Variables Aleatorias Continuas

- Hay variables aleatorias cuyo rango son todos los números reales de un intervalo dado; es decir es un conjunto infinito no numerable.
- Ejemplos de variables continuas podrían ser
  - *X:"tiempo que tarda en llegar un colectivo a una parada"*
  - *Y:"tiempo de vida de un fusible".*
- Los valores de una v.a.continua no son contables es decir que no se puede hablar del i-ésimo valor.
- Por lo tanto se reemplaza $p(x_i)$ por una función $f(x)$ definida para todos los valores de R_X.

Variable Aleatoria Continua

- Se dice que X es una *v.a. continua* si existe una función ***f**, llamada* **función densidad de probabilidad** *o **fdp**, que cumple*

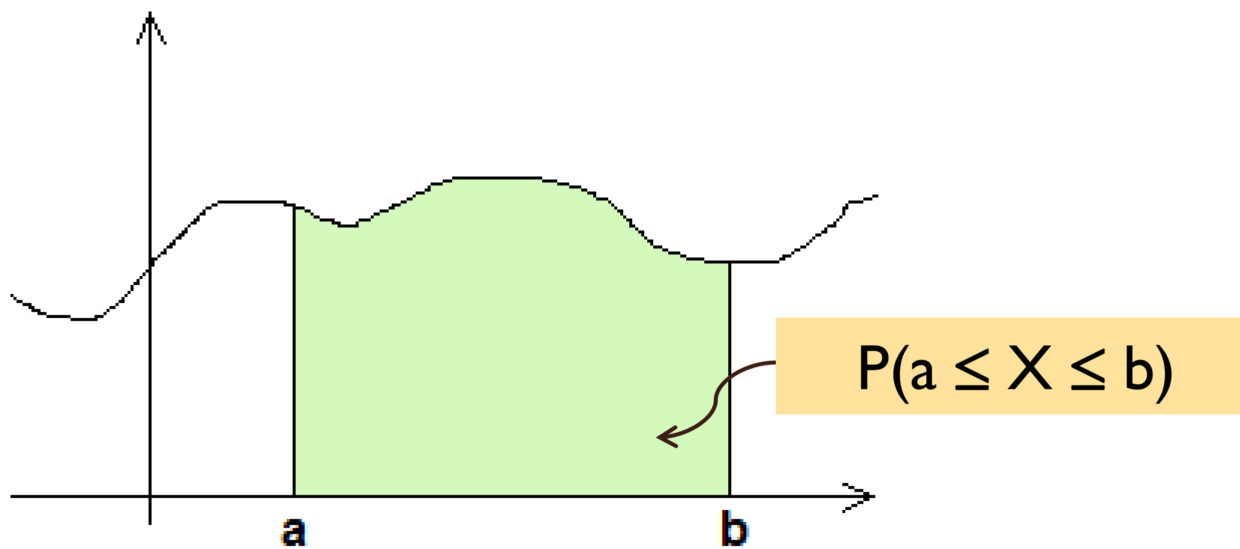
a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Variable Aleatoria Continua

- Sea X una *v.a. continua* con función densidad *f(x)*. Para cualquier a y b tal que $-\infty < a < b < \infty$ se *cumple*

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Variable Aleatoria Continua

- Si X es una v.a. continua, para cualquier número c

$$P(X = c) = 0$$

- **Ejemplo**

  Se selecciona un individuo de un grupo grande de hombre adultos. La probabilidad de que su altura sea precisamente 180 centímetros (es decir 180,00000 centímetros) es cero.

  Sin embargo, hay una probabilidad mayor que cero de que X se encuentre entre 175,00 y 180,50 centímetros.

Ejemplo 3.1

a) Encuentre la constante **c** de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

sea una función densidad.

- *Debe cumplirse que*
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ — Se cumple si $c \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ — Veamos cuanto debe valer c para que se cumpla

Ejemplo 3.1

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & 0<x<3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cx^2\ dx = \int_0^3 cx^2 dx = \left.\frac{cx^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27c}{3} - 0 = 9c$$

y como debe ser = 1, c = 1/9.

Por lo tanto

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0<x<3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

Ejemplo 3.2

Sea X una v.a. continua con la siguiente *fdp*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\[2ex] 0 & de\ otra\ manera\end{cases}$$

Calcule P(1<X<2)

$$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{x^2}{9}dx=\left.\frac{x^3}{27}\right|_1^2=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$$

Como P(X = *d*) = 0, en este ejemplo
P(1<X<2) = P(1≤X<2) = P(1<X ≤2) = P(1 ≤X ≤2)=7/27

Ejercicio 3.1

- Sea X la cantidad de tiempo durante el cual un estudiante seleccionado al azar saca en préstamo un libro de la reserva de 2 hs. en una bibilioteca y suponga que X tiene la siguiente fdp

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

- Calcular

  a) $P(X \le 1)$

  b) $P(0.5 \le X \le 1.5)$

  c) $P(1.5 < X)$

Función de distribución acumulada

- La función de distribución acumulada F(X) para una v.a. continua X está definida para todo número *x* de la siguiente forma

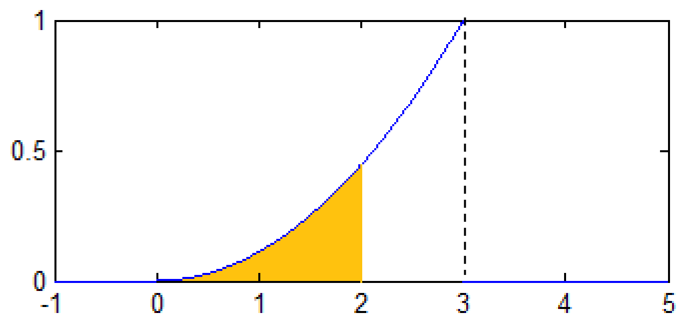
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

F(X) es una función monótona creciente
que se incrementa de 0 a 1.

Ejemplo 3.3

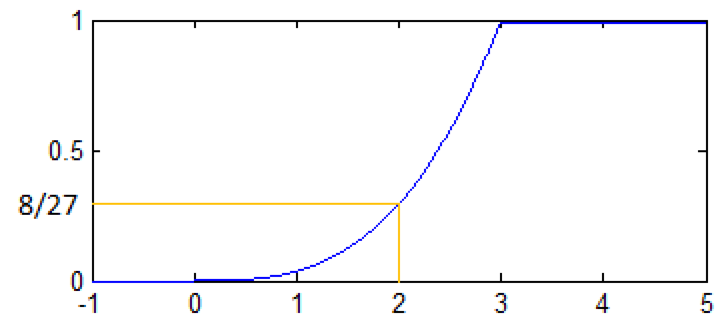
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \textit{de otra manera} \end{cases}$$

f(x)



$P(X \leq 2) = 8/27$

F(x)

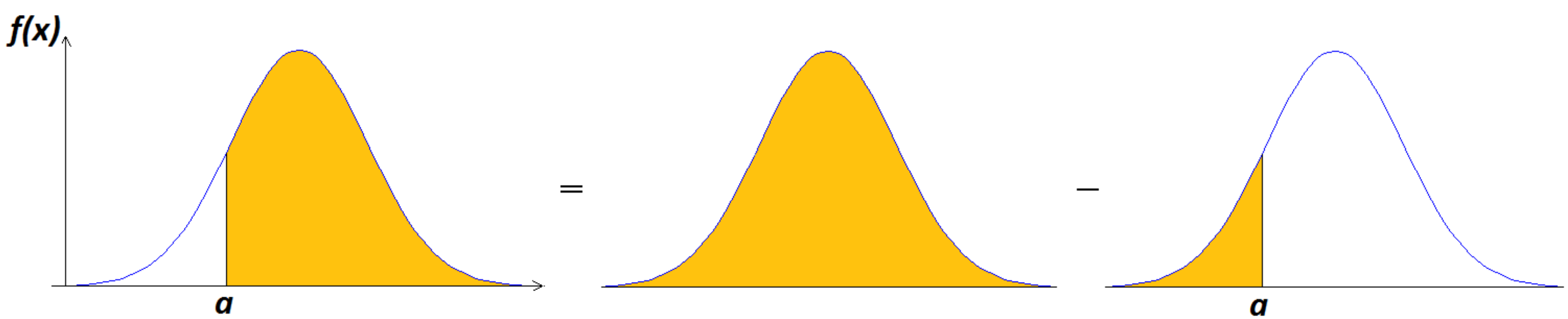


$F(2) = 8/27$

Usando F(X) para calcular probabilidades

- Sea X una v.a. continua con fdp *f(x)* y fda *F(x)*, para cualquier número *a*

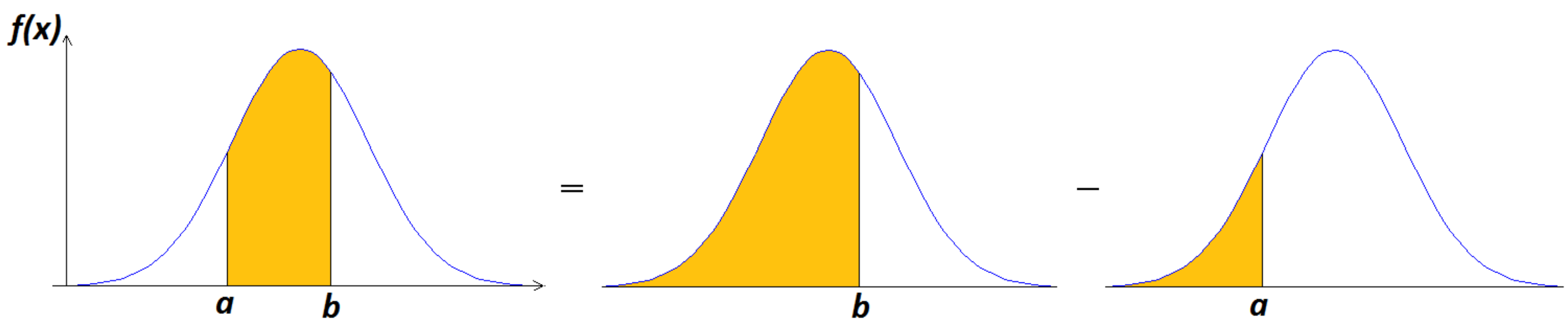
$$\boxed{P(X > a) = 1 - F(a)}$$



Usando F(X) para calcular probabilidades

- Sea X una v.a. continua con fdp *f(x)* y fda *F(x)*, para dos números cualesquiera *a* y *b* con *a*<*b*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Ejemplo 3.3

- Encuentre la ***fda*** para la v.a. X cuya *fdp* es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

- Utilice la *fda* para calcular P(1<X≤2)

Obtención de f(x) a partir de F(x)

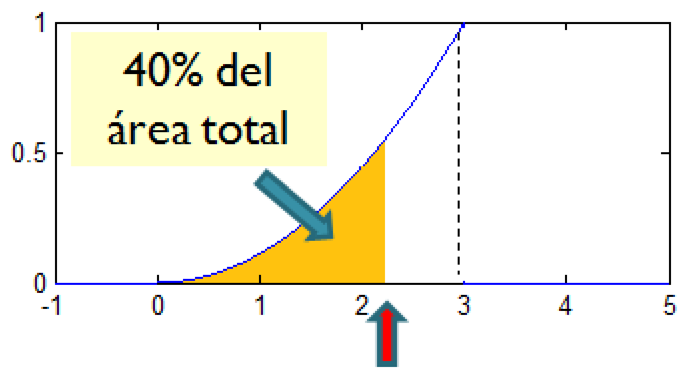
- Si X es una v.a. continua con fdp *f(x)* y función de distribución acumulada *F(x)* entonces

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du\right) = f(x)$$

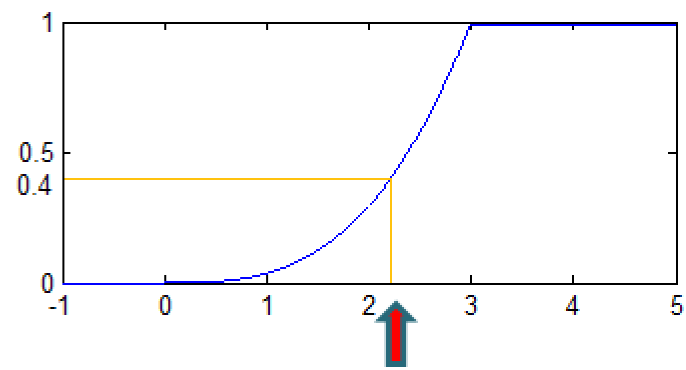
donde F(x) sea derivable

Percentiles

- Con frecuencia conviene dividir el área bajo la curva de densidad usando ordenadas, de manera que el área a la izquierda de la ordenada sea algún porcentaje del área total.
- Los valores correspondientes a tales áreas se llaman ***valores percentiles*** o simplemente ***percentiles***.
- ***Ejemplo : Percentil 40***



$\eta_{0.40}$



$\eta_{0.40}$

Percentiles

- Sea p un número entre 0 y 1. El percentil *(100p)* de la distribución de una v.a. continua X, denotado por η_p, está definido por

$$p = F(\eta_p) = \int_{-\infty}^{\eta_p} f(y)\,dy$$

Ejemplo 3.4

- Hallar el percentil 40 de la siguiente F(X)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & 0 < x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$p = F(\eta_p) = \frac{(\eta_p)^3}{27} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\eta_p)^3}{27} - p = 0$$

- Para el percentil 40, p=0.4 y la ecuación a resolver es

$$\frac{{\eta_{0.40}}^3}{27} - 0.4 = 0 \quad \therefore \quad \eta_{0.40} = \sqrt[3]{27 * 0.4} = 2.2104$$

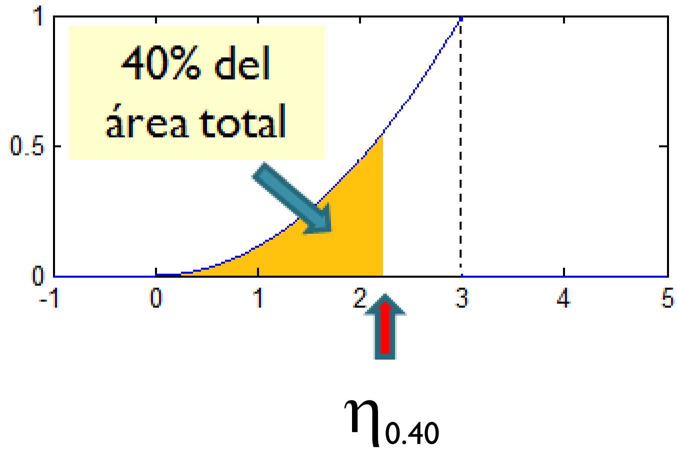
Ejemplo 3.4

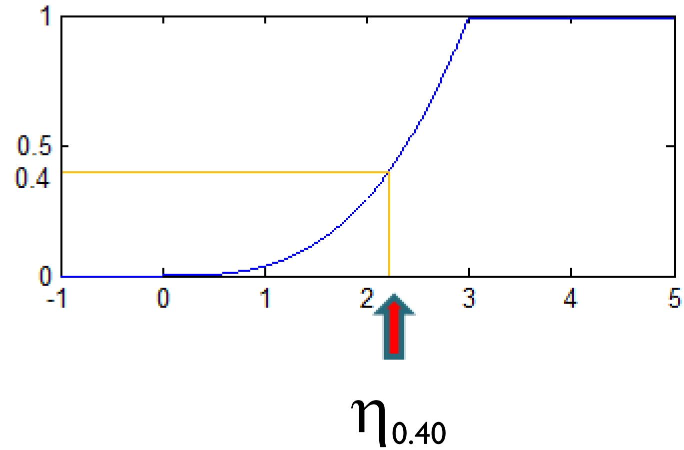
El **percentil 50** de una distribución continua es la **mediana**

- Percentil 40

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & 0 < x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$\eta_{0.40} = 2.2104$$

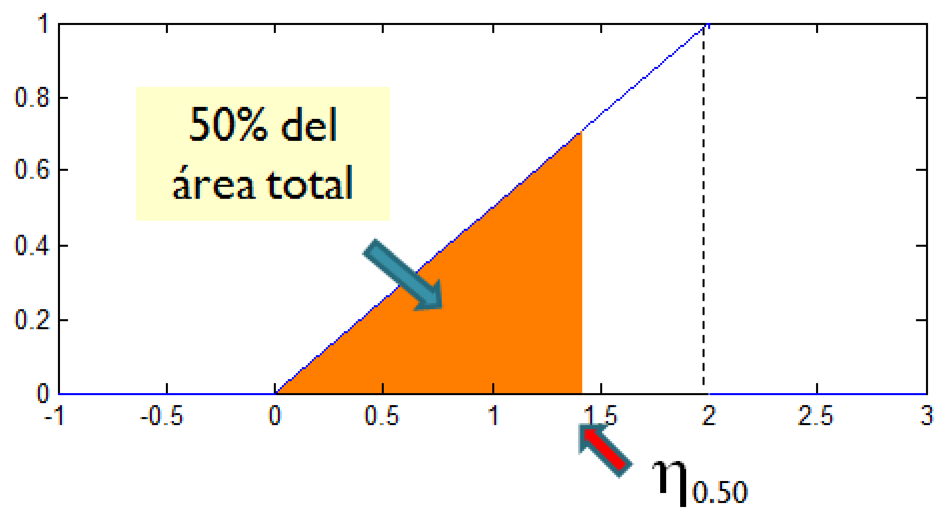




Ejercicio 3.2

- Hallar la mediana (percentil 50) de la siguiente *fdp*

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$



Esperanza de una v.a. continua

- Para una v.a. discreta X, *E(X)* se obtiene sumando *x. p(x)* sobre varios valores posibles de X. Ahora la integración sustituye a la suma y la *fdp* a *p(x)*.

- La esperanza de una v.a. continua con fdp *f(x)* se define como

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x)\, dx$$

Ejemplo 3.5

- Sea X una v.a. continua con la siguiente fdp

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & en\ caso\ contrario\end{cases}$$

- Por lo tanto

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x.f(x)\,dx=\int_0^1 x.\frac{3}{2}(1-x^2)\,dx=$$

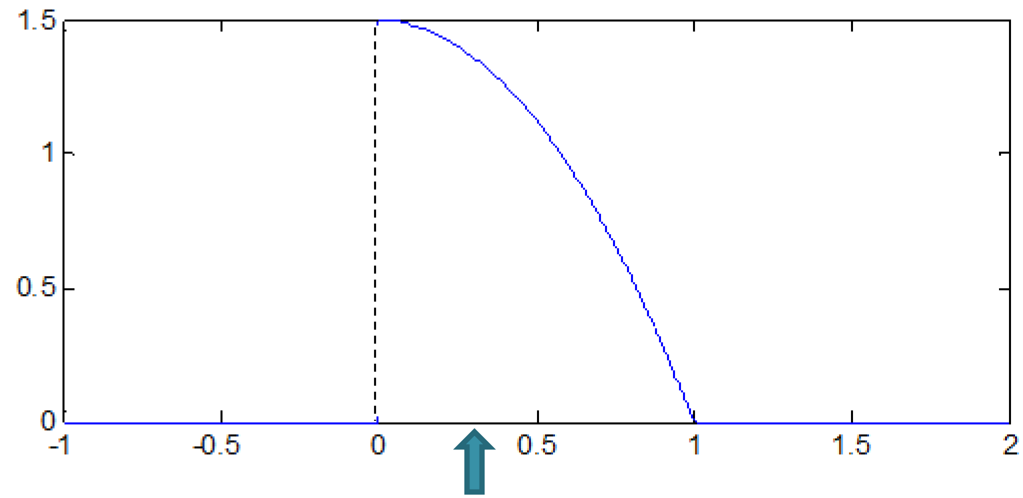
$$=\frac{3}{2}\int_0^1(x-x^3)\,dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}$$

Ejemplo 3.5

- Sea X una v.a. continua con la siguiente fdp

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-x^2) & 0\le x\le 1\\[2ex] 0 & en\ caso\ contrario\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{3}{8}$$



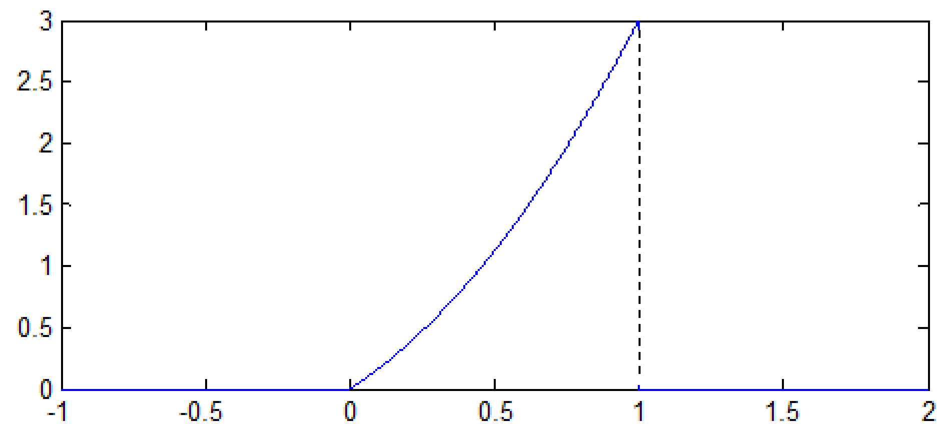
3/8 = 0.375

Ejercicio 3.3

- Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X con fdp* dada por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2+x & 0<x<1\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}$$

- Hallar E(X)



Esperanza de una función

- Si X es una v.a. continua con fdp *f(x)* y *h(x)* es cualquier función de X entonces

$$E[h(x)] = \mu_{h(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x).\, f(x)\, dx$$

Note que si se considera a *h(x)* como una nueva v.a. *Y*, también se puede hallar *E(Y)* utilizando la definición anterior si previamente se calcula la *fdp* de *Y*.

Ejemplo 3.6

- Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X con fdp* dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 + x & 0 < x < 1 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

- Suponga que el valor en dólares de cada muestra es $Y = h(X) = 5 - 0.5X$. Encontrar la esperanza de Y

Ejemplo 3.6

- **Solución sin utilizar *E[h(x)]***

fda de *Y*

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(5 - 0.5X \leq y) =$$

$$= P\left(X \geq \frac{5-y}{0.5} \right) = 1 - P\left(X \leq \frac{5-y}{0.5} \right) = 1 - F\left(\frac{5-y}{0.5} \right)$$

fda de *X*

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{5-y}{0.5} \right)$$

Ejemplo 3.6

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{5-y}{0.5}\right) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$g(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\right) = -f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(-\frac{1}{0.5}\right) = f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right) =$$

$$g(y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\left(\frac{5-y}{0.5}\right)^2 + \frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right) & \frac{9}{2} < y < 5 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 3.6

$$g(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{5-y}{0.5}\right)^2 + \dfrac{5-y}{0.5}\right)\left(\dfrac{1}{0.5}\right) & \dfrac{9}{2} < y < 5 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

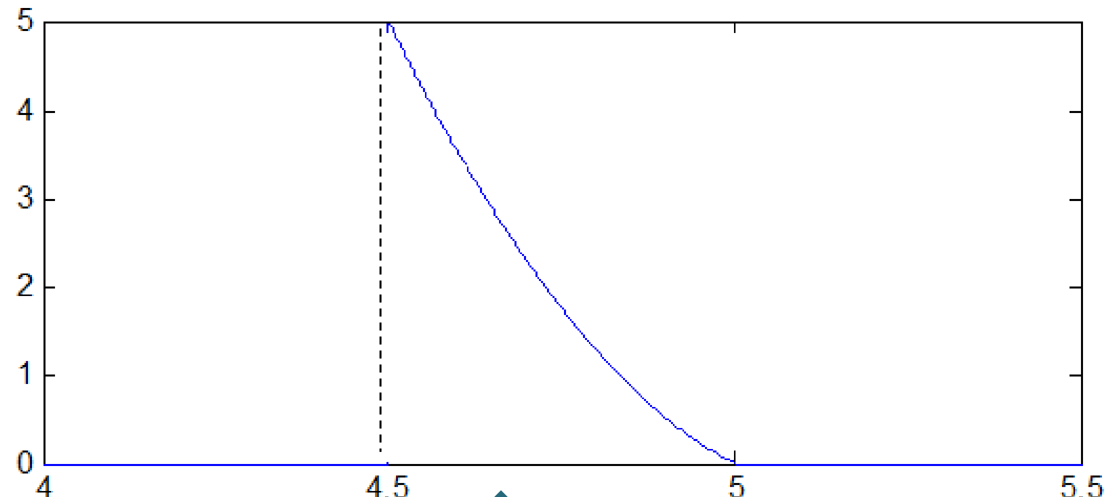
$$g(y) = \begin{cases} 12y^2 - 124y + 320 & \dfrac{9}{2} < y < 5 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

- Ahora calculamos *E(Y)*

$$E(Y) = \int_{9/2}^{5} y \,.\, g(y)\, dy = \int_{9/2}^{5} y \,.\,(12y^2 - 124y + 320)\, dy = \frac{223}{48}$$

Ejemplo 3.6

$$g(y)=\begin{cases} 12y^2-124y+320 & \frac{9}{2}<y<5 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



$$E(Y)=\frac{223}{48}=4.6458$$

Varianza de una v.a. continua

- Sea *X una v.a. continua con f.d.p. f(x) y sea E(X) = μ , entonces la varianza de X es*

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \; f(x)\,dx$$

- Se *cumple que*

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \qquad \sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$$

Ejemplo 3.7

- Retomando el ejemplo de las muestras minerales donde la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X* *con fdp* dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & 0 < x < 1 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

y E(X)=17/24

- Calcular V(X)

$$V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{17}{24} \right)^2 \left(\frac{3}{2}x^2 + x \right) dx$$

COMPLETAR

V(X)=0.0483

Ejemplo 3.7

- Rehacer el cálculo de V(X) del ejemplo anterior donde

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2+x & 0<x<1\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{17}{24}$$

Usando $$V(X)=E(X^2)-\mu^2$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2.\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\left.\left(\frac{3}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{11}{20}$$

$$\therefore\quad V(X)=\frac{11}{20}-\left(\frac{17}{24}\right)^2=\boxed{0.0483}$$

Ejercicio 3.4

- Sea X una v.a. continua con la sigte *fdp*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\[2ex] 0 & de\ otra\ manera\end{cases}$$

- Calcular E(X) y V(X)

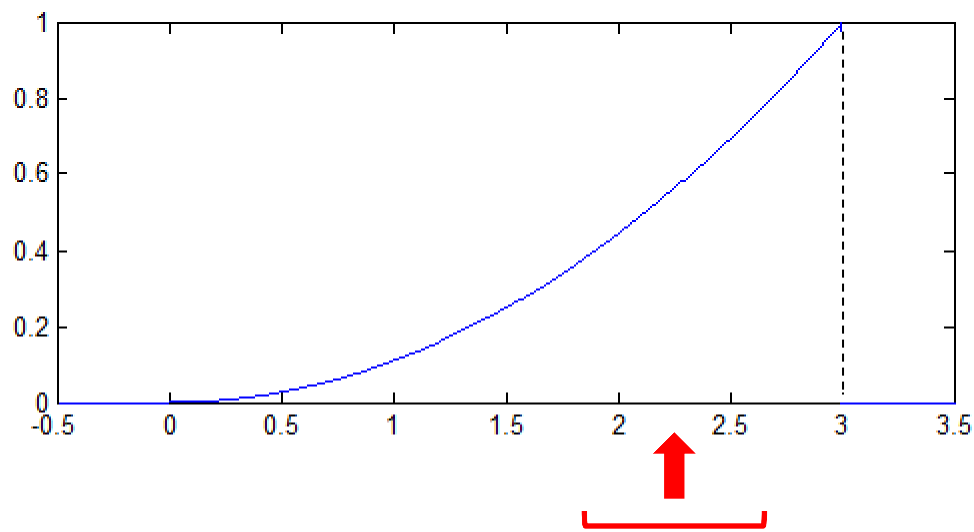
Ejercicio 3.4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

$$E(X) = 2.25$$

$$V(X) = 0.3375$$

$$\sigma = \sqrt{0.3375} = 0.5809$$



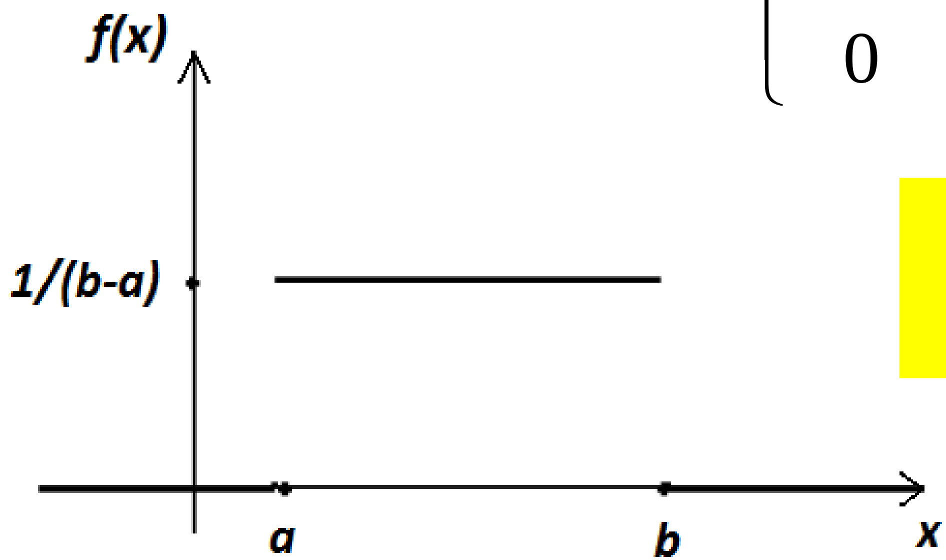
V.a. continuas importantes

- Distribución Uniforme
- Distribución Normal o Gaussiana
- Distribución Exponencial

Distribución Uniforme

- Una v.a. continua *X se dice que tiene* ***distribución uniforme en el intervalo [a,b]*** *, con a < b, si tiene* fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



Notación

X ~ U[a,b]

Distribución Uniforme

- La *F.d.a* es

$$F(x)=\begin{cases}\boxed{0 \qquad x<a} \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b \\ 1 & x>b\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$$

Distribución Uniforme

- La *F.d.a* es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \boxed{\dfrac{x-a}{b-a} \quad a \le x \le b} \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

Distribución Uniforme

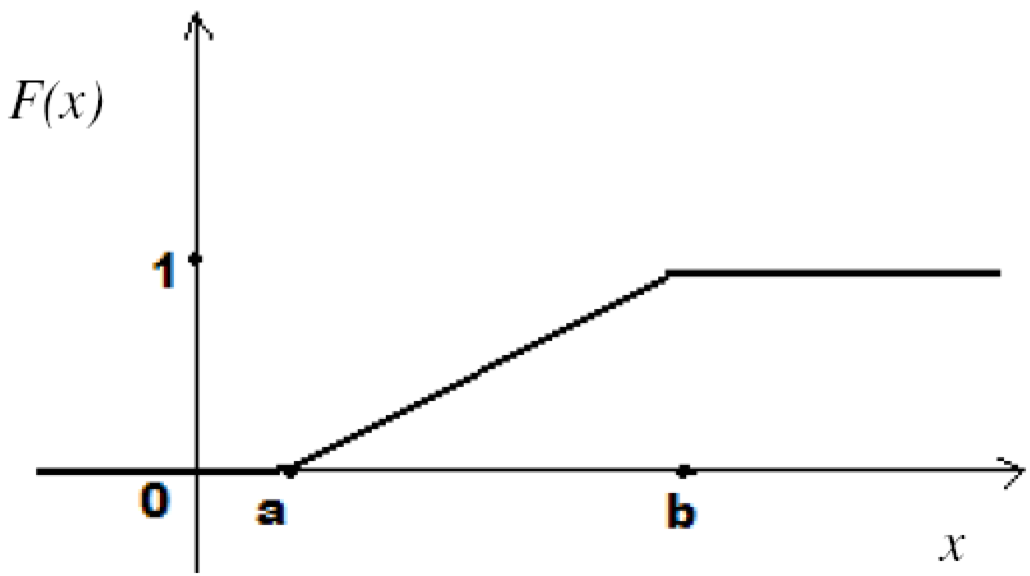
- La *F.d.a* es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ \boxed{1 \qquad x > b} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1$$

Distribución Uniforme

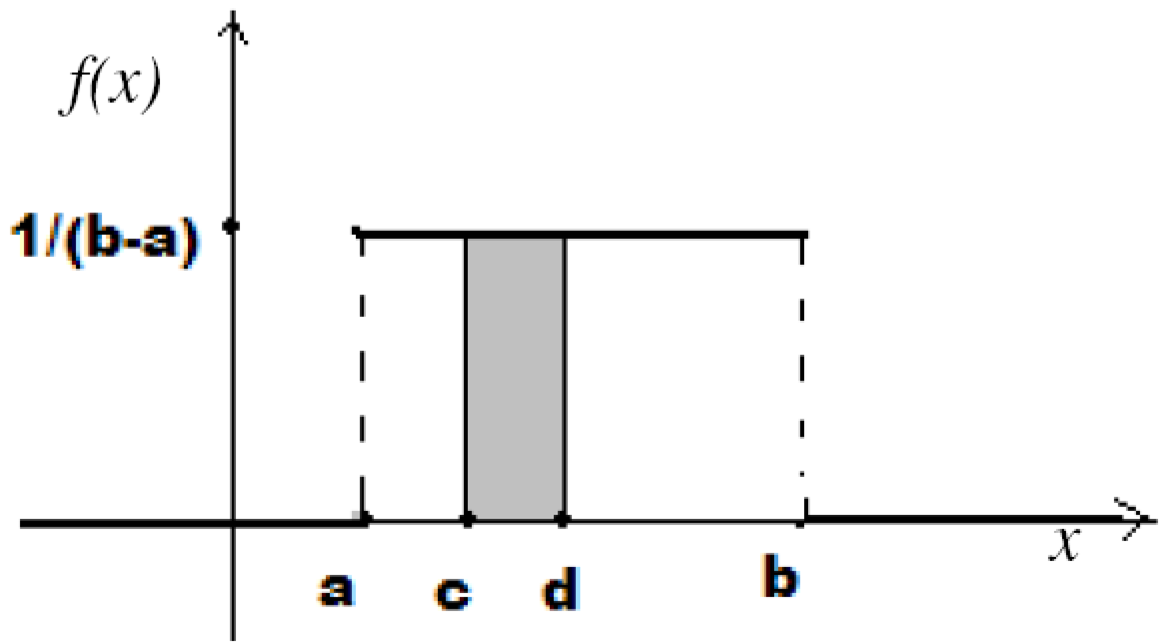
- Gráfica de F(x)



Distribución Uniforme

- Si X ~ U[a,b] y a ≤ c < d ≤ b entonces

$$P(c \le X \le d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$



Ejemplo 3.8

- Los colectivos de una determinada línea llegan a una parada determinada en intervalos de 15 minutos comenzando desde las 7 a.m.; es decir, que llegan a la parada a las 7, 7:15, 7:30, 7:45, etc.
- Si un pasajero llega a la parada en un tiempo que se puede considerar una v.a. distribuida uniformemente entre 7 y 7:30, encontrar la probabilidad de que:

a) el pasajero espere menos de 5 minutos al colectivo

b) el pasajero espere más de 10 minutos al colectivo

Ejemplo 3.8

- Sea X:"tiempo en minutos desde las 7 hs en que el pasajero llega a la parada"
- Consideramos que $X \sim U[0,30]$

a) si el pasajero espera menos de 5 minutos al colectivo, entonces llega a la parada entre las 7:10 y 7:15 o entre las 7:25 y 7:30, entonces la probabilidad pedida es

$$P(10 \leq X \leq 15) + P(25 \leq X \leq 30) = \frac{15-10}{30} - \frac{30-25}{30} = \frac{1}{3}$$

También puede calcularse directamente

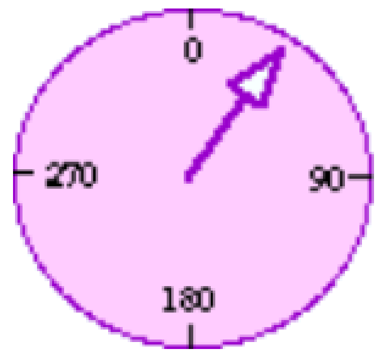
Esperanza y Varianza

- Sea una *X* variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo [a,b], es decir *X* ~ *U[a,b]* entonces

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejercicio 3.5

- Sea X el ángulo de giro del dial de la figura



- Indique la fdp de X y úsela para calcular

  $P(30<X<300)$ $P(0<x<90)$

  $P(90<x<180)$ $P(0<x<120)$

Distribución normal o gaussiana

- Sea X una v.a. continua; decimos que tiene distribución normal con parámetros μ y σ si su f.d.p. es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

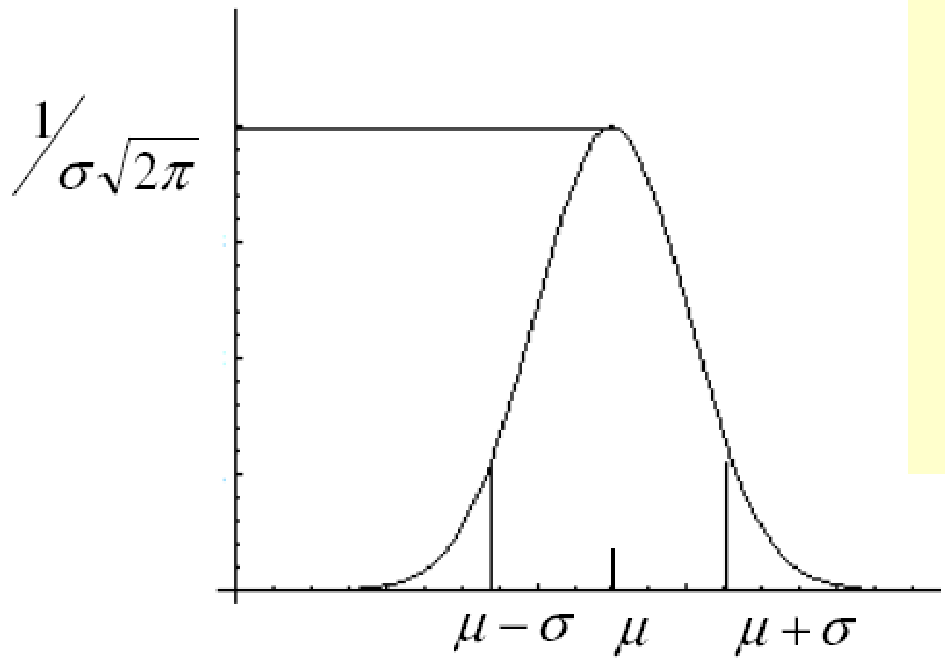
donde $\mu \in R$ y $\sigma > 0$

Notación

$X \sim N[\mu, \sigma^2]$

Distribución normal o gaussiana

- Gráfica de f(x)

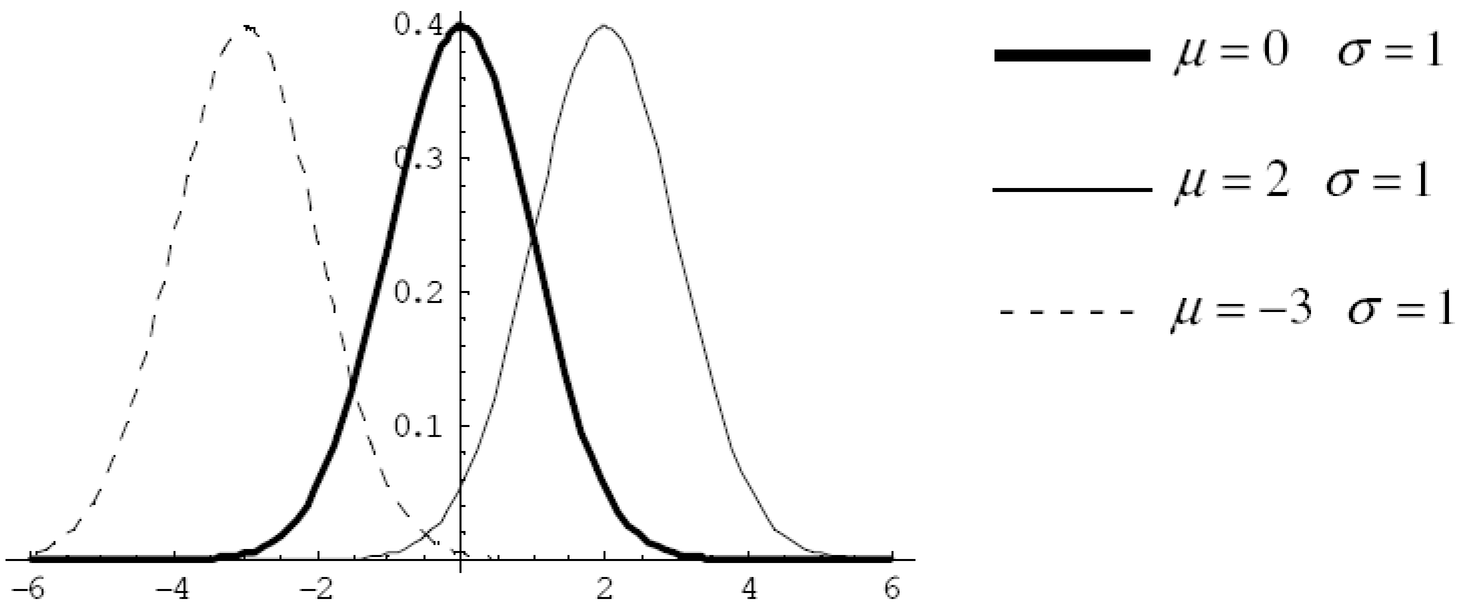


Cuando σ aumenta, la gráfica se “achata”, cuando σ disminuye la gráfica se hace mas “puntiaguda”.
Se dice que σ ***es un parámetro de escala.***

Cuando *μ* varía la gráfica de la función se ***traslada,***
μ es un parámetro de posición.

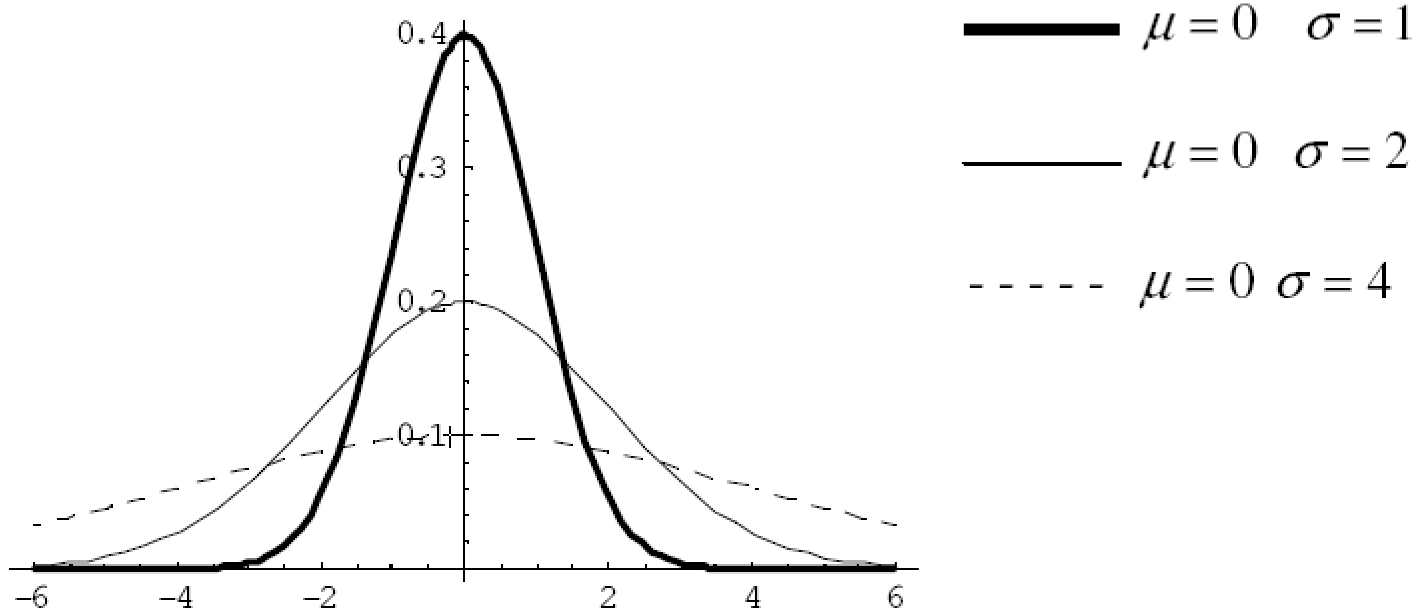
Distribución normal o gaussiana

- ***μ* es un parámetro de posición**



Distribución normal o gaussiana

- σ ***es un parámetro de escala.***



Distribución Normal o Gaussiana

- Esta distribución lleva el nombre de Normal porque existen numerosos experimentos que se comportan de esta forma. Muchas v.a. continuas presentan una fdp cuya gráfica tiene forma de campana.
- **Características**
  - La curva tiene un solo pico, por consiguiente es unimodal. Presenta una forma de campana (Campana de Gauss).
  - Es simétrica; por tanto en una curva normal, la media y la mediana poseen el mismo valor.
  - Las dos colas (extremos) de una distribución normal de probabilidad se extienden de manera indefinida y nunca tocan el eje horizontal.

Distribución normal estándar

- Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que X tiene **distribución normal estándar. Se anota X ~ N(0,1)**
- En este caso la f.d.p. se simboliza con $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Distribución normal estándar

- La *F.d.a.* de una v.a. normal estándar se anota $\Phi(x)$

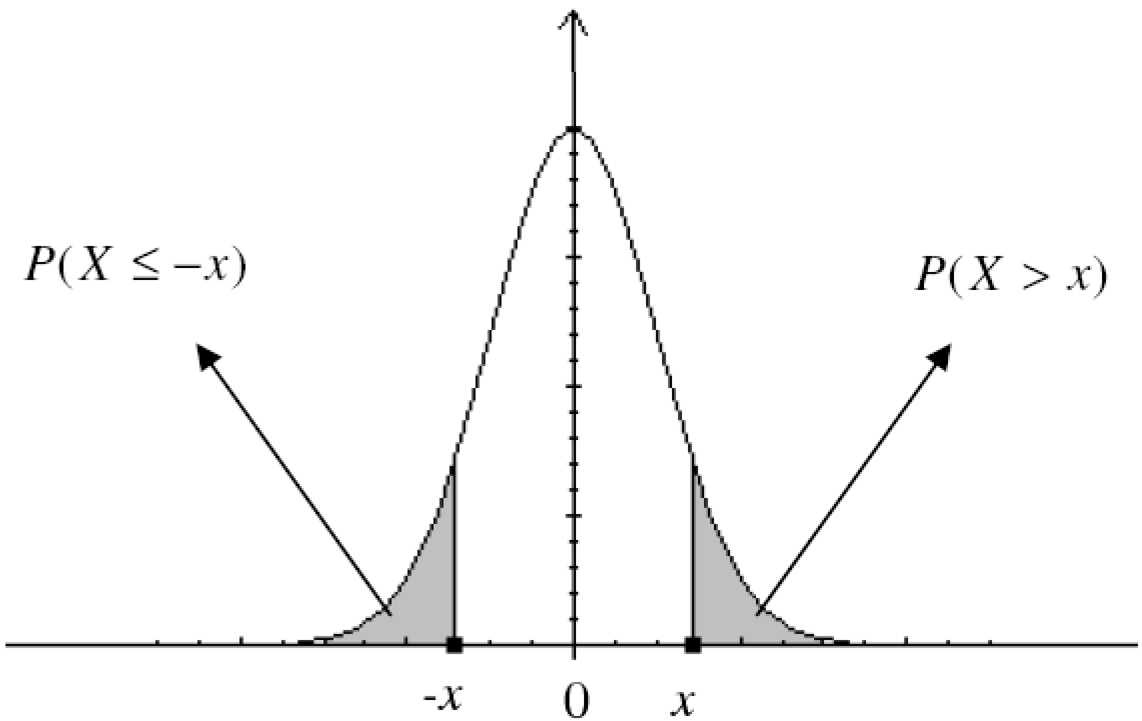
$$\phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Existen tablas de la función de distribución acumulada de la normal estándar para valores de *x que oscilan en general entre -4 y 4, pues para valores de x* ***menores que -4, $\Phi(x) \approx 0$*** *y* para valores de *x* ***mayores que 4, $\Phi(x) \approx 1$***

Distribución normal estándar

- Notar que como la $\phi(x)$ *es simétrica con respecto al origen entonces*

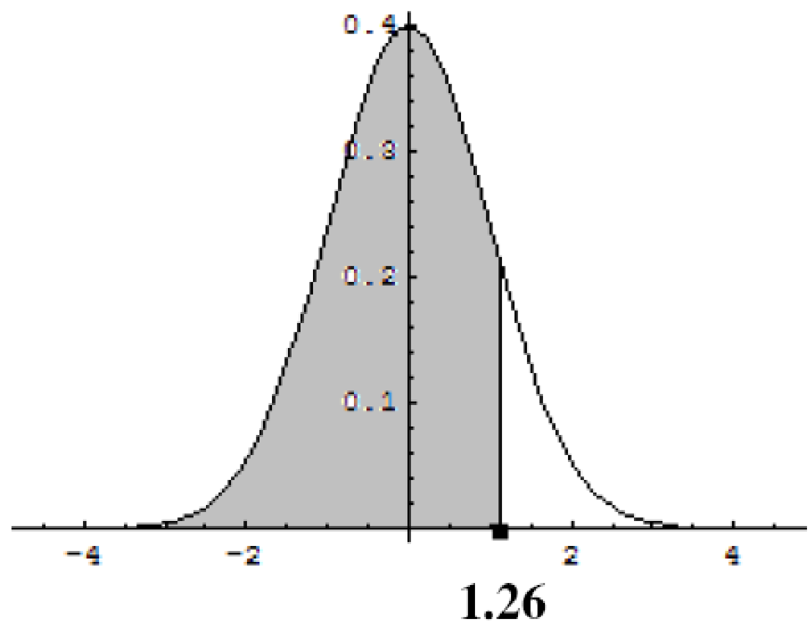
$$\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$



Ejemplo 3.9

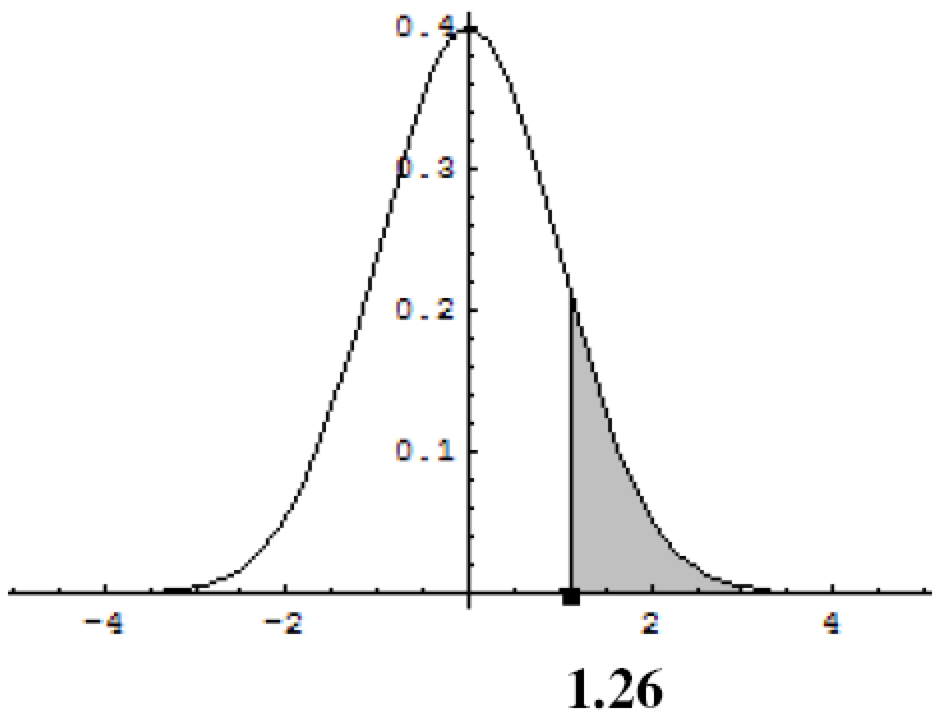
- Si $X \sim N(0,1)$ entonces utilizando la tabla de la F.d.a. de X calcular:

a) $P(X \leq 1.26) = \Phi(1.26) = 0.8962$



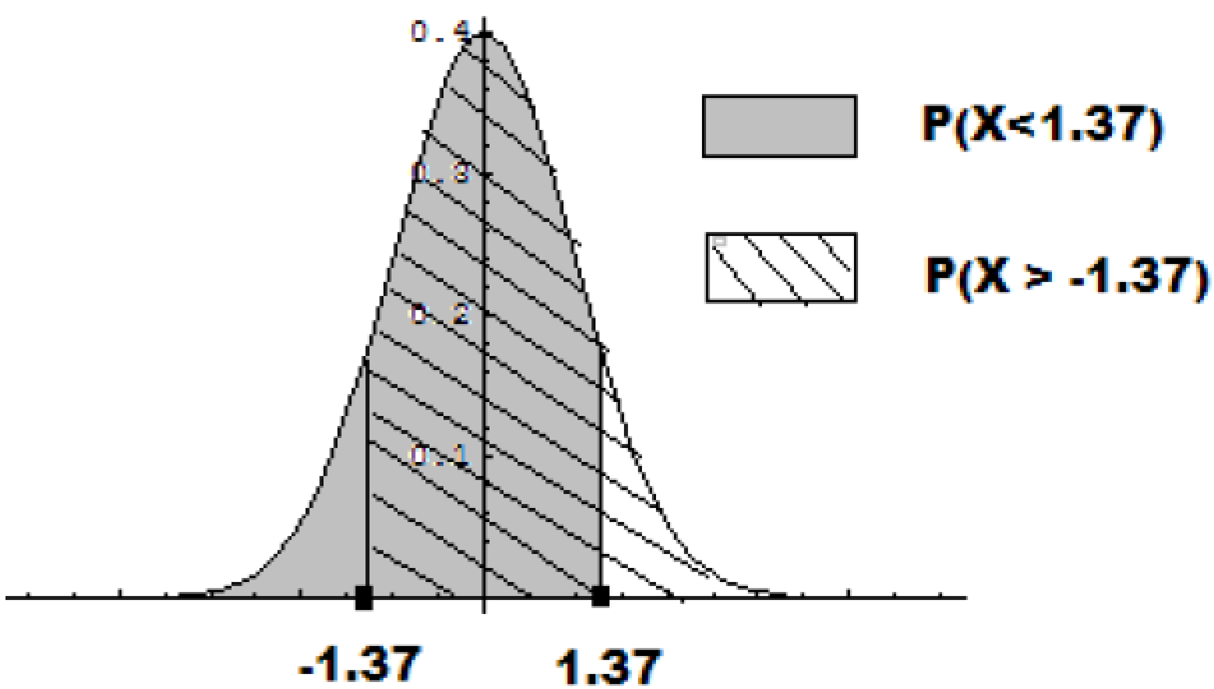
Ejemplo 3.9

b) $P(X > 1.26) = 1 - P(X \le 1.26) = 1 - \Phi(1.26) = 1 - 0.8962 = 0.1038$



Ejemplo 3.9

c) $P(X > -1.37) = P(X \leq 1.37) = \Phi(1.37) = 0.9147$



Ejemplo 3.9

d) $P(-1.25<X<0.37) = P(X<0.37) - P(X<-1.25) =$

$$= \Phi(0.37) - \Phi(-1.25) =$$

$$= \Phi(0.37) - (1-\Phi(1.25)) =$$

$$= 0.6443 - (1 - 0.8944) = 0.5387$$

e) ¿Para qué valor x se cumple que

$$P(-x < X < x) = 0.95?$$

Ejemplo 3.9

e) ¿Para qué valor x se cumple que

$$P(-x < X < x) = 0.95?$$

$$P(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x))$$
$$= 2\Phi(x) - 1$$

$$\therefore 2\Phi(x) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi(x) = (0.95 + 1)/2$$
$$\Phi(x) = 0.975$$

- Observando la tabla de la F.d.a. vemos que x=1.96 porque $\Phi(1.96) = 0.975$

Distribución Normal

- Propiedad
  - Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *entonces la v.a.* $Y = aX + b$ *con a y b números reales,* $a \neq 0$ *, tiene también distribución normal pero con parámetros* $a\mu + b$ *y* $a^2\sigma^2$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\therefore \quad Si \;\; X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\; entonces \; Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Distribución normal estándar

- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la F.d.a es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

F(x) no puede expresarse en términos de funciones elementales y sólo hay tablas de la F.d.a. de la normal estándar.

Distribución normal estándar

- Para calcular *F(x) procedemos de la siguiente forma*

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

$$= P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

$Y \sim N(0,1)$

Ejemplo 3.10

- Si $X \sim N(3, 9)$ entonces

a) P(2 < X < 5) =

$$P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{5-3}{3}\right) - \phi\left(\frac{2-3}{3}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{2}{3}\right) - \phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.3779$$

Esperanza y Varianza

- Si X es un v.a. con distribución normal, es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *entonces*

$$E(X) = \mu \quad y \quad V(x) = \sigma^2$$

Ejercicio 3.6

- La longitud de los clavos fabricados por una máquina, en milímetros, es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal, con media 10 y varianza 4.
- Calcular

  a) La probabilidad de que un clavo elegido al azar mida menos de 12 mm.

  b) La probabilidad de que un clavo elegido al azar mida menos de 7 mm.

Ejercicio 3.7

- Hay dos máquinas para cortar corchos destinados para usarse en botellas de vino.
- La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de 0.1 cm.
- La segunda produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de 0.02 cm.
- Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 cm y 3.1 cm. ¿Cuál máquina tiene mas probabilidad de producir un corcho aceptable?

Distribución exponencial

- Sea X una v.a. continua. Se dice que tiene distribución exponencial con parámetro λ si su f.d.p. es de la forma

Notación
$X \sim Exp(\lambda)$

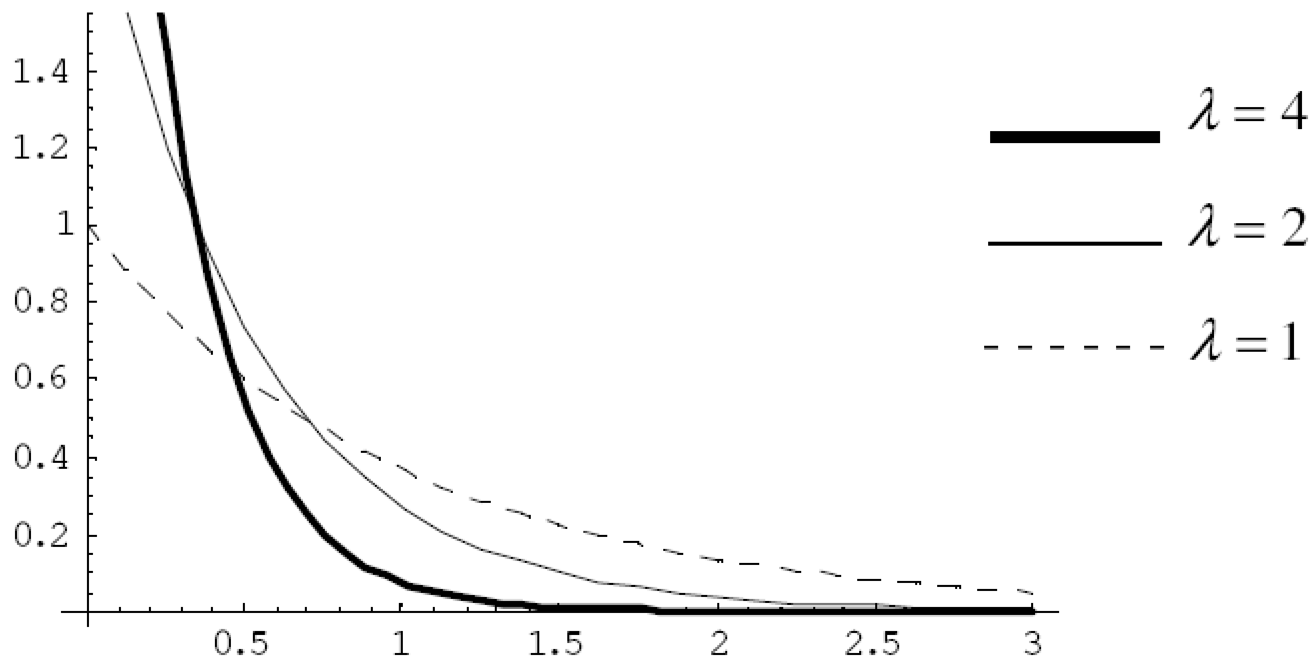
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$

Esta distribución se utiliza algunas veces para modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento. A menudo se lo llama ***tiempo de espera.***

Distribución Exponencial

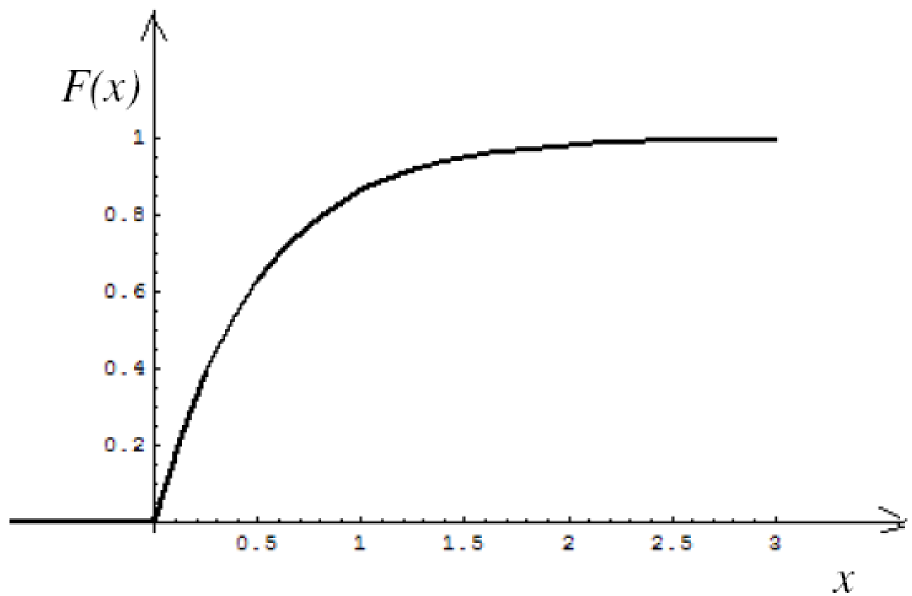
- Gráfica de la función densidad para diferentes valores del parámetro



Distribución Exponencial

- La F.d.a. de una v.a. exponencial es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



Ejemplo 3.11

- Supongamos que el tiempo, en segundos, de respuesta en cierta terminal de computadora en línea (es decir el tiempo transcurrido entre el fin de la consulta del usuario y el principio de la respuesta del sistema a esa consulta) se puede considerar como una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$. Calcular

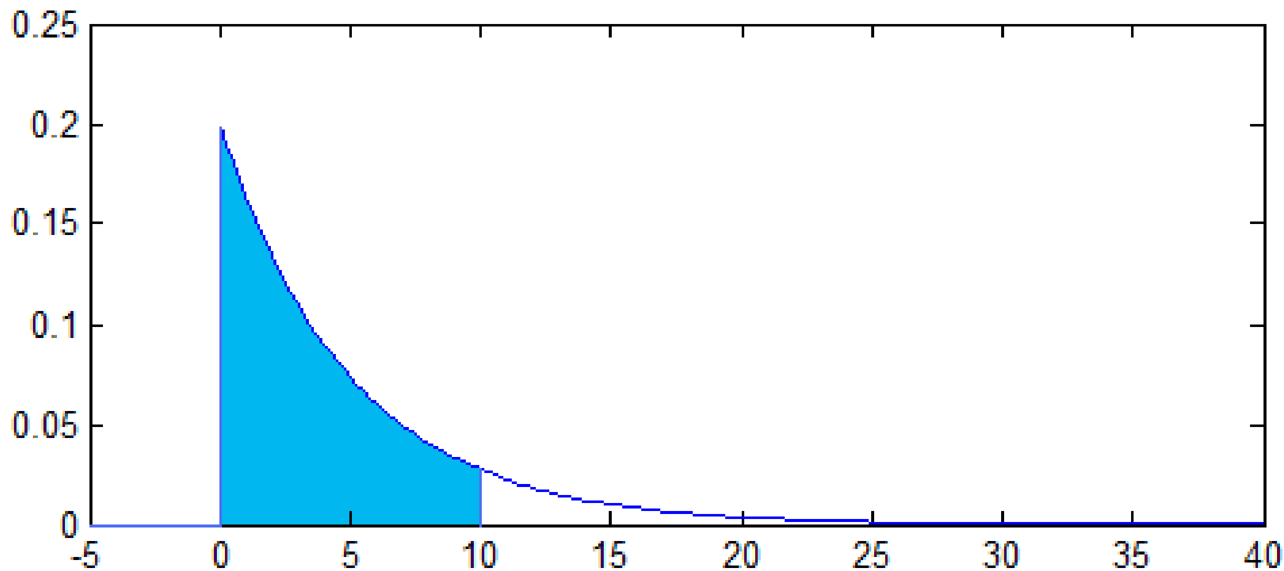
a) la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo 10 segundos.

b) la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos.

Ejemplo 3.11

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\,e^{-0.2x} & x \geq 0 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

- Sea *X la v.a., entonces X ~ Exp(0.2)*



En a) se pide calcular P(X<10)

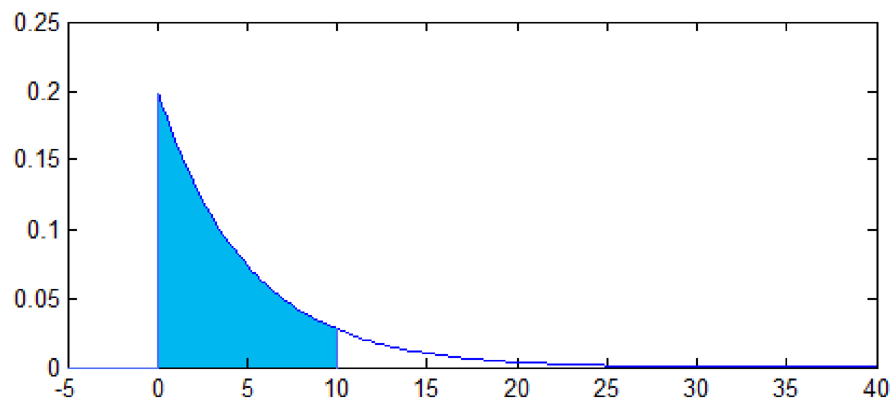
¿Considera que será un valor superior a 0.5?

Ejemplo 3.11

- Sea X *la v.a., entonces* $X \sim Exp(0.2)$

$$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.2*10} =$$

$$1\text{-}0.135 = 0.865$$



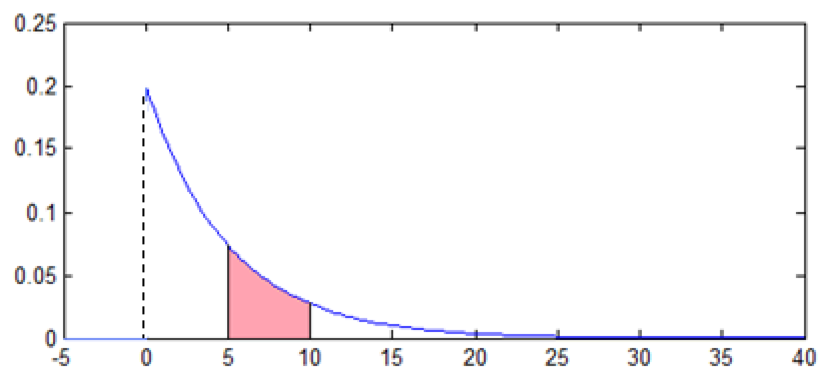
∴ El 86% de las veces la computadora responde antes de los 10 segundos

Ejemplo 3.11

- Sea *X la v.a., entonces* $X \sim Exp(0.2)$

$b)\ P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) =$

$(1 - e^{-0.2*10}) - (1 - e^{-0.2*5}) = 0.233$



$\therefore$ mas del 60% de las veces la computadora responde antes de los 5 segundos

Esperanza y varianza

- Sea $X \sim Exp(\lambda)$ entonces

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

- El tiempo entre dos sucesos de un proceso de Poisson con media λ es una v.a. de distribución exponencial con parámetro λ.
- **Ejemplo**

X = Nº de inundaciones en un período [0,t]	$X \sim P(\lambda t)$
λ = N° medio de inundaciones por unidad de tiempo	$\lambda = E(X)/t$
T = Tiempo transcurrido entre inundaciones	$\boldsymbol{T \sim Exp(\lambda)}$
E(T) = Tiempo medio de retorno de las inundaciones	$E(T)=1/\lambda$

Resumen

- **V.a. continua**
  - *fdp*
  - *Fda*
  - $f(x)$ a partir de $F(x)$
- **Percentiles**
- **Esperanza**
  - de una v.a. continua
  - de una función
    - Obtención de $g(y)$ a partir de $f(x)$
- **Varianza**
  - Fórmula abreviada
- **Distribuciones**
  - Uniforme
  - Normal
    - Normal estandar
  - Exponencial
    - Relación con el proceso de Poisson