

# Föreläsning 1: Permutationer och kombinationer ·

1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

16 januari 2023

<sup>1</sup> Plus redigeringar och lösningsförslag av studenter, se contributors.md.  
vilhelm.agdur@math.uu.se

Vi börjar med att fråga oss vad kombinatorik ens är för något. Sedan introducerar vi några väldigt grundläggande begrepp och principer i ämnet, och tillämpar dem på att diskutera permutationer och kombinationer.

## Vad är kombinatorik?

Jag hörde en gång, på en fest under min masterutbildning, en utläggning av en doktorand om att all matematik handlar om att reducera sina problem till en enklare form – och i slutändan var alla matematikproblem antingen linjär algebra, i vilket fall de var lätta, eller så var de kombinatorik, i vilket fall de var svåra. Vi skall alltså studera den svåra delen av matematiken.

En annan överförenklande kategorisering av matematiken ges oss av Randall Munroe.<sup>2</sup> Kombinatorik sysslar med den mellersta sortens problem – där det är lätt att förstå frågan, och inga märkliga kontinuerliga objekt är involverade, men svaret ändå kan vara komplicerat att ta reda på.

<sup>2</sup> Randall Munroe. Unsolved math problems. <https://xkcd.com/2529/>



En mer ordboksmässig definition av vad kombinatorik är vore att säga att det handlar om att räkna saker, när sakerna är ändligt många och diskreta. Detta är dock heller ingen precis eller uttömmande definition, så det finns saker som är kombinatorik utan att nödvändigtvis handla om att räkna saker, till exempel inom grafteori.

## Varför studera kombinatorik?

Kombinatorik har som redan nämnts tillämpningar i ren matematik – många problem inom andra grenar av matematiken kan reduceras till problem i kombinatorik. Det har också otaliga tillämpningar utanför den rena matematiken:

1. Nätverk och grafer
2. Analys av algoritmer
3. Design av kretskort
4. Design av experiment

Merparten av alla pussel-spel av typen sudoku, eller "flytta bilarna för att få ut en specifik bil", etc., kan ses som rena kombinatorikproblem.

## Additions- och multiplikations-reglerna

**Definition 1** (Additions-regeln). Om  $A$  är en mängd av  $n$  objekt och  $B$  är en mängd av  $m$  objekt så finns det  $n + m$  sätt att välja ett objekt från  $A$  eller ett objekt från  $B$ . Eller formulerat i symboler, om  $|A| = n$  och  $|B| = m$  så är  $|A \sqcup B| = n + m$ .<sup>3</sup>

**Exempel 2.** Vi har två burkar med olikfärgade kulor, såsom i Figur 1. Om vi ska plocka ut en kula från en av burkarna, på hur många sätt kan vi göra det?



Vi kan använda additionsregeln för att beräkna att det finns  $9 + 6 = 15$ , sätt att välja en kula, vilket är samma som totala antalet kulor.

**Exempel 3.** En restaurang har en meny med fyra drinkar, fem förätter, tio huvudrätter, och tre desserter. Hur många saker har de på menyn?

Additions-regeln säger oss att svaret är  $4 + 5 + 10 + 3 = 22$ .

**Definition 4** (Multiplikations-regeln). Om  $A$  är en mängd av  $n$  objekt och  $B$  är en mängd av  $m$  objekt så finns det  $nm$  sätt att välja ett objekt

<sup>3</sup> Symbolen  $\sqcup$  (Man ser ibland istället notationen  $\uplus$  för detta) betyder *disjunkt union* – vi tar unionen av de två mängderna, men vi tvingar mängderna att vara disjunkta genom att komma ihåg vilken mängd varje element kom från. Så om  $A$  och  $B$  inte har några gemensamma element är det samma sak som  $\cup$ , men om de har gemensamma element gäller att t.ex.

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

emedan

$$\{1, 2, 3\} \sqcup \{3, 4\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (3, B), (4, B)\},$$

så de har alltså olika antal medlemmar.

För det allra mesta behöver man inte vara så här rigorös, men det kan vara bra att ha i bakhuvudet att summa-regeln inte räknar antalet element i  $A \cup B$  om  $A$  och  $B$  kan tänkas ha gemensamma element. Vad vi gör i det fallet kommer vi återkomma till senare, när vi diskuterar inklusion-exklusion.

Figur 1: Två separata burkar med kulor i, där den vänstra har nio kulor och den högra sex.

från  $A$  och ett objekt från  $B$ . Eller ekvivalent, det finns  $nm$  sätt att välja ett par av ett objekt ur  $A$  och ett objekt ur  $B$ . Eller uttryckt i symboler

$$|A \times B| = |\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}| = nm.$$

**Exempel 5.** Om vi har samma två burkar som i Exempel 2, på hur många sätt kan man välja en kula från den blå burken och en kula från den gula burken?

Antalet olika sätt att välja två kulor, en från ena burken och en från den andra, ges enligt multiplikationsregeln av produkten av antalet bollar i varje burk, alltså  $9 \cdot 6 = 54$ .

**Exempel 6.** Om du besöker restaurangen i Exempel 3, hur många olika sätt finns det att beställa en trerätters middag med en drink till?

<sup>4</sup> Multiplikations-regeln säger oss att svaret är  $4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 3 = 600$ .

<sup>4</sup> En fullständigt teoretisk fråga, eftersom ingen faktiskt har råd med det i dagens ekonomi.

## Strängar

**Definition 7.** En *sträng*  $s$  (eller ett *ord*) av längd  $n$  på en mängd  $X$  (kallad *alfabetet* för strängen) är en funktion

$$s : \{1, 2, \dots, n\} = [n] \rightarrow X$$

där  $s_i$  är den  $i$ te bokstaven i ordet.<sup>5</sup> Vi skriver detta oftast som  $s = x_1 x_2 \dots x_n$ , där  $x_i = s(i)$ .

<sup>5</sup> Från och med nu kommer vi konsekvent använda notationen  $[n]$  för mängden av tal mellan 1 och  $n$ .

**Exempel 8** (Binära strängar). Låt  $X = \{0, 1\}$ . Strängar  $s : [n] \rightarrow X$  kallas för *binära strängar*. Det finns  $2^n$  strängar av längd  $n$ .<sup>6</sup>

Hur vet vi detta? Det finns två val för varje bokstav, så multiplikationsregeln säger oss att det måste finnas  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$  att göra ett val av vad varje bokstav skall vara.

<sup>6</sup> Så det finns till exempel åtta binära strängar av längd tre, nämligen

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

**Exempel 9** ( $m$ -ära strängar). Låt  $X = \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Strängar med detta alfabetet kallas för  $m$ -ära strängar. Om  $m = 2$  är de binära, om  $m = 3$  är de ternära.

Precis som för de binära strängarna kan vi använda multiplikationsregeln för att räkna ut hur många  $m$ -ära strängar det finns av längd  $n$ . För varje position i ordet har vi  $m$  olika val av bokstav – en per bokstav i vårt alfabet – och vi skall välja  $n$  gånger. Alltså ger multiplikationsregeln att det finns totalt  $m^n$   $m$ -ära strängar av längd  $n$ .

För generella  $X$  kallar vi en sträng  $s : [n] \rightarrow X$  för en  $X$ -sträng.

## Permutationer

**Definition 10.** En sträng  $s : [k] \rightarrow X$  kallas för en *permutation* av längd  $k$  av elementen i  $X$  om alla bokstäverna i  $s$  är olika, det vill säga om  $s(i) \neq s(j)$  ifall  $i \neq j$ .

Självklart måste  $|X| \geq k$  för att det skall existera några permutationer av längd  $k$  av  $X$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Hur hade du bevisat det?

**Exempel 11.** Låt  $X = [3]$ . Det finns 6 permutationer av längd 2 av  $X$ <sup>8</sup> – vi kan se detta med hjälp av multiplikationsprincipen: Vi har tre val av första bokstav, men när vi valt den första bokstaven har vi bara två val kvar av andra bokstav, eftersom vi inte får ha två av samma. Alltså är det totala antalet  $3 \cdot 2 = 6$ .

<sup>8</sup> Dessa är, specifikt,  
12, 13, 21, 23, 31, 32.

**Definition 12.** För  $n = 1, 2, \dots$ , definiera  $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$ . Definiera  $0! = 1$ .<sup>9</sup>

För  $k \leq n$ , definiera  $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ . Lägg märke till att  $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ .

<sup>9</sup> Att vi låter  $0!$  vara lika med ett är för att vi ser det som produkten av inga tal alls, vilket är bekvämt att se som att det blir 1. Varför detta är så kommer vi kanske att återkomma till när vi pratar om rekursioner.

**Proposition 13.** Om  $|X| = n$  och  $0 \leq k \leq n$  så finns det  $P(n, k)$  permutationer av längd  $k$  från  $X$ .

*Bevis.* Vi bevisar detta med hjälp av multiplikationsprincipen – så vi skall räkna hur många sätt vi kan välja vår permutation  $x_1 x_2 \dots x_k$  på. Det finns så klart  $|X| = n$  sätt att välja första bokstaven  $x_1$  i vår permutation. När vi sedan skall välja  $x_2$  får den inte vara lika med  $x_1$ , så vi väljer ett element ur  $X \setminus \{x_1\}$ , och  $|X \setminus \{x_1\}| = n - 1$ . Likaledes för  $x_3$  så får den varken vara lika med  $x_1$  eller  $x_2$ , så vi väljer från  $X \setminus \{x_1, x_2\}$ , och har  $n - 2$  val.

Den här processen fortsätter tills vi skall välja  $x_k$ , och i det skedet har vi tagit bort  $k - 1$  val, och har alltså  $|X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}| = n - (k - 1)$  bokstäver kvar att välja på.

Multiplikationsregeln säger oss att det totala antalet permutationer är lika med produkten av antalet val vi hade i varje steg, det vill säga

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} = P(n, k). \end{aligned}$$

□

**Exempel 14.** På hur många olika sätt kan  $n$  personer sitta runt ett runt bord?<sup>10</sup>

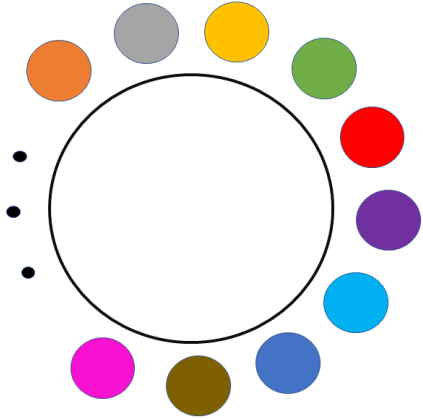
Det finns två olika sätt vi kan se på frågan<sup>11</sup> – antingen är det skillnad på de olika stolarna runt bordet (vissa kan se ut genom fönstret, andra inte), så att vi får olika sätt att placera folk runt bordet genom att rotera hela placeringen, eller så är det enda som spelar roll ordningen de sitter i, och vi ser olika rotationer av samma ordning som samma sätt att sitta runt bordet.

Om platserna har etiketter, så att det inte bara är ordningen som spelar roll, så kan vi numrera platserna från plats 1 till plats  $n$ . Om vi

<sup>10</sup> Det finns en liten ritning av detta i anteckningarna från föregående år, och jag lär rita den på den faktiska föreläsningen.

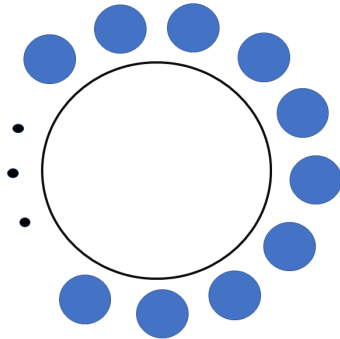
<sup>11</sup> Detta är ett exempel av skillnaden mellan problem med etiketter och utan, vilket är ett generellt fenomen som kommer återkomma gång på gång. Här är det platserna runt bordet som kan ha etiketter eller inte. Var noggrann med att fundera kring vilken typ av

kallar mängden med gäster för  $X$  blir alltså varje placering ett  $X$ -ord – vi kan skriva den som "gäst ett, gäst två, etc.". Och eftersom varje person bara kan sitta på en stol blir detta alltså en permutation – och vi vet att det finns  $n!$  permutationer av längd  $n$  ur ett alfabete med  $n$  bokstäver.



Figur 2: Ett bord med olikfärgade stolar, så att vi kan se skillnad på stolarna – det är skillnad mellan att sitta på en blå pall och i en orange fåtölj. Färgerna är alltså etiketter på platserna.

Om platserna är oetiketterade, det vill säga att det enda vi bryr oss om är ordningen folk sitter i, får vi räkna på ett annat sätt. Givet en placering kan vi godtyckligt välja en person som "först", och sedan numrera platserna i medurs ordning. För varje av de  $n$  sätten att välja vem som är först får vi alltså en placering där platserna har etiketter.



Figur 3: Ett bord med identiska stolar runt bordet. Här är alltså varje plats likadan och det kommer endast spela roll vem man sitter bredvid, till skillnad från vid förra bordet.

Om alla som sitter vid bordet flyttar ett steg åt höger kommer vi få precis samma bordsplacering igen, eftersom vi inte kan se skillnad på stolarna och alla fortfarande sitter bredvid samma personer.

Detta ger oss ett annat sätt att räkna antalet placeringar med etiketter – vi räknar antalet utan etiketter, kallar det  $m$ , och får alltså att antalet med etiketter är  $nm$ .

Men eftersom vi redan vet att antalet när platserna har etiketter är

$n!$  så får vi alltså av detta att  $n! = nm$ , eller  $m = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ , och vi har räknat antalet utan etiketter till  $(n-1)!$ .<sup>12</sup>

## Kombinationer

**Definition 15.** För en mängd  $X$  så är en *kombination* av element ur  $X$  en delmängd  $A \subseteq X$ .<sup>13</sup>

**Exempel 16.** Det finns 6 kombinationer av storlek 2 från  $X = \{a, b, c, d\}$ , nämligen

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

**Definition 17.** För  $0 \leq k \leq n$ , låt  $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Man ser också notationerna  $C(n,k)$ ,  $nCk$ , eller  $C_k^n$  för detta, men vi håller oss till  $\binom{n}{k}$ .

**Proposition 18.** Om  $|X| = n$  och  $0 \leq k \leq n$  så finns det  $\binom{n}{k}$  kombinationer av storlek  $k$  från  $X$ .

*Bevis.* Även detta bevisar vi med ”räkna på två olika sätt”-metoden. Låt oss börja med att räkna antalet *permutationer* igen, på ett annat sätt än vi gjorde i beviset av Proposition 13.

Istället för att tänka oss att vi väljer en bokstav i taget, kan vi tänka oss att vi först väljer en mängd  $A$  av bokstaver som skall vara med – och då måste ju  $|A| = k$  eftersom varje bokstav skall dyka upp exakt en gång – och sedan väljer en ordning i vilken bokstäverna skall dyka upp.

Antalet sätt att välja en ordning för våra  $k$  bokstäver är precis antalet permutationer av längd  $k$  från alfabetet  $A$ , vilket vi vet är  $P(k,k)$ . Så om vi betecknar antalet sätt att välja mängden  $A$  med  $m$ , så säger oss multiplikationsregeln att antalet permutationer av längd  $k$  från  $X$  måste vara  $m \cdot P(k,k)$ .

Men vi vet ju också, från hur vi räknade antalet permutationer innan, att  $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$  och  $P(k,k) = k!$ . Så vad vi har visat är att

$$\frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k) = mP(k,k) = mk!$$

eller, om vi löser för  $m$ , att

$$m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

vilket är vad vi ville bevisa. □

**Proposition 19.** För alla  $n \geq 0$  och alla  $0 \leq k \leq n$  gäller det att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

<sup>12</sup> Detta är ett vanligt sätt att resonera inom kombinatorik – vi hittade två olika sätt att räkna samma sak, och fick på så sätt ut en likhet ( $nm = n!$ ) som vi kunde använda för att räkna en annan sak.

<sup>13</sup> Vi talade innan om etiketter och inte. Man kan se en kombination som en permutation utan etiketter – vi vet bara vilka element som är med, inte i vilken ordning de kommer.

Vi ger två olika bevis av denna proposition. Det första är algebraiskt:

*Bevis.*

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

□

Det andra är kombinatoriskt:<sup>14</sup>

*Bevis.* Låt  $X$  vara en mängd med  $n$  element.  $\binom{n}{k}$  räknar antalet sätt att välja en delmängd  $A \subseteq X$  av storlek  $k$ . Men varje sådan delmängd  $A$  har ett komplement  $X \setminus A$  av storlek  $n - k$ , och för varje delmängd av storlek  $n - k$  kan vi få en av storlek  $k$  genom att ta dess komplement.

Delmängder av storlek  $k$  och delmängder av storlek  $n - k$  står alltså i ett-till-ett-korrespondens med varandra, det finns en bijektion mellan dem, så det måste finnas lika många av storlek  $k$  som av storlek  $n - k$ .

Men vi vet att antalet delmängder av storlek  $n - k$  är  $\binom{n}{n-k}$ , och alltså måste  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . □

### Kombinatoriska bevis

Idén med just ett "kombinatoriskt bevis" kommer att återkomma flera gånger i kursen, så låt oss ge ett par exempel till på hur ett sådant kan se ut.

**Exempel 20.** För  $n \geq 0$ , låt

$$S(n) = \sum_{k=1}^n k.$$

Vi vill bevisa att<sup>15</sup>

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vi studerar ett rutnät av  $(n+1) \times (n+1)$  punkter, såsom i figuren. Vi ser på den nedre gröna triangeln, och försöker räkna antalet punkter i den. Vi ser att kolumnen längst till vänster har  $(n+1) - 1 = n$  punkter, den näst längst till vänster har  $(n+1) - 2 = n - 1$  punkter, och så vidare till den näst längst till höger som har en punkt, och kolumnen längst till höger har noll punkter i den gröna triangeln.

Alltså, om vi summerar över kolumnerna så får vi att det är totalt  $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = S(n)$  punkter i triangeln. Eftersom

<sup>14</sup> Vad menar vi när vi säger att det här beviset är "kombinatoriskt", till skillnad från det andra beviset? Nyckeln är att vi här visade att de två mängderna – mängden av delmängder av storlek  $k$  och mängden av delmängder av storlek  $n - k$  – har lika många medlemmar genom att uppvisa en bijektion mellan dem, emedan vi i det algebraiska beviset bara manipulerade våra formler för att visa att de var lika.

Bijektionen vi hittade här är själv ett kombinatoriskt objekt, och det berättar mer för oss än bara att mängderna har lika många medlemmar. Man kan se det som att den är en *anledning* till varför de har lika många mängder.

Denna bevismetod, att hitta en bijektion, kommer vara ett återkommande tema – och likaså att bijektionerna ger oss mer förståelse för objekten vi studerar än vad ett algebraiskt bevis gör.

<sup>15</sup> Det sägs att den store matematikern Carl Friedrich Gauss en gång fick uppgiften att räkna ut  $1 + 2 + \dots + 100$  av en lat mellanstadie lärare som ville hålla sina elever upptagna i en stund, och förbluffade sin lärare genom att hitta svaret på bara några sekunder och utan papper och penna.

Han använde dock en annan metod än den vi använder, som inte involverade någon figur. Kan du komma på fler sätt att göra detta? (Eller Googla "Gauss triangular numbers story" om du bara vill veta svaret.)



Figur 4: Ett rutnät av punkter. Figur tagen direkt från förra årets föreläsningssanteckningar.

kvadraten så klart är helt symmetrisk är det lika många punkter i den övre gröna triangeln, och det är lätt att se att det är  $n + 1$  punkter på diagonalen.

Alltså måste det totala antalet punkter i kvadraten vara  $2S(n) + (n + 1)$  – men vi vet också, så klart, att det är  $(n + 1)^2$ . Så vad vi har sett är att

$$2S(n) + (n + 1) = (n + 1)^2 \iff S(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

precis som vi önskade.

**Exempel 21.** Vad är summan av de första  $n$  udda talen, det vill säga

$$\sum_{k=1}^n 2k - 1?$$

Svaret är  $n^2$ , som kan ses av nedanstående figur.



Figur 5: Bevis att summan av de första  $n$  udda talen är  $n^2$ . Bilden är tagen ur vår kursbok.

**Exempel 22.** Bevisa att  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .



*Bevis.* Vi bevisar detta genom att bevisa att både vänster och höger led räknar antalet delmängder till en mängd av  $n$  element, oavsett delmängdernas storlek.<sup>16</sup>

För vänster led kan vi observera att antalet delmängder oavsett storlek är summan av antalet delmängder av varje given storlek. Vi vet sedan innan att en delmängd av storlek  $k$  av en mängd av storlek  $n$  kallas en kombination, och det finns  $\binom{n}{k}$  stycken sådana. Alltså är det totala antalet delmängder  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ , som önskat.

För höger led använder vi multiplikationsregeln. För varje element i vår mängd har vi två val – antingen tar vi med elementet, eller inte – och vi har totalt  $n$  stycken element för vilka vi behöver göra detta val. Så om vi multiplicerar antalet val vi har varje gång får vi  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$  stycken delmängder, som önskat.  $\square$

**Proposition 23** (Pascals Identitet). För  $1 \leq k \leq n$  gäller det att<sup>17</sup>

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*Algebraiskt bevis.*

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\ &= (n-1)! \left( \frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)}{k!(n-k)!} \right) \\ &= (n-1)! \frac{k + (n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

$\square$

*Kombinatoriskt bevis.* Låt  $X$  vara en mängd av storlek  $n$ . Vi vet att  $\binom{n}{k}$  räknar antalet delmängder av storlek  $k$  till  $X$ . Låt oss komma på ett annat sätt att räkna antalet delmängder av storlek  $k$ , och se att det ger oss höger led.

Välj ett godtyckligt element  $x \in X$ . För varje delmängd  $A$  till  $X$  så innehåller den antingen  $x$ , eller så gör den inte det. För att skapa oss en delmängd  $A$  av storlek  $k$  som innehåller  $x$  lägger vi först in  $x$  i  $A$ , och sedan lägger vi till ytterligare  $k-1$  element från de återstående  $n-1$  elementen. Antalet sätt att göra det vet vi är precis  $\binom{n-1}{k-1}$ .

Om vi i stället vill ha en delmängd  $A$  som *inte* innehåller  $x$  så kan vi fritt välja  $k$  element av de återstående  $n-1$  elementen. Antalet sätt att göra det på vet vi är  $\binom{n-1}{k}$ .

Så additionsprincipen säger oss att antalet sätt att välja en delmängd som innehåller  $x$  eller inte innehåller  $x$  – vilket ju är alla delmängder – måste vara summan, alltså  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ , såsom önskat.  $\square$

<sup>16</sup> Man kan också betrakta detta som att vi räknar antalet binära strängar av längd  $n$  på två sätt, eftersom det finns en enkel bijektion mellan sådana och delmängder till en mängd  $X$  av storlek  $n$ .

Specifikt så fixerar vi en numrering av elementen av  $X$ , och säger att givet en binär sträng  $x_1 x_2 \dots x_n$  så får vi en delmängd  $A \subseteq X$  genom att det första elementet av  $X$  ligger i  $A$  om  $x_1 = 1$ , det andra om  $x_2 = 2$ , och så vidare. På motsvarande sätt kan vi konstruera en binär sträng givet en delmängd.

<sup>17</sup> Den här likheten säger exakt att Pascals triangel faktiskt innehåller binomialkoefficienterna.

							1							
							1	1						
							1	2	1					
							1	3	3	1				
							1	4	6	4	1			
							1	5	10	10	5	1		
							1	6	15	20	15	6	1	
							1	7	21	35	35	21	7	1

## Övningar

**Övning 1.** Tjugofyra studenter ska sitta vid ett långt bord<sup>18</sup> och skriva en tenta. Tio av dem är väldigt benägna att fuska genom att kolla på sin kompis tenta.

Deras kombinatoriklärare bestämmer att dessa tio studenter måste sitta på platser med udda nummer, så att de inte kan hamna bredvid varandra och fuska.

Hur många sätt finns det att placera studenterna vid bordet?

**Övning 2.** Ge ett algebraiskt bevis för att

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Övning 3.** Ge ett kombinatoriskt bevis för att<sup>19</sup>

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Övning 4.** Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \binom{k}{2}.$$

**Övning 5.** Antag att du har två mängder  $A$  och  $B$ , med  $|A| = 15$  och  $|B| = 7$ .

1. Hur många sätt finns det att välja ett objekt från  $A$  eller ett från  $B$ ?
2. Hur många sätt finns det att välja ett objekt från  $A$  och ett från  $B$ ?
3. Vad är  $|A \times B|$ ?
4. Vad är  $|A \sqcup B|$ ?
5. Vad är det största och minsta värde som  $A \cup B$  kan ta?
6. Vad är det största och minsta värde som  $A \cap B$  kan ta?

**Övning 6.** Du har sökt ett prestigefyllt internship, och ska klä dig för intervjun. Du inser att du borde ha slips på dig, och ser att du äger fem seriösa slipsar och sju slipsar med komiska tryck.

a) Hur många sätt kan du välja slips för intervjun på?

Efter lite eftertanke kommer du ihåg att jobbet du sökt är som clown,<sup>20,21</sup> så du borde nog ha på dig två slipsar på samma gång, eftersom det är väldigt komiskt.

b) På hur många sätt kan du välja två slipsar att ha på dig på samma gång? c) Hur många sätt kan du välja en seriös slips och en med ett komiskt tryck på?

<sup>18</sup> Ni slipper alltså runda bord i denna övningen! Bordet har en första plats, en andra plats, och så vidare till tjugofjärde platsen.

<sup>19</sup> Ledtråd: Tänk på att välja grupper med ledare för ett projekt.

<sup>20</sup> Och tyvärr äger du ingen sådan där skoj fluga som kan spruta vatten i ansiktet på folk.

<sup>21</sup> Denna övningen är stulen från internet, och den handlade om en clownjobbintervju redan från början. Jag valde den helt baserat på hur mycket jag skrattade åt hur de antydde att deras studenter var clownner.

**Övning 7.** I Exempel 20 såg vi att

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

genom att studera en kvadrat av  $(n+1) \times (n+1)$  punkter, och observera att den sökta summan räknar antalet punkter under diagonalen i figuren. Sedan använde vi ett algebraiskt argument för att få en formel för detta antal.

En uppmärksam läsare kanske lägger märke till att  $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ , vilket ju också räknar antalet kombinationer av två element ur en mängd av  $n+1$  element. Kan du komma på ett *kombinatoriskt* bevis för varför antalet element under diagonalen på kvadraten är samma sak som antalet kombinationer av 2 element från en mängd av  $n+1$  element?

**Övning 8.** I en sidnot till Exempel 22 nämnde vi att det också går att se problemet som att räkna binära strängar av längd  $n$ , via en bijektion mellan sådana och delmängder till en mängd.

Kan du skriva ett kombinatoriskt bevis för att  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  som resonerar om binära strängar istället för om delmängder till en mängd?

## Lösningssförslag till övningar

**Lösning 1.** Vi börjar med att rita upp en bild för situationen.



Figur 6: Ett långt bord med 24 numrerade stolar.

Enligt uppgiften behöver vi placera ut de fuskande eleverna på udda stolsplatser, alltså ska vi placera ut 10 elever på 12 platser. Detta kan göras på  $P(12, 10)$  sätt.

Därefter har vi 14 elever kvar att placeras ut på de kvarvarande 14 platserna. Det kan göras på  $P(14, 14)$  sätt.

Det totala antalet sättet att placera ut alla elever blir därmed

$$P(12, 10)P(14, 14) = \frac{12!14!}{2!}.$$

Anledningen till att vi använder permutationer i lösningen är för att vi ser både stolsplatserna och studenterna som särskiljbara.

**Tips.** Viktigt i liknande uppgifter är att identifiera ifall platserna, stolarna i det här fallet, är särskiljbara eller inte. Om de är särskiljbara, som i det här fallet, så använder vi oss av permutationer. Är de inte unika så får vi använda oss av kombinationer istället. I vår figur numrerar vi alltså stolsplatserna, så att vi kan se skillnad på dem på vilket nummer de har.

Ett sätt att enklare förstå uppgiften är att vi ska dela ut stolsnummer till eleverna, istället för att placera ut eleverna på stolarna. Då kan det bli enklare att förstå varför det går att placera ut de 10 fuskande eleverna på de 12 udda platserna på  $P(12, 10)$  olika sätt – 12 stolsnummer ska delas ut till 10 personer.

**Lösning 2.**

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

**Tips.** Expandera uttrycket genom att använda definitionen av binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tänk på att  $n$ -fakultet kan skrivas som

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

och att

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{och} \quad n(n-1)! = n!.$$

**Lösning 3.** Från sidnoten får vi tipset att tänka på det som att välja en grupp med ledare. Vi försöker nu studera vänsterledet för sig och högerledet för sig för att kombinatoriskt bevisa likheten.

Vi kollar på vänsterledet först: Vi vill välja en grupp med  $k$  personer i och vi har totalt  $n$  stycken personer att välja på. Antalet sätt vi kan skapa denna gruppen på ges av  $\binom{n}{k}$ . Vi har alltså beräknat antalet sätt att skapa en grupp med  $k$  personer.

Nu vill vi välja en ledare bland dessa personer. Vi har  $k$  potentiella ledare, så multiplikationsregeln säger oss att vi får antalet sätt att välja en grupp med ledare genom att multiplicera antalet sätt att välja en grupp med antalet sätt att välja en ledare, alltså

$$k \binom{n}{k}.$$

Nu tittar vi på högerledet: Vi vill visa att högerledet också beräknar antalet sätt att skapa en grupp med  $k$  personer varav en person är ledare. Vi har  $n$  personer att välja på och vi ska ha en grupp på  $k$  personer, varav en ska vara ledare.

Vi börjar med att välja en person som ska vara vår ledare, vilket vi kan göra på  $n$  sätt. Sedan vill vi välja en grupp till den här ledaren. Vi har  $n-1$  personer kvar att välja på och  $k-1$  platser kvar att fylla upp i gruppen. Antalet sätt att skapa gruppen av resterande personer blir då

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Så antalet sätt att skapa en grupp med en ledare och  $k-1$  medlemmar (alltså totalt  $k$  medlemmar) är

$$n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Tips. 1.** I denna uppgiften använde vi oss av att vi ska skapa grupper. Ett bra sätt att lösa liknande uppgifter är att se det som att vi ska skapa grupper med personer av olika slag. Det kan vara en grupp med en eller flera ledare, grupper av olika storlekar med olika många personer som ska väljas ut eller plockas bort med mera. Försök att skapa ett sammanhang.

2. Är det svårt att hitta ett sammanhang så försök att identifiera variablerna en efter en, så i detta fallet försök först att identifiera vad  $k$

skulle kunna innebära och vad  $\binom{n}{k}$  skulle kunna innebära. Försök också att starta med en sida, så antingen vänster led eller höger led. Identifiera de olika variablerna (till exempel i ett sammanhang) på den sidan och försök sedan skapa en matchning med andra sidan.

3. Ett sätt att se på det är som ett händelseförlopp. Betrakta vänster led i Övning 4: Först händer en sak – vi väljer två av totalt  $n$  stycken saker. Sedan, efter att vi gjort det “sker” andra parenteserna som säger att vi nu väljer  $k - 2$  saker av en hög som nu är 2 färre än den var förut. Genom detta kan vi försöka skapa oss en bild av ett händelseförlopp som dessa uttryck representerar.

**Lösning 4.** Här kan vi tänka på ungefär samma sätt som uppgift 3, men nu är skillnaden att vi ska välja 2 ledare istället för en.

Vi har en grupp på  $n$  personer och vi vill välja ut en liten grupp med  $k$  personer i varav 2 kommer utses till ledare.

Vi börjar med vänsterledet: Vi har alltså  $n$  personer och vi vill välja två stycken ledare av alla de  $n$  personerna. Detta kan vi göra på

$$\binom{n}{2}$$

sätt.

När det är gjort så har vi  $n - 2$  personer kvar som inte blivit valda, och av de  $n - 2$  personerna vill vi välja ut  $k - 2$  stycken för att skapa en grupp som tillsammans med de två ledarna skapar en grupp på  $k$  personer.

Gruppen på  $k - 2$  personer kan vi skapa på  $\binom{n-2}{k-2}$  sätt, eftersom vi har  $n - 2$  personer kvar att välja bland. När vi då multiplicerar

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2}$$

får vi alltså antalet sätt att forma en grupp med  $k$  personer varav 2 stycken är ledare.

Vi kollar på högerledet: I högerledet tänker vi först att vi vill skapa en grupp med  $k$  personer av de  $n$  stycken möjliga personerna. Antalet sätt att göra detta på är  $\binom{n}{k}$ . När vi har skapat en grupp med  $k$  personer i så vill vi välja två stycken ledare. Detta kan vi göra på

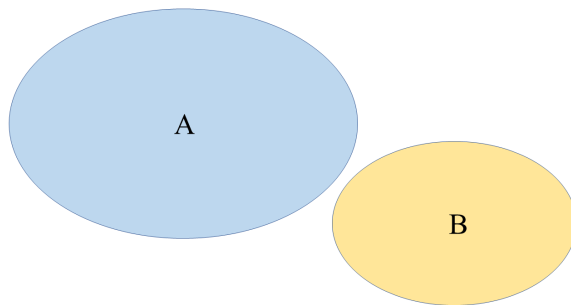
$$\binom{k}{2}$$

sätt eftersom vi har  $k$  stycken möjliga ledare.

Poängen är alltså att HL och VL bara gör saker i olika ordning. VL väljer ledarna först och gruppen sedan medan HL väljer gruppen först och sedan väljer ledarna i gruppen. Nu har vi visat att både vänsterledet och högerledet båda beräknar antalet sätt att forma en grupp med  $k$  personer varav två personer är ledare, ur en grupp av totalt  $n$  personer.

**Tips.** Du kan använda samma tips som för uppgift 3.

- Lösning 5.** 1. Det finns  $|A| + |B| = 15 + 7 = 22$  stycken sätt att välja ett objekt från  $A$  eller ett objekt från  $B$ . Du kan beräkna detta med additionsregeln. Det beror på att det inte spelar någon roll om vi väljer ett objekt ur  $A$  eller ett ur  $B$  vilket gör att man kan tänka att man bara lägger ihop alla element i samma mängd och tar en. Antalet möjliga val är ju då bara det totala antalet element.
2. Det finns  $|A||B| = 15 \cdot 7 = 105$  sätt att välja ett objekt från  $A$  och ett objekt från  $B$ . Detta gäller från multiplikationsregeln. Detta kan man se som att om vi tar upp ett element ur högen  $A$  finns det nu exakt  $|B|$  val ur  $B$ . Detta gäller för alla element i  $A$  vilket gör att vi kan multiplicera med antalet i  $B$  och det ger det totala antalet kombinationer.
3. Det är antalet sätt vi kan välja ett objekt ur  $A$  och ett objekt ur  $B$ , alltså  $15 \cdot 7 = 105$ . Detta är den notation som används för att beskriva multiplikationsregeln, det är därför vi egentligen gör samma sak här som i förra uppgiften.
4. Det är antalet sätt att välja ett objekt ur  $A$  eller ett objekt ur  $B$ , alltså  $15 + 7 = 22$ . Detta är den notation som används för att beskriva multiplikationsregeln.
5. Det största värdet  $A \cup B$  kan anta är  $15 + 7 = 22$ . I detta fallet (största möjliga unionen) kommer alla element i  $B$  vara olika från alla element i  $A$ , vilket gör att vår nya mängd kommer innehålla alla 7 element i  $B$  och alla 15 element i  $A$ .

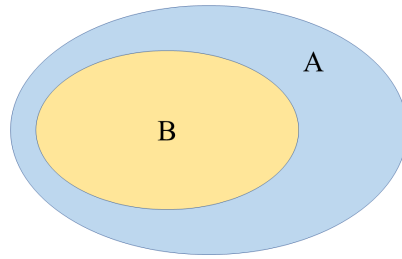


Figur 7:  $A \cup B$  blir som störst när de, såsom i figuren, är disjunkta.

Det minsta värdet  $A \cup B$  kan anta är 15. I detta fallet (minsta möjliga unionen) kommer alla element i  $B$  vara närvarande i  $A$ . Alltså kommer vår nya mängd vara lika med mängden  $A$ , eftersom  $B$  också är närvarande i den mängden.

6. Det största värdet som  $A \cap B$  kan anta är 7. I detta fall kommer alla element i  $B$  vara närvarande i  $A$ , såsom i figur 8. Alltså kommer  $A \cap B = B$ , och vi får med alla element i  $B$ .

Figur 8:  $A \cup B$  blir som minst när  $B$  ligger i  $A$ .



Det minsta värdet som  $A \cap B$  kan anta är 0. I detta fallet så kommer alla element i  $B$  vara skilda från alla element i  $A$  och vårt snitt kommer då bli en tom mängd, såsom i figur 7.

- Tips.** 1. I sådana uppgifter är det bra att fundera över hur additionsregeln och multiplikationsregeln kan appliceras.
2. Rita upp mängderna och de olika fallen, ligger mängderna i varandra (innehåller samma element), ligger de utanför varandra (innehåller inte samma element) eller ligger de delvis i varandra/utanför varandra?

**Lösning 6.** a) Additionsregeln ger att det finns  $5 + 7 = 12$  sätt att välja en slips att ha på sig på intervjun.

- b) Vi kan välja fritt mellan de seriösa slipsarna och de med komiskt tryck. Alltså hur många sätt kan man välja två slipsar från tolv stycken slipsar. Det blir antalet kombinationer

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

- c) Svaret ges av multiplikationsreglen, då vi vill veta hur många sätt vi kan välja en slips från mängden av seriösa slipsar och en slips från mängden av komiska slipsar.

$$5 \cdot 7 = 35.$$

**Tips.** Tipsen till övning 5 gäller även för övning 6.

### Referenser

Randall Munroe. Unsolved math problems. <https://xkcd.com/2529/>.