Algoritmos
y
Estructuras de Datos

Cursada 2015

Prof. Alejandra Schiavoni
Prof. Catalina Mostaccio

Facultad de Informática – UNLP

Árboles Binarios de Búsqueda

Agenda

- Árbol Binario de Búsqueda
- Árboles AVL

Árbol Binario de Búsqueda: Definición

Un árbol binario de búsqueda es una colección de nodos conteniendo claves, que debe cumplir con una propiedad estructural y una de orden.

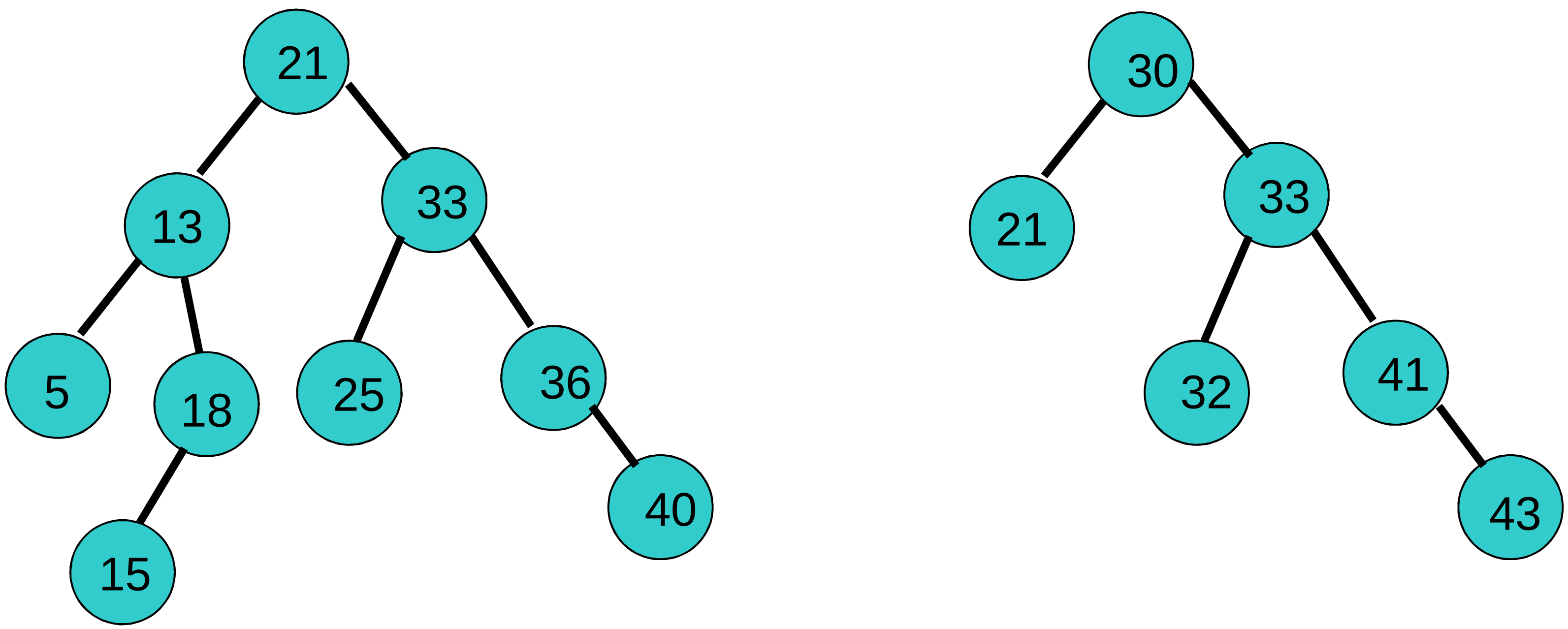
Árbol Binario de Búsqueda

La propiedad estructural: es un árbol binario

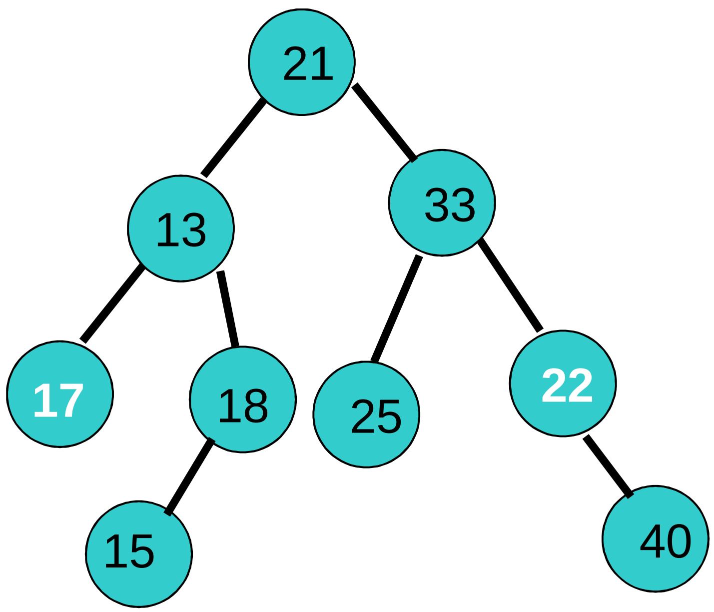
La propiedad de orden, es la siguiente:

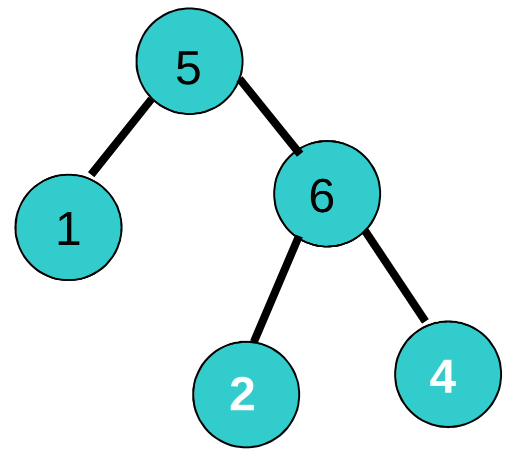
para cada nodo ***N*** *del árbol se cumple que todos los nodos ubicados en el* ***subárbol izquierdo*** *contienen claves* ***menores*** *que la clave del nodo* ***N*** *y los nodos ubicados en el* ***subárbol derecho*** *contienen claves* ***mayores*** *que la clave del nodo* ***N***

Árbol Binario de Búsqueda



Árbol Binario de Búsqueda
Por qué no son ABB?

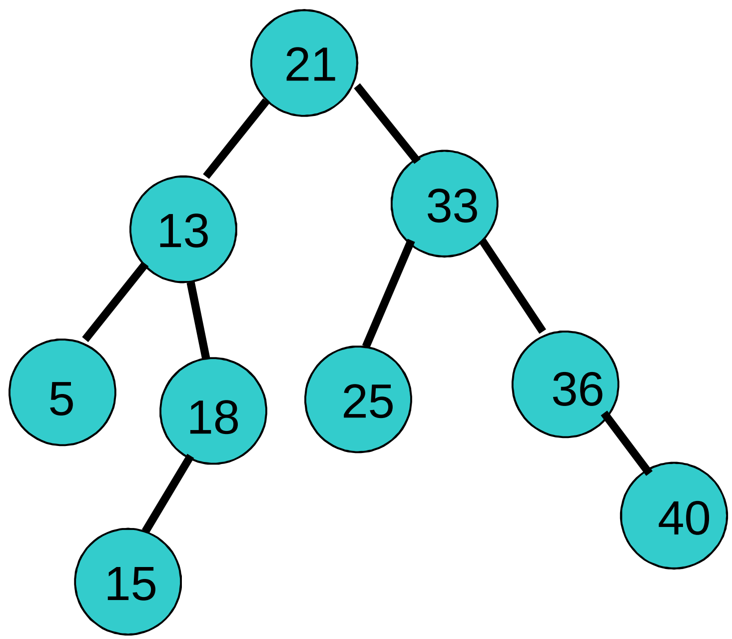




Árbol Binario de Búsqueda

Ejercicios:

Insertar: 22, 48 – Borrar : 15,25,13,36



Árboles AVL

- Definición
- Características
- Inserción
- Desbalanceo
- Rotaciones Simples y Dobles
- Eliminación

Árbol AVL: Definición

Un árbol AVL (Adelson–Velskii–Landis) es un árbol binario de búsqueda que cumple con la condición de estar balanceado

La propiedad de balanceo que cumple dice:

Para cada nodo del árbol, la diferencia de altura entre el subárbol izquierdo y el subárbol derecho es a lo sumo 1

Características

- *La propiedad de balanceo es fácil de mantener y garantiza que la altura del árbol sea de O(log n).*
- *En cada nodo del árbol se guarda información de la altura.*
- *La altura del árbol vacío es -1.*

Operaciones en un AVL

- *Búsqueda/Recuperación*
- *Inserción*
- *Eliminación*

*al insertar o eliminar un dato del AVL se **puede** perder la propiedad de **balanceo***

*Se debe **preservar** el **balanceo** al realizar estas operaciones sobre el árbol.*

Inserción en el árbol AVL

- *La inserción se realiza igual que en un árbol binario de búsqueda*
- *Puede destruirse la propiedad de balanceo*

Rebalancear el árbol

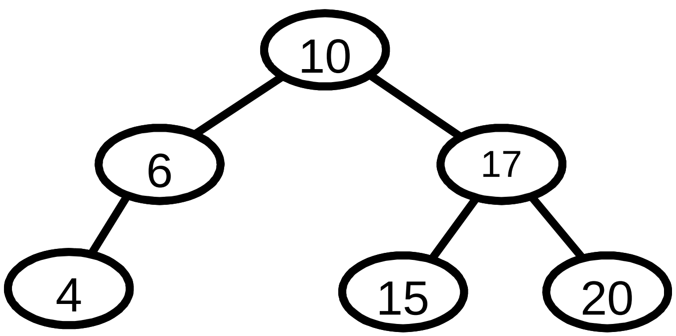
Problemas: Desbalanceo

- *Al insertar un elemento se actualiza la información de la altura de los nodos que están en el camino desde el nodo insertado a la raíz*

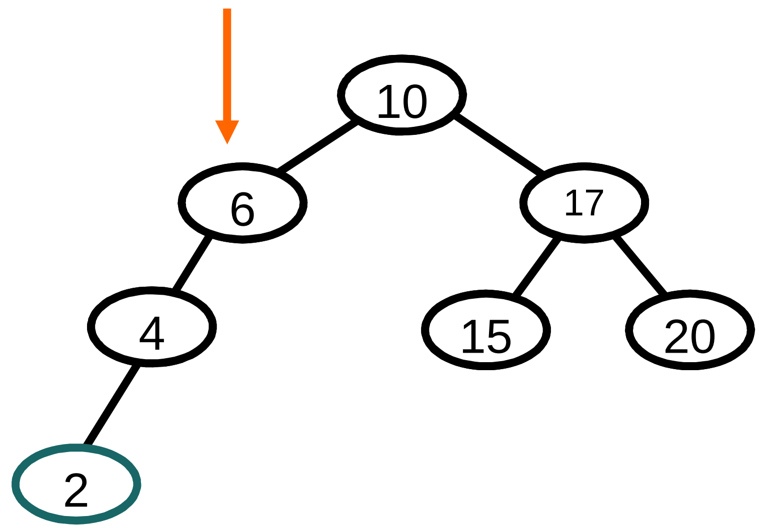
- *El desbalanceo sólo se produce en ese camino, ya que sólo esos nodos tienen sus subárboles modificados*

Problemas: Desbalanceo

Ejemplo al insertar un nodo



Se desbalancea el 6



Árbol después de insertar el 2

Rebalanceo del árbol

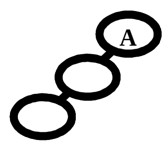
Para restaurar el balanceo del árbol:

- *se recorre el camino de búsqueda en orden inverso*
- *se controla el equilibrio/balanceo de cada nodo*
- *si está desbalanceado se realiza una modificación simple: rotación*
- *después de rebalancear el nodo, la inserción termina*
- *este proceso puede llegar a la raíz*

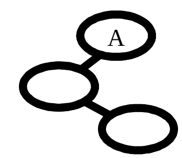
Rebalanceo del árbol

Hay 4 casos posibles de desbalanceo a tener en cuenta, según donde se hizo la Inserción. El nodo A es el nodo desbalanceado.

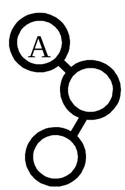
1. Inserción en el Subárbol IZQ del hijo IZQ de A



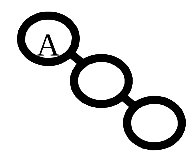
2. Inserción en el Subárbol DER del hijo IZQ de A



3. Inserción en el Subárbol IZQ del hijo DER de A



4. Inserción en el Subárbol DER del hijo DER de A



Rebalanceo del árbol

- *La solución para restaurar el balanceo es la* ***ROTACION***

La ***rotación*** *es una modificación simple de la estructura del árbol, que restaura la propiedad de balanceo, preservando el orden de los elementos*

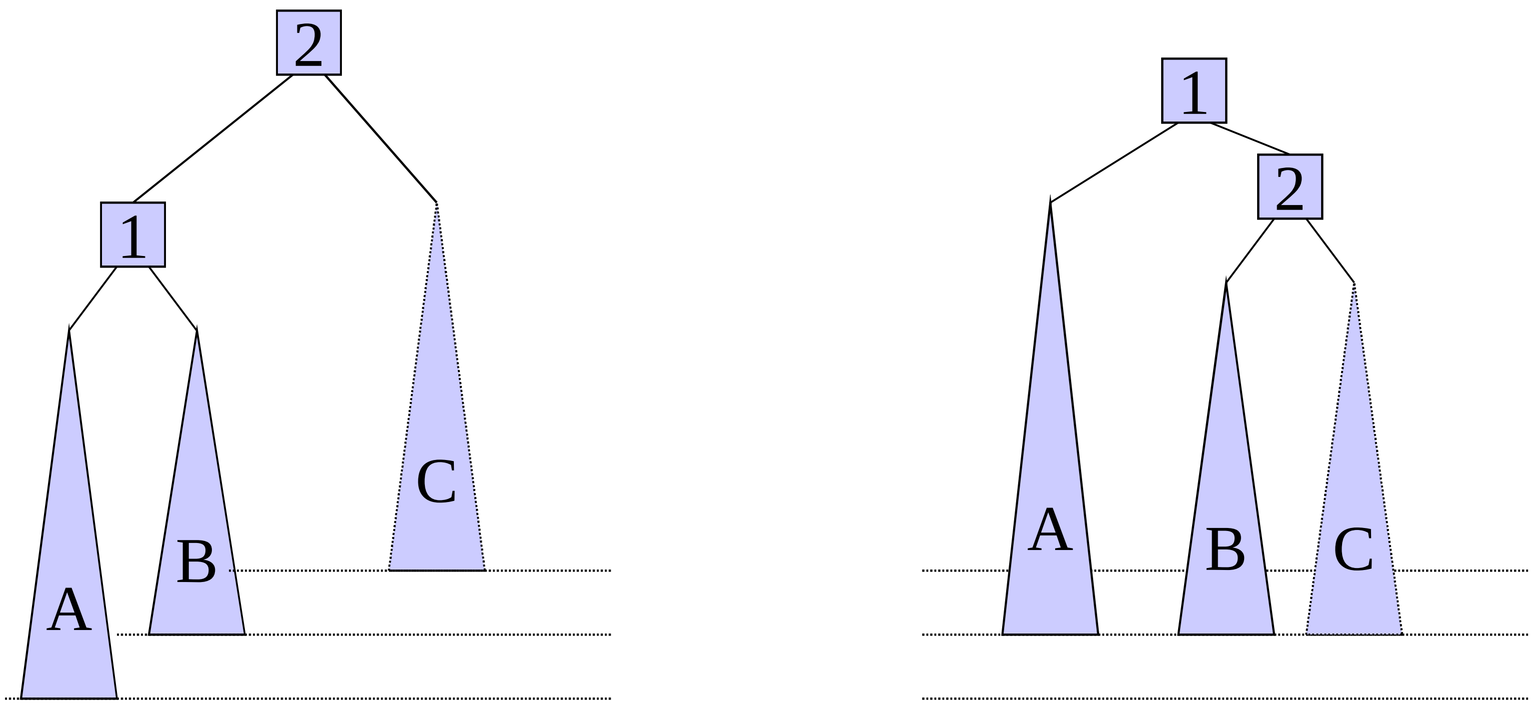
Rebalanceo del árbol

- *Existen dos clases de rotaciones:*
  - *Rotación Simple: Casos 1 y 4: inserción en el lado externo*
  - *Rotación Doble: Casos 2 y 3: inserción en el lado interno*

- *Soluciones simétricas: En cada caso, los subárboles están opuestos.*

Rotación Simple

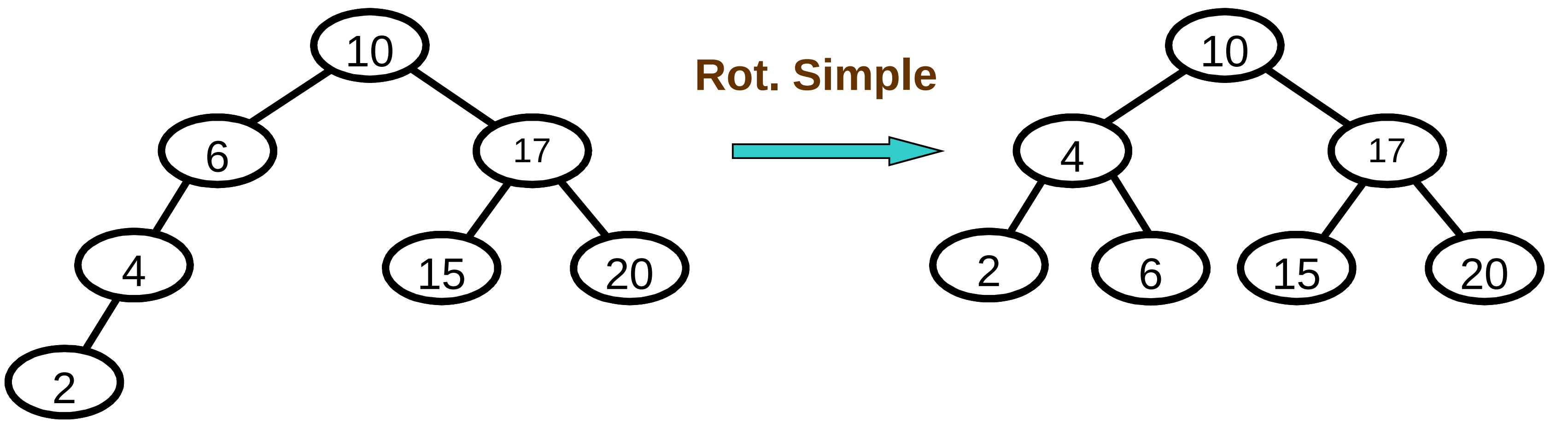
Caso 1: Rotación Simple Izquierda



Se obtuvo nuevamente un árbol balanceado

Rotación Simple (cont.)

Siguiendo con el ejemplo:



Rotación Simple (cont.)

Caso 4: Rotación Simple Derecha

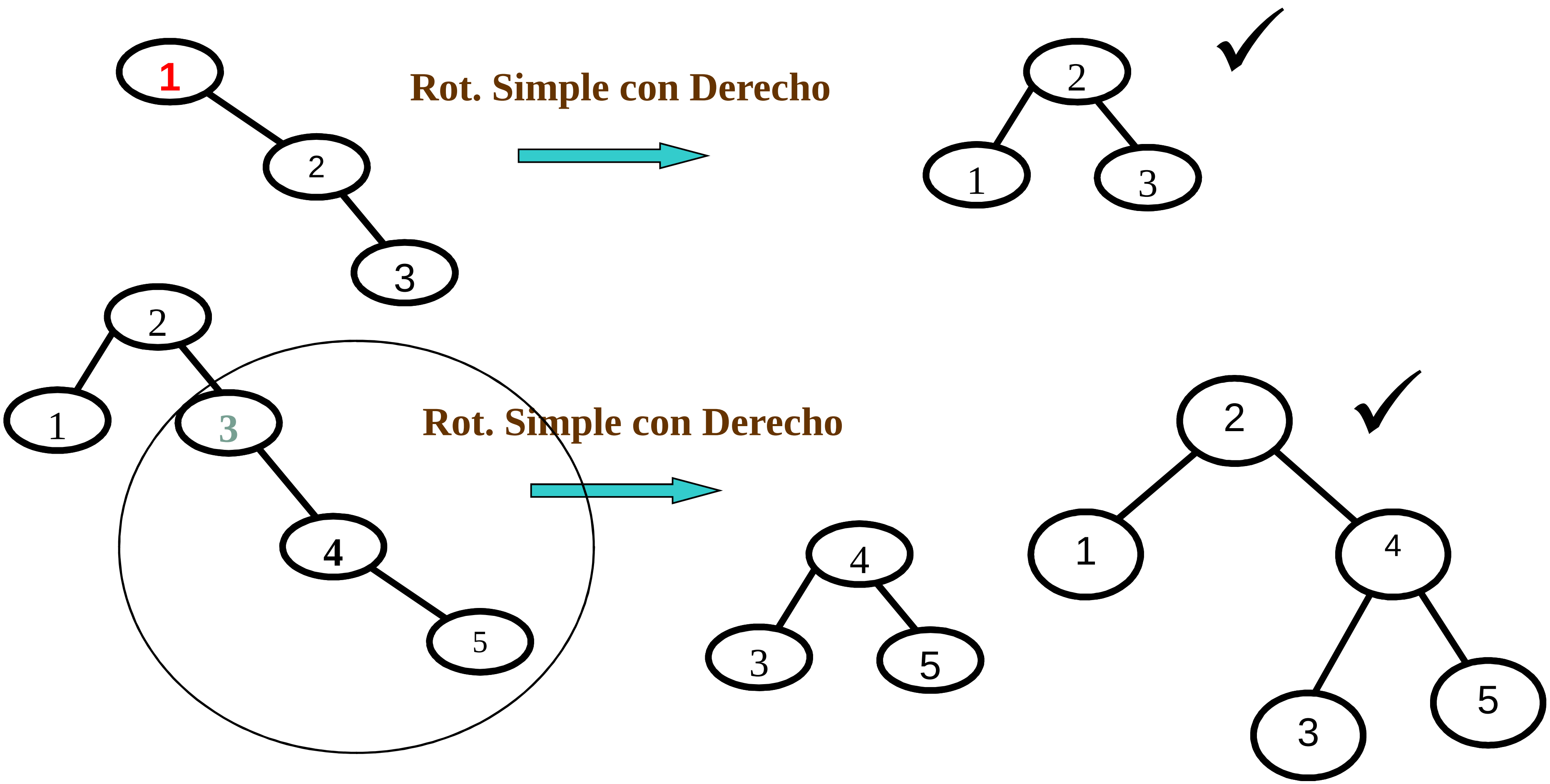
Es simétrico al caso 1, el desbalanceo se produce hacia el lado derecho

Rotación Simple (cont.)

Ejemplo:

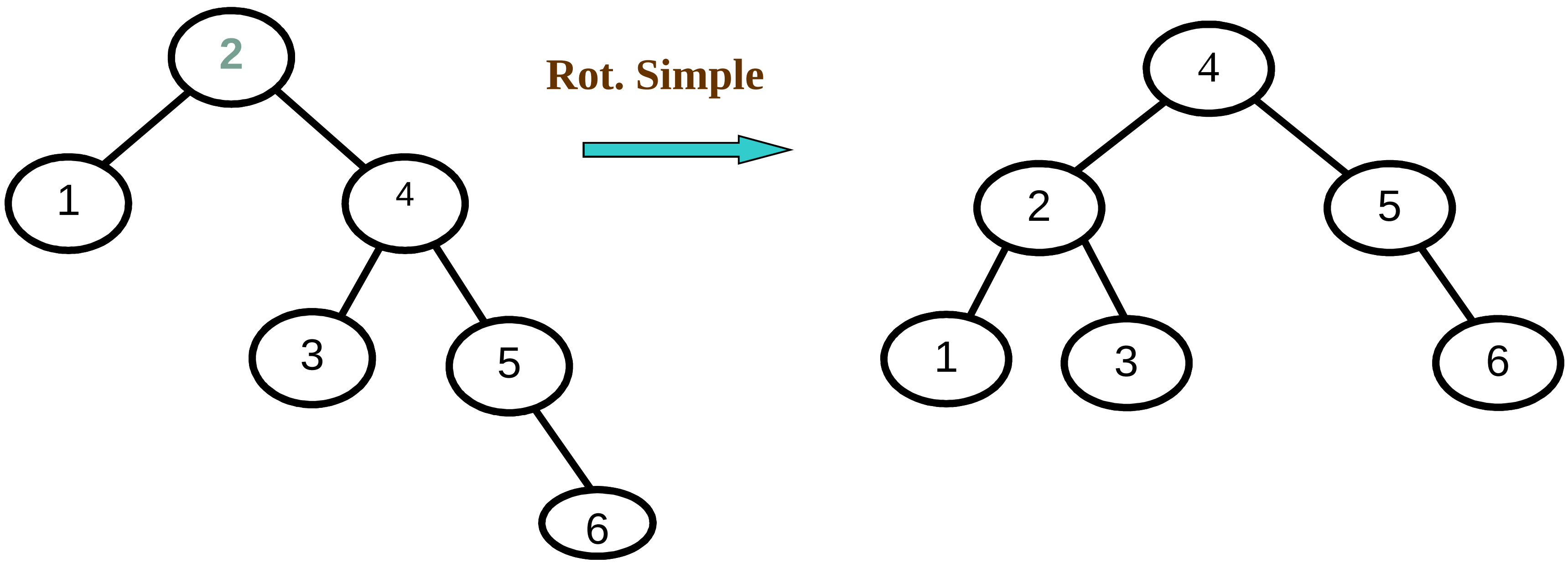
Insertar las claves del 1 al 7 en ese orden, en un árbol AVL inicialmente vacío

Rotación Simple (cont.)



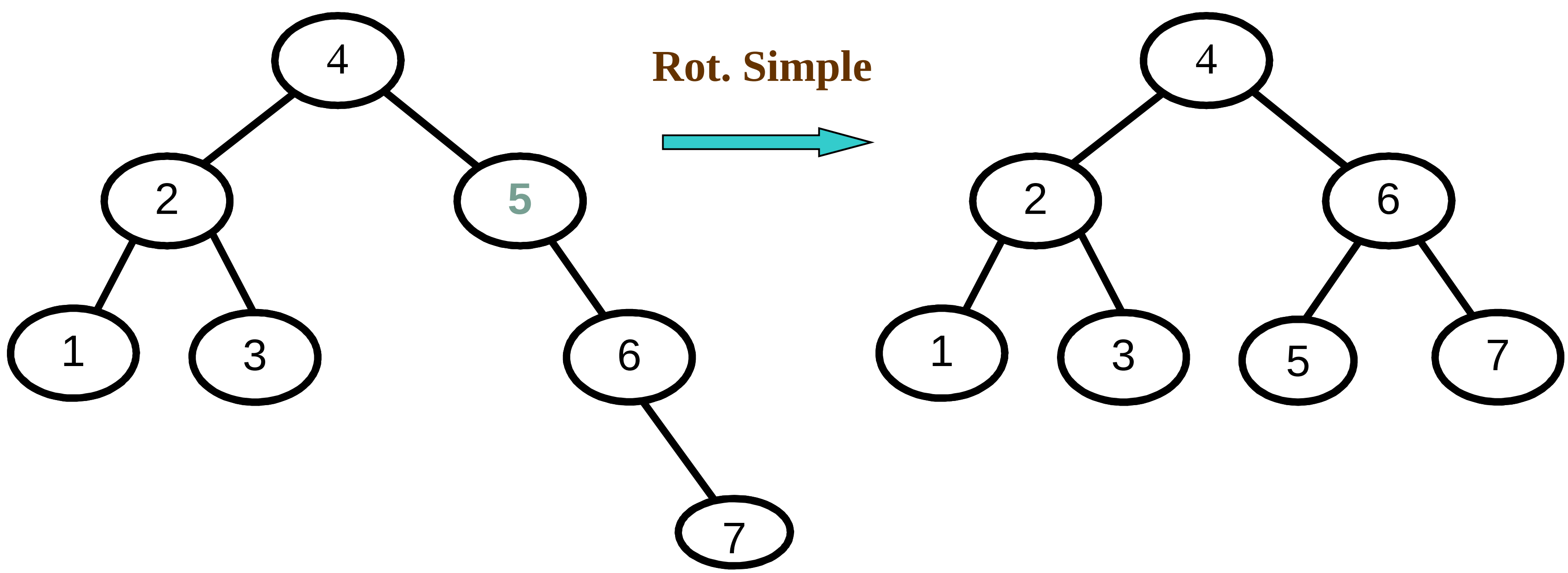
Rotación Simple (cont.)

Siguiendo con el ejemplo:



Rotación Simple (cont.)

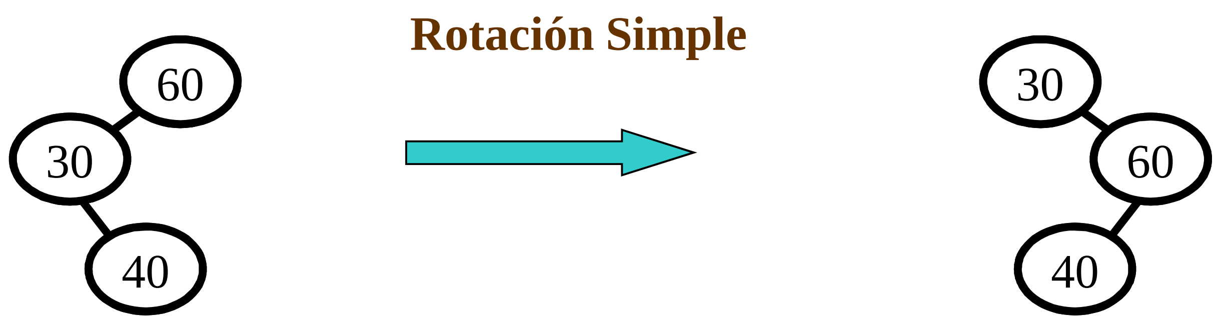
Siguiendo con el ejemplo:



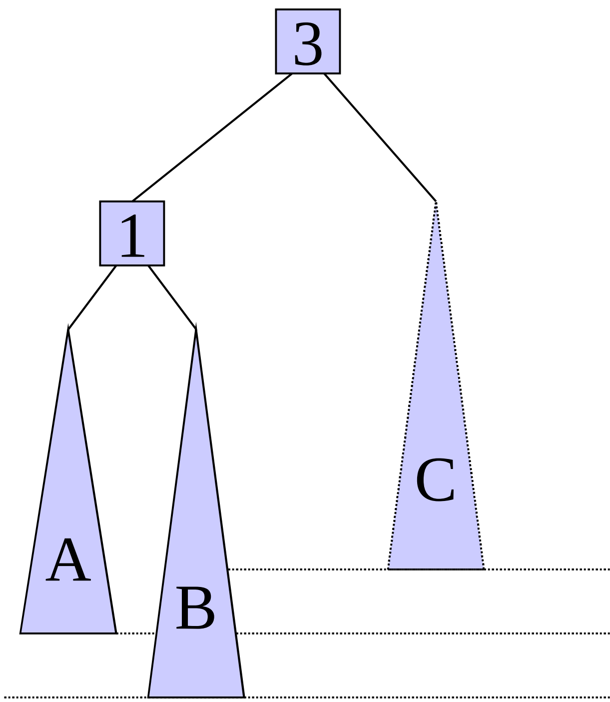
Rotación Doble

En algunos casos la rotación simple no resuelve el problema

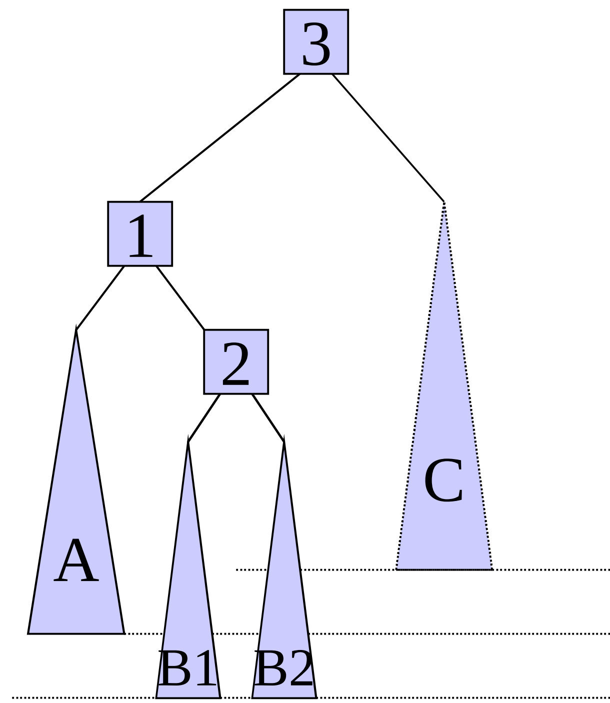
Caso 2: Rotación Doble Izquierda



Rotación Doble (cont.)



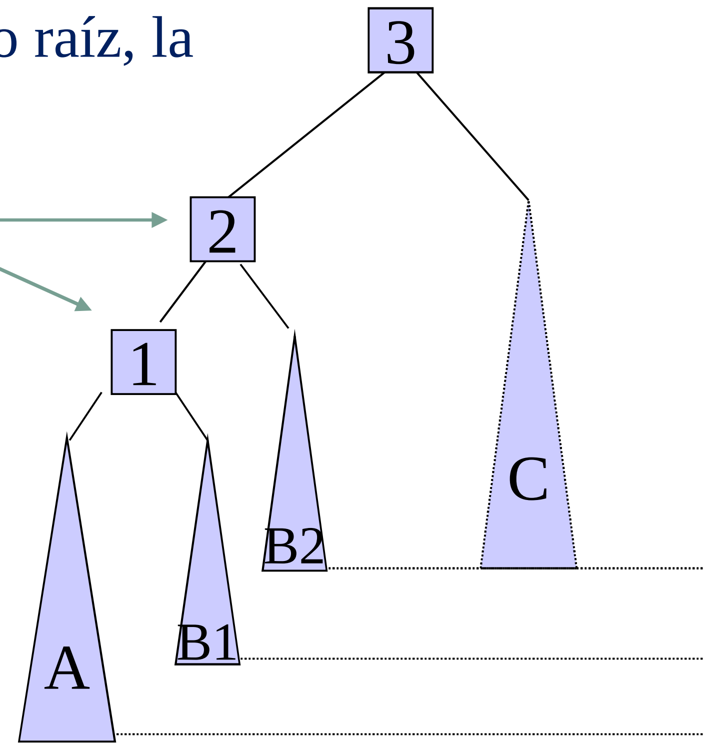
- Dado que el subárbol B tiene por lo menos un ítem, podemos considerar que está formado por una raíz y dos subárboles



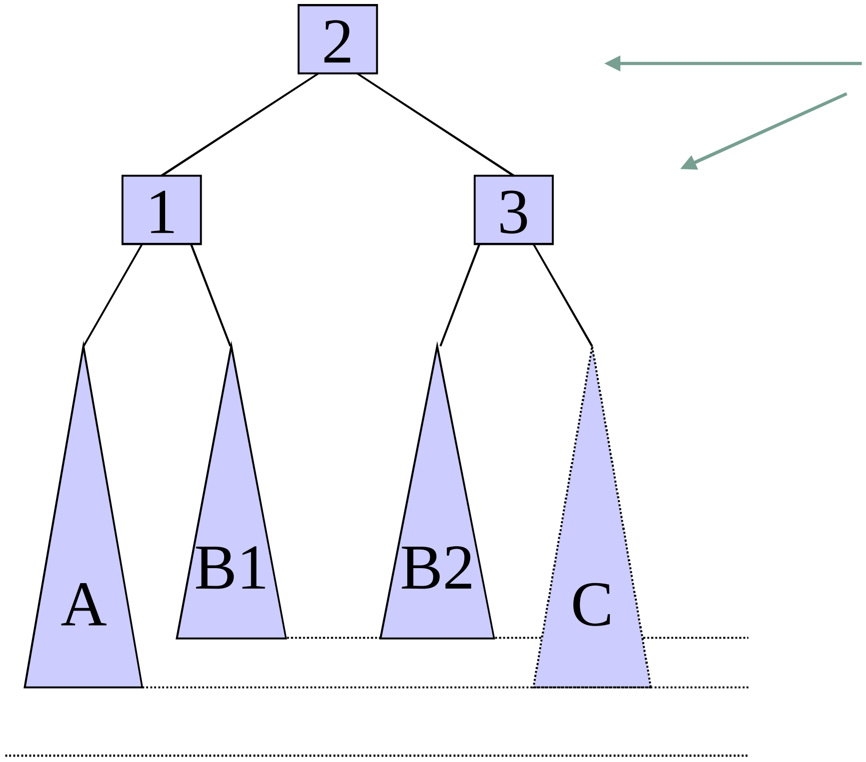
Rotación Doble (cont.)

- La rotación doble es similar a la simple, sólo que involucra cuatro subárboles en lugar de tres
- Ni los nodos 1 y 3 pueden quedar como raíz, la única alternativa es que quede el nodo 2

Primero se hace una rotación simple entre 1 y 2



Rotación Doble (cont.)



Luego se hace una rotación simple entre 2 y 3

Rotación Doble (cont.)

Caso 3: Rotación Doble Derecha

Es simétrica al caso 2, la inserción se produce en el subárbol izquierdo del hijo derecho.

Rotación Doble (cont.)

- *Ejemplo:*

Continuar con el ejemplo anterior, insertando las claves del 8 al 15 en orden inverso.

¡¡¡ Tarea para el hogar !!!

Eliminación de un nodo

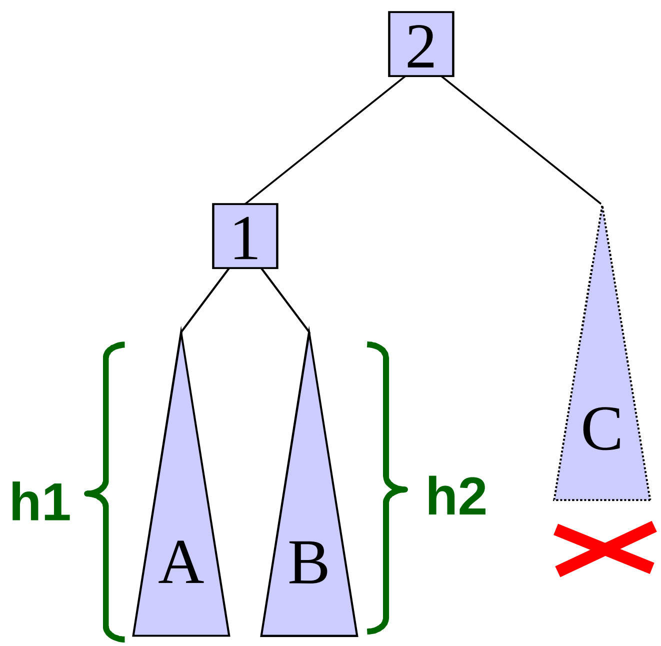
- *La eliminación de un nodo es similar al borrado en un árbol binario de búsqueda.*
- *Luego de realizar el borrado se debe actualizar la altura de todos los nodos, desde el nodo en cuestión hasta la raíz.*
- *Puede destruirse la propiedad de balanceo*

↓

Rebalancear el árbol

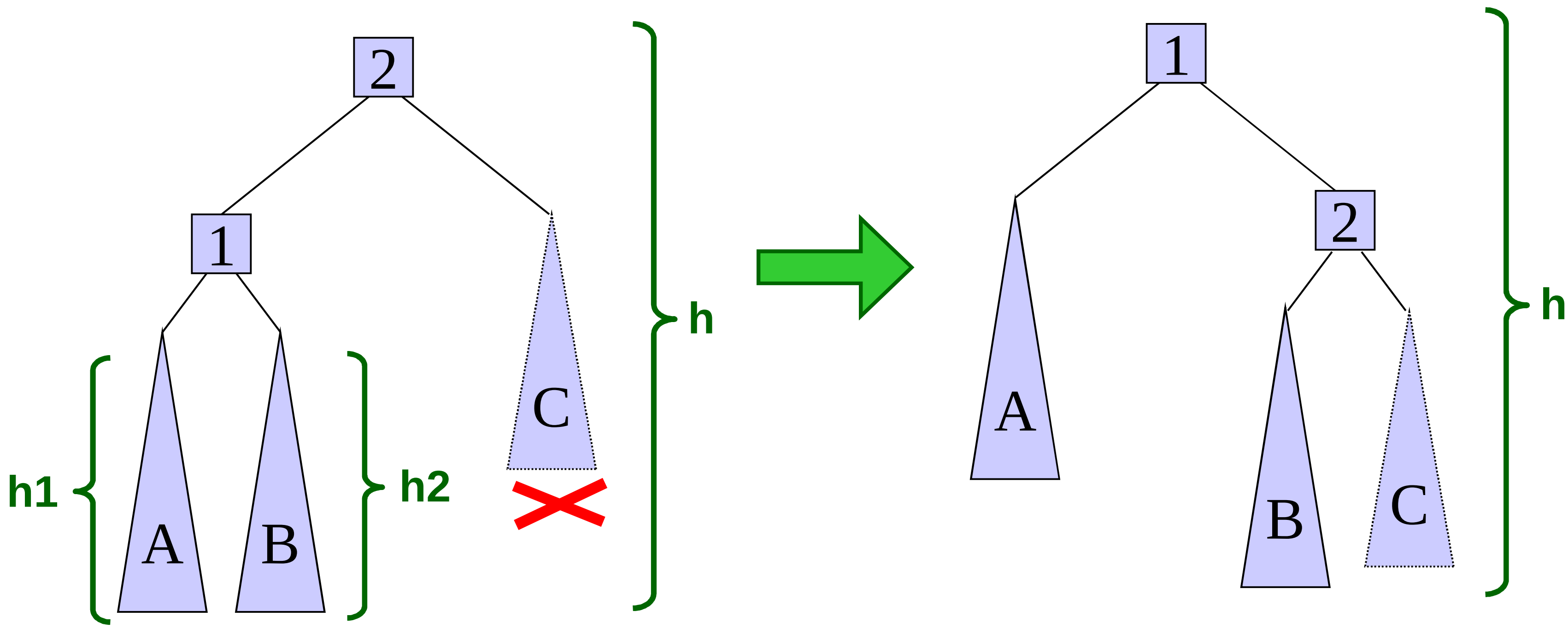
Eliminación de un nodo

- *Se pueden definir 3 casos de desbalanceo a izquierda en un nodo y los simétricos a derecha.*
- *Los casos de desbalanceo en el subárbol izquierdo del nodo **2** dependen de las alturas **h1** y **h2** en el subárbol derecho*



Eliminación de un nodo

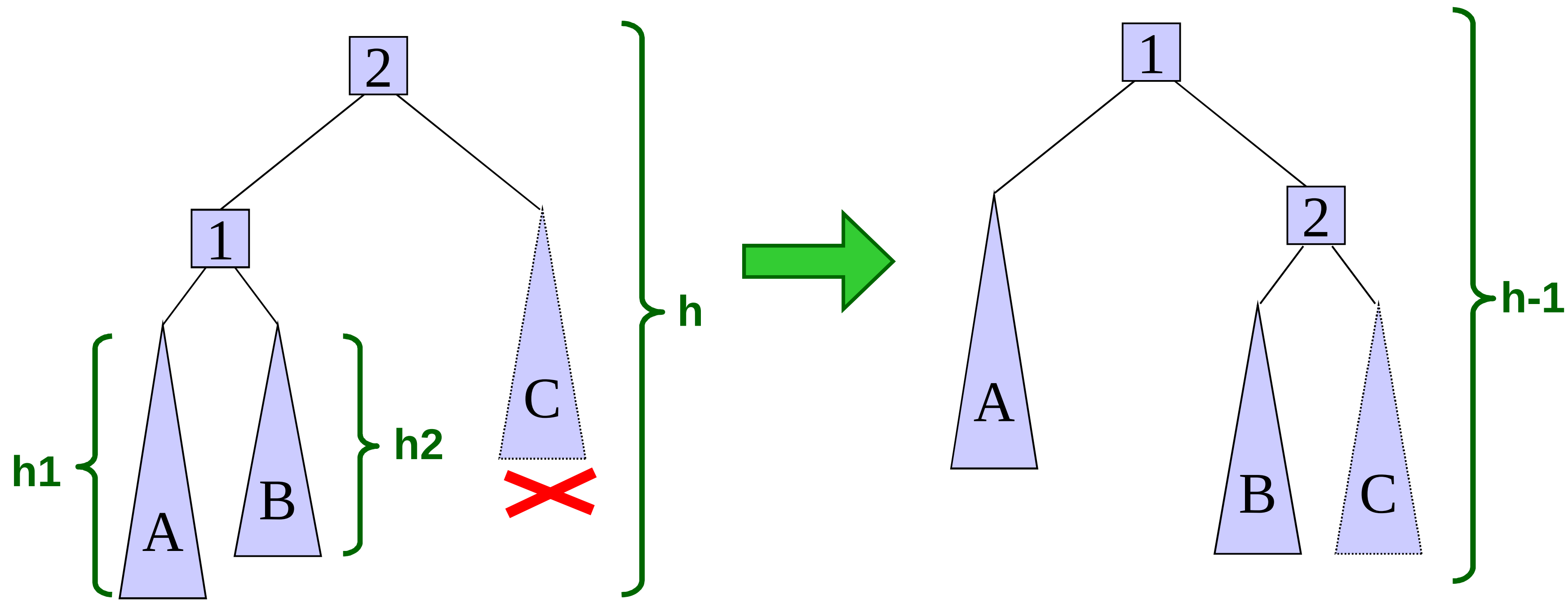
- Caso 1: h1= h2 Solución: RSI en el nodo 2



- El árbol resultante está balanceado
- La altura del árbol no cambia

Eliminación de un nodo

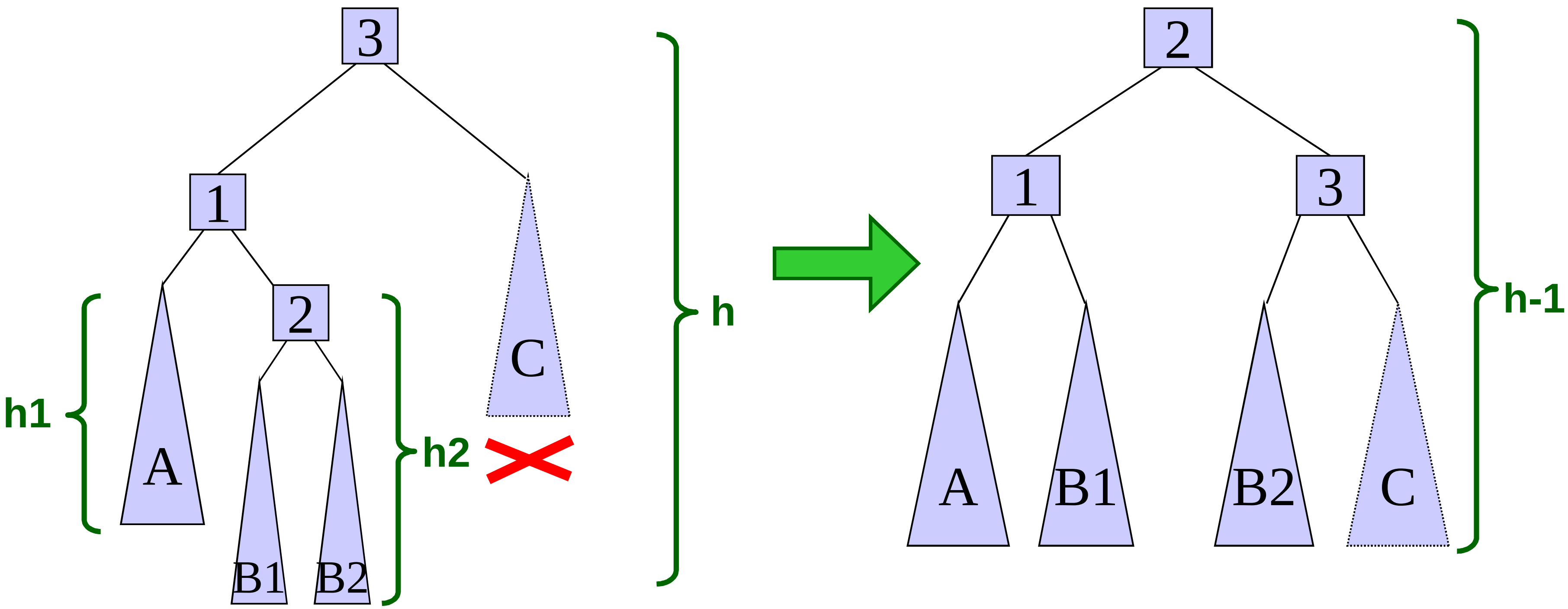
- Caso 2: h1> h2 Solución: RSI en el nodo 2



- En este caso, la altura del árbol disminuye en 1

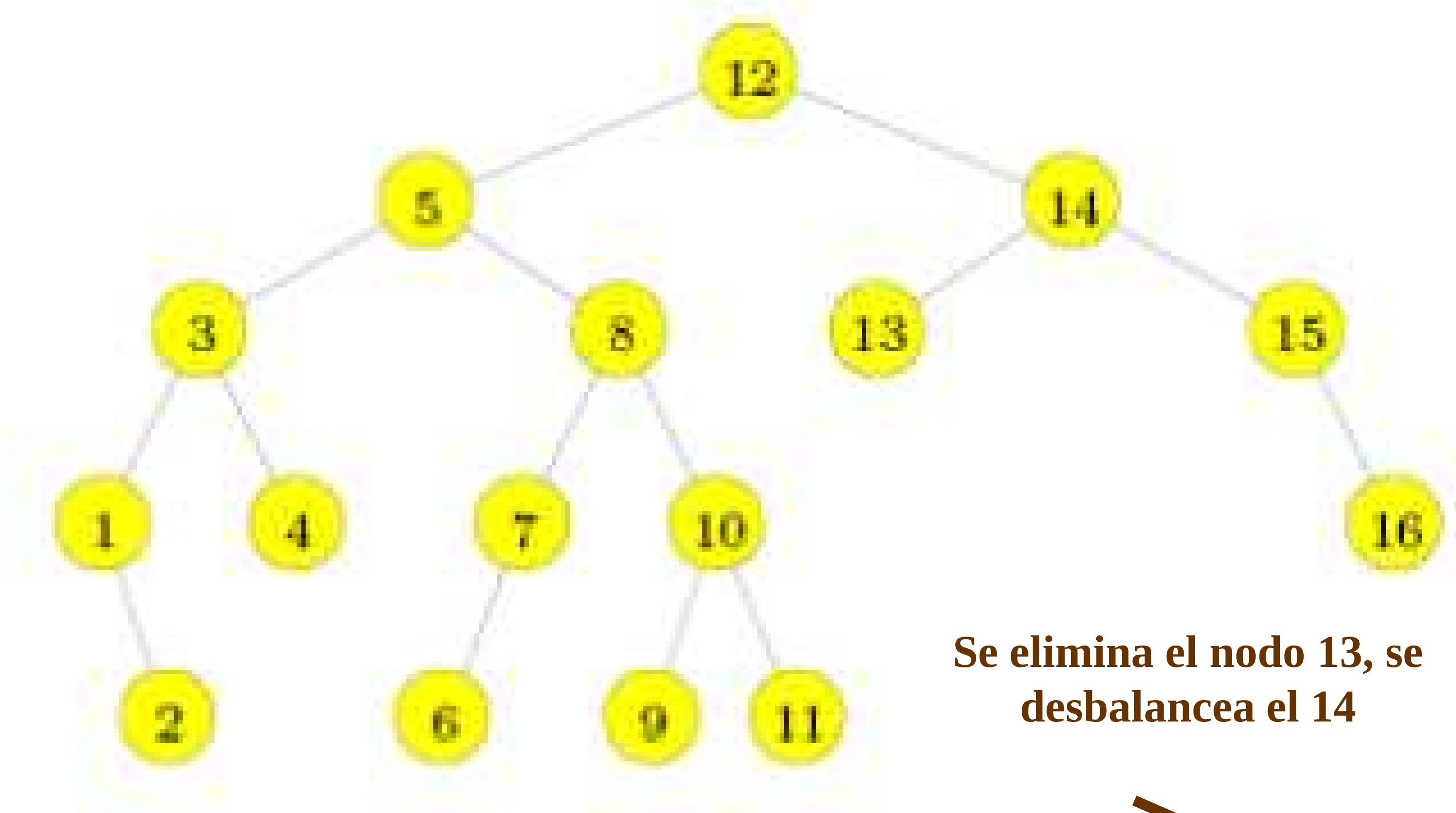
Eliminación de un nodo

- Caso 3: h1< h2 Solución: RDI en el nodo 3



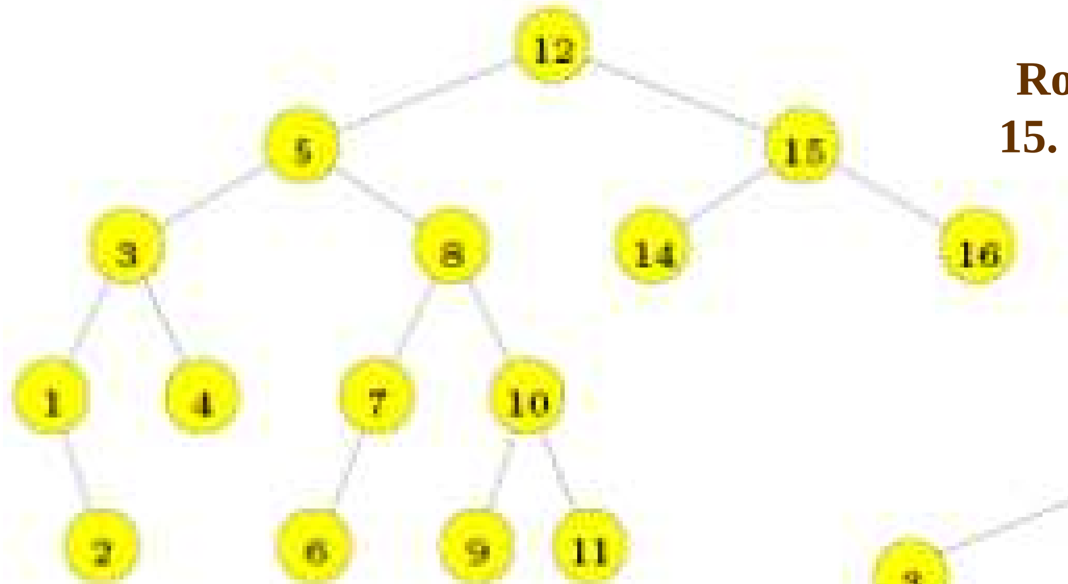
- La altura final del árbol disminuye en 1

Eliminación de un nodo

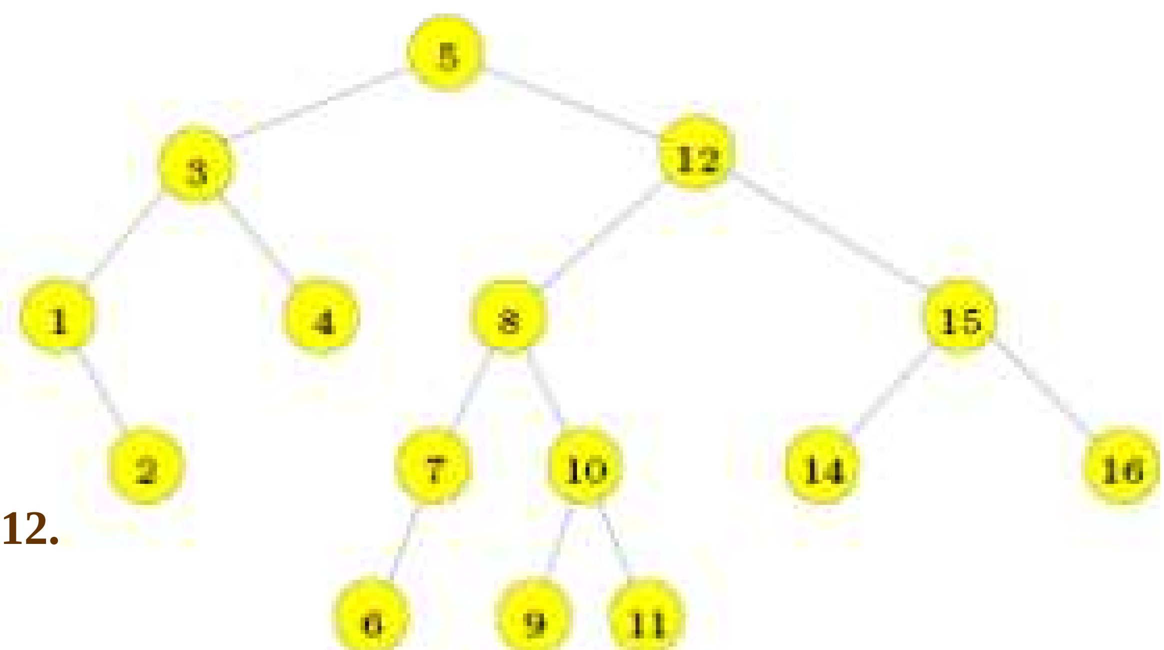


Se elimina el nodo 13, se desbalancea el 14

Eliminación de un nodo



Rotación simple entre el 14 y 15. Queda desbalanceado el 12



Rotación simple entre el 5 y 12.

Tiempo de ejecución de las operaciones en AVL

Las operaciones de:

Búsqueda

Inserción

Eliminación

*Recorren la **altura** del árbol en el peor caso*

Operaciones sobre los árboles AVL: Conclusiones

- *Las operaciones de inserción y eliminación de un nodo son similares a las de un árbol binario de búsqueda.*
- *En ambas operaciones se debe actualizar la información de la altura y realizar rotaciones si es necesario.*
- *La inserción provoca una única reestructuración.*
- *La eliminación puede provocar varias reestructuraciones.*
- *Las operaciones son de O(log n)*

Árboles Binarios de Búsqueda: Conclusiones

- La idea de los árboles binarios de búsqueda es muy útil.
- Pero para que funcionen en todos los casos es necesario introducir condiciones de balanceo.
- **ABB sin balanceo:** mal eficiencia en peor caso.
- **AVL:** Todos los casos están en **O(log n)** y el balanceo es poco costoso.