Intervalos de confianza

- Se ha visto como construir a partir de una muestra aleatoria un estimador puntual de un parámetro desconocido.
- A veces resulta más conveniente dar un ***intervalo de valores posibles del parámetro desconocido,*** de manera tal que dicho intervalo contenga al verdadero parámetro con determinada probabilidad.

Intervalo de confianza

- A partir de una muestra aleatoria se construye el intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ donde los extremos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estadísticos, tal que

$$P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 1 - \alpha$$

Parámetro desconocido a estimar

valor real entre cero y uno dado de antemano

Ejemplo 8.1

- Si α=0.05, se quiere construir un intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ tal que

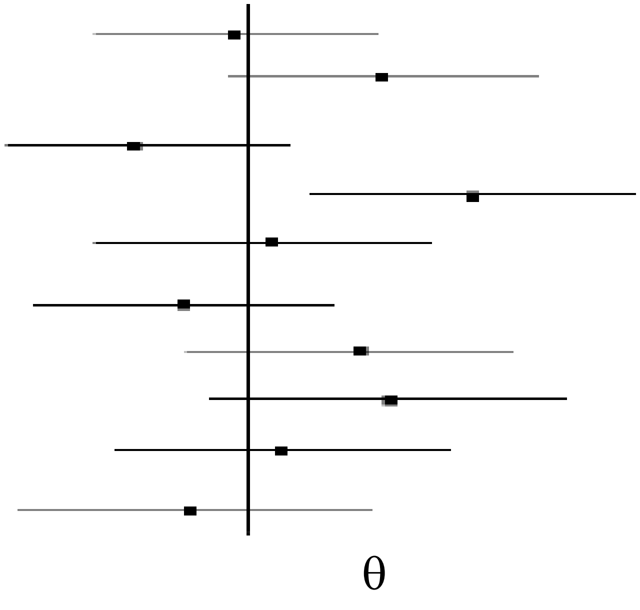
$$P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 0.95$$

o escrito de otra forma

$$P\left(\hat{\Theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\Theta}_2\right) = 0.95$$

Interpretación $P\left(\hat{\Theta}_1 \le \theta \le \hat{\Theta}_2\right) = 0.95$

- Si medimos la muestra 100 veces tendremos 100 intervalos distintos de los cuales aprox.5 no contendrán al verdadero parámetro.



- Al valor $1-\alpha$ se lo llama ***nivel de confianza*** *del intervalo*.
- También se suele definir como nivel de confianza al $100(1-\alpha)\%$.

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocido.
- Se quiere construir un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$. Supongamos $\alpha=0.05$

PASO 1	PASO 2	PASO 3
Tomamos un estimador puntual de μ.	Con el estimador y μ construimos el estadístico Z de distribución conocida	Obtener el intervalo a partir de la distribución de Z

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 1**
  - Tomamos un estimador puntual de μ.
  - Sabemos que

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

es un estimador con buenas propiedades

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 2**
  - A partir de $\hat{\mu} = \overline{X}$ construimos el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

  - Note que Z contiene al verdadero parámetro μ y que tiene distribución N(0,1)

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 3**
  - Como conocemos la distribución de Z podemos hallar el valor *z* tal que

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0.95$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0.95$$

$$\therefore \quad \Phi(z) = 0.975 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 1.96}$$

- Por lo tanto

$$P(-1.96 \le Z \le 1.96) = P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le 1.96 \right) = 0.95$$

- Sólo resta despejar μ para tener algo de la forma

$$P\left(\hat{\Theta}_1 \le \mu \le \hat{\Theta}_2\right) = 0.95$$

- El intervalo pedido es $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$

- Multiplicando por ${}^{\sigma}\!/\!_{\sqrt{n}}$ obtenemos

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96 \quad \equiv \quad -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Multiplicando por ${}^{\sigma}\!/\!_{\sqrt{n}}$ obtenemos

$$-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96 \quad \equiv \quad -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Restando $\bar{X}$

$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} \le -\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}$$

- Multiplicando por $\sigma/\sqrt{n}$ obtenemos

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96 \quad \equiv \quad -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Restando $\bar{X}$

$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} \leq -\mu \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}$$

- Multiplicando por -1

$$\bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Es decir

`

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Es decir

`

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Por lo tanto

$$P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 0.95$$

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- Es decir que el intervalo de confianza para μ que tiene nivel de confianza 0.95 o 95% es

$$\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Repetiremos el proceso para un nivel de confianza 1-α

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 1**
  - Dada una muestra (X_1, X_2, …, X_n), partimos de la esperanza muestral

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  - Sabemos que es un estimador insesgado y consistente de μ.

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 2**
  - Construimos el estadístico Z llamado **pivote**

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

  - Z cumple con las condiciones para ser pivote: su expresión depende de μ pero su distribución no.

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- **Paso 3**
  - Para construir el intervalo de confianza al nivel de confianza 1- α partiendo del pivote *Z, comenzamos* por plantear la ecuación

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$$

donde la incógnita es el número real z.

- Reemplazando la v.a. Z por su expresión

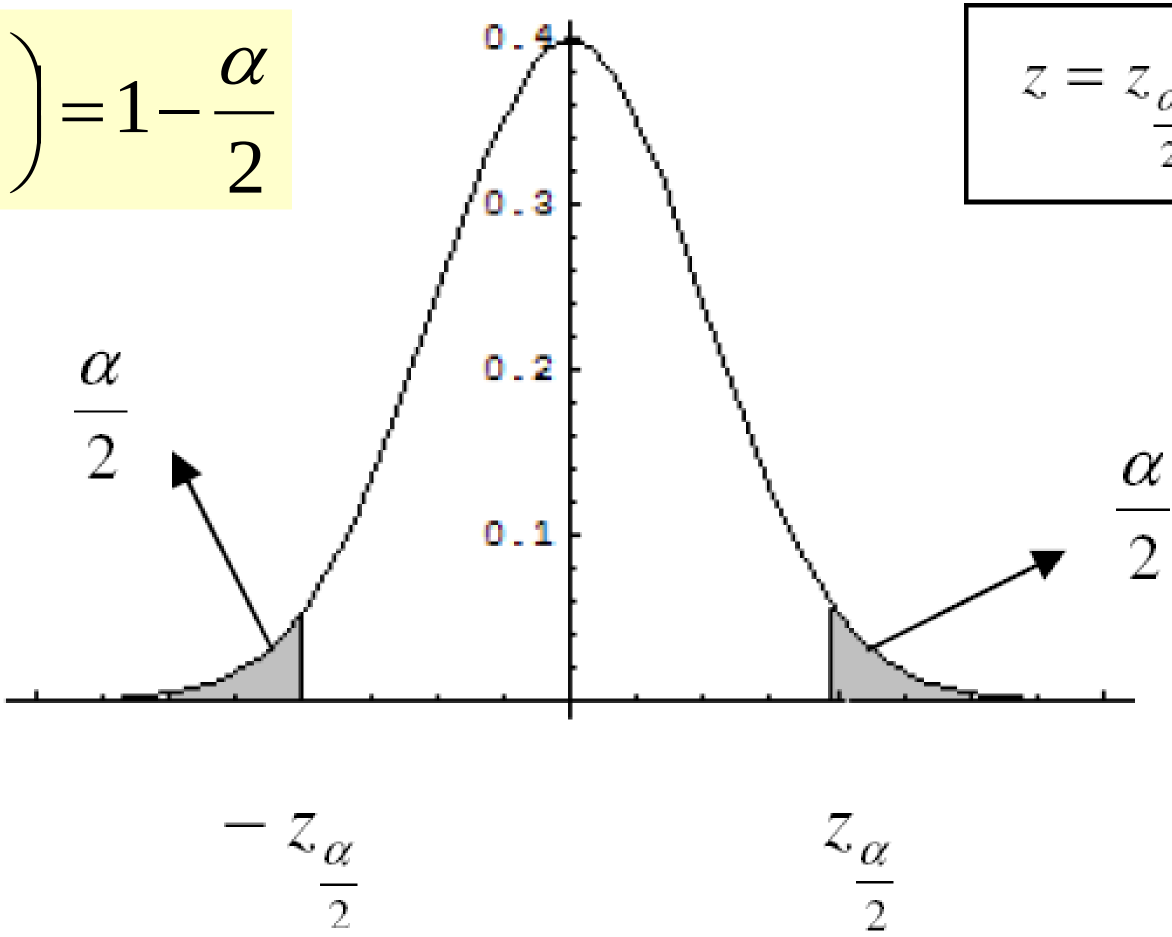
$$P\left(-z \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z \right) = 1-\alpha$$

- Despejamos μ como hicimos en el ejemplo anterior

$$P\left(\underbrace{\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1} \leq \mu \leq \underbrace{\overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2} \right) = 1-\alpha$$

$$F\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$z = z_{\frac{\alpha}{2}}$$



$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza conocida

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ conocido, un intervalo de confianza para μ de un nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ejemplo 8.2

- La resistencia a la compresión del concreto está distribuida aprox.de manera normal, con varianza 1000 (psi)^2. Al tomar una muestra aleatoria de 12 especímenes, se tiene que

$$\bar{x} = 3250 \text{ psi.}$$

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la resistencia a la compresión promedio.

b) Idem a) para un intervalo de confianza del 99%.

- Compare el ancho de los intervalos de a) y b).

Ejemplo 8.2

- La v. a. de interés es X_i: *"resistencia a la compresión del concreto en un espécimen i"*
- *n = 12 especímenes.*
- $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ con i=1,2,…,12 con $\sigma^2 = 1000$

a) Queremos un intervalo de confianza de nivel 95% por lo tanto α=0.05 de la forma

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ejemplo 8.2

$\alpha = 0.05$

- Buscamos en la tabla de la normal estándar el valor de

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$F\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Z > z_{0.025}) = 0.025$$

Ejemplo 8.2

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

- Reemplazando

$$\left(3250 - 1.96 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} ; 3250 + 1.96 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \right)$$

$$(3232.10773 ; 3267.89227)$$

Ejemplo 8.2

b) Repetimos el proceso para α=0.01

$$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$$

$$P(Z > z) = 0.005$$

Ejemplo 8.2

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Reemplazando

$$\left(3250 - 2.58\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} ; 3250 + 2.58\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}\right)$$

$$\left(3226.44793 ; 3273.55207\right)$$

Ejemplo 8.2

- La longitud del intervalo en a) es: 35.78454
- La longitud del intervalo en b) es: 47.10414

- Notar que la seguridad de que el verdadero parámetro se encuentre en el intervalo hallado es mayor en el intervalo b) que en el a), pero la longitud del intervalo b) es mayor que la del intervalo a).

Precisión de la estimación

- Al aumentar el nivel de confianza se perdió ***precisión en la estimación***, *ya que a menor longitud* hay mayor precisión en la estimación.
- Longitud del intervalo

$$L = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si n y σ están fijos, a medida que α disminuye, $z_{\alpha/2}$ aumenta y por lo tanto *L* aumenta.

Precisión de la estimación

- Al aumentar el nivel de confianza se perdió ***precisión en la estimación****, ya que a menor longitud* hay mayor precisión en la estimación.
- Longitud del intervalo

$$L = 2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si α y σ están fijos, a medida que *n* aumenta, *L* disminuye.

$$L = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 8.3

- ¿Qué tamaño *n de* muestra se necesita para que el intervalo tenga nivel de confianza 99% y longitud la mitad de la longitud del intervalo hallado en a)?

$$L = 2z_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

Ejemplo 8.3

$$L = 2z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

- Reemplazando

$$L = 2 * 2.58 * \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

- Despejando

$$n \geq 83.170$$

$\therefore$ Se necesitan 84 especímenes

Elección del tamaño de la muestra

- La fórmula general para el tamaño de la muestra *n* necesario para asegurar una extensión de intervalo ***l*** es

$$n = \left(2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{l} \right)^2$$

Precisión del estimador

- Si estimamos puntualmente al parámetro μ con $\bar{X}$ *estamos cometiendo un error en la estimación* menor o igual a

$$\frac{L}{2} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

que se conoce como ***precisión del estimador***

Ejemplo 8.4

- Se estima que el tiempo de reacción a un estímulo de cierto dispositivo electrónico está distribuido normalmente con desviación estándar de 0.05 segundos.
- ¿Cuál es el número de mediciones temporales que deberá hacerse para que la confianza de que el error de la estimación de la esperanza no exceda de 0.01 sea del 95%?

Ejemplo 8.4

- Nos piden calcular n tal que

$$\frac{L}{2} = \boxed{z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.01}$$

con α=0.05

$$z_{0.025} = 1.96$$

$$n \geq \left(1.96\frac{0.05}{0.01}\right)^2 = (1.96 * 5)^2 = 96.04$$

$$\therefore \quad n = 97$$

Precisión del estimador

- El intervalo

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

proporciona buenos resultados para muestras tomadas de una población normal o para muestras de tamaño **n≥30**

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza desconocida

- Nuevamente usamos como estimador a $\overline{X}$
- Pero como pivote usamos

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

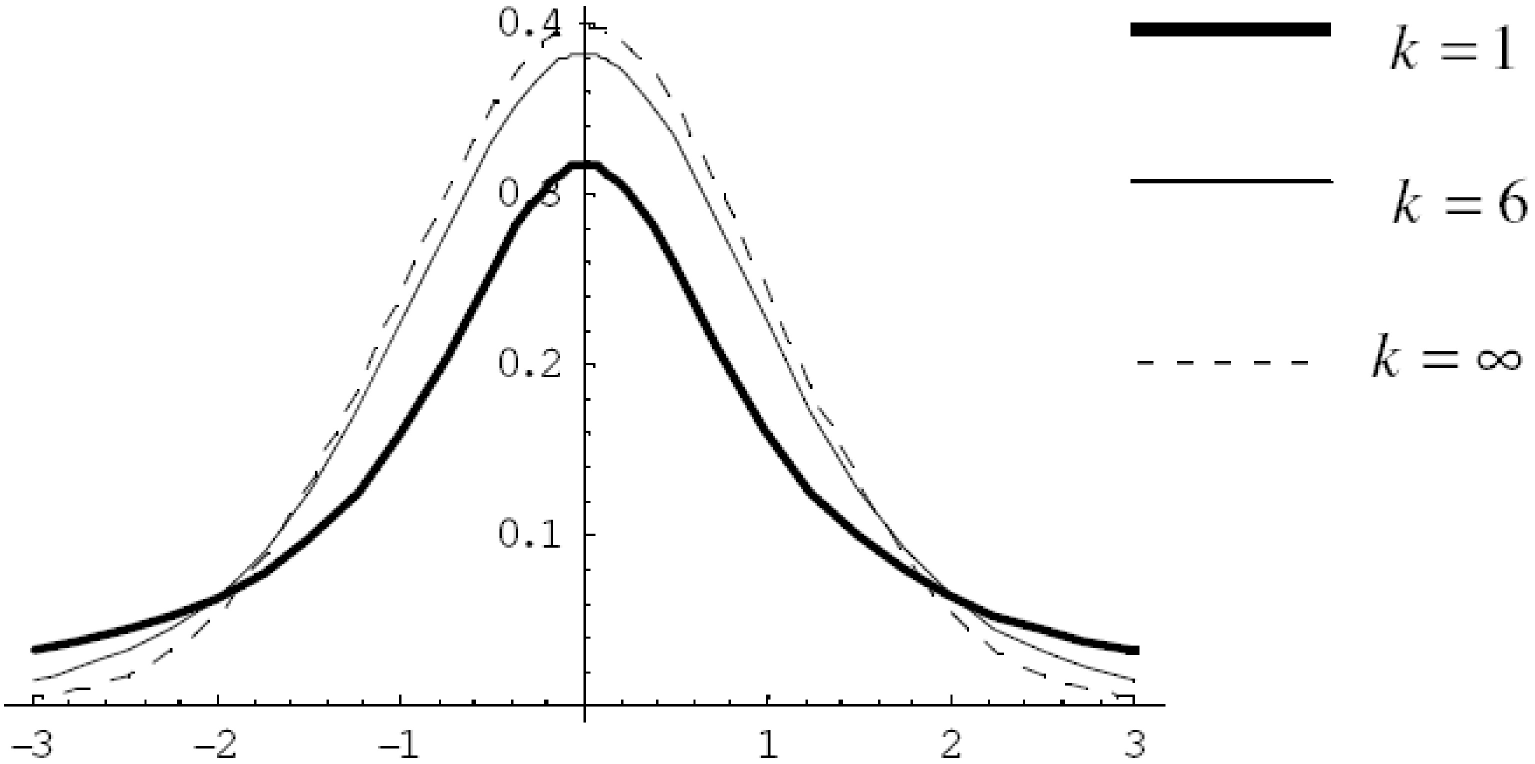
Se puede probar que T tiene una distribución llamada ***Student con parámetro n-1***

$T \sim t_{n-1}$

Distribución Student con k grados de libertad

- Características
  - Está centrada en cero, tiene forma de campana como la normal pero tiende a cero más lentamente.
  - Se puede probar que cuando k $\to\infty$ la *fdp* de la Student tiende a la fdp de la N(0,1).

Distribución Student con k grados de libertad



Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza desconocida

- Ahora que conocemos la distribución de T podemos hallar el valor t tal que

$$P(-t \le T \le t) = 1 - \alpha$$

- Es decir

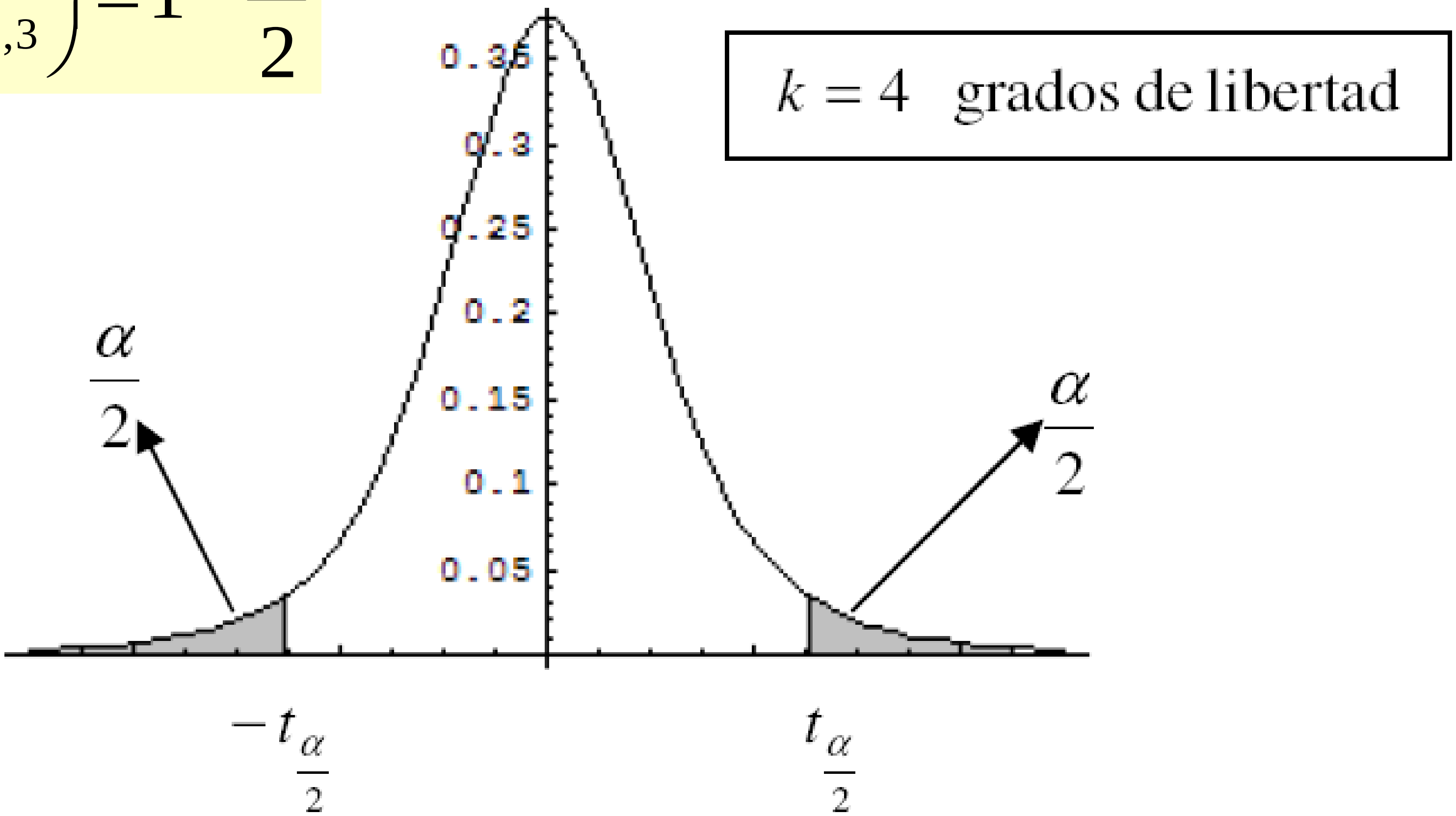
$$P\left(-t \le \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \le t \right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza desconocida

- Despejamos μ como hicimos en el ejemplo anterior

$$P\Bigg(\underbrace{\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1} \le \mu \le \underbrace{\bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2}\Bigg) = 1-\alpha$$

$$F\left(t_{\alpha/2,3}\right)=1-\frac{\alpha}{2}$$



$$P\left(-t_{\alpha/2,3} \le T \le t_{\alpha/2,3}\right)=1-\alpha$$

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza desconocida

- Por simetría se deduce que el valor de t que verifica

$$P(-t \le T \le t) = 1 - \alpha$$

es el que cumple con

$$F(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

siendo F(t) la *fda* de la v.a. T ~ t_{n-1} y lo denominaremos

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

Intervalo de confianza para la media de una distrib.normal, varianza desconocida

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido, un intervalo de confianza para μ de un nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Ejemplo 8.5

- Se hicieron 10 mediciones sobre la resistencia de cierto tipo de alambre con las que se calculó

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 10.48 \qquad S = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 1.36$$

- Suponga X ~ N(μ,σ^2)
- Se desea obtener un intervalo de confianza para la esperanza poblacional μ al 90 %.

Ejemplo 8.5

- Tenemos que $1-\alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1$
- De la Tabla de la *t de Student tenemos que* $t_{0.05,9}=1.8331$.
- *Entonces el intervalo de confianza* buscado es:

$$\left(10.48-1.8331\frac{1.36}{\sqrt{10}};10.48+1.8331\frac{1.36}{\sqrt{10}}\right)$$

$$(9.69\,;11.27)$$

Intervalo de confianza para la media de una distribución, varianza desconocida

- Si la muestra se toma de una distribución con σ^2 desconocido, y el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

El nivel de este intervalo para μ es aproximadamente $1-\alpha$

Intervalo de confianza

n ≥ 30

- σ conocida

Z ~ N(0,1)

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

- σ desconocida

Z ~ N(0,1)

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

n < 30

- σ conocida y distribución normal

Z ~ N(0,1)

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

- Si no

T ~ t_{n-1}

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

- Puede ocurrir que sólo se requiera uno de los límites del intervalo.
- Ejemplo
  - Límite superior de 95% para el tiempo de reacción promedio de una persona a un estímulo.
  - Límite de confianza inferior para el tiempo de vida promedio de cierto tipo de componentes.

IC unilaterales

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

- Si se dispone de una muestra grande, un límite de confianza para μ es

Límite Superior

$$\mu < \bar{x} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Límite Inferior

$$\mu > \bar{x} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$F(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

Ejemplo

$$\mu > \bar{x} - z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

- Una muestra de 48 observaciones de resistencia al corte de cierto material tiene una media muestral de 17.17 y una desviación estándar muestral de 3.28.
- Un límite inferior para la resistencia al corte promedio μ con nivel de confianza de 95% es

$$17.17-(1.645)\frac{(3.28)}{\sqrt{48}}=17.17-0.78=16.39$$

$$P(Z<1.645)=0.95$$

IC para la varianza de una distribución normal

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tomamos como estimador puntual de σ^2 a

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2$$

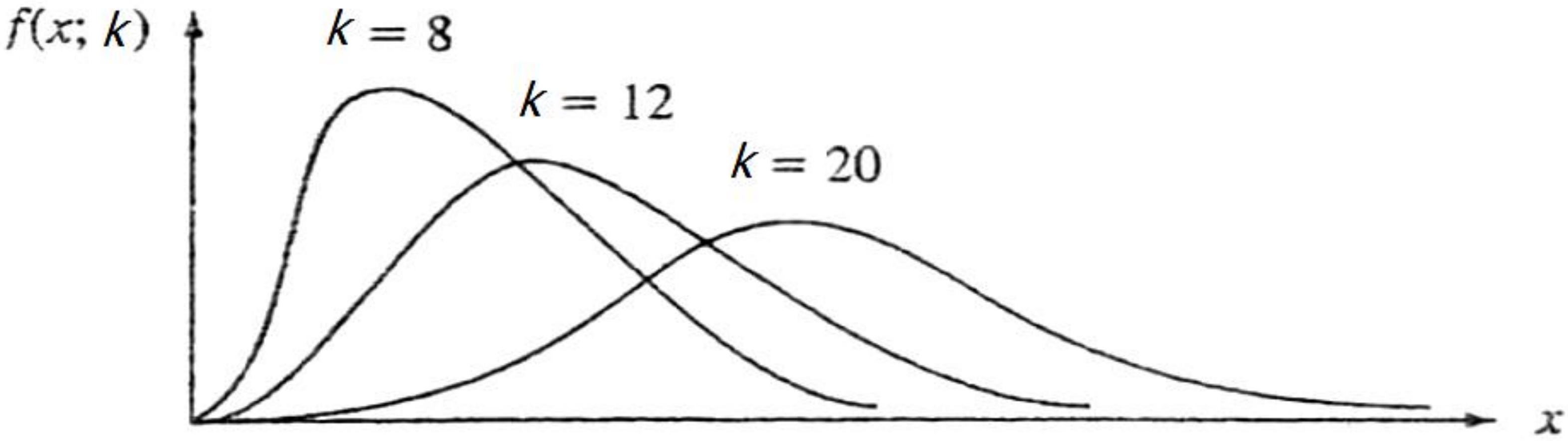
IC para la varianza de una distribución normal

- Luego construimos el estadístico

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

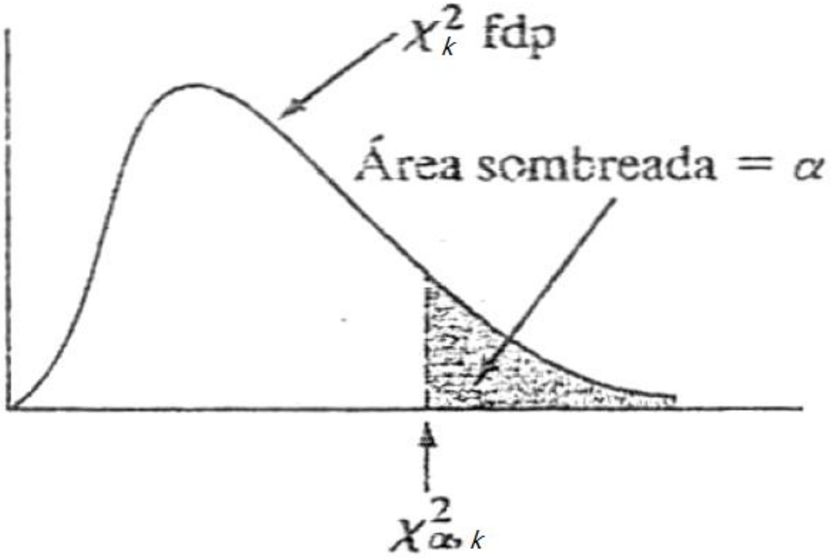
- Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar σ^2 y tiene una distribución conocida, se puede probar que *X tiene una distribución llamada* ***ji-cuadrado con n-1 grados de libertad***

Gráfica de funciones de densidad ji-cuadrado



Distribución ji-cuadrada

- Sea $\chi^2_{\alpha,k}$, llamado valor crítico ji-cuadrado, el número en el eje de medición tal que α del área bajo la curva de ji-cuadrada con k grados de libertad se ubica a la derecha de $\chi^2_{\alpha,k}$.



IC para la varianza de una distribución normal

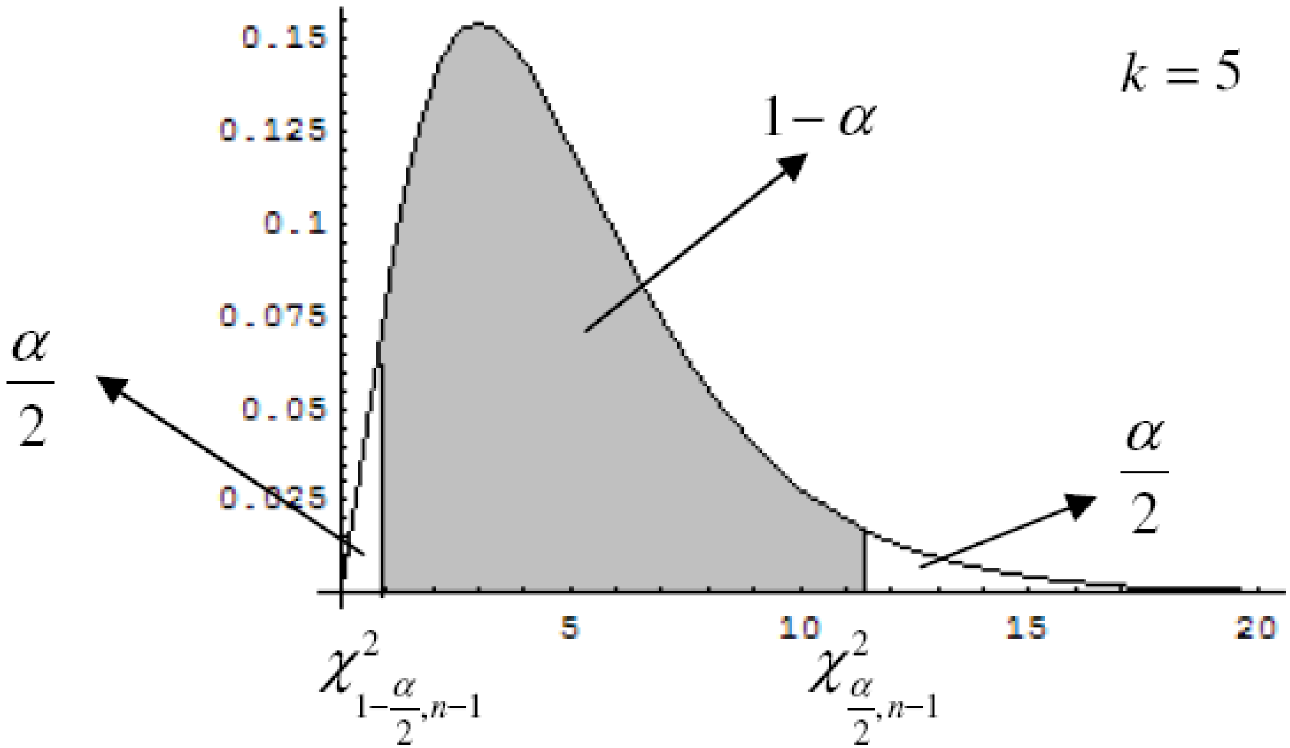
- Para desarrollar el intervalo de confianza planteamos hallar dos números *a y b tales que*

$$P\left(a \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le b\right) = 1 - \alpha$$

donde

$$a = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \qquad b = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

IC para la varianza de una distribución normal



- Por lo tanto

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha$$

de donde se obtiene

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

IC para la varianza de una distribución normal

- Sea $X_1,X_2,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, un intervalo de confianza para σ^2 de un nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right)$$

IC para la desviación estandar de una distribución normal

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, un intervalo de confianza para σ de un nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \,;\, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \right)$$

Ejemplo

- Un fabricante de detergente busca que todas las botellas sean llenadas de la misma forma con una desviación estándar σ del proceso de llenado menor a 0.15 onzas de líquido. Suponga que la distribución del volumen de llenado es normal.
- Se toma una muestra de 20 botellas y se obtiene $S^2 = 0.0153$.
- Hallar el IC de nivel 0.95 para la verdadera varianza del volumen de llenado.

Ejemplo

- La v.a. de interés es X:"volumen de llenado de una botella". $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ con σ desconocido.
- Tenemos $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05$.
- $S^2 = 0.0153$
- El intervalo se calcula así:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right)$$

Busquemos en la tabla de χ^2 los datos que faltan.

Ejemplo

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,19} = 32.85$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.975,19} = 8.91$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) = \left(\frac{(20-1)(0.0153)}{32.85} ; \frac{(20-1)(0.0153)}{8.91} \right)$$

$$(0.00884;0.0326)$$

IC para una proporción

- Sean X_1, X_2, …, X_n donde cada $X_i \sim B(1,p)$, con sólo dos valores posibles 0 o 1 (éxito), donde *éxito* identifica a un individuo u objeto que posee una característica de interés.
- La v.a. $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$ es una $B(n,p)$.
- Por lo tanto

$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$

representa la proporción de individuos exitosos de la muestra

IC para una proporción

- **Paso 1**
  - Tomaremos como estimador a

$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$

por tener las siguientes características

- Es insesgado
- Es consistente

Vamos a verificarlo

IC para una proporción

- **Paso 1**

$$E(\hat{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$$

$$V(\hat{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Por lo tanto es insesgado y consistente

IC para una proporción

- **Paso 2**
  - Tomaremos como pivote a la v.a.

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{V(\hat{P})}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

Porque P es consistente

IC para una proporción

- **Paso 2**
  - Tomaremos como pivote a la v.a.

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \approx N(0,1)$$

Si ***n*** es grande

IC para una proporción

- **Paso 3**
  - Para construir el intervalo de confianza al nivel de confianza 1- α partiendo del pivote *Z*, planteamos la ecuación

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$$

donde la incógnita es el número real z.

IC para una proporción

- Si $\hat{P}$ es la proporción de observaciones de una muestra aleatoria de tamaño n que verifica una propiedad de interés, entonces un IC para la proporción *p* de la población que cumple dicha propiedad de nivel aproximadamente 1-α es

$$\left(\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} ; \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right)$$

IC para una proporción

- La forma utilizada para obtener el IC para una proporción depende de la aproximación normal a la distribución binomial.
- Por lo tanto el IC se puede utilizar si

$$n\hat{P} \geq 10 \qquad y \qquad n(1-\hat{P}) \geq 10$$

es decir, ***la muestra debe contener un mínimo de diez éxitos y diez fracasos.***

Ejemplo

- Un fabricante desea saber la proporción de productos que están fallados. De 140 elegidos al azar, 35 están fallados.

a) Calcular un IC del 99% para la proporción poblacional *p.*

b) ¿De qué tamaño deberá extraerse la muestra a fin de que la proporción muestral no difiera de la proporción poblacional en más de 0.03 con un 95% de confianza?

Ejemplo

- n=140 (muestra grande); $\hat{P} = \dfrac{35}{140} = 0.25$
- El nivel de confianza es 1-α = 0.99 $\rightarrow$ α/2=0.005
- $z_{0.005}$ = 2.58 (de la tabla normal estandarizada)
- El intervalo buscado es

$$\left(0.25 - 2.58\sqrt{\frac{0.25(1-.025)}{140}} ; 0.25 + 2.58\sqrt{\frac{0.25(1-.025)}{140}} \right)$$

$$(0.15558 \,;\, 0.34441)$$

Resumen

- Intervalo de confianza
  - Interpretación
- IC para $N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 conocida.
- Precisión
  - De la estimación
  - Del estimador
- Elección del tamaño de la muestra

- IC para $N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 desconocida.
- IC para μ con σ^2 desconocida, $n \geq 30$
- IC unilaterales
- IC para una proporción
- IC para σ^2 de una normal.