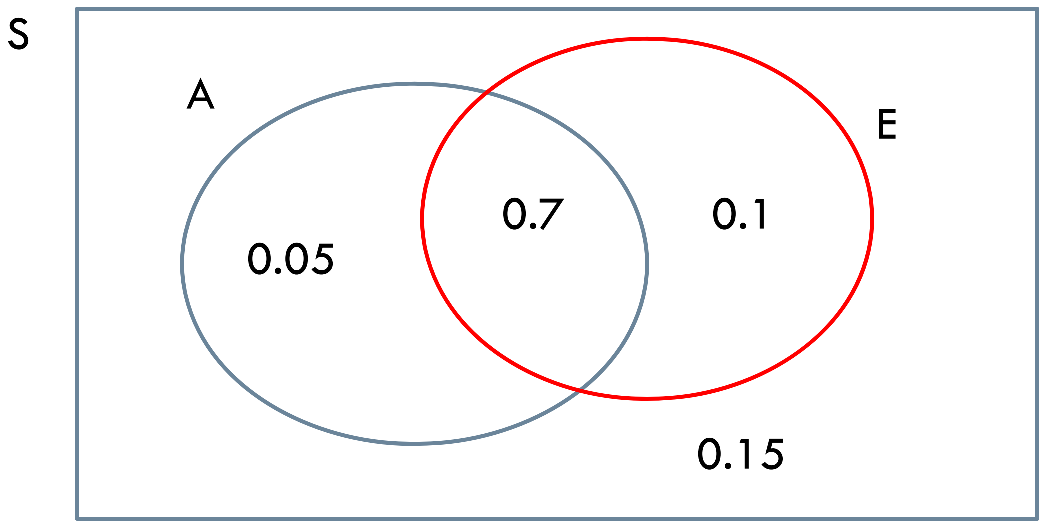
Probabilidad Condicional

- Hasta ahora nos hemos concentrado en calcular probabilidades de eventos aislados.
- Esto no necesariamente siempre es así. En ocasiones nos interesa calcular alguna probabilidad luego de que algún otro evento ha ocurrido.
- Es decir que la probabilidad del 2do. evento debe calcularse en referencia al espacio muestral determinado por el 1er. evento.

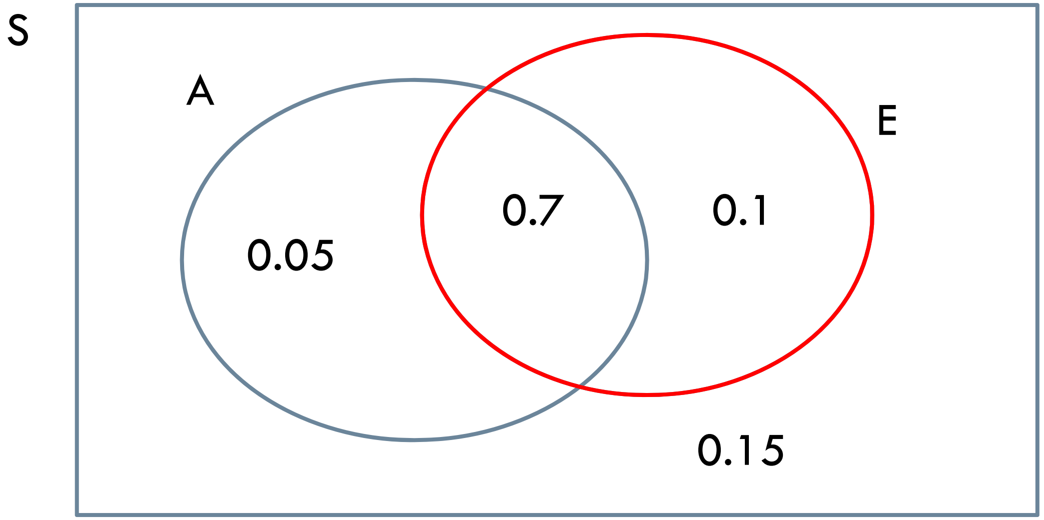
Retomemos el Ejercicio 1.3

- ε : "Tomar al azar un alumno del curso"
- Eventos : A = "el alumno aprobó el examen"
  E = "el alumno estudió para el examen"



Probabilidad condicional. Ejemplo

- ¿Cuál sería la probabilidad de que un alumno que haya estudiado, también haya aprobado el examen?



Sabemos que el evento E ocurre, es decir, el alumno ha estudiado.

Intuitivamente

$$P(A/E)=\frac{0.7}{0.8}=0.875$$

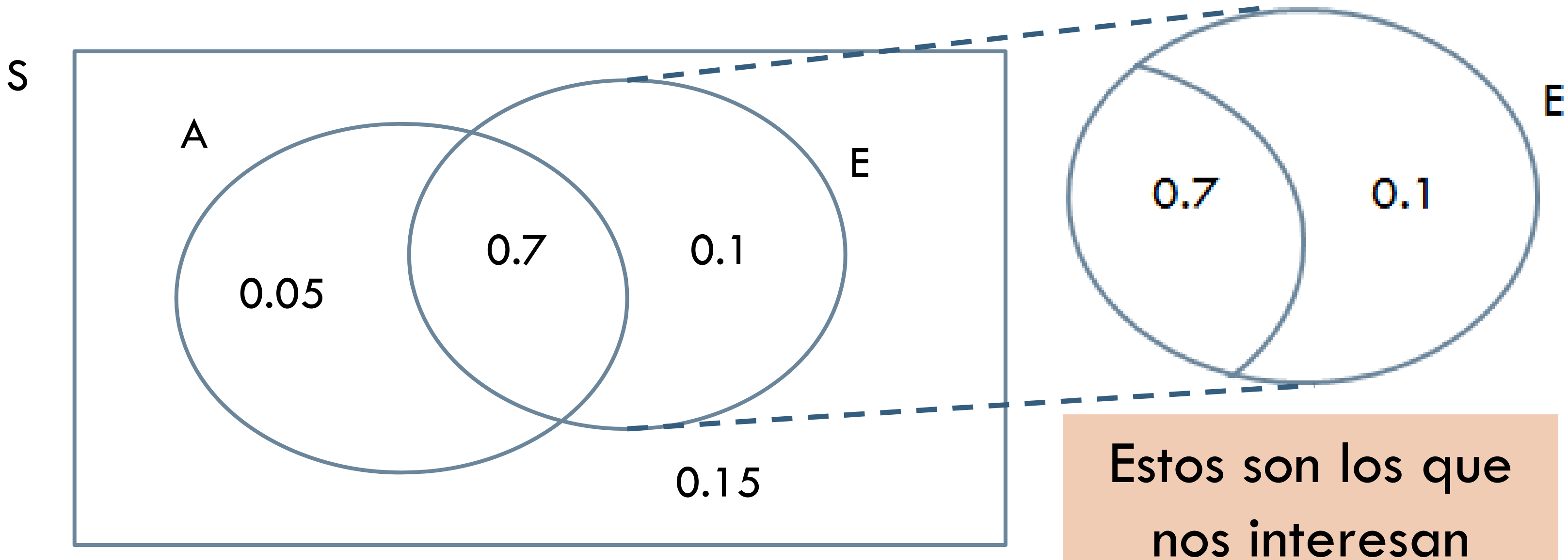
Probabilidad condicional

- Dados dos eventos A y B, con P(B)>0, la probabilidad condicional de A dado que ocurrió B se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad condicional. Ejemplo

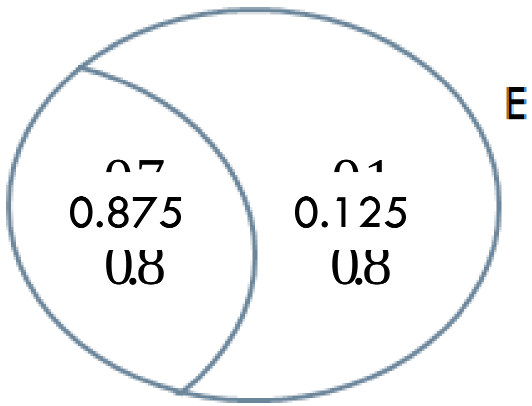
- Al calcular una probabilidad sobre los que estudiaron, se produce un cambio del espacio muestral



Estos son los que nos interesan

Probabilidad condicional

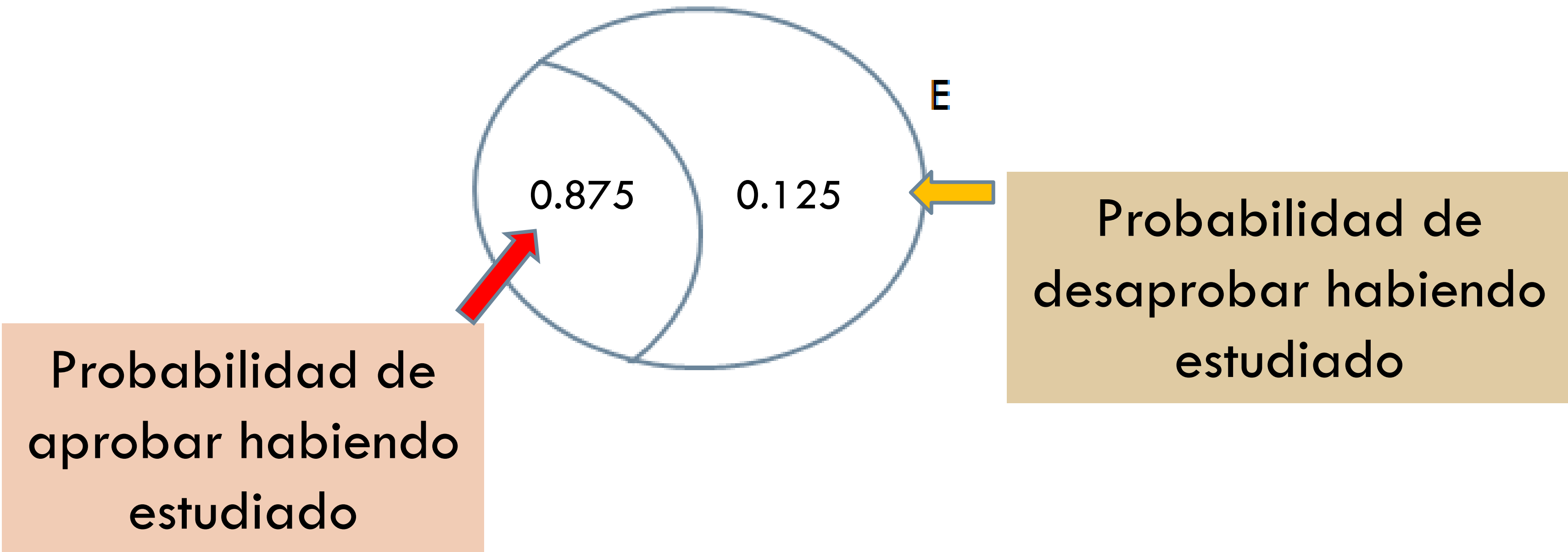
- Estas probabilidades respetan el espacio muestral original.



- Si ahora E es el nuevo espacio muestral, debemos hacer que sumen 1 manteniendo la proporción.
- Es decir que debemos dividirlas por P(E).

Probabilidad condicional

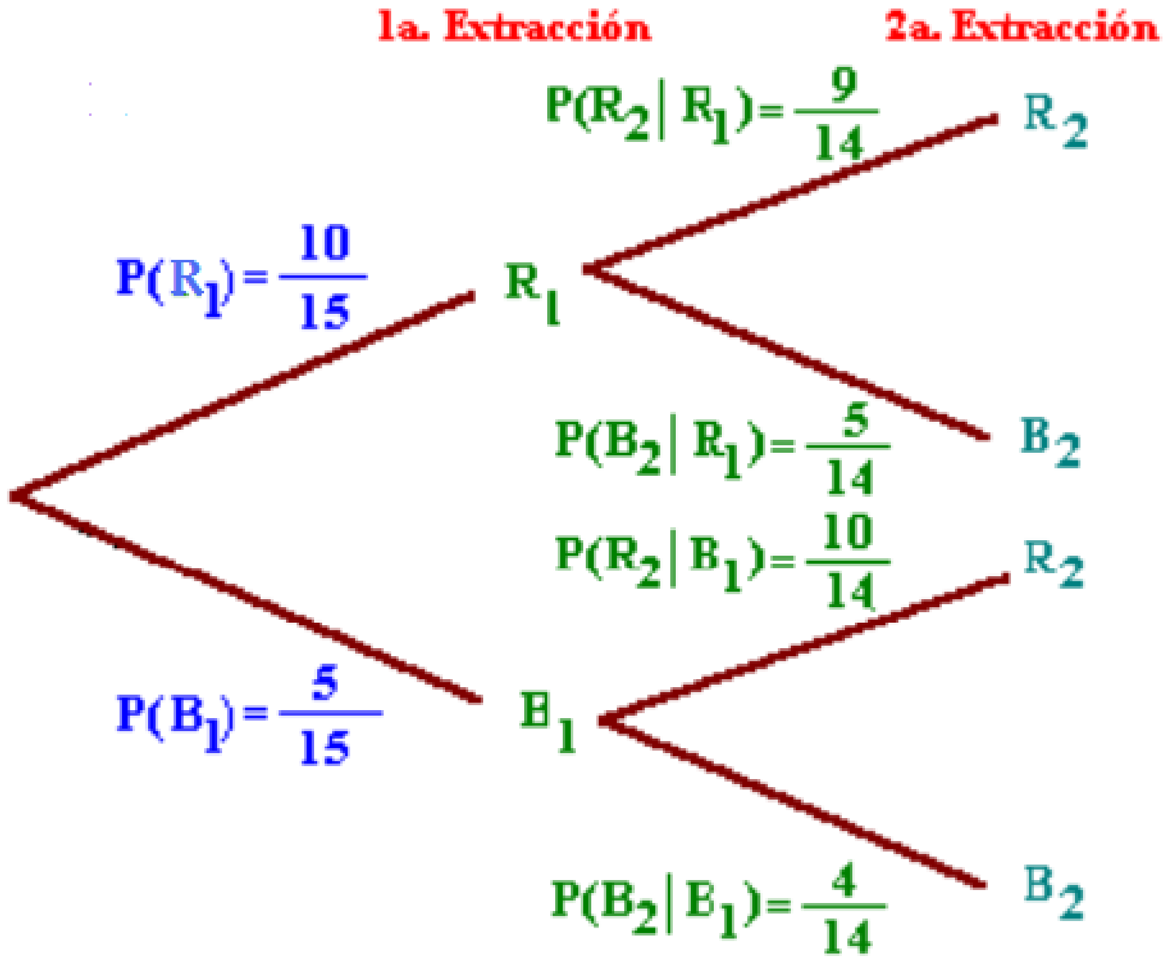
- Estas probabilidades corresponden al nuevo espacio muestral.



Ejemplo

- Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:
  - La primera semilla sea roja?
  - La segunda semilla sea blanca dado que la primera fue roja?

Diagrama de árbol



Ejercicio 1.8

- Una persona lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras sabiendo que salió por lo menos una cara?
- Compare el resultado obtenido con la probabilidad de que salgan 3 caras sin tener ninguna información adicional.

Ejercicio 1.9

- Se dispone de un lote formado por 20 artículos defectuosos y 80 artículos sin defectos.
- Considere los eventos
  - A = "el 1er. artículo es defectuoso"
  - B = "el 2do. artículo es defectuoso"
- Calcular P(A) y P(B) suponiendo que los artículos se eligen **con sustitución**

y si se eligen
sin sustitución?

Teorema de la multiplicación

- De la definición de probabilidad condicional se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B)$$

y considerando $P(B|A)$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A)$$

Se conocen como **teorema de la multiplicación**

Teorema de la multiplicación

- ¿Qué pasa con la intersección de tres eventos?

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \cap (A \cap B))$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C | (A \cap B)) \,.\, P(A \cap B)$$

- Usando que $P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A)$

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B|A) \,.\, P(C|(A \cap B))}$$

Teorema de la multiplicación

- Para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puede generalizarse de la siguiente forma

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) . P(A_2 | A_1) . P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

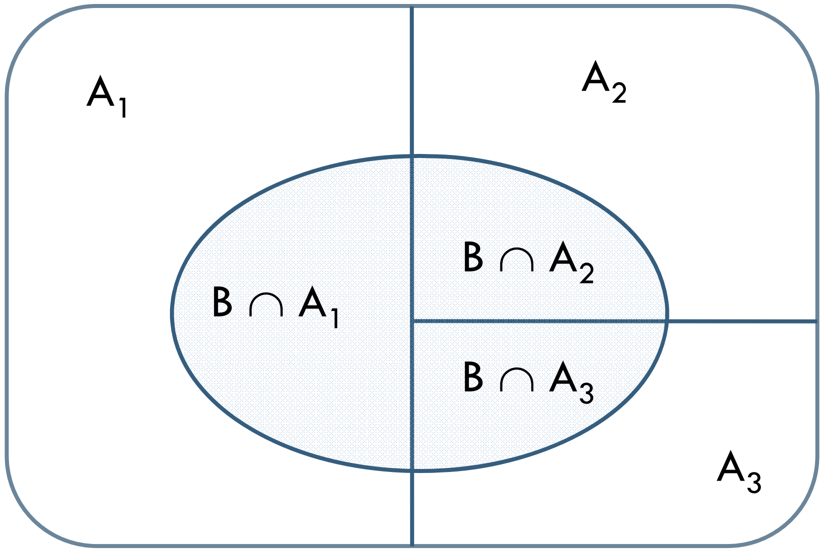
Ejercicio 1.10:Venta de aparatos de TV

- Un comercio vende tres tipos de TV: 50% son de la marca 1, 30% son de la marca 2, 20% son de la marca 3. Todos tienen garantía de 1 año.
- Se sabe que el 25% de los TV de la marca 1, el 20% de los TV de la marca 2 y el 10% de la marca 3, requieren trabajo de garantía.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elegido al azar haya comprado un TV de la marca 1 que requiera trabajo de garantía?

Ejercicio 1.10:Venta de aparatos de TV

- $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

  siendo A_i = "el aparato es de la marca i"
- B= "el aparato requiere trabajo de garantía"



$P(A_1)=0.5$; $P(A_2)=0.3$; $P(A_3)=0.20$

$P(B|A_1)=0.25$; $P(B|A_2)=0.2$;
$P(B|A_3)=0.10$

$P(A_1 \cap B) = ?$

$$P(B \cap A_1) = P(B \mid A_1)\, P(A_1) =$$
$$0.25*0.5 = 0.125$$

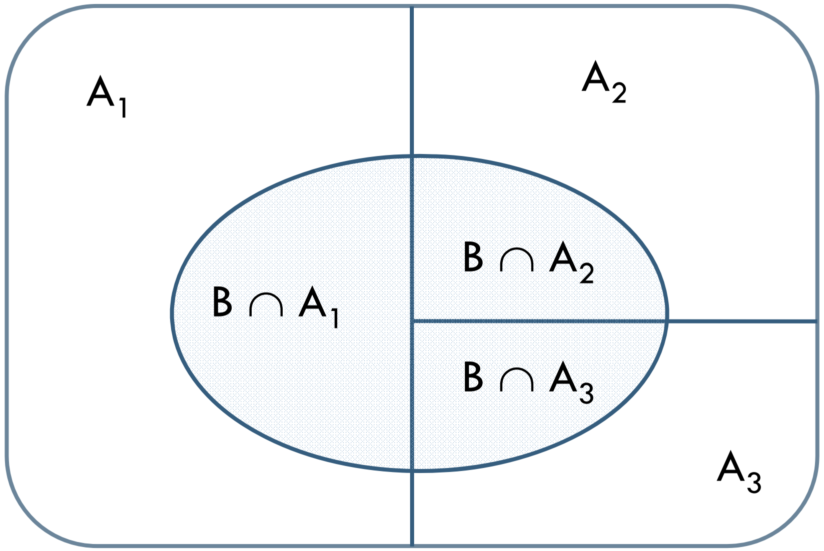
Ejercicio 1.10:Venta de aparatos de TV

- Un comercio vende tres tipos de TV: 50% son de la marca 1, 30% son de la marca 2, 20% son de la marca 3. Todos tienen garantía de 1 año.
- Se sabe que el 25% de los TV de la marca 1, el 20% de los TV de la marca 2 y el 10% de la marca 3, requieren trabajo de garantía.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elegido al azar haya comprado un TV de la marca 1 **sabiendo que** requiere trabajo de garantía?

Ejercicio 1.10:Venta de aparatos de TV

- $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

  siendo A_i = “el aparato es de la marca i”
- B= “el aparato requiere trabajo de garantía”



$P(A_1)=0.5$; $P(A_2)=0.3$; $P(A_3)=0.20$

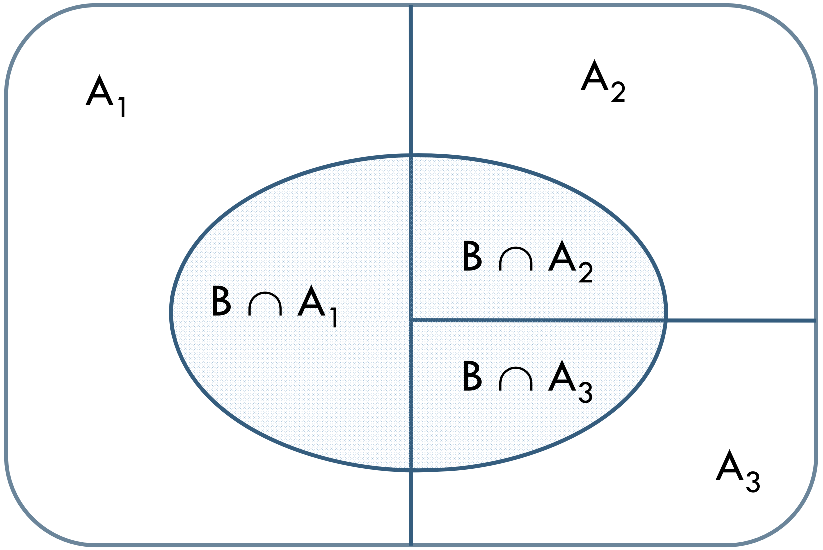
$P(B|A_1)=0.25$; $P(B|A_2)=0.2$; $P(B|A_3)=0.10$

$P(A_1|B) = ?$

$P(A_1|B) = P(B \cap A_1) / P(B)$

Ejercicio 1.10:Venta de aparatos de TV

- $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ siendo A_i = "el aparato es de la marca i"
- B= "el aparato requiere trabajo de garantía"



$$P(B \cap A_1) = P(B|A_1)\,P(A_1) = $$
$$= 0.25 * 0.50 = 0.125$$

$$P(B \cap A_2) = P(B|A_2)\,P(A_2) = $$
$$= 0.2 * 0.3 = 0.06$$

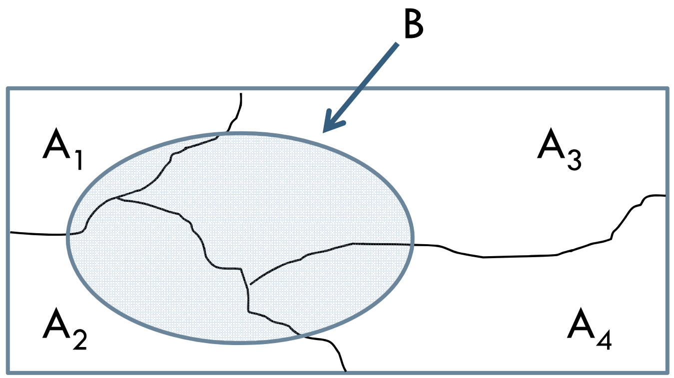
$$P(B \cap A_3) = P(B|A_3)\,P(A_3) = $$
$$= 0.1 * 0.2 = 0.02$$

$$P(B) = 0.125 + 0.06 + 0.02 = 0.205$$

$$P(A_1|B) = 0.125 \,/\, 0.205 = 0.61$$

Teorema de la probabilidad total

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral S. Es decir que,
  - $A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \cup A_n \ = S$
  - $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, si $i \neq j$
  - $P(A_i)>0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$



- Para cualquier evento B de S

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1)+P(B \mid A_2)P(A_2)+ \ \ldots \ + P(B \mid A_n)P(A_n)$$

Ejemplo

- Se ha publicado el resultado del último examen de un curso al cual se presentaron 500 alumnos.

	Aprobados	Desaprobados	
Recursantes	60	25	85
No Recursantes	235	180	415
	295	205	500

- ¿ Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un alumno aprobado de la lista, se trate de un alumno recursante?

Teorema de Bayes

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de S
  - $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
  - $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, si $i \neq j$
  - $P(A_i)>0 \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$
- Para cualquier evento B de S

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

- Se conoce
  - La probabilidad de cada elemento de la partición.
  - La probabilidad de B cuando ocurre c/u de los eventos de la partición.

Ejercicio 1.11

- En un determinado grupo de gente hay personas rubias, morochas y pelirrojas. El 60% de la gente es morocha, el 30% rubia y el 10% pelirroja.
- El 50% de los rubios tiene ojos claros, el 40% de los pelirrojos tiene ojos claros y el 25% de los morochos tiene ojos claros.
- Si una persona elegida al azar tiene ojos claros, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

Ejercicio 1.12

- El parte meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:

  a) Que llueva: probabilidad del 50%.

  b) Que nieve: probabilidad del 30%

  c) Que haya niebla: probabilidad del 20%.

- Según estos estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:

  a) Si llueve: probabilidad de accidente del 20%.

  b) Si nieva: probabilidad de accidente del 10%

  c) Si hay niebla: probabilidad de accidente del 5%.

- Resulta que efectivamente ocurre un accidente y como no estábamos en la ciudad no sabemos que tiempo hizo (llovío, nevó o hubo niebla). ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera lloviendo?

Ejercicio 1.13

- En una etapa de la producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres diferentes robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa varía para c/u de los tres, así como la proporción de art. que cada uno procesa, de acuerdo a la siguiente tabla.

Robot	Defectuosos	Art.Procesados
A	0.002	18%
B	0.005	42%
C	0.001	40%

- ¿Cuál es la proporción global de defectos producida por las tres máquinas?
- Si tomo un artículo al azar y resulta con defectos en la soldadura, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot C ?

Independencia

- Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A|B) = P(A)$$

La probabilidad de A no cambia porque ocurra B

Por lo tanto

- $P(A \cap B) = P(A|B).P(B) = P(A).P(B)$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Independencia de mas de 2 eventos

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, se dice que son independientes si

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\, P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

con $k=2, \ldots, n$

Ejemplo

- Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos:
  - *A: "la suma de los números obtenidos es igual a 7"*
  - *B: "el primer número obtenido es 4"*

¿Son *A* y *B* independientes?

¿Cuántos elementos tiene S?

Ejemplo

- Se tira un dado normal dos veces

  #S = 36

  - *A: "la suma de los números obtenidos es igual a 7"*

  $A=\{(1,6), (2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ $\therefore$ **P(A)=6/36**

  - *B: "el primer número obtenido es 4"*

  $B =\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$ $\therefore$ **P(B)=6/36**

$A \cap B = \{(4,3)\}$ $\therefore$ **$P(A \cap B)=1/36 = P(A).P(B)$**

$\therefore$ A y B son independientes

Ejemplo

- Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos:
  - *B: "el primer número obtenido es 4"*
  - C: *"la suma de los números obtenidos es igual a* ***6****"*

¿Son *B* y C *independientes?*

Ejemplo

- Se tira un dado normal dos veces

  #S = 36

  - *B: "el primer número obtenido es 4"*

  $B = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$ $\therefore$ **P(B)=6/36**

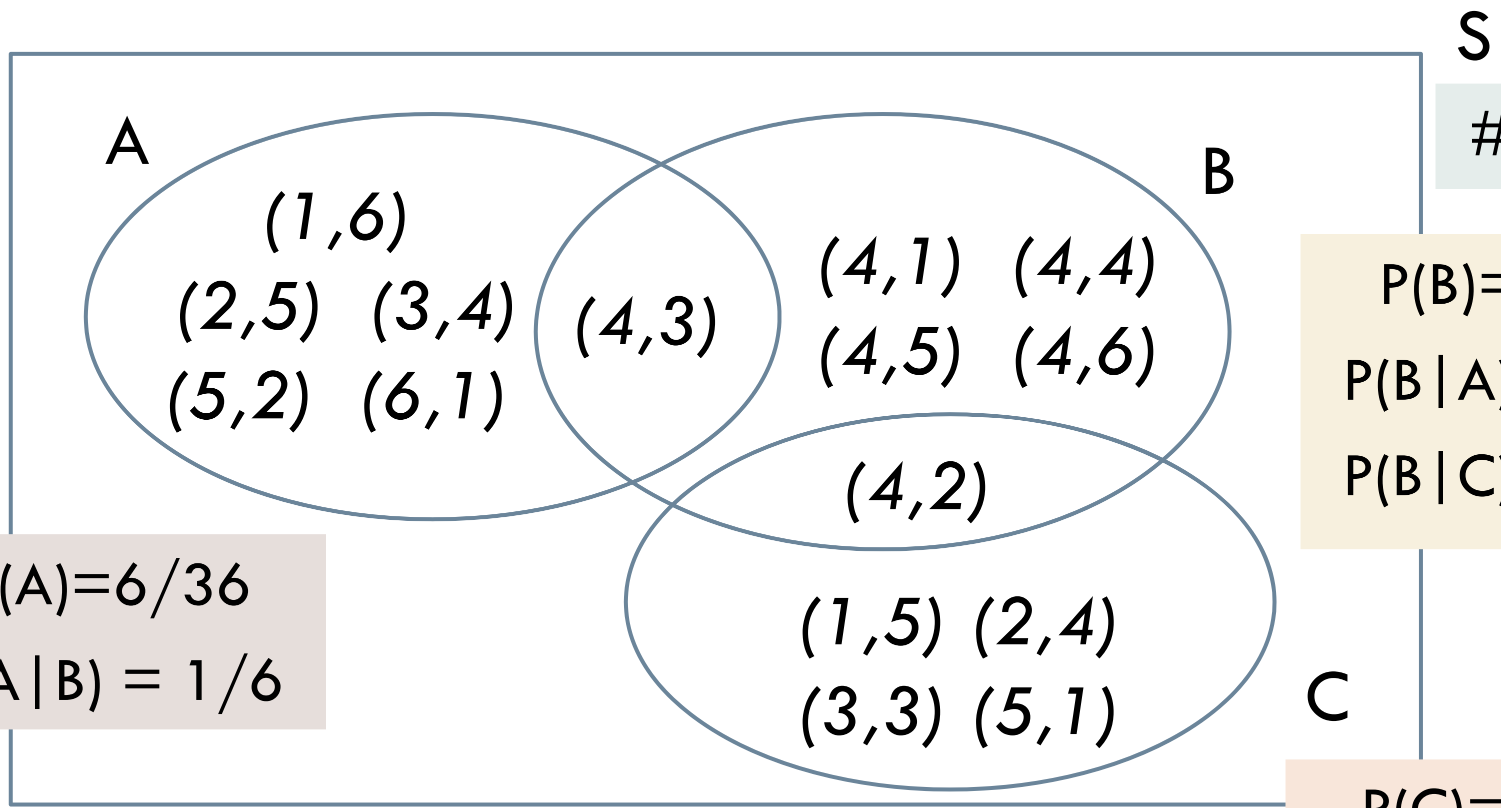
  - C: *"la suma de los números obtenidos es igual a 6"*

  $C=\{(1,5), (2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ $\therefore$ **P(C)=5/36**

$B \cap C = \{(4,2)\}$ $\therefore$ $\mathbf{P(B \cap C)=1/36 \neq P(C).P(B)}$

$\therefore$ B y C no son independientes

Ejemplo



#S=36

P(B)=6/36

P(B|A) = 1/6

P(B|C) = 1/5

P(A)=6/36

P(A|B) = 1/6

P(C)=5/36

P(C|B) = 1/6

¿Son A y C independientes?

Resumen

- **Probabilidad Condicional**
  - Hicimos hincapié en el cambio de espacio muestral
- **Teorema de la multiplicación**
  - $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$
- **Teor.de la Prob.total**
  - $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$
- **Teorema de Bayes**
  - Combina la definición de probabilidad condicional con el teorema de la probabilidad total.
- **Independencia de eventos**