

## Intervalos de Confianza

### Introducción

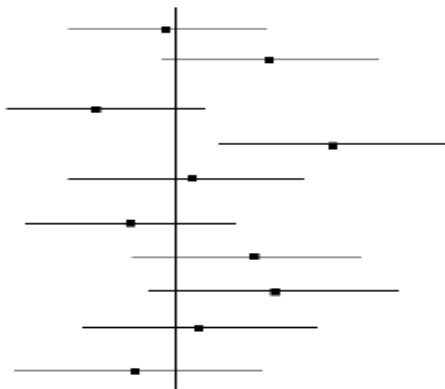
Se ha visto como construir a partir de una muestra aleatoria un estimador puntual de un parámetro desconocido.

A veces resulta más conveniente dar un **intervalo de valores posibles del parámetro desconocido**, de manera tal que dicho intervalo contenga al verdadero parámetro con determinada probabilidad.

A partir de una muestra aleatoria se construye el intervalo  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  donde los extremos  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  son dos estadísticos, tales que  $P(\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = 1 - \alpha$  donde  $\theta$  es el parámetro desconocido a estimar y  $\alpha$  es un valor real entre cero y uno dado de antemano.

### Ejemplo 8.1

Si  $\alpha=0.05$ , se quiere construir un intervalo  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  tal que  $P(\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = 0.95$  o escrito de otra forma  $P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 0.95$



- Intuitivamente podemos decir que si medimos la muestra 100 veces tendremos 100 intervalos distintos de los cuales aprox.5 no contendrán al verdadero parámetro.
- Al valor  $1-\alpha$  se lo llama **nivel de confianza** del intervalo.
- También se suele definir como nivel de confianza al  $100(1-\alpha)\%$

### Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza conocida

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  conocido. Se quiere construir un intervalo de confianza para  $\mu$  de nivel  $1-\alpha$ . Supongamos  $\alpha=0.05$ . Los pasos a seguir son los siguientes

#### PASO 1

Tomamos un estimador puntual de  $\mu$ .

#### PASO 2

Con el estimador y  $\mu$  construimos el estadístico  $Z$  de distribución conocida

#### PASO 3

Obtener el intervalo a partir de la distribución de  $Z$

#### PASO 1

- Tomamos un estimador puntual de  $\mu$ .
- Sabemos que  $\hat{\mu} = \bar{X}$  es un estimador con buenas propiedades

#### PASO 2

- A partir de construimos el estadístico  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
- Note que  $Z$  contiene al verdadero parámetro  $\mu$  y que tiene distribución  $N(0,1)$ .

#### PASO 3

Como conocemos la distribución de  $Z$  podemos hallar el valor  $z$  tal que  $P(-z \leq Z \leq z) = 0.95$

$$P(-z \leq Z \leq z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0.95$$

$$\therefore \Phi(z) = 0.975 \Rightarrow z = 1.96$$

Por lo tanto,

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) = 0.95$$

Sólo resta despejar  $\mu$  para tener algo de la forma  $P(\hat{\Theta}_1 \leq \mu \leq \hat{\Theta}_2) = 0.95$   
El intervalo pedido es  $(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$ .

Multiplicando a ambos lados por  $\sigma/\sqrt{n}$  obtenemos

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96 \quad \equiv \quad -1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Restando  $\bar{X}$

$$-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} \leq -\mu \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}$$

Multiplicando por -1  $\bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Es decir que  $\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por lo tanto  $P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$

Es decir que el intervalo de confianza para  $\mu$  que tiene nivel de confianza 0.95 o 95% es

$$\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Repetiremos el proceso para un nivel de confianza  $1-\alpha$

## Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza conocida

### PASO 1

- Dada una muestra  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , partimos de la esperanza muestral

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Sabemos que es un estimador insesgado y consistente de  $\mu$ .

### PASO 2

- Construimos el estadístico Z llamado **pivote**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

- Z cumple con las condiciones para ser pivote: su expresión depende de  $\mu$  pero su distribución no.

### PASO 3

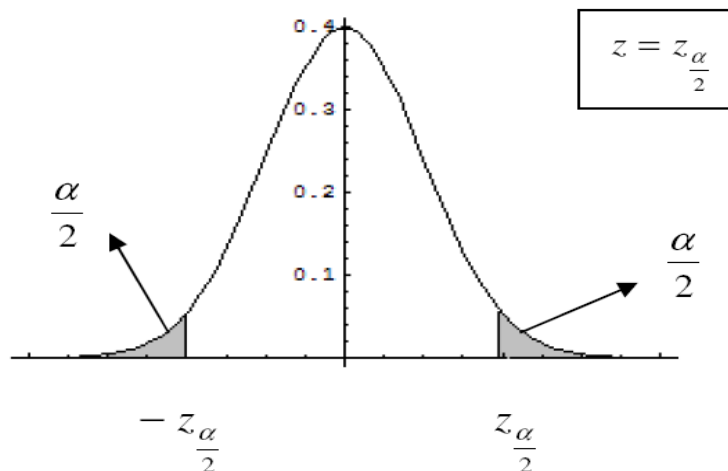
- Para construir el intervalo de confianza al nivel de confianza  $1-\alpha$  partiendo del pivote Z, *comenzamos* por plantear la ecuación  $P(-z \leq Z \leq z) = 1-\alpha$  donde la incógnita es el número real z.

- Reemplazando la v.a. Z por su expresión  $P\left(-z \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = 1-\alpha$

- Despejamos  $\mu$  como hicimos en el ejemplo anterior

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2}\right) = 1-\alpha$$

Sea  $z_{\alpha/2}$  el valor para el cual  $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$



$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  conocido, un intervalo de confianza para  $\mu$  de un nivel  $1 - \alpha$  es

$$\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

### Ejemplo 8.2

La resistencia a la compresión del concreto está distribuida aprox. de manera normal, con varianza  $1000 \text{ (psi)}^2$ . Al tomar una muestra aleatoria de 12 especímenes, se tiene que  $\bar{x} = 3250 \text{ psi}$ .

- Construya un intervalo de confianza del 95% para la resistencia a la compresión promedio.
- Idem a) para un intervalo de confianza del 99%.

Compare el ancho de los intervalos de a) y b).

**Solución:**

La v. a. de interés es  $X_i$ : "resistencia a la compresión del concreto en un espécimen  $i$ ". El tamaño de la muestra es  $n = 12$  especímenes. Cada  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $i=1, 2, \dots, 12$  con  $\sigma^2 = 1000$

a) Queremos un intervalo de confianza de nivel 95% por lo tanto  $\alpha=0.05$  de la forma

$$\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Buscamos en la tabla de la normal estándar el valor de  $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$



$$F(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Z > z_{0.025}) = 0.025$$

Reemplazando

$$\left( 3250 - 1.96 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} ; 3250 + 1.96 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \right)$$

$$(3232.10773 ; 3267.89227)$$

b) Repetimos el proceso para  $\alpha=0.01$   $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$

$\uparrow$   
 $P(Z > z) = 0.005$

Reemplazando  $\left( 3250 - 2.58 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}; 3250 + 2.58 \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \right) \Rightarrow (3226.44793; 3273.55207)$

La longitud del intervalo en a) es: 35.78454

La longitud del intervalo en b) es: 47.10414

Notar que la seguridad de que el verdadero parámetro se encuentre en el intervalo hallado es mayor en el intervalo b) que en el a), pero la longitud del intervalo b) es mayor que la del intervalo a).

### Precisión de la estimación

Al aumentar el nivel de confianza se perdió **precisión en la estimación**, ya que a menor longitud hay mayor precisión en la estimación.

La longitud del intervalo se calcula como  $L = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Note que

- si  $n$  y  $\sigma$  están fijos, a medida que  $\alpha$  disminuye, aumenta y por lo tanto  $L$  aumenta.
- Si  $\alpha$  y  $\sigma$  están fijos, a medida que  $n$  aumenta,  $L$  disminuye.

### Ejemplo 8.3

¿Qué tamaño  $n$  de muestra se necesita para que el intervalo tenga nivel de confianza 99% y longitud la mitad de la longitud del intervalo hallado en a)?

$$L = 2z_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

Reemplazando

$$L = 2 * 2.58 * \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

despejando  $n \geq 83.170$

Por lo tanto, se necesita 84 especímenes.

### Elección del tamaño de la muestra

La fórmula general para el tamaño de la muestra  $n$  necesario para asegurar una extensión de intervalo  $l$  es

$$n = \left( 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{l} \right)^2$$

### Precisión del estimador

Si estimamos puntualmente al parámetro  $\mu$  con  $\bar{X}$  estamos cometiendo un error en la estimación menor o igual a

$$\frac{L}{2} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

que se conoce como **precisión del estimador**

### Ejemplo 8.4

Se estima que el tiempo de reacción a un estímulo de cierto dispositivo electrónico está distribuido normalmente con desviación estándar de 0.05 segundos.

¿Cuál es el número de mediciones temporales que deberá hacerse para que la confianza de que el error de la estimación de la esperanza no exceda de 0.01 sea del 95%?

Nos piden calcular  $n$  tal que

$$\frac{L}{2} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.01 \quad \text{con } \alpha=0.05 \quad z_{0.025} = 1.96$$

$$n \geq \left( 1.96 \frac{0.05}{0.01} \right)^2 = (1.96 * 5)^2 = 96.04 \quad \therefore n = 97$$

---

### Precisión del estimador

El intervalo

$$\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

proporciona buenos resultados para muestras tomadas de una población normal o para muestras de tamaño  $n \geq 30$

---

### Intervalo de Confianza para la media de una Distribución normal con varianza desconocida

Nuevamente usamos como estimador a  $\bar{X}$ .

Pero como pivote usamos

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

Se puede probar que  $T$  tiene una distribución llamada **Student con parámetro  $n-1$**

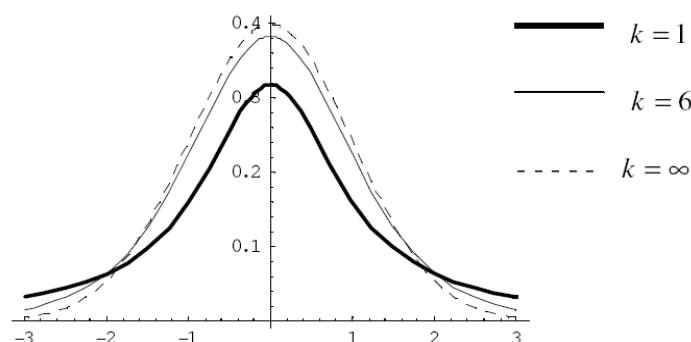
$$T \sim t_{n-1}$$

---

### Distribución de Student con $k$ grados de libertad

#### Características

- Está centrada en cero, tiene forma de campana como la normal pero tiende a cero más lentamente.
- Se puede probar que cuando  $k \rightarrow \infty$  la *fdp* de la Student tiende a la *fdp* de la  $N(0,1)$ .



Ahora que conocemos la distribución de  $T$  podemos hallar el valor  $t$  tal que  $P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha$

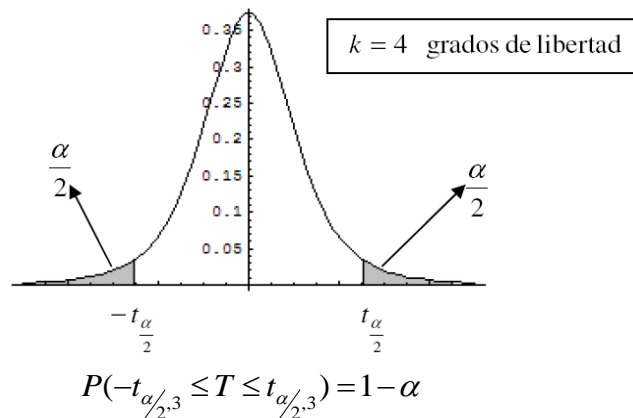
Es decir

$$P\left(-t \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t\right) = 1 - \alpha$$

Despejamos  $\mu$  como hicimos en el ejemplo anterior

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - t \frac{S}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + t \frac{S}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2}\right) = 1 - \alpha$$

$$F\left(t_{\alpha/2, 3}\right) = 1 -$$



Por simetría se deduce que el valor de  $t$  que verifica  $P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha$

es el que cumple con  $F(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

siendo  $F(t)$  la *fda* de la v.a.  $T \sim t_{n-1}$  y lo denominaremos  $t_{\alpha/2, n-1}$

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  desconocido, un intervalo de confianza para  $\mu$  de un nivel  $1 - \alpha$  es

$$\left( \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

### Ejemplo 8.5

Se hicieron 10 mediciones sobre la resistencia de cierto tipo de alambre con las que se calculó

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 10.48 \quad S = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 1.36$$

Suponga  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Se desea obtener un intervalo de confianza para la esperanza poblacional  $\mu$  al 90 %.

#### Solución

Tenemos que  $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1$ . De la Tabla de la *t de Student* tenemos que  $t_{0.05, 9} = 1.8331$ .

Entonces el intervalo de confianza buscado es:

$$\left( 10.48 - 1.8331 \frac{1.36}{\sqrt{10}}; 10.48 + 1.8331 \frac{1.36}{\sqrt{10}} \right) \Rightarrow (9.69; 11.27)$$

## Intervalo de Confianza para la media de una Distribución normal con varianza desconocida

Si la muestra se toma de una distribución con  $\sigma^2$  desconocido, y el tamaño de la muestra es grande ( $n \geq 30$ ), el estadístico

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1) \quad \left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

El nivel de este intervalo para  $\mu$  es **aproximadamente**  $1-\alpha$

## Intervalo de Confianza

$n \geq 30$	$n < 30$
<ul style="list-style-type: none"><li><math>\sigma</math> conocida <math>Z \sim N(0,1)</math> <math>\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li><math>\sigma</math> conocida <math>Z \sim N(0,1)</math> <math>\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)</math></li></ul>
<ul style="list-style-type: none"><li><math>\sigma</math> desconocida <math>Z \sim N(0,1)</math> <math>\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>Si no <math>T \sim t_{n-1}</math> <math>\left( \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)</math></li></ul>

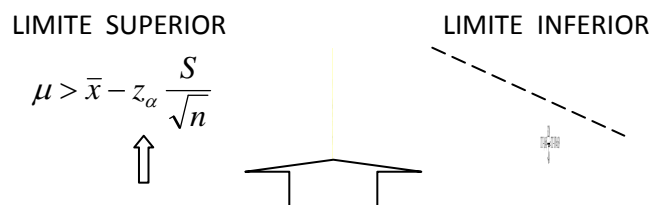
## Intervalo de Confianza Unilaterales

Puede ocurrir que sólo se requiera uno de los límites del intervalo.

Ejemplo

- Límite superior de 95% para el tiempo de reacción promedio de una persona a un estímulo.
- Límite de confianza inferior para el tiempo de vida promedio de cierto tipo de componentes.

Si se dispone de una muestra grande, un límite de confianza para  $\mu$  es



## Ejemplo

Una muestra de 48 observaciones de resistencia al corte de cierto material tiene una media muestral de 17.17 y una desviación estándar muestral de 3.28.

Un límite inferior para la resistencia al corte promedio  $\mu$  con nivel de confianza de 95% es

$$P(Z < 1.645) = 0.95$$

---

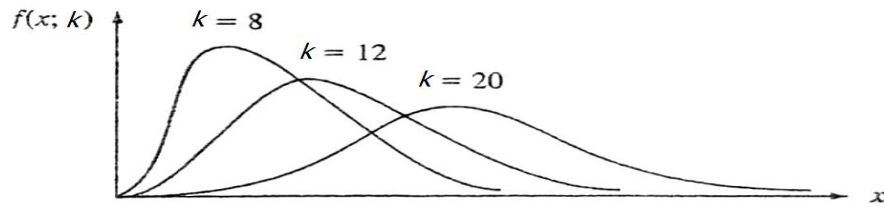
### Intervalo de Confianza para la varianza de una Distribución normal

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Tomamos como estimador puntual de  $\sigma^2$  a

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Luego construimos el estadístico  $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar  $\sigma^2$  y tiene una distribución conocida, se puede probar que  $X$  tiene una distribución llamada **ji-cuadrado con  $n-1$  grados de libertad**

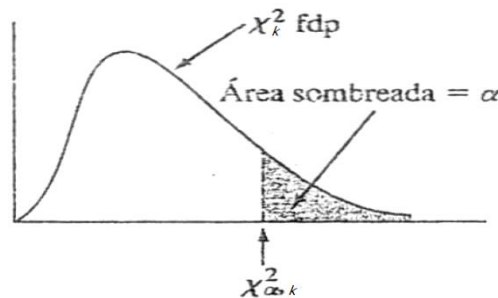


Gráfica de la función ji-cuadrado

---

### Distribución ji-cuadrada

Sea  $\chi^2_{\alpha, k}$  llamado valor crítico ji-cuadrado, el número en el eje de medición tal que  $\alpha$  del área bajo la curva de ji-cuadrada con  $k$  grados de libertad se ubica a la derecha de  $\chi^2_{\alpha, k}$ .



---

### Intervalo de Confianza para la varianza de una Distribución normal

Para desarrollar el intervalo de confianza planteamos hallar dos números  $a$  y  $b$  tales que

$$P(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b) = 1 - \alpha$$

Se puede probar que

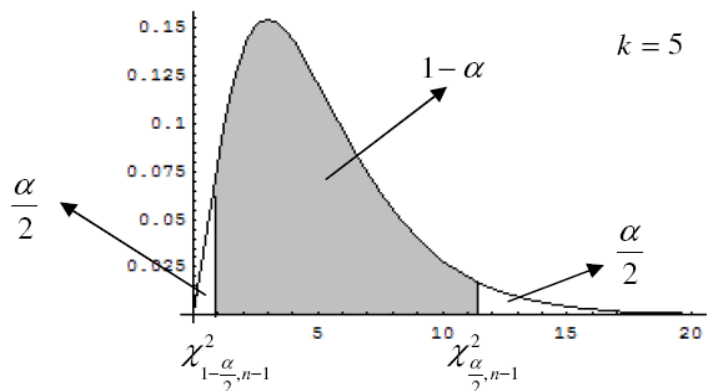
$$a = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \quad b = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

Por lo tanto

$$P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \alpha$$

De donde se obtiene

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1 - \alpha$$





---

### Intervalo de Confianza para la varianza de una Distribución normal

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , un intervalo de confianza para  $\sigma^2$  de un nivel  $1-\alpha$  es

$$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right)$$

---

### Intervalo de Confianza para la desviación de una Distribución normal

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , un intervalo de confianza para  $\sigma$  de un nivel  $1-\alpha$  es

$$\left( \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}}; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \right)$$

---

### Ejemplo

Un fabricante de detergente busca que todas las botellas sean llenada de la misma forma con una desviación estándar  $s$  del proceso de llenado menor a 0.15 onzas de líquido. Suponga que la distribución del volumen de llenado es normal.

Se toma una muestra de 20 botellas y se obtiene  $S^2 = 0.0153$ .

Hallar el IC de nivel 0.95 para la verdadera varianza del volumen de llenado.

#### Solución

La v.a. de interés es  $X$ : "volumen de llenado de una botella".  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma$  desconocido.

Tenemos  $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05$ .

$S^2 = 0.0153$

El intervalo se calcula así:

$$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right)$$

Busquemos en la  
tabla de  $\chi^2$  los datos  
que faltan.

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.025, 19} = 32.85$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.975, 19} = 8.91$$

$$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right) = \left( \frac{(20-1)(0.0153)}{32.85}; \frac{(20-1)(0.0153)}{8.91} \right) \Rightarrow (0.00884; 0.0326)$$

---

### Intervalo de Confianza para una proporción

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  donde cada  $X_i \sim B(1, p)$ , con sólo dos valores posibles 0 o 1 (éxito), donde *éxito* identifica a un individuo u objeto que posee una característica de interés.

La v.a.  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  es una  $B(n, p)$ .

Por lo tanto  $\hat{p} = \frac{X}{n}$   $\Leftarrow$

representa la proporción de  
individuos exitosos de la muestra

### PASO 1

Tomaremos como estimador a  $\hat{P} = \frac{X}{n}$  por tener las siguientes características: es insesgado y es consistente.

Vamos a verificarlo

$$E(\hat{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} np = p \quad V(\hat{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Por lo tanto, es insesgado y es consistente.

### PASO 2

Tomaremos como pivote la v.a.  $Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{V(\hat{P})}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \approx N(0,1)$

Si n es grande

Porque P es consistente

### PASO 3

Para construir el intervalo de confianza al nivel de confianza  $1 - \alpha$  partiendo del pivote Z, planteamos la ecuación

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$$

donde la incógnita es el número real z.

## Intervalo de Confianza para una proporción

Si es la proporción de observaciones de una muestra aleatoria de tamaño n que verifica una propiedad de interés, entonces un IC para la proporción p de la población que cumple dicha propiedad de nivel aproximadamente  $1 - \alpha$  es

$$\left( \hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}; \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right)$$

La forma utilizada para obtener el IC para una proporción depende de la aproximación normal a la distribución binomial.

Por lo tanto el IC se puede utilizar si  $n\hat{P} \geq 10$  y  $n(1-\hat{P}) \geq 10$

es decir, **la muestra debe contener un mínimo de diez éxitos y diez fracasos.**

## Ejemplo

Un fabricante desea saber la proporción de productos que están fallados. De 140 elegidos al azar, 35 están fallados.

- Calcular un IC del 99% para la proporción poblacional p.
- ¿De qué tamaño deberá extraerse la muestra a fin de que la proporción muestral no difiera de la proporción poblacional en más de 0.03 con un 95% de confianza?

$n=140$  (muestra grande);

El nivel de confianza es  $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha/2 = 0.005$

$z_{0.005} = 2.58$  (de la tabla normal estandarizada)

El intervalo buscado es

$$\hat{P} = \frac{35}{140} = 0.25$$

$$\left( 0.25 - 2.58 \sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{140}}; 0.25 + 2.58 \sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{140}} \right) \Rightarrow (0.15558; 0.34441)$$