**Bibliografía :**

– *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Jay L. Devore. (2005)*
– *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Paul Meyer. (1992)*

## Teoría de la Probabilidad

- El término **probabilidad** se refiere al estudio de la aleatoriedad y la incertidumbre
- En cualquier situación donde podría ocurrir uno de varios resultados posibles, la teoría de la probabilidad proporciona métodos para cuantificar la factibilidad de los resultados.
- La Teoría de la probabilidad estudia los llamados **experimentos aleatorios**.

## Experimento Aleatorio

Un **experimento aleatorio** es una acción o proceso que aunque se lo repita bajo las mismas condiciones no se puede predecir con exactitud su resultado.

**Ejemplos de experimentos aleatorios**

– Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
– Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el numero de artículos defectuosos producidos en un período de 24 hs.

- **Aspectos Importantes**
  - Puede repetirse el experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones.
  - Aunque no se conoce el **resultado particular** del experimento puede describirse el conjunto de **todos** sus **resultados posibles**.
  - Cuando el experimento se repite un **gran** número de veces, la **proporción** con la que ocurre determinado resultado tiende a estabilizarse.

    **Ejemplo**: Consideremos el experimento de lanzar un dado y observar el número de la cara superior. Supongamos que tiramos el dado N veces, y sea n el número de veces que sale el número 5 en los N tiros del dado. Entonces n/N es la proporción de veces que sale el número 5 en los N tiros. Si el dado es normal a medida que N aumenta, n/N tiende a estabilizarse en un número que es 1/6

## Experimento NO Aleatorio

- En los experimentos no aleatorios o ***deterministas se puede predecir con exactitud*** el resultado del experimento, es decir, las condiciones en las que se verifica un experimento determinan su resultado.

  **Ejemplos**:

  – Se coloca un recipiente con agua sobre el fuego. Se anota la temperatura del agua cuando comienza a hervir.
  – De una caja que solo contiene objetos blancos se selecciona uno al azar y se anota su color.

## Espacio Muestral

- Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- **Notación** : Utilizaremos $\varepsilon$ para denotar al experimento aleatorio y S para denotar su espacio muestral.
- **Ejemplos de Espacio Muestral**
  - Si $\varepsilon$ : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba entonces podemos tomar como espacio muestral a $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - Si $\varepsilon$ : tirar una moneda entonces $S = \{c, s\}$
  - Si $\varepsilon$ : lanzar una moneda tres veces y contar el número total de caras obtenidas entonces $S = \{0,1,2,3\}$
  - Si $\varepsilon$ : lanzar una moneda tres veces y observar la sucesión de caras y cecas obtenidas entonces $S =$ ***?***
  - Si $\varepsilon$ : tirar un dado las veces necesarias hasta que sale un 6 por primera vez y contar el número de tiros realizados entonces $S =$ ***?***
  - Si $\varepsilon$ : medir el tiempo de vida de una lamparita eléctrica entonces $S =$ ***?***
  - Si $\varepsilon$ : contar el número de artículos defectuosos generados en una línea de producción durante un período de 24 hs entonces $S =$ ***?***
  - En un lote de 10 artículos hay 3 defectuosos. Se elige un artículo después del otro (sin sustituir el artículo elegido) hasta que se obtiene el último artículo defectuoso.
    $\varepsilon$ : contar el número total de artículos sacados del lote. $S =$ ***?***

## Evento o suceso

Se llama ***evento*** *o* ***suceso*** *de un experimento a todo subconjunto del espacio muestral de dicho experimento.*
***Ejemplo****:* Se arroja un dado y se observa que salió. El espacio muestral es S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Cualquier subconjunto de S es un suceso. Por ejemplo,

A = {2, 4, 6} o "salió un número par"
B = {4, 5, 6} o "salió un número mayor que 3"

## Ocurrencia de un evento

- Dado un experimento, su espacio muestral S y un evento A, se dice que el evento A **ocurre** si el resultado del experimento está comprendido en A.
- **Ejemplo**: Volviendo al experimento de arrojar el dado y ver que salió, suponga que se arroja el dado y sale 5.
  - A = {2, 4, 6} o "salió un número par" **no ocurre**
  - B = {4, 5, 6} o "salió un número mayor que 3" **si ocurre**

## Ejercicio 1.1

- El ala de un avión se arma con una gran cantidad de remaches.

  $\varepsilon$ : contar el nro.de remaches defectuosos

  a) Indique el espacio muestral de $\varepsilon$

  b) Indique dos eventos del espacio muestral anterior

  c) Si el ala del avión tiene 10 remaches defectuosos, qué evento ocurre **?**

Si A es un evento asociado con un experimento aleatorio no podemos indicar con certeza si A ocurrirá o no.

Por lo tanto, se buscará asociar un numero con el evento A que medirá, de alguna manera, la posibilidad de que el evento A ocurra.

Comencemos trabajando con la **frecuencia relativa** de un evento

## Frecuencia relativa de un evento

- Sea $\varepsilon$ un experimento y A un evento asociado con él.
- Suponga que se repite **n** veces el experimento ".
- Sea $\mathbf{n_A}$ el número de veces que el evento A ocurrió en la **n** repeticiones.
- Se llama **frecuencia relativa** del evento A en las n repeticiones de $\varepsilon$ y se denota $f_A$, al cociente $n_A/n$

$$f_A = n_A / n$$

**Propiedades de la Frecuencia Relativa**

1- $0 \leq f_A \leq 1$

2- $f_A = 1$ *si y solo si A ocurre* ***cada vez en las n repeticiones***

3- $f_A = 0$ *si y solo si A no ocurre* ***nunca en las n repeticiones***

4- si *A y B son dos eventos mutuamente excluyentes entonces* $f_{A\square\square B} = f_A + f_B$

5- $f_A$ "converge" a P(A) cuando el número de repeticiones $n \to \infty$

## Probabilidad de un evento

- Volvamos a la necesidad de asociar un numero a un evento con la intención de medir su posibilidad de ocurrencia.
- Una opción sería utilizar su **frecuencia relativa**.
  Problema: Cuántas veces debe repetirse el experimento? Es decir, cual es el valor de n a utilizar?
- En lugar de la frecuencia relativa utilicemos el concepto de **probabilidad**

## Definición axiomática de Probabilidad

- Sea e un experimento aleatorio y *S un espacio muestral asociado con* e . Con cada evento A se asocia un numero real P(A), denominado **probabilidad de A,** que satisface los siguientes axiomas

  **Axioma 1** : $P(A) \geq 0$

  ***Axioma 2*** : $P(S) = 1$

  **Axioma 3 :**

  - Si *A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ *es una secuencia de eventos tales que* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$ *entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## Propiedades de la Probabilidad

1) $P(\varnothing) = 0$

**Demostración** : Dado A un evento cualquiera podemos escribir $A \cup \varnothing = A$. Además A y $\varnothing$ son disjuntos, por lo tanto, por el axioma 3, $P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$ o sea que

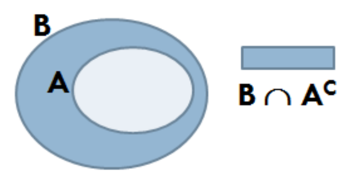
$P(A) = P(A) + P(\varnothing) \Rightarrow$ $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

**Demostración** : Dado A un evento cualquiera podemos escribir $A \cup A^C = S$. Además, por definición, A y $A^C$ son disjuntos. Por lo tanto, por los axiomas 2 y 3, $1 = P(S) = P(A) + P(A^C)$

Despejando $\mathbf{P(A^C) = 1 - P(A)}$

3) Si $A \subset B$ *entonces* $P(A) \leq P(B)$




Sean A y B dos eventos tales que *A* Ì *B*.

De la figura vemos que $B = A \cup (B \cap A^C)$.

Además, A y $(B \cap A^C)$ son disjuntos. Entonces

$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C)$ y como por el axioma 1 tenemos que $P(B \cap A^C) \geq 0$ entonces $P(B) \geq P(A)$

4) Si $A \subset B$, *entonces* $P(B - A) = P(B) - P(A)$

**Demostración** : en la demostración anterior llegamos a que $P(B) = P(A) + P(B \cap A^C)$, entonces

$P(B \cap A^C) = P(B) - P(A)$

y como $B \cap A^C = B - A$ entonces

$P(B - A) = P(B) - P(A)$

| |
|---|
| **En general** vale la siguiente propiedad $\mathbf{P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)}$ |

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

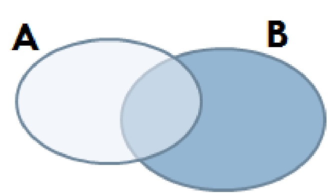
***Demostración*** *:* $A \cup B = B \cup (A \cap B^C)$

$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^C)$.

*Dado que* $A \cap B^C = A - B$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$



## Ejercicio 1.2

Las enfermedades I y II son relativamente comunes entre la gente de cierta población. Se supone que el 10% de la población tiene la enfermedad I, el 15% la enfermedad II y el 3% ambas enfermedades.

Se elige una persona al azar en esa población.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga alguna de esas enfermedades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna de las dos enfermedades?

## Ejercicio 1.3

Supongamos que estamos estudiando el rendimiento de los alumnos de la materia Probabilidad y Estadística en un determinado examen.

De un relevamiento surge que:

- el 80% de los alumnos estudió para el examen
- el 75% de los alumnos aprobó el examen
- el 15% de los alumnos no estudió para el examen y no lo aprobó.

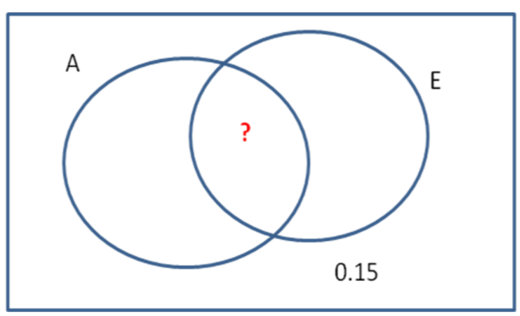
Calcular probabilidad de elegir a un alumno que haya estudiado para el examen y lo haya aprobado.

$\varepsilon$ : "Tomar al azar un alumno del curso"

Eventos A = "el alumno aprobó el examen" y E = "el alumno estudió para el examen"

Del relevamiento surge que $P(A) = 0.75$; $P(E) = 0.80$ ; $P(A^C \cap E^C) = 0.15$.

Se pide calcular $P(A \cap E)$



## Espacio muestral finito

- Consideremos solo los experimentos cuyo espacio muestral S consta de un número finito de elementos.
  $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$
- Consideremos cada evento elemental de S, $A_i = \{a_i\}$ con i = 1..k
- Asociemos a cada $A_i$ un número $p_i$ llamado **probabilidad de $A_i$** que cumple
  $p_i \geq 0$, i = 1, 2, …, k
  $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$

- Qué pasa con los eventos formados por varios eventos elementales?
- Sea B = {aj1, aj2, … , ajr} un evento formado por r eventos elementales.
- Por lo tanto $P(B) = p_{j1} + p_{j2} + \ldots + p_{jr}$, siendo $p_{ji}$ la probabilidad del evento elemental $\{a_{ji}\}$

Para evaluar las probabilidades de los eventos elementales es preciso hacer algunas uposiciones. En general se piensa que se trata de un **espacio muestral equiprobable.**

### Ejemplo

Sea $\varepsilon$ el experimento de lanzar una moneda normal. Utilizar los axiomas para calcular la probabilidad de que salga cara.

S = {c, s} o también $S = \{c\} \cup \{s\}$
Por el axioma 2, P(S) = 1 y por el axioma 3 $P(S) = P(\{c\} \cup \{s\}) = P(\{c\}) + P(\{s\})$
$\therefore P(\{c\}) + P(\{s\}) = 1 \Rightarrow$ **Porque la moneda es normal**, P({c}) = P({s}) = 0.5

Vimos que si $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *puede escribirse así:*

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad ; \quad A_i = \{a_i\}$$

Usando los axiomas $P(A_1)+P(A_2)+ \ldots + P(A_n) = 1$

Si $P(A_1)=P(A_2)= \ldots = P(A_n) = p$ entonces

Si esto se cumple, se dice que *S es* ***equiprobable***

$$\underbrace{p + p + \ldots + p}_{\text{n veces p}} = 1 \Rightarrow p = 1/n = 1/\#S$$

***Nro. de elementos de S = Cardinal de S***

Si B es un evento de un espacio muestral finito equiprobable, $B = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$, $\#B = k$.

*Vimos que* $P(B) = P(A_{i1})+P(A_{i2})+ \ldots + P(A_{in})$

Si $P(A_i) = 1/n \quad \forall i=1..n$, se tiene que

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S}$$

## Ejemplo

Se lanza un dado normal, es decir, que todos los resultados son igualmente probables.

El evento A ocurre si y solo si aparece un numero mayor que 4. Esto es, A = { 5, 6 }
Calcular la probabilidad de que A ocurra.

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

## Ejemplo

Entre los números 1, 2, …, 50 se elige uno al azar. Cuál es la probabilidad de que el número seleccionado sea divisible por 6 o divisible por 8?

**Respuesta 1**

A = { 6, 8, 12, 16, 18, 24, 30, 32, 36, 40, 42, 48}

Por lo tanto, P(A) = 12/50

**Respuesta 2**

A podría tomarse como la unión de dos eventos

B = {6,12,18,24,30,36,42,48} o “es divisible por 6”

C = { 8, 16, 24, 32, 40, 48} o “es divisible por 8”

$P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 8/50 + 6/50 - 2/50 = 12/50$

## Ejercicio 1.4

En una habitación se encuentran: 5 hombres mayores de 21, 4 hombres menores de 21, 6 mujeres mayores de 21 y 3 mujeres menores de 21. Se definen los eventos:

A = {la persona es mayor de 21} B = {La persona es menor de 21}

C = {la persona es hombre} D = {La persona es mujer}

Calcular P(B), P(D), $P(A \cup B)$, $P(B \cup D)$

## Ejemplo

Considere el experimento de arrojar una moneda normal dos veces y contar la cantidad de caras obtenidas entre ambos tiros. El espacio muestral será S = { 0, 1, 2}

Calcule la probabilidad de que haya salido una sola cara entre los dos tiros

*S* ***no es equiprobabl. Por qué?***

- El evento {0} ocurre de una sola forma: (s,s)
- El evento {2} ocurre de una sola forma: (c,c)
- Pero el evento {1} ocurre cuando en los dos tiros sale una sola cara y eso puede darse de dos formas distintas (*c, s)* o *(s,c)*

**∴ P({0}) = P({2}) = 1/4 y P({1}) = 2/4**

## Ejercicio 1.5

¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos 1 cara al tirar una moneda normal 2 veces?

A = {1, 2}

Calcular P(A)

## Probabilidad de un evento

- Cuando los resultados de un experimento son **equiprobables**, la asignación de probabilidades se reduce a contar.
- En particular, si A es un evento de un espacio muestral S

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

**EJEMPLO**

De un conjunto de N elementos se debe elegir uno al azar. Si todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos (el **espacio muestral es equiprobable**), la probabilidad de elegir un elemento es

$$P(a_i) = 1/N$$

**EJEMPLO**

De un conjunto de N elementos se deben elegir **dos** al azar. Todos los pares, sin considerar el orden, tienen la misma probabilidad de ser elegidos. La probabilidad de elegir un par será

$$P(a_i) = 1/K$$

La pregunta es ¿Cuántos pares distintos hay? Es decir, cuál es el valor de K?

**EJEMPLO**

Un lote de 100 artículos contiene 20 defectuosos y 80 no defectuosos. Se eligen 10 artículos al azar sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los artículos escogidos sean defectuosos?

- Cada elemento de S será de la forma $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$
- S es equiprobable. ¿Cuántos elementos tiene S?
- ¿Cuántos cumplen con la condición pedida?

---

## Técnicas de Conteo o Técnicas de Enumeración

Cuando los resultados de un experimento son equiprobables, la asignación de probabilidades se reduce a contar. En particular, si A es un evento de un espacio muestral S, la probabilidad de A se calcula como

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Cuando el espacio muestral tiene pocos elementos puede contarse manualmente. Si no es así, las técnicas de conteo pueden ser de utilidad. Estas técnicas también se utilizan cuando los resultados no tienen la misma probabilidad de ocurrir.

La elección de la técnica a utilizar dependerá de las características del experimento aleatorio

<u>Principio de Multiplicación</u>

Suponga que un proceso designado como 1 puede hacerse de $n_1$ maneras y que otro proceso designado como 2 puede hacerse de $n_2$ maneras.

También suponga que c/u de las maneras de hacer el proceso 1 puede ser seguida por cualquiera de las del proceso 2.

Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido de 2 puede hacerse de $n_1 . n_2$ maneras.

Si el primer elemento u objeto de un par ordenado se puede seleccionar de $n_1$ formas y para cada una de estas $n_1$ formas se puede seleccionar el segundo elemento de $n_2$ formas, entonces el número de pares es $n_1 . n_2$

**Ejemplo**

Juan desea comprar un kilo de helado formado por dos gustos, uno de agua y otro de crema. Si hay 15 gustos de crema y 9 gustos de agua, de cuántas formas distintas puede formar el kilo?

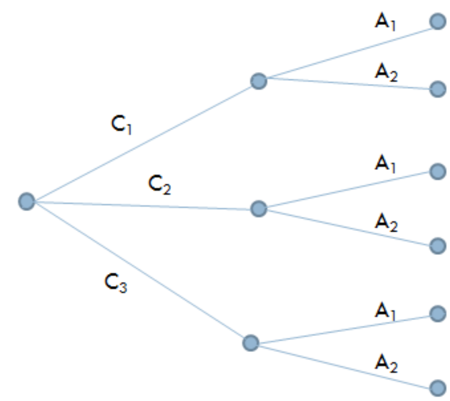
Rta: Si representamos los gustos de crema con $c_1, \ldots, c_{15}$ y los de agua con $a_1, \ldots, a_9$, estamos tratando de formar los pares $(c_i, a_j)$ con i=1:15 y j=1:9. Es decir que $n_1$=15 y $n_2$=9. Por lo tanto, hay **15 * 9 = 135** formas distintas de formar el kilo de helado.

Diagrama de árbol

Es una representación gráfica de todos posibles resultados del experimento.

**Ejemplo**

Suponga que en el ejemplo anterior, sólo se consideran tres gustos de helado de crema y dos gustos de helado de agua. La Figura de la derecha representa mediante un diagrama de árbol las distintas combinaciones de 2 gustos que pueden aparecer en el kilo de helado.




Principio de multiplicación más general

Suponga que un conjunto (evento) consiste en colecciones ordenadas de k elementos y que hay $n_1$ opciones posibles para el primer elemento; para cada elección del primer elemento, hay $n_2$ elecciones posibles del segundo elemento; …; para cada elección posible de los primeros k-1 elementos, hay $n_k$ elecciones del k-ésimo elemento. Entonces hay $n_1 . n_2 \ldots n_k$ resultados posibles

**Ejemplo**: El claustro de profesores tiene 53 miembros, el de Auxiliares 278 y el de alumnos 2341. De cuántas formas puede formarse la comisión si debe elegirse un representante de cada claustro?

**Rta**: Hay 53 * 278 * 2341 = 34492294 formas distintas de componer una comisión.

Principio de Adición

Suponga que un proceso designado como 1 puede hacerse de $n_1$ maneras y que otro proceso designado como 2 puede hacerse de $n_2$ maneras.

También suponga que **no** es posible que **ambos** se hagan juntos.Entonces el número de maneras como se puede hacer 1 o 2 es $n_1 + n_2$

Ver que se puede generalizar para k procesos que no pueden ocurrir juntos

EJEMPLO

Supongamos que planeamos un viaje y debemos decidir entre trasladarnos en micro o en avión.

Si hay tres rutas posibles que pueden hacerse en micro y dos distintas que pueden hacerse en avión entonces hay **3 + 2 = 5** rutas diferentes disponibles para el viaje.

<u>Permutaciones</u>

Cualquier secuencia **ordenada** de ***k*** objetos tomada de un conjunto de ***n*** objetos distintos se llama **permutación de tamaño *k*** de los objetos.

Note que los elementos son tomados **sin sustitución.**

El número de permutaciones de tamaño k que se puede construir a partir de n objetos se denota $\mathbf{P_{k,n}}$ y su valor es

$$P_{k,n} = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+2).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Ejemplo**

Una Secretaría dispone de 10 traductoras para traducir al inglés cualquier documento en español. En determinado momento se generan 4 documentos y el Secretario, para ahorrar tiempo, decide asignar cada uno a una traductora diferente. ¿De cuántas maneras puede elegirlas?

**Rta: n = nro. de traductoras = 10; k = nro. de documentos = 4;**

**$P_{4,10}$ = 10 . 9 . 8 . 7 = 5040**

*Note que puede saberse a qué traductora se le dio cada documento*

<u>Combinaciones</u>

En muchos experimentos, el orden entre los elementos elegidos, no es importante. En este caso se utilizan *combinaciones.*

Dado un conjunto de *n* objetos distintos, cualquier subconjunto **NO ordenado** de tamaño ***k*** *de los* objetos se llama combinación (note que nuevamente los elementos son tomados **sin sustitución**)

El número de combinaciones de tamaño k de un conjunto dado es menor que el número de permutaciones. Esto se debe a que varias permutaciones se corresponden con la misma combinación.

**Ejemplo**

Dado un conjunto {A,B,C,D} cuántas combinaciones de dos elementos se pueden formar?

Rta: Son 6, {(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)}. Note que si se cuentan permutaciones son **12.**

La cantidad de combinaciones de tamaño k que pueden formarse con n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{k,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Volviendo al ejemplo de las 10 traductoras y los 4 documentos para traducir, donde el objetivo es que las traductoras asignadas sean distintas. ¿Cuántas combinaciones de 4 traductoras distintas se pueden formar?

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(4.3.2.1)(6.5.4.3.2.1)} = 210$$

Son muchas menos que las 5040 permutaciones que calculamos antes. **Por qué?**

## Ejercicio 1.6

Un amigo ofrece una cena. Su provisión actual de vino consiste en 8 botellas de malbec, 10 de merlot y 12 de cabernet (él sólo bebe vino tinto), todas de diferentes vinaterías.

a) Si desea servir tres botellas de malbec y es importante el orden en el cual se sirve cada botella ¿Cuántas formas hay para hacer esto?

b) Si se eligen al azar seis botellas de vino de las 30 para servir ¿Cuántas formas hay de para hacer esto?

c) Si se eligen al azar seis botellas de vinos de forma de tomar dos de cada variedad ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

d) Si se eligen seis botellas ¿Cuál es la probabilidad de que esto dé como resultado que se elijan dos botellas de cada variedad?

e) Si se eligen seis botellas al azar ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean de la misma variedad?

---

## Ejercicio 1.7

Un lote de 100 artículos contiene 20 defectuosos y 80 no defectuosos.

Se eligen 2 artículos al azar sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?

Se eligen 10 artículos al azar sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los artículos escogidos sean defectuosos?

## Probabilidad condicional.

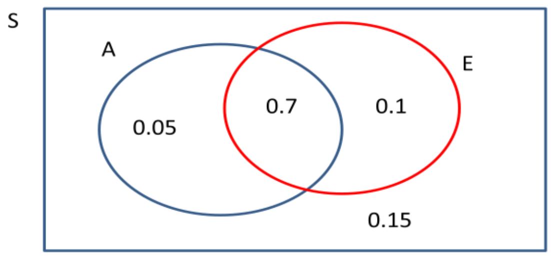
Hasta ahora nos hemos concentrado en calcular probabilidades de eventos aislados.

Esto no necesariamente siempre es así. En ocasiones nos interesa calcular alguna probabilidad luego de que algún otro evento ha ocurrido.

Es decir que la probabilidad del 2do. evento debe calcularse en referencia al espacio muestral determinado por el 1er. evento

## Ejemplo

Retomando el ejercicio 1.3 ¿Cuál sería la probabilidad de que un alumno que haya estudiado, también haya aprobado el examen?




Sabemos que el evento E ocurre, es decir, el alumno ha estudiado.

Intuitivamente

P(A/E)=$\frac{0.7}{0.8}$= 0.875

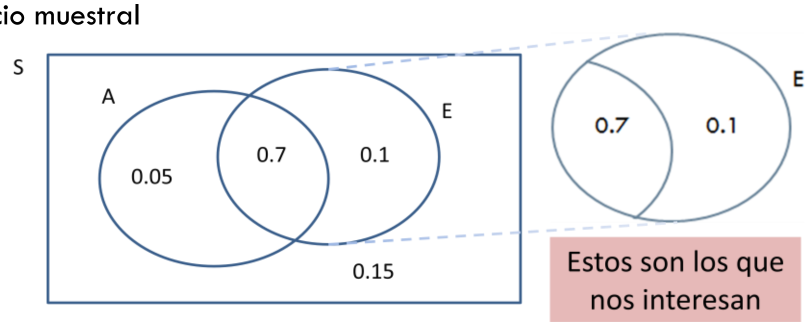
---

## Definición

- Dados dos eventos A y B, con P(B)>0, la probabilidad condicional de A dado que ocurrió B se define como

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

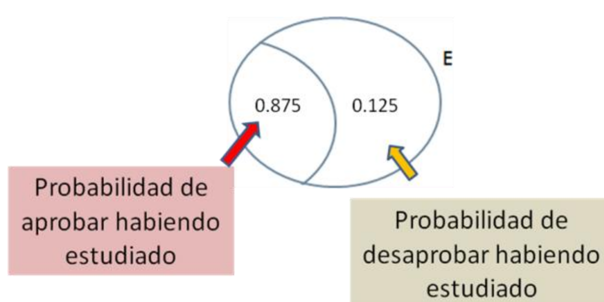
Volviendo al ejemplo, al calcular una probabilidad sobre los que estudiaron, se produce un cambio del espacio muestral




Pero las probabilidades 0.7 y 0.1 que se observan en E respetan el espacio muestral original.

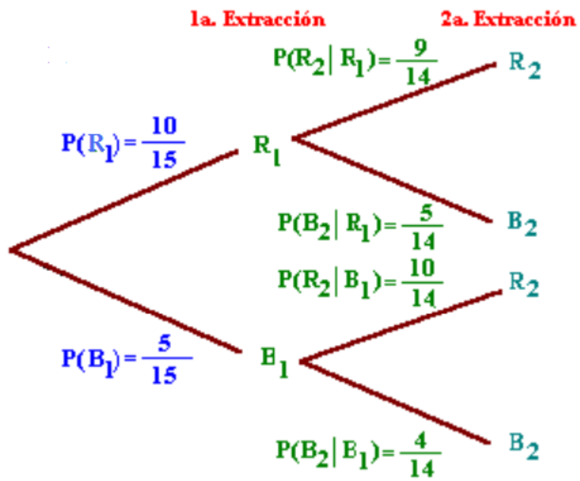
Si ahora **E es el nuevo espacio muestral,** debemos hacer que sumen 1 manteniendo la proporción.Es decir que debemos dividirlas por P(E).

Estas probabilidades corresponden al nuevo espacio muestral.



**Ejemplo**

Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que: La primera semilla sea roja? La segunda semilla sea blanca dado que la primera fue roja?




## Ejercicio 1.8

Una persona lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras sabiendo que salió por lo menos una cara?

Compare el resultado obtenido con la probabilidad de que salgan 3 caras sin tener ninguna información adicional.

## Ejercicio 1.9

Se dispone de un lote formado por 20 artículos defectuosos y 80 artículos sin defectos.

Considere los eventos

A = "el 1er. artículo es defectuoso"

B = "el 2do. artículo es defectuoso"

Calcular P(A) y P(B) suponiendo que los artículos se eligen **con sustitución**

$$P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

y si se eligen **sin sustitución**?

## Teorema de la multiplicación

De la definición de probabilidad condicional se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B)$$

y considerando P(B|A)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A)$$

Se conocen como **teorema de la multiplicación**

¿Qué pasa con la intersección de tres eventos?

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \cap (A \cap B))$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B)) \,.\, P(A \cap B)$$

Usando que $P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A)$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B|A) \,.\, P(C|(A \cap B))$$

Para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puede generalizarse de la siguiente forma

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).\, P(A_2|A_1) \,.\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \square\, A_{n-1})$$

## Ejercicio 1.10: Venta de aparatos de TV

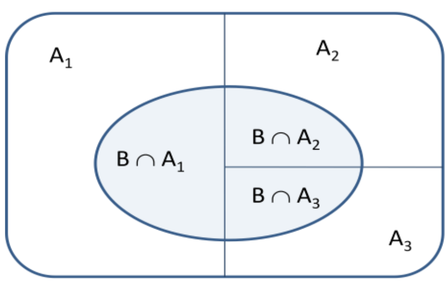
Un comercio vende tres tipos de TV: 50% son de la marca 1, 30% son de la marca 2, 20% son de la marca 3. Todos tienen garantía de 1 año.

Se sabe que el 25% de los TV de la marca 1, el 20% de los TV de la marca 2 y el 10% de la marca 3, requieren trabajo de garantía.

¿Cuál es la probabilidad de un comprador elegido al azar haya comparado un TV de la marca 1 que requiera trabajo de garantía?

$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ siendo $A_i$ = "el aparato es de la marca i"

B= "el aparato requiere trabajo de garantía"



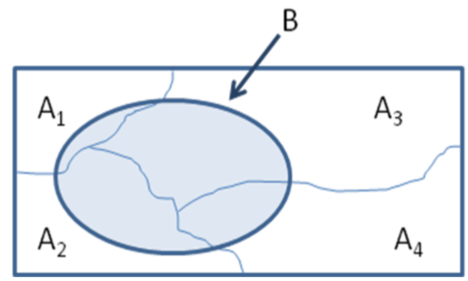

$P(A_1)=0.5$; $P(A_2)=0.3$; $P(A_3)=0.20$

$P(B|A_1)=0.25$; $P(B|A_2)=0.2$; $P(B|A_3)=0.10$

$P(A_1|B) = ?$

$P(A_1|B) = P(B \cap A_1) / P(B)$

## Teorema de la probabilidad total




Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral S.
Es decir que,

- $A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \cup A_n = S$
- $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, si $i \neq j$
- $P(A_i)>0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$

Para cualquier evento B de S

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+ \ldots + P(B|A_n)P(A_n)$$

### Ejemplo

Se ha publicado el resultado del último examen de un curso al cual se presentaron 500 alumnos.

| | Aprobados | Desaprobados | |
|---|---|---|---|
| **Recursantes** | 60 | 25 | 85 |
| **No Recursantes** | 235 | 180 | 415 |
| | 295 | 205 | 500 |

¿ Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un alumno aprobado de la lista, se trate de un alumno recursante?

## Teorema de Bayes

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de S
  - $A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \cup A_n = S$
  - $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, si $i \neq j$
  - $P(A_i)>0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$
- Para cualquier evento B de S

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

- Se conoce
  - La probabilidad de cada elemento de la partición.
  - La probabilidad de B cuando ocurre c/u de los eventos de la partición.

## Ejercicio 1.11

En un determinado grupo de gente hay personas rubias, morochas y pelirrojas. El 60% de la gente es morocha, el 30% rubia y el 10% pelirroja. El 50% de los rubios tiene ojos claros, el 40% de los pelirrojos tiene ojos claros y el 25% de los morochos tiene ojos claros.
Si una persona elegida al azar tiene ojos claros, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

### Ejercicio 1.12

El parte meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:
**a) Que llueva**: probabilidad del 50%.
**b) Que nieve**: probabilidad del 30%
**c) Que haya niebla**: probabilidad del 20%.

Según estos estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:
**a) Si llueve**: probabilidad de accidente del 20%.
**b) Si nieva**: probabilidad de accidente del 10%
**c) Si hay niebla**: probabilidad de accidente del 5%.

Resulta que efectivamente ocurre un accidente y como no estábamos en la ciudad no sabemos que tiempo hizo (llovío, nevó o hubo niebla). ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera lloviendo?

### Ejercicio 1.13

En una etapa de la producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres diferentes robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa varía para c/u de los tres, así como la proporción de art. que cada uno procesa, de acuerdo a la siguiente tabla.

| Robot | Defectuosos | Art.Procesados |
|---|---|---|
| A | 0.002 | 18% |
| B | 0.005 | 42% |
| C | 0.001 | 40% |

¿Cuál es la proporción global de defectos producida por las tres máquinas?
Si tomo un artículo al azar y resulta con defectos en la soldadura, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot C ?

## Independencia

Dos eventos A y B son independientes si $P(A|B) = P(A)$

La probabilidad de A no cambia porque ocurra B

Por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A|B).P(B) = P(A).P(B)$ ; $\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

---

## Independencia de mas de 2 eventos

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, se dice que son independientes si

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\, P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik}) \qquad \text{con } k=2, \ldots, n$$

## Ejemplo

a) Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos: *A: "la suma de los números obtenidos es igual a 7" y B: "el primer número obtenido es 4" ¿Son A y B independientes?*

Solución: **#S = 36**

***A: "la suma de los números obtenidos es igual a 7"***
*A={(1,6), (2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}* ∴ **P(A)=6/36**

***B: "el primer número obtenido es 4"***
*B* ={(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)} □ **P(B)=6/36**

A ∩ B = {(4,3)} ∴ **P(A ∩ B)=1/36 = P(A).P(B)**

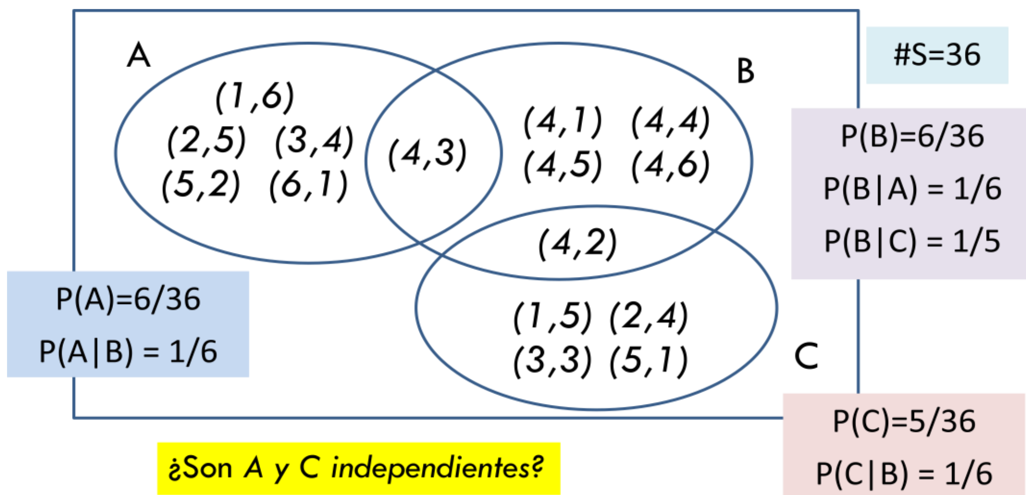
∴ A y B son independientes

b) Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos: *B: "el primer número obtenido es 4"* y C: *"la suma de los números obtenidos es igual a* **6**" *¿Son B y C independientes?*

Solución: **#S = 36**

***B: "el primer número obtenido es 4"***
*B* ={(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)} □ **P(B)=6/36**
***C: "la suma de los números obtenidos es igual a 6"***
C={(1,5), (2,4),(3,3),(4,2),(5,1)} ∴ **P(C)=5/36**
B ∩ C = {(4,2)} ∴ **P(B ∩ C)=1/36 ≠ P(C).P(B)**

∴ B y C no son independientes




## Ejercicio 1.14

Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos:

*A: "el 1er. dado muestra un número par"*

*B: "el 2do.dado muestra un 5 o un 6"*

*¿Son A y B independientes?*