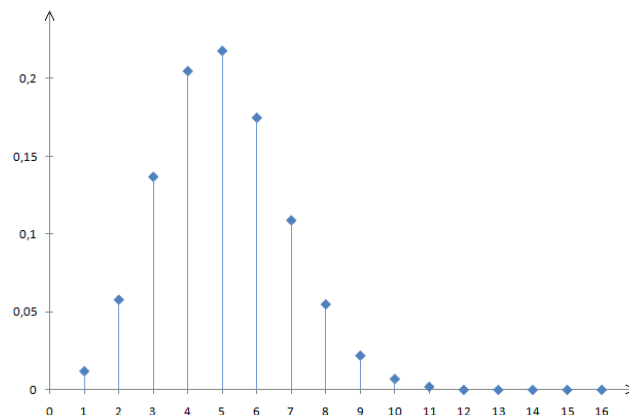
$$P(X=1) = 0.058 \quad P(X=7) = 0.055$$

$$P(X=2) = 0.137 \quad P(X=8) = 0.022$$

$$P(X=3) = 0.205 \quad P(X=9) = 0.007$$

$$P(X=4) = 0.218 \quad P(X=10) = 0.002$$

$$P(X=5) = 0.175 \quad P(X=k)=0 \text{ con } k \geq 11$$



Ejercicio 2.5

Se arroja una moneda cargada 4 veces en forma sucesiva e independiente y se observa en cada tiro si sale cara o no sale cara. Suponga que $P(\text{"sale cara"})=0.25$. Calcular la probabilidad de obtener:

a) exactamente una cara

b) a lo sumo una cara

Ejemplo 2.13

Supongamos que el 20% de todos los ejemplares de un texto en particular fallan en una prueba de resistencia a la encuadernación. Se seleccionan 15 ejemplares al azar.

Sea la v.a. X : "número de ejemplares que fallan en la prueba entre los 15 seleccionados"

a) ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 8 fallen en la prueba?

Tenemos que $X \sim B(?, ?)$

$$P(X \leq 8) =$$

b) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 8 fallen en la prueba?

$$X \sim B(,)$$

$$P(X=8) = F(8) - F(7) =$$

Esperanza y Varianza

Sea $X \sim B(n, p)$ entonces $E(X) = n p$ y $V(X) = n p (1-p)$

Ejercicio 2.7

Si el 75% de las compras en cierta tienda se hacen con tarjeta de crédito y X es el número de compras hechas con tarjeta de crédito entre 10 compras elegidas al azar $\therefore X \sim B(10, 0.75)$

Calcular $E(X)$ y $V(X)$

$$E(X) = n * p =$$

$$V(X) = n * p * (1-p) =$$

Distribución Geométrica

Consideremos el experimento ε . Sea A un evento asociado a ε . Supongamos que $P(A)=p$ y $\therefore P(A^c)=1-p$

- Se repite el experimento ε hasta que ocurre A .
- Las repeticiones son independientes.
- Además, $P(A)=p$ para todas las repeticiones.
- Sea la v.a. X ="el nro.de repeticiones de ε hasta que ocurre A por primera vez inclusive."

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1, 2, \dots$$

Decimos que X tiene distribución geométrica y lo simbolizamos $X \sim G(p)$

Ejemplo 2.14

La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo (S.O.) se descomponga en determinado día es de 0.1. Determinar la probabilidad de que la máquina se descomponga por primera vez en el duodécimo día, después de la instalación del S.O.

Solución :

Sea X: “nro. de días hasta que la computadora se descompone por primera vez” $X \sim G(0.1)$

- Se pide calcular la $P(X = 12)$
- $P(X = 12) = ?$

Distribución Geométrica

Si $X \sim G(p)$ entonces $P(X=k+1) = (1-p) P(X=k)$

$$\text{Además} \quad F(X) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{[x]} P(X=k) = \begin{cases} 1 - (1-p)^{[x]} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde $[x]$ indica parte entera de x

Esperanza y Varianza

Si X tiene una distribución geométrica $G(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución Binomial Negativa

Sea r un entero positivo. Consideremos el experimento ε . Sea A un evento asociado a ε . Supongamos que $P(A)=p$. Se repite el experimento ε hasta que ocurre A por r -ésima vez inclusive. Las repeticiones son idénticas e independientes. En cada repetición observamos si ocurre A o no ocurre A. Además, $P(A)=p$ para todas las repeticiones.

Note que ahora se fija la cantidad de éxitos y se permite que el número de ensayos sea aleatorio.

Sea la v.a. X = “el nro. de repeticiones de ε hasta que ocurre A por r -ésima vez inclusive.”

El rango de X es el conjunto $R_X = \{r, r+1, r+2, r+3, \dots\}$

Si X tiene una distribución **BN(r, p)**, el evento $\{X = k\}$ es equivalente a $r-1$ éxitos en los primeros $k-1$ ensayos y un éxito en el ensayo nro. k

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad \text{con } k = r, r+1, r+2, \dots$$

Ejemplo 2.15

En una prueba de fuerza de soldadura, 80% de las pruebas da como resultado ruptura de soldadura, mientras que otro 20% da ruptura de la viga.

Sea la v.a. X : “número de pruebas hasta la tercera ruptura de la viga inclusive”.

¿Cuál es la distribución de X ?

Determinar la $P(X = 8)$

Esperanza y Varianza

Si $X \sim BN(r, p)$ entonces

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Distribución Hipergeométrica

Dada una población finita o conjunto de N objetos o individuos. Clasificamos a los objetos de la población en dos categorías. Hay M objetos de una categoría y $N-M$ de la otra categoría.

- Se suele decir que tenemos M “éxitos” y $N-M$ “fracasos”.

Se extraen al azar y sin reemplazo n objetos de dicha población.

- Es decir se extrae una muestra de n objetos de la población, de manera tal que es igualmente probable que se seleccione cada subconjunto de tamaño n .

Consideramos la v.a. X : “número de éxitos en la muestra extraída”

Se dice que X tiene una distrib. hipergeométrica con parámetros n, M y N $\therefore X \sim H(n, M, N)$

Si $X \sim H(n, M, N)$ entonces

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con } 0 \leq k \leq M \quad \text{y} \quad 0 \leq n-k \leq N-M$$

Estas condiciones son equivalentes a $\max(0, n - N + M) \leq k \leq \min(n, M)$

Ejemplo 2.16

De 50 edificios en un parque industrial, 12 no cumplen el código eléctrico. Si se seleccionan aleatoriamente 10 edificios para inspeccionarlos, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los diez no cumplan el código?

Sea la v.a. X : “número de edificios seleccionados que violan el código”, entonces $X \sim H(10, 12, 50)$. Se pide calcular la $P(X = 3)$

Ejercicio 2.8

Un cargamento contiene 40 elementos. Se seleccionará de forma aleatoria y se probará 5 elementos.

Si dos o más están defectuosos, se regresará el cargamento.

- a) Si de hecho el cargamento contiene cinco elementos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sean aceptados?

- b) Si de hecho el cargamento contiene diez elementos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que no sean aceptados?

Esperanza y Varianza

Si $X \sim H(n, M, N)$ entonces

$$E(X) = \frac{nM}{N} \qquad V(X) = n \frac{M}{N} \left(\frac{N-M}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Distribución Hipergeométrica aproximada

La distribución hipergeométrica $H(n, M, N)$ se aproxima a una distribución binomial $B(n, p)$ cuando

- el tamaño de la población N y el número de éxitos M crecen de tal manera que

$$\frac{M}{N} \rightarrow p$$

- n es chico comparado con N

Ejemplo de aproximación de la distrib. Hipergeométrica utilizando una Binomial

Si en el ejemplo 2.16 fueran 100 edificios, la v.a. X : “nro.de edificios seleccionados que violan el código” tendría una distribución **$H(10, 12, 100)$**

$$P(X=3) = \frac{\binom{12}{3} \binom{100-12}{10-3}}{\binom{100}{10}} = 0.0807$$

X puede aproximarse usando **$B(10, 12/100)$**



$$p = \frac{M}{N} = \frac{12}{100}$$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} 0.12^3 (1-0.12)^7 = 0.0847$$

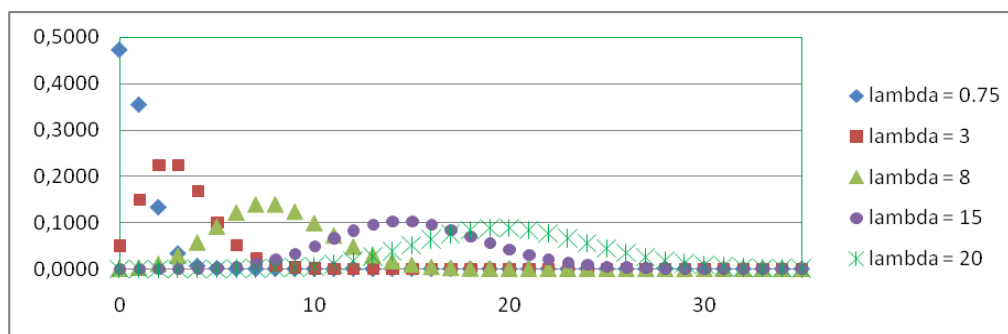
Distribución de Poisson

- La **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta.
- Expresa la probabilidad de un número k de eventos ocurriendo en un intervalo fijo si estos eventos ocurren con una tasa media conocida, λ y la ocurrencia de cada evento es independiente de la ocurrencia del anterior.

Una v.a. X con rango $R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ se dice que tiene **distribución de Poisson con parámetro λ** , si para algún $\lambda > 0$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

(La letra **e** representa la base del sistema de logaritmos naturales. Su valor numérico aproximado es **2.71828**)



Notar que para valores de λ “pequeños” la distribución es asimétrica, a medida que λ aumenta, la distribución tiende a ser cada vez más simétrica

Ejemplo 2.17

Sea X la cantidad de criaturas de cierto tipo capturadas en una trampa durante determinado período. Supóngase que X tiene una distribución de Poisson con $\lambda = 4.5$.

¿Cuál es la probabilidad de que una trampa contenga exactamente 5 criaturas?

$$P(X=5) =$$

Esperanza y Varianza

$$\text{Si } X \sim P(\lambda) \text{ entonces } E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$$

Aplicaciones de la Distribución de Poisson

- **Aproximación a una v.a. binomial**
 - Si se observan los gráficos de las distribuciones binomial y de Poisson se encontrarán algunas similitudes.
 - Veremos en que condiciones puede utilizarse una v.a. con distribución de Poisson para aproximar una binomial.
- **Proceso de Poisson**
 - Una aplicación importante de la distribución de Poisson se presenta en relación con el acontecimiento de eventos de un tipo particular en el tiempo. Ej: personas ingresando en un establecimiento en particular, o pulsos radiactivos registrados por un contador Geiger, o automóviles pasando por un cruce determinado.
 - En estos casos se utiliza una v.a. con distribución de Poisson.

Aproximación a una v.a. binomial

La v.a. Poisson tiene un gran rango de aplicaciones, una de ellas es la **aproximación para una v.a. binomial** con parámetros n y p cuando n es grande y p es pequeño de manera tal que $np \rightarrow \lambda$.

Específicamente, sea $X \sim B(n, p)$ y sea $\lambda = np$, entonces

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Es decir cuando n es grande, p chico y np es “moderado” entonces la v.a. binomial con parámetros n y p tiene una distribución que se **aproxima a la de una Poisson con parámetro $\lambda = np$** .

Ejemplo 2.18

Supongamos que la probabilidad de que un artículo producido por cierta máquina sea defectuoso es 0.1. Hallar la probabilidad que una muestra de 10 artículos contenga a lo sumo un defectuoso.

Sea X : "número de artículos defectuosos en la muestra".

Podemos asumir que $X \sim B(10, 0.1)$. La probabilidad **exacta pedida** es

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10-0} + \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^{10-1} = 0.7361$$

La **aproximación de Poisson** da

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx e^{-1} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-1} \frac{\lambda^1}{1!} = e^{-1} + e^{-1} = 0.7358$$

Proceso de Poisson

- Es un proceso que consiste en considerar un continuo, en el cual ocurren eventos.
 - Si por ejemplo consideramos la cantidad de fallas que una máquina tiene en 3 horas. El continuo es el tiempo y los eventos son las fallas de la máquina.
 - Otro ejemplo puede ser considerar la cantidad de muertes por determinada enfermedad en un año.
- El continuo al que nos referimos no tiene necesariamente que ser tiempo.
 - Por ejemplo podemos considerar un rollo de tela de 100 metros de longitud y contar la cantidad de manchas en ese tramo.
 - En ese ejemplo, el continuo es la tela y los eventos las manchas.

Se definen las siguientes variables

- t : La longitud de un intervalo continuo que va a observarse
- k : cantidad de eventos que hay en ese intervalo.
- λ : cantidad esperada de eventos por unidad de tiempo (intensidad)

Ejemplo: Si una máquina falla habitualmente en promedio 2 veces por hora y la controlamos durante determinadas 3 horas y falla 7 veces, tenemos: $t = 3$ hs ; $k = 7$ eventos ; $\lambda = 2$ eventos/hora.

Generalmente conocemos el valor de λ y entonces nos preguntamos cuántos eventos obtendremos en una determinada cantidad de tiempo, o cuánto tiempo tendremos que esperar hasta observar una determinada cantidad de eventos.

De esta forma obtenemos 2 distribuciones:

- **Poisson:** consiste en preguntar por la cantidad de eventos en el período t . Es decir, dado t , calcular la distribución de k .
- **Gamma:** consiste en preguntar por la cantidad de tiempo necesario hasta observar k eventos. Es decir, dado k , calcular la distribución de t .

Dado un proceso de Poisson con parámetros λ y t ; la v.a. X : "número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de longitud t ", tiene distribución Poisson con parámetro λt . Específicamente

$$P(X = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Suponga que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson, con tasa $\lambda=8$ aviones por hora. Es decir que el número de llegadas durante un período de t horas es una v.a. Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

- ### Ejercicio 2.9

- ¿Cuál es la probabilidad de tener 2 defectos en un m^2 ?
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un defecto en 10 m^2 ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defectos en 20 m^2 ?
- Supongamos que el número de defectos está relacionado con la máquina que produce la tela, debido a desperfectos de la máquina el número de defectos varía en ciertos tramos del rollo. ¿Se puede asumir que el número de defectos sigue una distribución de Poisson?