Föreläsning 2: Kombinatoriska bevis, binomialsatsen, kompositioner, och multinomialsatsen · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

17 januari 2023

Vi fortsätter på förra föreläsningens idéer om kombinatoriska bevis och att räkna saker på två olika sätt. Sedan tillämpar vi detta på att bevisa binomialsatsen. Vi fortsätter med att diskutera omordningar och kompositioner, från vilket vi härleder *multi*nomialsatsen.

Kombinatoriska bevis

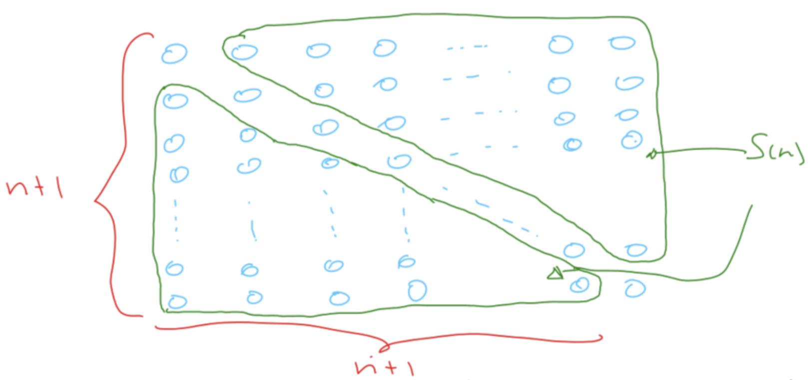
I slutet av förra föreläsningen diskuterade vi kombinatoriska bevis, och bevisade saker genom att räkna samma sak på två olika sätt. I denna föreläsningen fortsätter vi på det spåret, med fler bevis där vi hittar smarta sätt att räkna något.

Exempel 1. För $n \geq 0$, låt $S(n) = \sum_{k=1}^{n} k$. Vi vill bevisa att $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.[2]

[2] Det sägs att den store matematikern Carl Friedrich Gauss en gång fick uppgiften att räkna ut $1 + 2 + \ldots + 100$ av en lat mellanstadielärare som ville hålla sina elever upptagna i en stund, och förbluffade sin lärare genom att hitta svaret på bara några sekunder och utan papper och penna.

Han använde dock en annan metod än den vi använder, som inte involverade någon figur. Kan du komma på fler sätt att göra detta? (Eller Googla "Gauss triangular numbers story" om du bara vill veta svaret.)

Vi studerar ett rutnät av $(n+1) \times (n+1)$ punkter, såsom i figuren.



Figur 1: Ett rutnät av punkter. Figur tagen direkt från förra årets föreläsningsanteckningar.

Vi ser på den nedre gröna triangeln, och försöker räkna antalet punkter i den. Vi ser att den vänstra kolumnen har $(n+1) - 1 = n$ punkter, den näst vänstraste har $(n+1) - 2 = n - 1$ punkter, och så vidare till den näst längst till höger som har en punkt, och kolumnen längst till höger har noll punkter i den gröna triangeln.

Alltså, om vi summerar över kolumnerna så får vi att det är totalt $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = S(n)$ punkter i triangeln. Eftersom kvadraten så klart är helt symmetrisk är det lika många punkter i den övre gröna triangeln, och det är lätt att se att det är $n+1$ punkter på diagonalen.

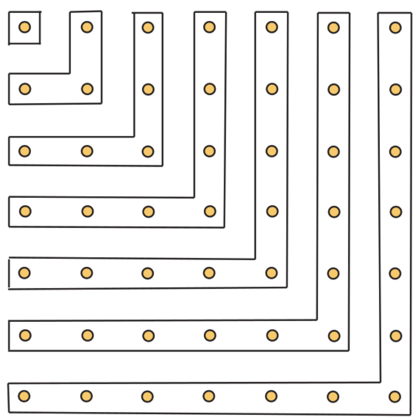
Alltså måste det totala antalet punkter i kvadraten vara $2S(n) + (n+1)$ – men vi vet också, så klart, att det är $(n+1)^2$. Så om vi löser detta för $S(n)$ får vi att

$$S(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

precis som vi önskade.

Exempel 2. Vad är summan av de första n udda talen, det vill säga $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$?

Svaret är n^2, som kan ses av nedanstående figur.



Figur 2: Bevis att summan av de första n udda talen är n^2. Bilden är tagen ur vår kursbok.

Exempel 3. Bevisa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Bevis. Vi bevisar detta genom att bevisa att både vänster och höger led räknar antalet delmängder till en mängd av n element, oavsett delmängdernas storlek.[3]

För vänster led kan vi observera att antalet delmängder oavsett storlek är summan av antalet delmängder av varje given storlek. Vi vet sedan innan att en delmängd av storlek k av en mängd av storlek n kallas en kombination, och det finns $\binom{n}{k}$ stycken sådana. Alltså är det totala antalet delmängder $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, som önskat.

För höger led använder vi multiplikationsregeln. För varje element i vår mängd har vi två val – antingen tar vi med elementet, eller inte – och vi har totalt n stycken element för vilka vi behöver göra detta val. Så om vi multiplicerar antalet val vi har varje gång får vi $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ stycken delmängder, som önskat. $\square$

[3] Man kan också betrakta detta som att vi räknar antalet binära strängar av längd n på två sätt, eftersom det finns en enkel bijektion mellan sådana och delmängder till en mängd X av storlek n.

Specifikt så fixerar vi en numrering av elementen av X, och säger att givet en binär sträng $x_1 x_2 \ldots x_n$ så får vi en delmängd $A \subseteq X$ genom att det första elementet av X ligger i A om $x_1 = 1$, det andra om $x_2 = 2$, och så vidare. På motsvarande sätt kan vi konstruera en binär sträng givet en delmängd.

Proposition 4 (Pascals Identitet). *För $1 \leq k \leq n$ gäller det att*[4]

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

[4] Den här likheten säger exakt att Pascals triangel faktiskt innehåller binomialkoefficienterna.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Algebraiskt bevis.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!}\\ &= (n-1)!\left(\frac{k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k)}{k!(n-k)!}\right)\\ &= (n-1)!\frac{k+(n-k)}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Kombinatoriskt bevis. Låt X vara en mängd av storlek n. Vi vet att $\binom{n}{k}$ räknar antalet delmängder av storlek k till X. Låt oss komma på ett annat sätt att räkna antalet delmängder av storlek k, och se att det ger oss höger led.

Välj ett godtyckligt element $x \in X$. För varje delmängd A till X så innehåller den antingen x, eller så gör den inte det. För att skapa oss en delmängd A av storlek k som innehåller x lägger vi först in x i A, och sedan lägger vi till ytterligare $k-1$ element från de återstående $n-1$ elementen. Antalet sätt att göra det vet vi är precis $\binom{n-1}{k-1}$

Om vi i stället vill ha en delmängd A som *inte* innehåller x så kan vi fritt välja k element av de återstående $n-1$ elementen. Antalet sätt att göra det på vet vi är $\binom{n-1}{k}$.

Så additionsprincipen säger oss att antalet sätt att välja en delmängd som innehåller x eller inte innehåller x – vilket ju är alla delmängder – måste vara summan, alltså $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, såsom önskat. □

Binomialsatsen

Teorem 5 (Binomialsatsen). *För varje heltal $n \geq 0$ gäller det att*[5]

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Bevis. Studera uttrycket

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\dots(x+y).$$

Vad är det vi gör när vi expanderar ut detta uttrycket? Jo, vi väljer för varje parentes om vi tar ett x eller ett y – eller uttryckt i kombinatoriska termer, vi bildar ett ord ur alfabetet $\{x,y\}$. Så för $n=3$ får vi till exempel att

$$(x+y)(x+y)(x+y)=xxx+xxy+xyy+yxx+yxy+yyy.$$

[5] Lägg märke till att vi inte är så precisa kring vad x och y är. I versionen ni lärde er i gymnasiet är de två reella tal, men egentligen är det här en likhet mellan polynom, som gäller mycket mer allmänt. Vi använder ju inte några specifika egenskaper hos de reella talen i det här beviset, bara räkneregler för polynom. När ni läser en kurs i algebra kommer ni se hur generellt den sortens räkningar fungerar.

Sedan kommer vi ihåg att multiplikation är kommutativt, så $xyy = yxy$. Alltså spelar det ingen roll i vilken ordning vi gjorde valen, bara hur många gånger vi valde x och hur många gånger vi valde y.[6]

Så antalet gånger vi får en term som är lika med $x^{n-k}y^k$ kommer alltså vara antalet $\{x, y\}$-strängar med k stycken y. Det antalet är så klart samma som antalet sätt att välja k platser att skriva y ur den totala mängden av n platser – det vill säga $\binom{n}{k}$.

Vi har alltså sett att koefficienten framför $x^{n-k}y^k$ när vi förenklat uttrycket kommer att vara $\binom{n}{k}$. Eftersom detta argument fungerar för varje k har vi bevisat satsen. □

[6] Alltså, formulerat på ett annat sätt, etiketterna av "när valdes vilken" spelar ingen roll.

Exempel 6. Ge ett algebraiskt och ett kombinatoriskt bevis för att

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

Kombinatoriskt bevis. Låt oss räkna antalet ternära strängar[7] av längd n på två olika sätt. Det enkla sättet är att använda multiplikationsprincipen – för varje bokstav har vi tre val, och vi behöver välja n gånger, alltså blir produkten av antalet val för varje gång 3^n.

[7] Det vill säga strängar med alfabetet $\{0, 1, 2\}$.

Ett annat sätt att räkna detta är att dela upp efter hur många ettor ordet innehåller. Först väljer vi antalet ettor, sedan väljer vi var ettorna skall stå, och till sist väljer vi vad resten av bokstäverna skall vara för något.

Givet att vi vet att vi skall ha k stycken ettor, och vi vet var de skall stå, så har vi $n - k$ bokstäver kvar att göra ett val för – och nu har vi bara två val, eftersom vi inte får välja ettor utan bara nollor och treor. Så enligt multiplikationsprincipen multiplicerar vi antalet val vi har i varje fall och får att det finns 2^{n-k} sätt att fylla i resten av ordet med nollor och treor.

Givet att vi vet att vi skall ha k stycken ettor, hur många olika strängar kan vi skapa? Antalet sätt att välja var ettorna skall stå är precis antalet kombinationer av k element från mängden av platser, $[n]$, och vi vet att det är $\binom{n}{k}$. När vi väl valt var ettorna skall stå kan vi fylla i resten på 2^{n-k} sätt, som vi såg i föregående stycket, så multiplikationsprincipen ger oss att det måste finnas $\binom{n}{k}2^{n-k}$ strängar av längd n med k stycken ettor.

Till slut vet vi att det totala antalet ternära strängar måste vara summan av detta över alla k, enligt additionsprincipen. Så om vi summerar detta får vi att det finns

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

ternära strängar. Efter att ha tillämpat likheten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ och vänt på indexeringen i summan ser vi att detta är precis höger led i ekvationen vi gav. □

Algebraiskt bevis. Vi använder binomialsatsen och ser att

$$\begin{aligned} 3^n &= (1+2)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k. \end{aligned}$$

□

Omordningar

Definition 7. En omordning[8] av en X-sträng s är en annan X-sträng s' där varje element i X förekommer lika många gånger i s' som i s. Specifikt måste alltså s och s' vara av samma längd.

[8] Engelska *rearrangement*, det verkar inte finnas ett helt inarbetat svenskt ord för detta, så omordning får fungera, om än klumpigt.

Exempel 8. Det finns sex omordningar av $ABBA$:

$$ABBA, ABAB, AABB, BAAB, BABA, BBAA.$$

Proposition 9. *Om s är en binär sträng av längd n med k stycken ettor finns det $\binom{n}{k}$ stycken omordningar av s.*

Bevis. Vi behöver helt enkelt räkna antalet binära strängar av längd n som har k stycken ettor. För att konstruera en sådan behöver vi helt enkelt välja på vilka platser det skall stå en etta – alltså välja en delmängd av k platser av de totalt n platserna. Detta vet vi att vi kan göra på $\binom{n}{k}$ sätt. □

Kompositioner

Antag att vi vill fördela ut n stycken osärskiljbara objekt bland k särskiljbara människor.

Exempel 10. Tre stycken lärare konkurrerar om två stycken äpplen de har fått av sina elever. På hur många olika sätt kan äpplena fördelas ut?

Här är $n = 3$ och $k = 2$. Det finns sex olika sätt:

Äpplen för A	Äpplen för B	Äpplen för C
2	0	0
1	1	0
1	0	1
0	2	0
0	1	1
0	0	2

Proposition 11. *Det finns $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ sätt att fördela n osärskiljbara föremål mellan k särskiljbara personer.*

Bevis. Metoden för det här beviset brukar kallas för ett pinnar-och-stjärnor-argument.[9]

Vi studerar ord ur alfabetet $\{*, |\}$ med $k-1$ stycken pinnar och n stycken stjärnor. Till exempel om $n = 6$ och $k = 5$

$$* * || * | * | * *.$$

Vi tolkar detta ordet som en fördelning av föremål till personer såsom följer: Person ett får alla stjärnor innan första strecket, person två alla mellan första och andra strecket, och så vidare, tills person k får alla stjärnor efter det sista strecket. I vårt exempel får alltså person ett två föremål, person två inga, person tre och fyra ett var, och person fem får två.

Detta etablerar en bijektion mellan våra ord och fördelningarna till personer. Vi vet från Proposition 9[10] hur man räknar antalet sådana ord – våra ord har längd $n+k-1$ (de innehåller n stjärnor och $k-1$ streck) och $k-1$ av dem är av ena typen, så det måste finnas totalt $\binom{n+k-1}{k-1}$ ord, och alltså lika många fördelningar. □

[9] Engelska *stars and bars argument*.

[10] Den propositionen handlar om binära strängar, men vi har alfabetet $\{*, |\}$ – det spelar så klart ingen roll för antalet vad vi kallar våra bokstäver.

Exempel 12. Hur många lösningar har ekvationen $x + y + z = 15$, ifall vi kräver att x, y, och z alla skall vara positiva heltal?

Vi kan se det här som en variant av problemet med att fördela osärskiljbara objekt mellan särskiljbara personer, där objekten är ettor och personerna är våra tre variabler.

Vi börjar med att ge varje variabel en etta, eftersom alla måste vara större än noll. Sedan har vi tolv ettor kvar att fördela mellan tre variabler, så Proposition 11 säger oss att det finns $\binom{12+3-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91$ lösningar.

Definition 13. I allmänhet är antalet sätt att skriva n som en summa av ett godtyckligt antal positiva heltal, där ordningen vi skrivar summan i spelar roll[11], antalet *kompositioner*[12] av n. Vi studerade alltså just antalet kompositioner av längd 3 av 15.

[11] $1+4$ och $4+1$ är alltså olika kompositioner av 5.

[12] Inte att blanda ihop med *kombinationer*, trots ordens snarlikhet.

Multinomialkoefficienter

Exempel 14. Hur många omordningar finns det av ordet $SPAPASTA$?[13]

Det har 2 stycken S och P, 3 stycken A, och ett T. Vi kan skapa en omordning av detta ordet genom att först välja var vi placerar Ana – det kan vi göra på $\binom{8}{3}$ sätt, eftersom vi har åtta platser och tre An. När vi placerat ut dem har vi $8 - 3 = 5$ sätt att placera ut våra två S, så vi har $\binom{5}{2}$ val för hur vi gör det.

Likaledes har vi $\binom{3}{2}$ sätt att placera ut våra Pn, och till slut $\binom{1}{1}$ enda

[13] Ursprungligen ville jag ha det rimligare ordet *pastasås*, men LaTeX gillar visst inte $\AA$ i ekvationer.

sätt att placera ut vårt T. Sammantaget blir det alltså

$$\binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{8!}{3!5!}\frac{5!}{2!3!}\frac{3!}{2!1!}\frac{1!}{1!0!} = \frac{8!}{3!2!2!1!}$$

Definition 15. För varje heltal n och varje samling av heltal $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sådana att $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ betecknar vi *multinomialkoefficienten* med

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}.$$

Notera att våra vanliga binomialkoefficienter är specialfallet när $r = 2$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proposition 16. *Antag att s är en X-sträng av längd n, som innehåller k_1 stycken x_1, k_2 stycken x_2, och så vidare, upp till k_r stycken x_r – så $k_1 + k_2 + \ldots k_r = n$. Antalet omordningar av s ges av multinomialkoefficienten $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_r}$.*

Bevis. Låt R vara antalet omordningar av s. Vi använder återigen "räkna samma sak på två olika sätt"-metoden. Den här gången är vad vi vill räkna antalet permutationer av längd n ur alfabetet[14]

$$\begin{aligned} X' = \{&x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{k_1}, \\ &x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{k_2}, \\ &\vdots \\ &x_r^1, x_r^2, \ldots, x_r^{k_3}\}. \end{aligned}$$

[14] Så i fallet där vårt ord är *SPAPASTA* blir

$$X' = \{S^1, S^2, P^1, P^2, A^1, A^2, A^3, T^1\}.$$

Vi tar helt enkelt varje bokstav och ger den en etikett, så att bokstäverna blir särskiljbara.

Eftersom X' har exakt n bokstäver vet vi att antalet permutationer av det alfabetet är precis $n!$.

Låt oss nu räkna på ett mer komplicerat sätt. Vi kan också skapa oss en permutation av X' genom att först välja en omordning av s, och sedan välja ett sätt att sätta etiketter på bokstäverna i den omordningen.[15]

[15] Så vi väljer en omordning av *SPAPASTA*, till exempel *ASPTAPAS*, och sätter sedan etiketter på bokstäverna för att få till exempel $A^2S^1P^2T^1A^1P^1A^3S^2$, vilket är en permutation av X'.

Om vi bara studerar våra x_1 i omordningen av s så har vi k_1 stycken, och vi skall sätta etiketter mellan 1 och k_1 på dem. Det kan vi göra på $k_1!$ sätt. Det samma gäller för varje annan bokstav, så multiplikationsprincipen säger oss att det totala antalet sätt att sätta etiketter måste vara $k_1!k_2!\ldots k_r!$. Det totala antalet permutationer av X' måste alltså vara R, antalet omordningar, gånger detta, så vi har sett att

$$n! = Rk_1!k_2!\ldots k_r!$$

och om vi löser detta för R får vi precis den sökta satsen. □

Teorem 17 (Multinomialsatsen). *Det gäller att*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots+k_r=n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

Bevis. Precis samma argument som för binomialsatsen fungerar här. □

Övningar

Övning 1. I Exempel 1 såg vi att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

genom att studera en kvadrat av $(n+1) \times (n+1)$ punkter, och observera att den sökta summan räknar antalet punkter under diagonalen i figuren. Sedan använde vi ett algebraiskt argument för att få en formel för detta antal.

En uppmärksam läsare kanske lägger märke till att $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$, vilket ju också räknar antalet kombinationer av två element ur en mängd av $n+1$ element. Kan du komma på ett *kombinatoriskt* bevis för varför antalet element under diagonalen på kvadraten är samma sak som antalet kombinationer av 2 element från en mängd av $n+1$ element?

Övning 2. I en sidnot till Exempel 3 nämnde vi att det också går att se problemet som att räkna binära strängar av längd n, via en bijektion mellan sådana och delmängder till en mängd.

Kan du skriva ett kombinatoriskt bevis för att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ som resonerar om binära strängar istället för om delmängder till en mängd?

Övning 3. Hur många heltalslösningar finns det till $x + y + z = 43$, om vi kräver att $x \geq 1$, $y \geq 17$, och $z \geq 5$?

Övning 4. Hur många omordningar finns det av ordet 54240244?

Hur många omordningar finns det av det ordet som inte börjar med en nolla?

Övning 5. Hur många ternära strängar av längd $2n$ finns det, där ettorna bara får dyka upp på udda positioner?

Övning 6. Låt m och w vara positiva heltal. Ge ett kombinatoriskt bevis för att det, för varje $0 \leq k \leq m + w$, gäller att

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{w}{k-j} = \binom{m+w}{k}.$$