Matemática 3 – Curso 2016

<u>Práctica 5</u>: Distribución conjunta, suma y promedios de variables aleatorias. Ley de los grandes números. Teorema Central del Límite.

1) Se analizaron las longitudes y los anchos de la bandeja de plástico rectangular para un CD que está instalada en una computadora personal. Las mediciones se redondearon al milímetro mas cercano.
Sean X: “la longitud medida” e Y: “ el ancho medido”.
La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por

Y \ X	***129***	***130***	***131***
15	0.12	0.42	0.06
16	0.08	0.28	0.04

a) Determine la probabilidad de que la cubierta del CD tenga una longitud de 129 mm.
b) Determine la probabilidad de que una cubierta de CD tenga ancho de 16 mm.
c) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.
d) Hallar E(X), E(Y), V(X), V(Y).

2) En el ejercicio anterior, calcule la f.d.p. condicional $p_{Y/X}$ (y/x = 130)
¿Son X e Y independientes?. Explique.

3) Un software puede hacer llamadas a dos subrutinas A y B. En una ejecución elegida al azar, sean
X: “número de llamadas hechas a la subrutina A”
Y: “número de llamadas hechas a la subrutina B”
La f.d.p. conjunta de (X , Y) esta dada por

	Y		
X	1	2	3
1	0.15	0.10	0.10
2	0.10	0.20	0.15
3	0.05	0.05	0.10

a) Determine las f.d.p. marginales de X e Y
b) Determine E(X), E(Y), V(X), V(Y)
c) Determine cov(X , Y)
d) ¿Son X e Y independientes?. Explique.

4) Con referencia al ejercicio anterior
a) Determine E(X+Y)
b) Determine V(X+Y) y σ_{X+Y}
c) Determine P(X+Y = 4)
d) Suponga que cada ejecución de la subrutina A tarda 100 ms y que cada ejecución de la subrutina B tarda 200 ms.
d1) Determine el número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.
d2) Encuentre la desviación estándar del número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.

5) Dos computadoras trabajan en forma independiente.
Sean X: “número de fallas semanales de la computadora 1” e
Y: “número de fallas semanales de la computadora 2”.
Las distribuciones están dadas por

x	0	1	2	3
p(x)	0.10	0.25	0.30	0.20

y	0	1	2	3
p(y)	0.15	0.10	0..2	0.25

a) Determine P(X = Y) , es decir ambas computadoras tienen el mismo número de fallas
b) Determine P(X > Y), es decir el número de fallas de la computadora 1 es mayor que el de la computadora 2.

6) OPTATIVO
El número de clientes formados en una caja de supermercado es una v.a. X con f.d.p. dada por

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.10	0.25	0.30	0.20	0.10	0.05

Para cada cliente, el número de productos que compra es una v.a. Y con f.d.p.

y	1	2	3	4	5	6
$p(y)$	0.05	0.15	0.25	0.30	0.15	0.10

Suponga que el número de productos comprados por un cliente es independiente del número de productos comprados por cualquier otro cliente.
Sea la v.a. Z: "número total de productos que compran todos los clientes formados"
a) Determine P(X = 2, Z = 2)
b) Determine P(X = 2; Z = 6)
(Sugerencia: llamamos Y_i: "cantidad de productos comprados por el cliente i que está en la fila"
Si X = 2, entonces tenemos dos variables Y_1 e Y_2, las cuales son independientes.
Se puede escribir P(X = 2, Z = 2) = P(Z = 2/ X = 2).P(X = 2).
Intente escribir la probabilidad condicional P(Z = 2/ X = 2) en términos de las variables Y_1 e Y_2).

7) El tiempo de vida de cierto componente, en años, tiene una función de densidad $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, 0 si $x \leq 0$. Están disponibles dos de dichos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes. Tan pronto como falle el primer componente, éste se reemplaza por el segundo. Sean las variables aleatorias:
X: "tiempo de vida del primer componente" e Y: "tiempo de vida del segundo componente"
a) Determine $P(X \leq 1 , Y \leq 1)$
b) Determine E(X) , E(Y)
c) Determine E(X+Y)

8) Una instalación de luz tiene dos focos A y B. La duración del foco A se puede considerar una v.a. X con distribución normal con media 800 hs. y desviación estándar de 100 hs. La duración del foco B se puede considerar una v.a. Y con distribución normal con media 900 hs. y desviación estándar de 150 hs. Suponga que las duraciones de los focos son independientes.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y - X > 0\}$ y qué distribución tiene Y - X)
b) Otra instalación de luz tiene solo un foco. Se pone uno del tipo A y cuando se funde se instala otro de tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que el la duración total de ambos sea mayor que 2000 hs?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y+X > 2000\}$ y qué distribución tiene Y + X)

9) Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias normales independientes con una media de 1.4 minutos y una desviación estándar de 1 minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que se puedan procesar los pedidos de 16 personas en menos de media hora?.

10) El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén, tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponga que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos?

b) Enuncie la propiedad teórica que utiliza para resolver el inciso anterior.

11) Unos tambores, con una etiqueta de 30 L, son llenados con una solución proveniente de una pileta grande. Se agrega una cantidad aleatoriamente de la solución en cada tambor con media de 30.01 L y desviación estándar de 0.1 L.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de la solución contenida en 50 tambores sea mayor a 1500 L?

b) Si la cantidad total de la solución en la pileta es de 2401 L, ¿cuál es la probabilidad de que puedan llenarse 80 tambores sin que se acabe la solución?

c) ¿Cuánta solución debe contener la pileta para que la probabilidad sea 0.9 de que puedan llenarse 80 tambores sin que se acabe la solución?

12) Se arman bolsas de caramelos donde el número de caramelos de dulce de leche es una v.a. X con distribución:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.48	0.39	0.12	0.01

a) Se toman 100 bolsas de caramelos. Hallar la probabilidad de que en promedio contengan a lo sumo un caramelo de dulce de leche. (Sugerencia: considere las variables Xi: " nº de caramelos en la bolsa i" con i = 1, 2, …, 100)

b) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que menos de 35 bolsas no contengan caramelos de dulce de leche?. (Sugerencia: considere la v.a. Y: " nº de bolsas sin caramelos de dulce de leche", piense cuál es la distribución de Y).

13) La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/pulg^2 y una desviación estándar de 500 lb/pulg^2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?

b) Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en la parte a) a partir de la información dada?

14) Si el 3% de las válvulas manufacturadas por una compañía son defectuosas, hallar la probabilidad de que en una muestra de 100 válvulas:

i) 0, ii) más de 5, iii) entre 1 y 3 , sean defectuosas.

a) Use la aproximación normal a la binomial.

b) Use la distribución binomial y haga el cálculo con la ayuda de un software de matemática (o una calculadora).