

# Övningstillfälle 2: Teoretiska övningar · 1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

<sup>1</sup> vilhelm.agdur@math.uu.se

10 februari 2023

Detta dokument innehåller en samling övningar i kombinatorik som inte kräver någon programmering, utan är avsedda att lösas med papper och penna. Merparten av dessa problem är svårare än potentiella tentaproblem, eftersom de är avsedda att lösas i grupp över en längre tid, inte snabbt och individuellt i en tentasal.

**Övning 1.** Vi har en följd  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  som ges av rekursionen

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = f(n), \quad f(2n+1) = f(n) + f(n+1).$$

Låt  $F$  vara den ordinära genererande funktionen för  $f$ , alltså

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

Visa att vi, om vi låter  $G(x) = F(x)/x$ , har att

$$G(x) = (1 + x + x^2) G(x^2),$$

och således har att

$$F(x) = \frac{1}{x} \prod_{j=0}^{\infty} (1 + x^{2^j} + x^{2^{j+1}}).$$

**Övning 2.** Låt  $X$  vara en slumpvariabel som tar värdena  $0, 1, 2, \dots$  med sannolikheterna  $p_0, p_1, p_2, \dots$  och så vidare.<sup>2</sup> Låt  $P(x)$  vara genererande funktionen för följden  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ .

1. Finn uttryck för väntevärdet  $\mathbb{E}[X]$  och standardavvikelsen  $\sigma(X)$  enbart i termer av  $P(x)$ .
2. Antag att  $Y$  dras från samma fördelning som  $X$ , oberoende av  $X$ . Vad är sannolikheten  $p_n^{(2)}$  att deras summa blir  $n$ ? Låt  $P_2(x)$  vara den genererande funktionen för följden  $p_n^{(2)}$ , och finn ett uttryck för den i termer av  $P(x)$ .
3. Mer generellt, antag att  $X_1, X_2, \dots, X_k$  alla dras oberoende från vår givna fördelning. Låt

$$p_n^{(k)} = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_k = n),$$

och låt  $P_k(x)$  vara den genererande funktionen för följden  $p_n^{(k)}$ . Uttryck denna i termer av  $P(x)$ .

<sup>2</sup> Om du inte redan vet vad termerna i den här uppgiften betyder är detta ett bra tillfälle att fräscha upp ditt minne av grundläggande sannolikhets teori – det kommer att dyka upp senare i kursen. Visserligen kommer vi ge definitioner då, men antagandet kommer ändå att vara att ni har sett det innan och bara behöver en påminnelse.

### Räkna delmängder till $[n]$ utan konsekutiva medlemmar

Låt  $f_n$  vara antalet delmängder till  $[n]$  som inte innehåller både  $k$  och  $k+1$  för något  $k$ , och låt  $f_{n,k}$  vara antalet delmängder av storlek  $k$  till  $[n]$  som inte innehåller både  $k$  och  $k+1$  för något  $k$ . Vi studerar nu dessa två talföljder i resten av våra övningar.

**Övning 3.** Finn en rekursion för  $f_n$ , och använd denna rekursion för att hitta ett enkelt uttryck för  $f_n$ .

**Övning 4.** Finn en rekursion för  $f_{n,k}$ .

Vi definierar den *bivariata genererande funktionen* för denna följd genom följande dubbelsumma

$$F(x, y) = \sum_{n=1, k=1}^{\infty} f_{n,k} x^n y^k.$$

Använd rekursionen ni fann för  $f_{n,k}$  för att finna en sluten form för  $F$ .<sup>3</sup>

**Övning 5.** Studera uttrycket

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \right|_{(x,1)},$$

alltså partialderivatan av  $F$  med avseende på  $y$ , utvärderad i punkten  $(x, 1)$ . Vad är koefficienten framför  $x^n$  i detta uttryck?

Räkna sedan faktiskt ut denna derivata, och känn igen uttrycket ni får som en genererande funktion. Använd detta för att ge en ny likhet som involverar  $f_{n,k}$ .

**Övning 6.** Finn en sluten form för  $f_{n,k}$ . Det finns två huvudsakliga sätt ni kan gå tillväga:

1. Studera funktionen  $F(x, y)$  som ni redan hittat, och finn koefficienten för  $x^n y^k$  i detta uttryck direkt.
2. Definiera istället den ordinära genererande funktionen  $F_k(x)$  genom att

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} x^n$$

för varje  $k$ , och använd rekursionen ni funnit för att finna ett uttryck för denna för varje  $k$ . Finn sedan koefficienten för  $x^n$  i  $F_k$  för varje par av  $n$  och  $k$ .

**Övning 7.** Fyll i vad ni funnit i Övning 3 och Övning 6 i den uppenbara likheten

$$f_n = \sum_{k=0}^n f_{n,k},$$

och observera att vi funnit en ny likhet för  $f_n$ .

<sup>3</sup> Vi kan använda samma metod som vi först använde för att hitta genererande funktionen för Fibonacci-talen – och även i detta fall kommer svaret att bli en rationell funktion, men nu i  $x$  och  $y$ .

**Bonus:** Formlerna som vi härlett här med genererande funktioner är ju lockande enkla. Kan vi finna ett kombinatoriskt bevis för någon av dem?<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Förutom för Övning 3 har jag inte själv funderat på denna frågan – så det här är inte en del av övningarna. Men om någon hittar ett kombinatoriskt bevis av de senare formlerna vore det intressant att se.