Övningstillfälle 1: Teoretiska övningar · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

24 januari 2023

Detta dokument innehåller en samling övningar i kombinatorik som inte kräver någon programmering, utan är avsedda att lösas med papper och penna. Merparten av dessa problem är svårare än potentiella tentaproblem, eftersom de är avsedda att lösas i grupp över en längre tid, inte snabbt och individuellt i en tentasal.

Övning 1. Det finns k stycken olika sorters vykort i en butik, och du vill skicka ett vykort till varje av dina n vänner.

1. Hur många sätt kan du göra detta på om det inte finns några ytterligare begränsningar?
2. Vad blir svaret om alla korten du skickar skall vara olika?
3. Vad blir svaret om du skall skicka två olika vykort till varje vän, men olika vänner kan få samma vykort?

Övning 2. Bevisa att $\binom{n}{k}$ och $\left\{ {n \atop n-k} \right\}$ är polynom i n om vi håller k fixt.[2]

[2] Två ledtråd för partitionstalen:

1. Hur många av elementen kan hamna i en hög där de inte är enda elementet i högen?
2. Vi kan skriva
$$\left\{ {n \atop n-k} \right\} = \sum_{j=0}^{2k} a_{j,k} \binom{n}{j},$$
där $a_{j,k}$ är tal med en kombinatorisk tolkning, och enbart beror på j och k och inte på n.

Övning 3. Ge ett kombinatoriskt bevis för följande likhet, där vi antar att x är ett heltal:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x(x-1)\dots(x-k+1) = x^n.$$

Övning 4. Låt B_n beteckna det $n$te *Bell-talet*, vilket ger antalet mängdpartitioner av en mängd av n element oavsett antal delar.[3]

[3] Alltså är
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

i) Finn en rekursion för Bell-talen.

ii) Bevisa att[4]
$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

[4] Det är inte nödvändigtvis så att den enklaste lösningen använder rekursionen ni just funnit, även om ordningen på övningarna så klart antyder det.

iii) Ge ett kombinatoriskt bevis för att
$$B_n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+2k_2+\dots nk_n = n}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!(i!)^{k_i}}.$$

Övning 5. Bevisa att
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1},$$
med ett kombinatoriskt och ett algebraiskt bevis.[5]

[5] Ledtråd för det algebraiska: Betrakta också
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$
Vad blir dessa två summor tillsammans? Kan du använda det för att få en formel för uttrycket?

Övning 6. Antag att ett heltal n har primtalsfaktorisering $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Använd inklusion-exklusion för att ge en formel för antalet heltal mellan 1 och n som är relativt prima till n, det vill säga antalet $j \in [n]$ sådana att den största gemensamma delaren till j och n är 1.