Chapter 1.2 凸集

21307099

liyj323@mail2.sysu.edu.cn

目录

1 凸集 仿射集 凸锥

Definition 1. 凸集 Convex Set
过集合 C 内任意两点的线段都在 C 内, 则称 C 为凸集:

$$x1, x2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

Definition 2. 凸组合 Convex Combination
$\theta_i \geq 0$ *and* $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ 则 称 $\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$ 为 $x_1, \ldots, x_m$ 的一个凸组合

Definition 3. 仿射集 Affine Set
过集合 C 内任意两点的直线都在 C 内, 则称 C 为仿射集:

$$x1, x2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1 + \theta_2 = 1$$

显然仿射集的要求更高, 因此任何仿射集都是凸集, 但凸集未必是仿射集

Definition 4. 仿射组合 Affine Combination
$\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ 则 称 $\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$ 为 $x_1, \ldots, x_m$ 的一个仿射组合

1.1 仿射维数和相对内部

Definition 5. 仿射维数
集合 C 的仿射维数为其仿射包的维数。

Definition 6. 相对内部
定义集合 C 的相对内部为 aff C 的内部，记为 relint C 即

$$\text{relint } C = \{x \in C | B(x, r) \cap \text{aff } C \subseteq C, \exists r > 0\}$$

Definition 7. 相对边界
定义集合 C 的相对边界为 cl$C$relint$C$

Definition 8. 凸锥 Convex Cone

$$\forall x \in C, \theta \geq 0, \text{都有} \theta x \in C, \text{则称 C 为锥}$$

若 C 为凸集, 则称 C 为凸锥, 即

$$x_1, x_2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

Definition 9. 凸锥组合 Conic Combination

$$\theta_1 \dots \theta_m \geq 0$$

称

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$$

为 $x_1 \dots x_m \geq 0$ 的一个凸锥组合

Definition 10. 凸包 仿射包 凸锥包

集合 C 中任意元素的凸组合、仿射组合、凸锥组合称为 C 的凸包、仿射包、凸锥包

2 重要的例子

2.1 超平面与半空间

超平面：

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$$

或者

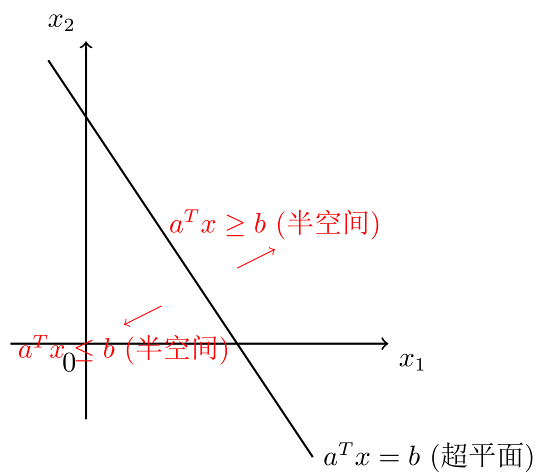
$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T (x - x_0) = 0\}$$

其中 x_0 是超平面上任意一点。超平面是凸集、仿射集，过原点时为凸锥

半空间：

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}, a \neq 0$$

显然, 半空间是凸集, 但不是仿射集. 过原点时为凸锥



2.2 范数球

Definition 11. Norm Ball

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_c\|_p \leq r\}$$

显然, 范数球是凸集且当 $r \neq 0$ 时不可能是仿射集和凸锥

2.3 球和椭球

Definition 12. 球

$$\begin{aligned} b(x_c, r) &= \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\} && (1) \\ &= \{x \mid \sqrt{(x - x_c)^T (x - x_c)} \leq r\} && (2) \end{aligned}$$

Definition 13. 椭球

$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$

其中 $P = P^T \succ 0$, 半轴长度由 $\sqrt{\lambda_i}$ 给出

例如:

$$x^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} x \leq 1$$

则

$$\frac{1}{4} x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

特征值为 4 和 1, 则半轴长为 2 和 1

2.4 多面体与单纯形

Definition 14. 多面体 polyhedron

$$P = \{x \mid a_i^T x \leq b_i,\ i = 1 \ldots m \ \ and \ \ c_j^T x = d_j,\ j = 1 \ldots p\}$$

仿射集合、射线、线段和半空间都是多面体

Definition 15. 单纯形 simplex

$v_0, v_1, \ldots v_k$ 共 k+1 个点仿射无关（即 $v_1 - v_0, \ldots v_k - k_0$ 线性无关），则 $C = \mathrm{Conv}\{v_0, v_1, \ldots v_k\}$

2.5 矩阵空间

Proposition 1.

1. 对称矩阵集 S^n 显然是凸锥、凸集、仿射集
2. 对称半正定矩阵集 S_+^n 是凸锥、凸集，不是仿射集（如 n=1 时为全体非负实数 $\mathbb{R}_+$）
3. 对称正定矩阵集 S_{++}^n 是凸集，不是凸锥、仿射集（如 n=1 时为全体正实数 R_{++}）

对称半正定矩阵是凸锥

Prove:

$$\begin{aligned} & & \forall A, B \in S_+^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0, x^T B x \geq 0 \quad (3)\\ \forall \theta_0, \theta_1 \geq 0, & & x^T(\theta_0 A + \theta_1 B)x \quad (4)\\ & & = \theta_0 x^T A x + \theta_1 x^T B x \quad (5)\\ & & \geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

显然 θ_0, θ_1 可以同时 0，因此严格的 $>$ 是不满足的，即对称正定矩阵集合不是凸锥（但显然是凸集，因为凸集中 $1^T\vec{\theta} = 1$，不能同时取 0）

3 保凸运算

3.1 交集

交集是保凸的。

每一个闭的凸集 S 都是半空间的交集（通常为无限多个）。事实上，一个闭凸集 S 是包含它的所有半空间的交集。（P32 原文：一个闭集 S 是包含它的所有半空间的交集，但由交集的保凸性可知必须要是闭凸集）

3.2 仿射函数

仿射变换和逆仿射变换都是保凸的

Definition 16. 仿射变换 若 $f(x) = AX + b$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ 则称 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是仿射的

- 若 $S \in \mathbb{R}^n$ 是凸集, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是仿射的, 则 S 在 f 下的映射 $f(S) = \{f(x)|x \in S\}$ 也是凸集
- 若 $C \in \mathbb{R}^m$ 是凸集, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是仿射的, 则 C 在 g 下的逆映射 $g^{-1}(C) = \{x|g(x) \in C\}$ 也是凸集

3.3 线性分式及透视函数

4 凸函数