Variable Aleatoria Continua

Hay variables aleatorias cuyo rango son todos los números reales de un intervalo dado; es decir es un conjunto infinito no numerable. Ejemplos de variables continuas podrían ser

- *X:"tiempo que tarda en llegar un colectivo a una parada"*
- *Y:"tiempo de vida de un fusible".*

Los valores de una v.a.continua no son contables es decir que no se puede hablar del i-ésimo valor. Por lo tanto se reemplaza $p(x_i)$ por una función *f(x)* definida para todos los valores de R_X.

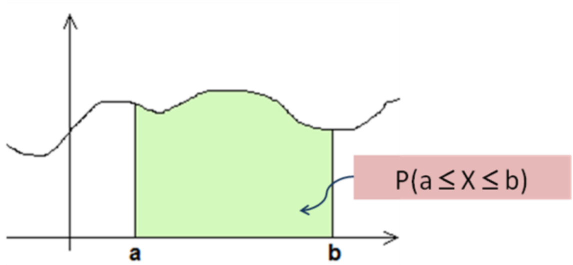
- Se dice que X es una *v.a. continua* si existe una función ***f**, llamada* **función densidad de probabilidad** *o* ***fdp**, que cumple*

  a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

  b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Sea X una *v.a. continua* con función densidad *f(x)*. Para cualquier a y b tal que $-\infty < a < b < \infty$ *se cumple*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



Si X es una v.a. continua, para cualquier número *c*, P(X = *c*) = 0

Ejemplo

Se selecciona un individuo de un grupo grande de hombre adultos. La probabilidad de que su altura sea precisamente 180 centímetros (es decir 180,00000 centímetros) es cero.

Sin embargo, hay una probabilidad mayor que cero de que X se encuentre entre 175,00 y 180,50 centímetros.

Ejemplo 3.1

a) Encuentre la constante **c** de manera que la función sea una función densidad.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

***Solución** : Debe cumplirse que f(x)≥ 0 ∀x y que* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

La primera condición, *f(x)≥0* , se cumple si *c>0*. Veamos cuanto debe valer c para que l integral de 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cx^2\ dx = \int_0^3 cx^2 dx = \left.\frac{cx^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27c}{3} - 0 = 9c$$

y como debe ser = 1, c = 1/9.

Por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

Ejemplo 3.2

Sea X una v.a. continua con la siguiente *fdp*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

Calcule P(1<X<2)

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x^2}{9} dx = \left.\frac{x^3}{27}\right|_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Como P(X = *d*) = 0, en este ejemplo, P(1<X<2) = P(1≤X<2) = P(1<X ≤2) = P(1 ≤X ≤2)=7/27

Ejercicio 3.1

Sea X la cantidad de tiempo durante el cual un estudiante seleccionado al azar saca en préstamo un libro de la reserva de 2 hs. en una bibilioteca y suponga que X tiene la siguiente fdp

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Calcular

a) P(X ≤ 1)

b) P(0.5 ≤ X ≤ 1.5)

c) P(1.5 < X)

Función de distribución acumulada

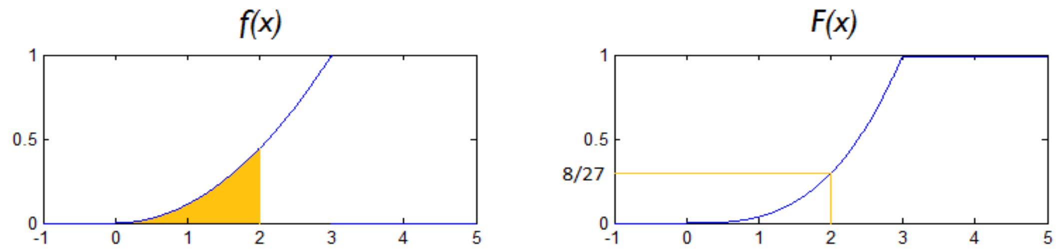
La función de distribución acumulada F(X) para una v.a. continua X está definida para todo número *x* de la siguiente forma

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

F(X) es una función monótona creciente que se incrementa de 0 a 1.

Ejemplo 3.3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\[2ex] 0 & \textit{de otra manera}\end{cases}$$



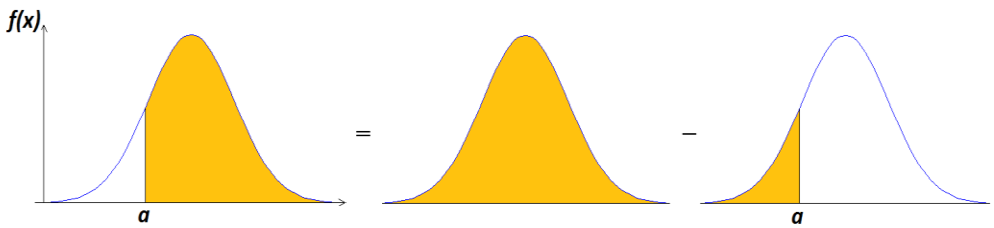
$P(X \leq 2) = 8/27$

$F(2) = 8/27$

Usando F(X) para calcular probabilidades

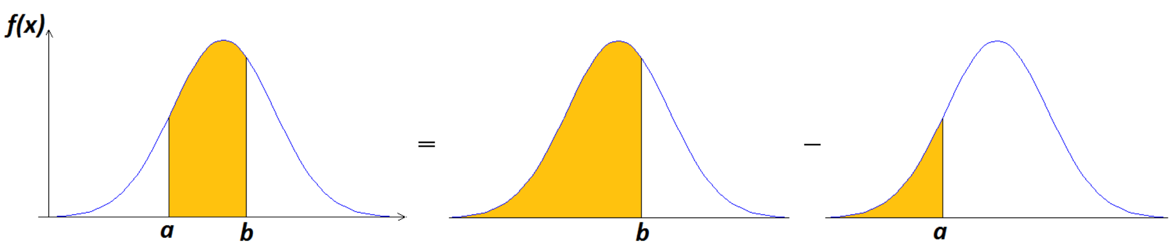
- Sea X una v.a. continua con fdp *f(x)* y fda *F(x)*, para cualquier número *a*

  $P(X > a) = 1 - F(a)$



- Sea X una v.a. continua con fdp *f(x)* y fda *F(x)*, para dos números cualesquiera *a* y *b* con *a*<*b*

  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$



Ejemplo 3.3

a) Encuentre la ***fda*** para la v.a. X cuya *fdp* es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\[2ex] 0 & \textit{de otra manera}\end{cases}$

Por definición $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$

Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$.

Si 0 < x < 3, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{9}\,dy = \frac{x^3}{27}$

Si x ≥ 3, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{3} f(y)dy + \int_{3}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int_{0}^{3} \frac{y^2}{9}\,dy + \int_{3}^{x} 0dy = 1$

Por lo tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 < x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

b) Utilice la *fda* para calcular P(1<X≤2)

$$P(1 < X \le 2) = P(X \le 2) - P(X \le 1) \;\; = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

Obtención de f(x) a partir de F(x)

Si X es una v.a. continua con fdp *f(x)* y función de distribución acumulada *F(x)* entonces

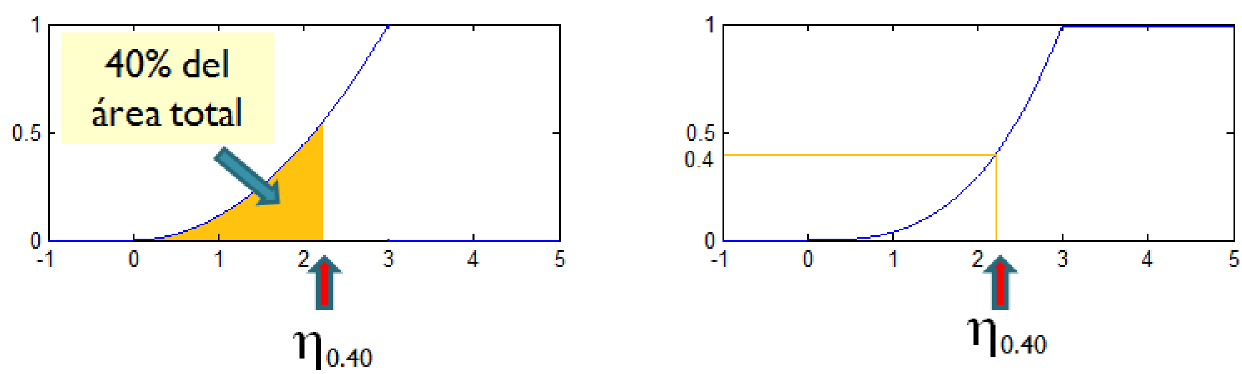
$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \right) = f(x)$$

donde F(x) sea derivable

Percentiles

Con frecuencia conviene dividir el área bajo la curva de densidad usando ordenadas, de manera que el área a la izquierda de la ordenada sea algún porcentaje del área total. Los valores correspondientes a tales áreas se llaman ***valores percentiles*** o simplemente ***percentiles***.

Ejemplo : Percentil 40



Sea p un número entre 0 y 1. El percentil *(100p)* de la distribución de una v.a. continua X, denotado por η_p, está definido por

$$p = F(\eta_p) = \int_{-\infty}^{\eta_p} f(y)\,dy$$

Ejemplo 3.4

Hallar el percentil 40 de la siguiente $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & 0<x<3 \\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

$$p=F(\eta_p)=\frac{(\eta_p)^3}{27} \quad\Longrightarrow\quad \frac{(\eta_p)^3}{27}-p=0$$

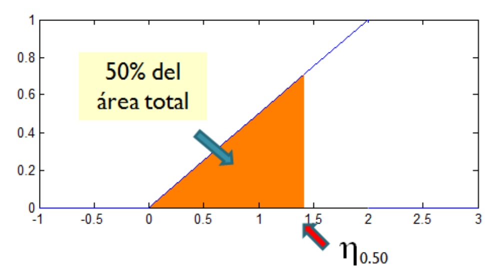
Para el percentil 40, p=0.4 y la ecuación a resolver es

$$\frac{\eta_{0.40}{}^3}{27}-0.4=0 \quad \therefore \quad \eta_{0.40}=\sqrt[3]{27*0.4}=2.2104$$

El **percentil 50** de una distribución continua es la **mediana**

Ejercicio 3.2

Hallar la mediana (percentil 50) de la siguiente *fdp* $f(x)=\begin{cases} 0.5x & 0\le x\le 2 \\ 0 & en\ caso\ contrario\end{cases}$



Esperanza de una v.a. continua

Para una v.a. discreta X, *E(X)* se obtiene sumando *x. p(x)* sobre varios valores posibles de X. Ahora la integración sustituye a la suma y la *fdp* a *p(x)*.

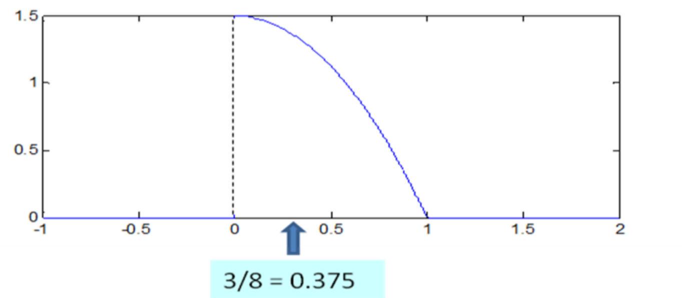
La esperanza de una v.a. continua con fdp *f(x)* se define como $\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.\,f(x)\,dx$

Ejemplo 3.5

Sea X una v.a. continua con la siguiente fdp $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}(1-x^2) & 0\le x\le 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.\,f(x)\,dx=\int_0^1 x.\frac{3}{2}(1-x^2)\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1(x-x^3)\,dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}$$

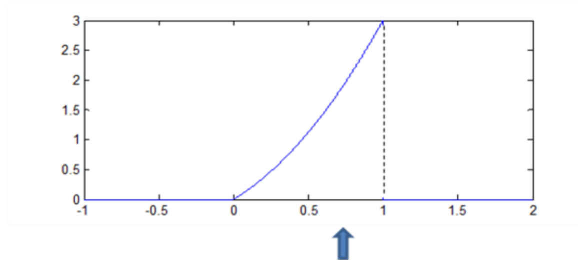
Por lo tanto



Ejercicio 3.3

Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X con fdp* dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2+x & 0<x<1\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}$$



Hallar E(X)

Esperanza de una función

Si X es una v.a. continua con fdp *f(x)* y *h(x)* es cualquier función de X entonces

$$E[h(x)]=\mu_{h(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}h(x).\,f(x)\,dx$$

Note que si se considera a *h(x)* como una nueva v.a. *Y*, también se puede hallar *E(Y)* utilizando la definición anterior si previamente se calcula la *fdp* de *Y*.

Ejemplo 3.6

Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X con fdp* dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2+x & 0<x<1\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}$$

Suponga que el valor en u$s de cada muestra es *Y=h(X)=5−0.5X*. Encontrar la esperanza de Y

Solución utilizando *E[h(x)]*

$$E(Y)=E[h(x)]=\int_0^1 h(x).\,f(x)dx = \int_0^1 (5-0.5x).\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\frac{223}{48}$$

Solución sin utilizar *E[h(x)]*

$$G(y)=P(Y\le y)=P(5-0.5X\le y)\equiv P\left(X\ge\frac{5-y}{0.5}\right)=1-P\left(X\le\frac{5-y}{0.5}\right)=1-F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)$$

fda de X

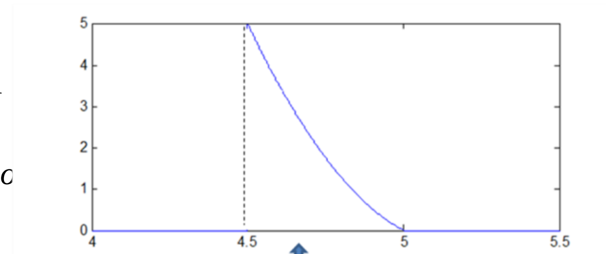
fda de Y

$$G(y)=1-F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)$$

$$g(y)=\frac{d}{dy}\left(1-F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\right)=-f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(-\frac{1}{0.5}\right)=f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right)=$$

$$g(y)=\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{5-y}{0.5}\right)^2+\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right) & 0<\frac{5-y}{0.5}<1\\ 0 & \textit{caso contrario}\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}12y^2-124y+320 & \frac{9}{2}<y<5\\ 0 & \textit{caso contrario}\end{cases}$$



$$\boldsymbol{E(Y)=\frac{223}{48}=4.6458}$$

Ahora calculamos *E(Y)*

$$E(Y)=\int_{9/2}^{5} y.g(y)\,dy=\int_{9/2}^{5} y.(12y^2-124y+320)\,dy=\frac{223}{48}$$

Varianza de una v.a. continua

Sea *X una v.a. continua con f.d.p. f(x) y sea* E(X) = *μ , entonces la varianza de* X es

$$V(X)=\sigma_X^2=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\,f(x)\,dx$$

Se cumple que $V(X)=E(X^2)-\mu^2$ $V(aX+b)=a^2V(X)$ $\sigma_{aX+b}=|a|\sigma_X$

Ejemplo 3.7

Retomando el ejemplo de las muestras minerales donde la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X con fdp* dada por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2+x & 0<x<1\\ 0 & \textit{caso contrario}\end{cases}$$

y E(X)=17/24

Calcular V(X)

$$V(X)=\int_0^1 (x-0.7083)^2(1.5x^2+x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 (x^2-1.4166x+0.5017)(1.5x^2+x)\,dx$$

$$=\int_0^1 (1.5x^4+x^3-2.1249x^3-1.4166x^2+0.7526x^2+0.5017x)dx$$

$$=\int_0^1 (1.5x^4+1.1249x^3-0.6640x^2+0.5017x)dx$$

$$=1.5\frac{x^5}{5}+1.1249\frac{x^4}{4}-0.6640\frac{x^3}{3}+0.5017\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=0.0483$$

Rehacer el cálculo de V(X) usando $V(X)=E(X^2)-\mu^2$

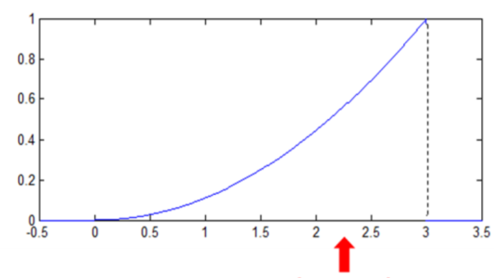
$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\left(\frac{3}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{20} \qquad \therefore\ V(X)=\frac{11}{20}-\left(\frac{17}{24}\right)^2=0.0483$$

Ejercicio 3.4

Sea X una v.a. continua con la sigte *fdp*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & 0<x<3\\ 0 & de\ otra\ manera\end{cases}$$

Calcular E(X) y V(X)



$$E(X)=2.25$$

$$V(X)=0.3375$$

$$\sigma=\sqrt{0.3375}=0.5809$$

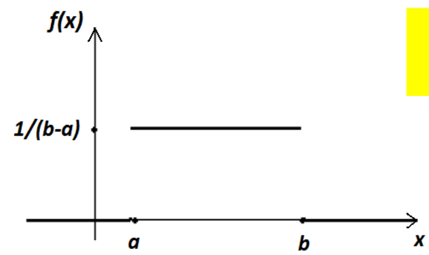
Variables Aleatorias continuas importantes

- Distribución Uniforme
- Distribución Normal o Gaussiana
- Distribución Exponencial

Distribución Uniforme

Una v.a. continua *X se dice que tiene* ***distribución uniforme en el intervalo [a,b]*** *, con a < b, si tiene* fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



Notación
X ~ U[a,b]

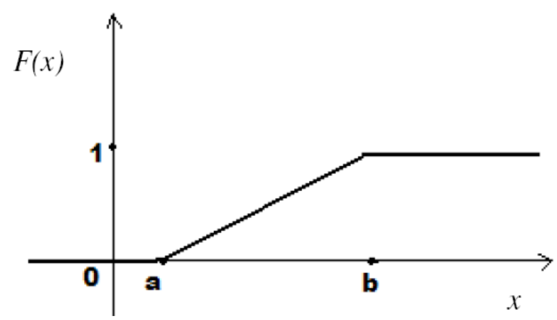
La *F.d.a* es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

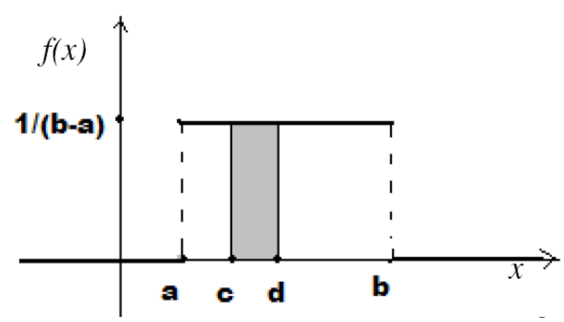
$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1$$



Gráfica de F(x)

Si X ~ U[a,b] y a ≤ c < d ≤ b entonces

$$P(c \le X \le d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$



Ejemplo 3.8

Los colectivos de una determinada línea llegan a una parada determinada en intervalos de 15 minutos comenzando desde las 7 a.m.; es decir, que llegan a la parada a las 7, 7:15, 7:30, 7:45, etc.

Si un pasajero llega a la parada en un tiempo que se puede considerar una v.a. distribuida uniformemente entre 7 y 7:30, encontrar la probabilidad de que:

a) el pasajero espere menos de 5 minutos al colectivo

b) el pasajero espere más de 10 minutos al colectivo

Solución:

Sea X: "tiempo en minutos desde las 7 hs en que el pasajero llega a la parada".

Consideramos que *X ~ U[0,30]*

a) si el pasajero espera menos de 5 minutos al colectivo, entonces llega a la parada entre las 7:10 y 7:15 o entre las 7:25 y 7:30, entonces la probabilidad pedida es

$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\,dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\,dx = \frac{1}{3}$$

también puede calcularse directamente

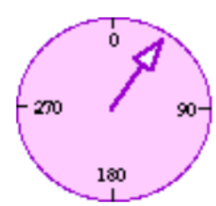
$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \frac{15-10}{30} - \frac{30-25}{30} = \frac{1}{3}$$

Esperanza y Varianza

Sea una X variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo [a,b], es decir *X ~ U[a,b]* entonces

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejercicio 3.5



Sea X el ángulo de giro del dial de la figura

Indique la fdp de X

Usela para calcular

P(30<X<300) =

P(0<x<90) =

P(90<x<180) =

P(0<x<120) =

Distribución normal o gaussiana

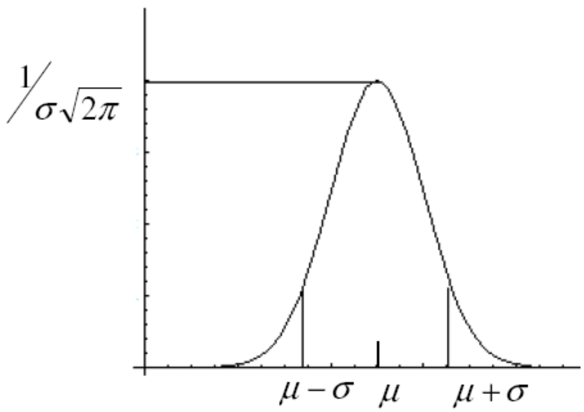
Sea X una v.a. continua; decimos que tiene distribución normal con parámetros μ y σ si su f.d.p. es de la forma

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Notación
$X \sim N[\mu, \sigma^2]$

donde $\mu \in R$ y $\sigma > 0$

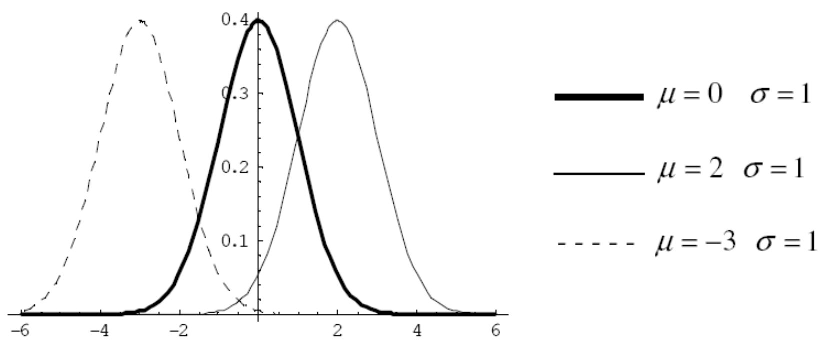
Gráfica de f(x)



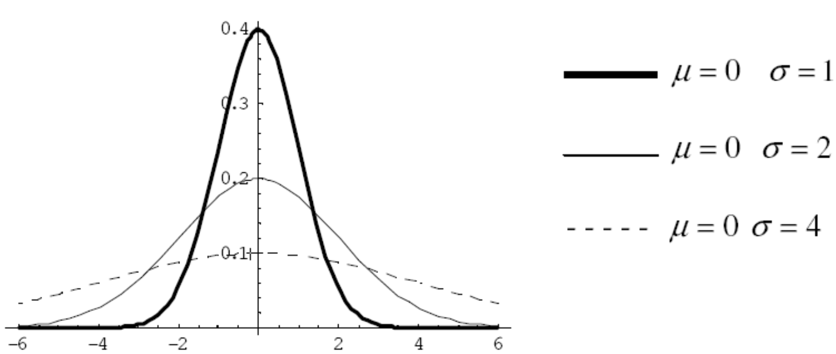
Cuando μ varía la gráfica de la función se ***traslada, μ es un parámetro de posición.***

Cuando s aumenta, la gráfica se "achata", cuando s disminuye la gráfica se hace mas "puntiaguda". Se dice que s ***es un parámetro de escala.***

- ***μ es un parámetro de posición***



- σ ***es un parámetro de escala.***



Distribución Normal o Gaussiana

Esta distribución lleva el nombre de Normal porque existen numerosos experimentos que se comportan de esta forma. Muchas v.a. continuas presentan una fdp cuya gráfica tiene forma de campana.

Características

a) La curva tiene un solo pico, por consiguiente es unimodal. Presenta una forma de campana (Campana de Gauss).

b) Es simétrica; por tanto en una curva normal, la media y la mediana poseen el mismo valor.

c) Las dos colas (extremos) de una distribución normal de probabilidad se extienden de manera indefinida y nunca tocan el eje horizontal.

Distribución normal estándar

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que X tiene **distribución normal estándar.**

Se anota X ~ N(0,1). En este caso la f.d.p. se simboliza con $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

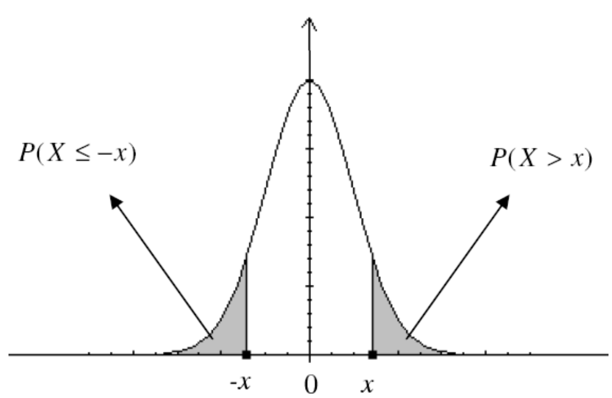
La *F.d.a.* de una v.a. normal estándar se anota $\Phi(x)$

$$\phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

Existen tablas de la función de distribución acumulada de la normal estándar para valores de *x que oscilan en general entre -4 y 4, pues para valores de x* ***menores que -4, $\Phi(x) \sim 0$*** *y* para valores de *x* ***mayores que 4, $\Phi(x) \sim 1$***

Notar que como la $\phi(x)$ *es simétrica con respecto al origen entonces*

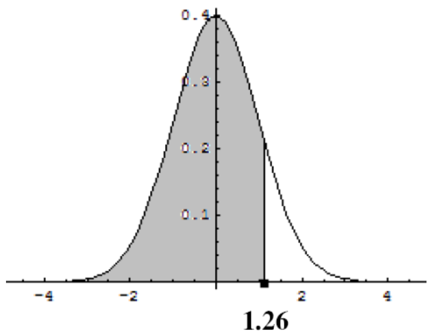
$\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$



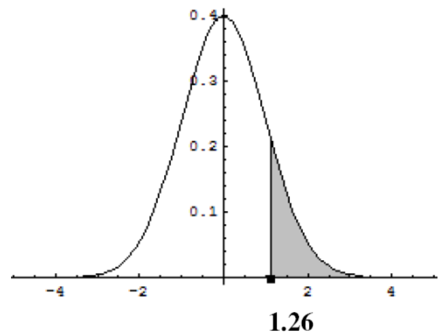
Ejemplo 3.9

Si $X \sim N(0,1)$ entonces utilizando la tabla de la F.d.a. de X calcular:

a) $P(X \leq 1.26) = \Phi(1.26) = 0.8962$



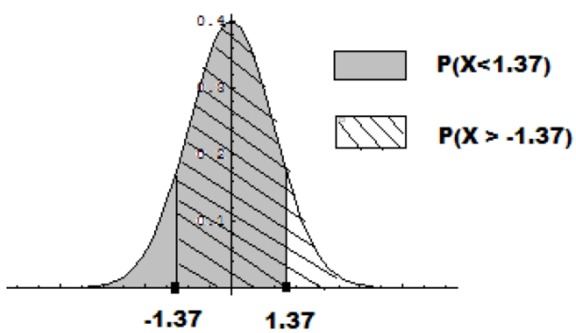
a)



b)

b) $P(X > 1.26) = 1 - P(X \leq 1.26) = 1 - \Phi(1.26) = 1 - 0.8962 = 0.1038$

c) $P(X > -1.37) = P(X \leq 1.37) = \Phi(1.37) = 0.9147$



d) $P(-1.25 < X < 0.37) = P(X < 0.37) - P(X < -1.25) = \Phi(0.37) - \Phi(-1.25) =$

$= \Phi(0.37) - (1 - \Phi(1.25)) = 0.6443 - (1 - 0.8944) = 0.5387$

e) ¿Para qué valor x se cumple que $P(-x < X < x) = 0.95$?

$P(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

Por lo tanto $2\Phi(x) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi(x) = (0.95 + 1)/2 \Rightarrow \Phi(x) = 0.975$

Observando la tabla de la F.d.a. vemos que $x=1.96$ porque $\Phi(1.96) = 0.975$

Propiedad de la Distribución Normal

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *entonces la v.a.* $Y = aX + b$ *con a y b números reales,* $a \neq 0$ *, tiene también distribución normal pero con parámetros* $a\mu + b$ *y* $a^2\sigma^2$

$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)}$ $\therefore$ ***Si*** $X \sim N(\mu, s^2) \Rightarrow Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la F.d.a es

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

F(x) no puede expresarse en términos de funciones elementales y sólo hay tablas de la F.d.a. de la normal estándar. Para calcular *F(x) procedemos de la siguiente forma*

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$Y \sim N(0,1)$

Ejemplo 3.10

Si $X \sim N(3, 9)$ entonces

$$P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = \phi\left(\frac{5-3}{3}\right) - \phi\left(\frac{2-3}{3}\right) = \phi\left(\frac{2}{3}\right) - \phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.3779$$

Esperanza y Varianza

Si X es un v.a. con distribución normal, es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *entonces* $E(X) = \mu$ *y* $V(x) = \sigma^2$

Ejercicio 3.6

La longitud de los clavos fabricados por una máquina, en milímetros, es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal, con media 10 y varianza 4. Calcular

a) La probabilidad de que un clavo elegido al azar mida menos de 12 mm.

b) La probabilidad de que un clavo elegido al azar mida menos de 7 mm.

Ejercicio 3.7

Hay dos máquinas para cortar corchos destinados para usarse en botellas de vino.

La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de 0.1 cm.

La segunda produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de 0.02 cm.

Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 cm y 3.1 cm. ¿Cuál máquina tiene mas probabilidad de producir un corcho aceptable?

Distribución exponencial

Sea X una v.a. continua. Se dice que tiene distribución exponencial con parámetro λ si su f.d.p. es de la forma

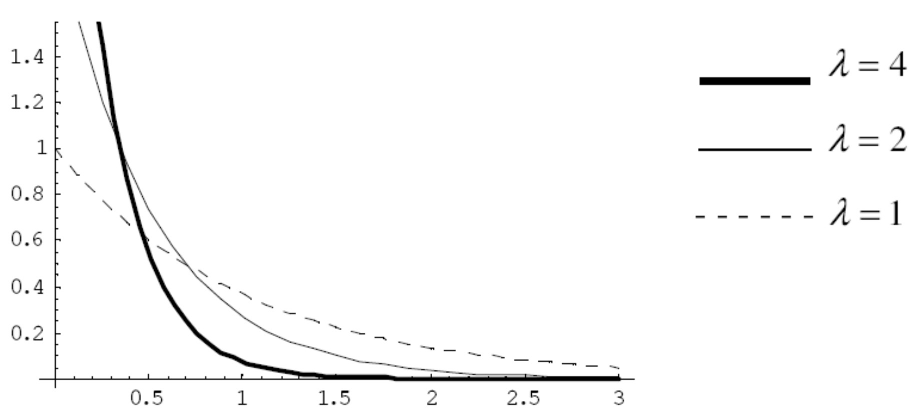
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Notación
$X \sim Exp(\lambda)$

donde $\lambda > 0$

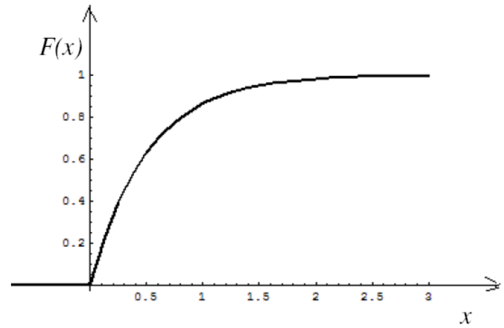
Esta distribución se utiliza algunas veces para modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento. A menudo se lo llama ***tiempo de espera.***

<u>Gráfica de la función densidad para diferentes valores del parámetro</u>



La F.d.a. de una v.a. exponencial es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



Ejemplo 3.11

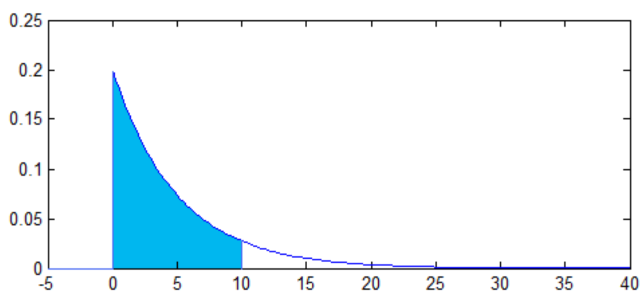
Supongamos que el tiempo, en segundos, de respuesta en cierta terminal de computadora en línea (es decir el tiempo transcurrido entre el fin de la consulta del usuario y el principio de la respuesta del sistema a esa consulta) se puede considerar como una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$. Calcular

a) la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo 10 segundos.

b) la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos.

Sea *X la v.a., entonces X ~ Exp(0.2)*

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\,e^{-0.2x} & x \geq 0 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

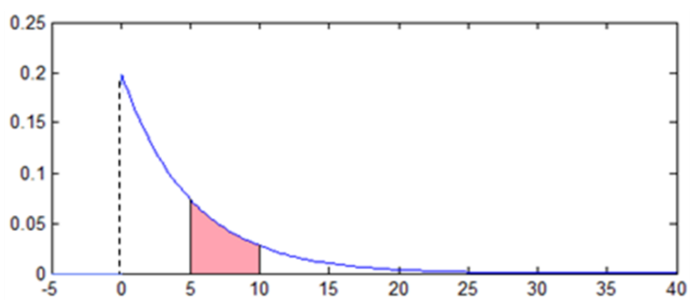


En a) se pide calcular P(X<10)

$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.2*10} = 1-0.135 = 0.865$

$\therefore$ El 86% de las veces la computadora responde antes de los 10 segundos

b) $P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = (1 - e^{-0.2*10}) - (1 - e^{-0.2*5}) = 0.233$



$\therefore$ *mas del 60% de las veces la computadora responde antes de los 5 segundos*

Esperanza y varianza

Sea $X \sim Exp(\square)$ entonces $\quad E(X)=\dfrac{1}{\lambda} \qquad V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

El tiempo entre dos sucesos de un proceso de Poisson con media λ es una v.a. de distribución exponencial con parámetro λ.

Ejemplo

X = Nº de inundaciones en un período [0,t]	*X ~ P(lt)*
l = Nº medio de inundaciones por unidad de tiempo	*l =E(X)/t*
T = Tiempo transcurrido entre inundaciones	***T ~ Exp(l)***
E(T) = Tiempo medio de retorno de las inundaciones	*E(T)=1/ l*

Resumen

- **V.a. continua**
  - *Fdp , Fda*
  - *f(x)* a partir de *F(x)*
- **Percentiles**
- **Esperanza**
  - de una v.a. *continua*
  - *de una función*
    - Obtención de *g(y)* a partir de *f(x)*
- **Varianza**
  - *Fórmula* abreviada
- **Distribuciones**
  - *Uniforme*
  - *Normal*
    - Normal estandar
  - *Exponencial*
    - Relación con el proceso de Poisson