Sammanfattning av hela kursen · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

20 januari 2025

Detta dokument ger en sammanfattning av kursens innehåll, med nyckelord markerade, och saker vi räknat eller bevisat.

Kursen är uppdelad i tre delar – vi började med grundläggande kombinatorik i de första fyra föreläsningarna, sedan introducerade vi genererande funktioner i de kommande tre föreläsningarna. Sedan hade vi ett intermezzo om grafer och träd i en föreläsning, innan vi fortsatte till vår tredje del om diskret sannolikhetsteori och den probabilistiska metoden.

Del ett: Grundläggande kombinatorik

I den första föreläsningen introducerade vi de allra mest grundläggande koncepten i kombinatoriken:

1. Additionsprincipen och multiplikationsprincipen låter oss räkna olika mängder.
2. Ord bildade ur olika alfabeten är det mest basala av alla kombinatoriska objekt.
3. Ett viktigt exempel på en slags ord är permutationer – vi definierar och räknar dessa.
4. Om ord är det mest basala exemplet där ordning spelar roll är kombinationer det mest grundläggande exemplet på när vi väljer saker utan ordning.
5. Vi definierar binomialkoefficienterna och visar att dessa räknar antalet kombinationer av en viss storlek.

Precis i slutet av föreläsning ett börjar vi prata om kombinatoriska bevis. I föreläsning två fortsätter vi på detta tema, och ger ett antal olika exempel.

1. De flesta av våra kombinatoriska bevis involverar binomialkoefficienter, alltså delmängder till en viss mängd i en kombinatorisk tolkning.
2. Vi bevisar specifikt binomialsatsen med ett kombinatoriskt bevis.
3. Sedan definierar vi omordningar och använder dessa för att räkna multi-delmängder[2] med ett pinnar-och-stjärnor-argument.

[2] Just termen multi-delmängd introducerar vi tyvärr först i en senare föreläsning – i efterhand borde termen ha dykt upp redan här. Den refererar till ett sätt att fördela ut n osärskiljbara objekt till k särskiljbara personer, om vi inte kräver att varje person måste få ett objekt.

4. Vi ser vårt första exempel av att räkna lösningar till ekvationer när vi tolkar en multi-delmängd som en lösning på en ekvation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ – detta kommer dyka upp igen senare i kursen, med fler begränsningar på vad variablerna kan ta för värden.

5. Vi definierar multinomialkoefficienterna, och ser att dessa ger antalet omordningar av ett ord.

I den tredje föreläsningen i denna del av kursen introducerar vi några till enkla verktyg inom kombinatoriken.

1. Lådprincipen, i dess generaliserade form, låter oss visa en del överraskande resultat. Vi ger ett par enkla exempel, och ett lite mer sofistikerat.

2. Inklusion-exklusion låter oss räkna många saker som annars vore väldigt svåra att räkna. För att kunna bevisa den introducerar vi indikatorfunktioner och ger några räkneregler för dessa.

3. Vi använder inklusion-exklusion för att räkna lösningar till ekvationer, nu med övre begränsningar på variablerna.

4. Vi definierar derangemang, och använder inklusion-exklusion för att räkna dessa.

Föreläsning fyra sammanfattar till slut vad vi gjort i denna del av kursen.

1. Vi definierar Stirlings partitionstal, och använder inklusion-exklusion för att visa att antalet surjektioner från en mängd till en annan räknas av en formel som involverar dessa.

2. Vi definierar mängdpartitioner och visar att dessa räknas av Stirlings partitionstal. Dessa ger oss ett till vanligt exempel på något vi kan ge kombinatoriska bevis kring.

3. Vi skriver upp en stor tre-gånger-fyra tabell över många av de räkneproblem vi sysslat med hittills – den tolvfaldiga vägen – som sammanfattar och systematiserar det hela i termer av särskiljbara och osärskiljbara objekt och funktioner som kan vara generella, injektiva, eller surjektiva.

4. Vi definierar Stirlings cykeltal, och därmed också cykler i permutationer. Vi visar hur man kan omvandla mellan en permutation i vanlig form och en i cykelform.

Del två: Genererande funktioner

I den här delen av kursen introducerar vi ett mer mekaniskt maskineri än tidigare – innan var våra metoder ofta skräddarsydda för problemen, men genererande funktioner ger ofta ett generellt recept på en lösning.

Första föreläsningen, föreläsning fem totalt, lade grunderna,

1. gav definitionen av en (ordinär) genererande funktion,
2. räknade ut vad genererande funktionen var för några enkla exempel,
3. och använde vår metod för att hitta genererande funktionen för Fibonaccitalen.
4. Mer allmänt såg vi hur man kan manipulera summor för att omvandla rekursioner för följder till ekvationer för deras genererande funktioner, och lösa dessa för att få ut den genererande funktionen.
5. Sedan definierade vi faltningen av två följder, och bevisade att den genererande funktionen för faltningen av två följder är produkten av deras genererande funktioner.
6. Vi använde detta för att räkna lösningar till ekvationer med begränsningar på variablerna[3] – eller i alla fall hitta genererande funktionen för antalet lösningar, vilket oftast är gott nog.
7. Vi utnyttjade också algebraiska manipulationer för genererande funktioner för att bevisa likheter mellan olika följder eller hitta genererande funktionen för en följd.[4]

[3] I biten om multidelmängder kunde vi ha begränsningar av typen $x_4 \geq 72$, sedan när vi använde inklusion-exklusion kunde vi ha mer generella begränsningar av typen $3 \leq x_2 \leq 14$. När vi använder genererande funktioner kan vi ha mycket mer generella begränsningar, som till exempel på pariteten till x_7.

[4] Detta dyker inte upp fullt så mycket i själva föreläsningen, men övning tre och fyra i föreläsningsanteckningarna är bra exempel på principen.

Andra föreläsningen om genererande funktioner, föreläsning sex totalt, fortsatte på samma tema, med mer räkning av lösningar till ekvationer. Sedan

1. såg vi ett exempel på hur man kan finna en rekursion för ett kombinatoriskt problem,
2. definierade exponentiella genererande funktioner och
3. fann några exempel på sådana för olika följder.
4. Sedan återvände vi till rekursionen vi funnit tidigare, och såg hur vi kan finna en differentialekvation för den exponentiella genererande funktionen för en följd givet en rekursion. Att faktiskt lösa differentialekvationen är oftast möjligt, men inte riktigt en del av denna kursen, som ju inte handlar om analys.

5. Sedan definierade vi binomialfaltningen mellan två följder, och visade att den exponentiella genererande funktionen för binomialfaltningen mellan två följder är produkten av deras genererande funktioner.
6. Vi använde sedan detta för att räkna antalet ord ur olika alfabeten, under olika begränsningar på antalet av en viss bokstav – och såg att det var helt analogt med hur vi räknade lösningar på ekvationer.

I tredje föreläsningen om genererande funktioner, föreläsning sju totalt, genomförde vi en mer omfattande räkning med genererande funktioner. Vi

1. definierade gitterstigar, uppåt-höger-stigar, och Dyckstigar.
2. Sedan fann vi en rekursion, Segner-rekursionen, för antalet Dyck-stigar,
3. och använde denna för att hitta genererande funktionen för antalet Dyck-stigar.
4. Sedan definierade vi den stigande och fallande fakulteten, och använde dessa med Newtons binomialsats för att ge ett omständligt men helt mekaniskt bevis för vår explicita formel för Catalantalen.
5. Efter det gav vi ett kombinatoriskt bevis för samma formel, som helt skippade att behöva hitta en rekursion och genererande funktion.
6. Vi gav några fler exempel på saker som räknas av Catalantalen, och visade att de faktiskt räknas av dem genom att visa att de lyder Segner-rekursionen.[5]

[5] För att vara tydlig: Det intressanta här är inte nödvändigtvis de specifika exemplen, även om de är nyttiga, utan att allmänt förstå hur vi, genom att visa att ett objekt kan delas upp i två mindre objekt av samma typ, kan visa att någon följd lyder Segnerrekursionen och alltså räknas av Catalantalen.

Intermezzo: Grafer och träd

I vår åttonde föreläsning hade vi ett litet intermezzo, där vi introducerade några koncept som behövs för framtiden. Specifikt

1. definierade vi grafer, som kan vara etiketterade eller ej,
2. och träd (alltså sammanhängande grafer utan cykler), som kan vara ordnade eller oordnade, och ha eller inte ha en rot.
3. Vi definierade vad vi menar med binära träd, och visade att de rotade ordnade binära oetiketterade träden med n interna noder räknas av Catalantalen, eftersom dessa lyder Segner-rekursionen.
4. Sedan visade vi att de rotade ordnade oetiketterade träden på $n+1$ noder också räknas av Catalantalen, genom att ge en bijektion mellan dessa och parentetiseringar av uttryck.

5. Sedan introducerade vi Cayleys formel. För att motivera den räknade vi etiketterade träd – specifikt, givet ett oetiketterat träd, räknade vi antalet sätt att sätta en etikett på det.
6. Vi gav sedan vårt första bevis av Cayleys formel med hjälp av Prüferkoder. Vi såg hur man finner Prüferkoden för ett träd, och gav en algoritm för att konstruera ett träd givet en Prüferkod.
7. Efter det ville vi ge ett alternativt bevis av Cayleys formel, och för detta behövde vi introducera ett par nya koncept, nämligen vad det betyder för en graf att vara en delgraf till en annan, vad en riktad graf är för något, och vad en skog är.
8. Sedan gav vi vårt alternativa bevis för Cayleys formel.

Del tre: Diskret sannolikhetsteori och den probabilistiska metoden

I denna del av kursen introducerade vi den andra större metoden inom kombinatoriken som vår kurs täcker – den probabilistiska metoden. För att kunna göra detta behövde vi så klart först introducera vårt verktyg, den diskreta sannolikhetsteorin.

Denna delen innehåller många olika exempel och satser – ingen av dem är enskilt central, men att se den övergripande metoden, den röda tråden, är det. Alltså är inte själva satserna markerade, men metoderna kan vara det.

I den första föreläsningen, nummer nio totalt, så

1. definierade vi sannolikhetsrum bestående av utfallsrum och sannolikhetsmått,
2. och kallade delmängder till utfallsrummet för händelser, och definierade sannolikheten för händelser.
3. Vi gav några enkla exempel på hur man kan beskriva problem i denna formalism – och efter det var vi så vaga vi kunde komma undan med om hur exakt problemen formaliseras i den.[6]
4. Vi definierade den betingade sannolikheten, vad det betyder att händelser är oberoende, och formulerade lagen om total sannolikhet.
5. Sedan formulerade vi inklusion-exklusion i dess sannolikhetsteoretiska version, och använde denna för att bevisa unionsbegränsningen.
6. Vi använde unionsbegränsningen för att bevisa en undre begränsning för Ramseytalen. Vi gjorde detta genom att välja en slumpmässig färgning och räkna på sannolikheten för att delgrafer skulle bli monokromatiska.

[6] Detta var inte bara att jag var lat – det är en universell standard bland sannolikhetsteoretiker att sopa det under mattan som irrelevanta detaljer. Man måste kunna definitionerna, men i nittionio fall av hundra behöver man inte tänka så noga på dem.

I föreläsning två i denna del, nummer tio totalt,

1. definierade vi slumpvariabler, och specialfallet med likformiga slumpvariabler.
2. Sedan definierade vi väntevärdet av en slumpvariabel, och bevisade ett lemma som gav en alternativ formel för väntevärdet.
3. Vi bevisade sedan väntevärdets linjäritet, och fann en koppling mellan väntevärdet av indikatorvariabeln för en händelse och sannolikheten för denna händelse.
4. Vi använde sedan detta för att bevisa Sperners lemma och Caro-Weis sats. I bägge fallen involverade idén att välja en slumpmässig permutation, och använda den för att skapa ett nyttigt objekt – en slumpmässig kedja i Sperners lemma, och en slumpmässig oberoende mängd för Caro-Wei – som vi sedan kunde studera för att få fram resultatet.
5. Vi bevisade sedan Markovs olikhet, och definierade Erdős-Renyi-grafer,
6. och bevisade ett villkor för när Erdős-Renyi-grafen inte har några isolerade noder. Idén var helt enkelt att räkna ut väntevärdet av antalet isolerade noder, med hjälp av väntevärdets linjäritet, och sedan använda Markovs olikhet för att se att det faktum att detta väntevärde gick mot noll gav att sannolikheten att det existerade isolerade noder också gick mot noll.

Föreläsning tre i denna del, den elfte och sista i kursen, introducerade nästan inga nya koncept, utan gav bara ytterligare exempel på hur man kan använda den probabilistiska metoden.

1. Vi började med att bevisa en nedre begränsning för `min-bisection`. Vi gjorde detta genom att utnyttja Diracs sats för att hitta en Hamiltoncykel i komplementgrafen, tog varannan kant i den cykeln för att få en matchning disjunkt från kanterna i grafen, och valde sedan hälften av noderna som vårt A genom att ta en ur varje par.
2. Sedan visade vi ett resultat av Ajtai-Chvatal-Newborn-Szemerédi-Leighton om det minimala antalet korsningar mellan kanter i en ritning av en graf. Idén var att ta en känd olikhet för detta, och tillämpa den på en slumpmässig delgraf där vi behöll varje nod med en viss sannolikhet. Eftersom detta skalade antalet noder, antalet kanter, och antalet korsningar på olika sätt[7] kunde vi få ut en bättre olikhet av detta.
3. Till slut bevisade vi ett resultat om längden av den längsta ökande delföljden till en slumpmässig permutation, där vi dels använde

[7] Snarlikt till hur man, om man halverar sidlängden på en kub, minskar dess yta till en fjärdedel och dess volym till en åttondel.

det betingade väntevärdet för att ge en övre begränsning, och dels använde vårt argument för Erdős-Székeres sats för att ge en undre begränsning.