最优化理论 Homework2

21307099 李英骏

Problem 1

$$
\begin{aligned}
f(\theta\vec{x}+(1-\theta)\vec{y}) &= \max_{i=1,\dots,n} f_i(\theta\vec{x}+(1-\theta)\vec{y}) \\
&= \max_{i=1,\dots,n}(\theta f_i(\vec{x})+(1-\theta)f_i(\vec{y})) \\
&\leq \max_{i=1,\dots,n}(\theta f_i(\vec{x}))+\max_{i=1,\dots,n}((1-\theta)f_i(\vec{y})) \\
&= \theta\max_{i=1,\dots,n} f_i(\vec{x})+(1-\theta)\max_{i=1,\dots,n} f_i(\vec{y}) \\
&= \theta f(\vec{x})+(1-\theta)f(\vec{y}) \\
&\text{因此 f 为凸函数}
\end{aligned}
$$

Problem 2

定义拉格朗日函数为：

$$L(x,\lambda,v)=c^Tx+\lambda(Gx-h)+v(Ax-b)=(c^T+\lambda G+vA)x-\lambda h-vb$$

$$\max_{x\in D} L(x,\lambda,v)=\begin{cases} c^Tx, & x\in D \\ -\infty, & x\notin D \end{cases}$$

$$\therefore g(\lambda,v)=\inf_{x\in D} L(x,\lambda,v)=\begin{cases} -\lambda h-vb, & c^T+\lambda G+vA=0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

因此对偶问题为：

$$
\begin{gathered}
\max\{-\lambda h-vb\} \\
\text{s.t.}\quad c^T+\lambda G+vA=0 \\
\lambda\geq 0
\end{gathered}
$$

根据强对偶性，有：

$$
\begin{gathered}
d^*=\sup_{\lambda\geq 0,v}\inf_{x\in D} L(x,\lambda,v) \\
=\inf_{x\in D} L(x,\lambda^*,v^*)\leq L(x^*,\lambda^*,v^*) \\
\leq f(x^*)=p^*
\end{gathered}
$$

依据 KKT 条件：

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, v^*) = c^T + \lambda^* G + v^* A = 0$$

$$\therefore \begin{cases} Gx^* \leq h \\ Ax^* = b \\ \lambda^* \geq 0 \\ \lambda^*(Gx^* - h) = 0 \\ c^T + \lambda^* G + v^* A = 0 \end{cases}$$

Problem 3

对于给定的参考点 x_0 ，我们希望找到最小化目标函数的向量 x
考虑以下拉格朗日函数 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\mathrm{x}, \{\mathrm{y}_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \|\mathrm{y}_i\|_2 + \frac{1}{2}\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2^2 - \sum_{i=1}^N (\mathrm{y}_i - \mathrm{A}_i\mathrm{x} - \mathrm{b}_i)^T \mathrm{z}_i \tag{1}$$

为解决这个优化问题，我们首先关注中间变量 y_i，注意到它非光滑

$$\inf_{\mathrm{y}_i} \left(\|\mathrm{y}_i\|_2^2 + (\mathrm{z}_i)^T \mathrm{y}_i\right) = \begin{cases} 0, & \text{若}\|\mathrm{z}_i\|_2 \leq 1, \\ -\infty, & \text{若}\|\mathrm{z}_i\|_2 > 1. \end{cases} \tag{2}$$

接下来需要找到原始变量 x 的最优值。将 x 的梯度设为 0

$$\mathrm{x}^* = \mathrm{x}_0 + \sum_{i=1}^N (\mathrm{A}_i)^T \mathrm{z}_i \tag{3}$$

将结果代入拉格朗日函数，得到对偶问题的目标函数。函数描述了在拉格朗日乘子的约束下的最佳值

$$\mathcal{G}(\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_N) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \|\mathrm{A}_i^T \mathrm{z}_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^N (\mathrm{A}_i \mathrm{x}_0 + \mathrm{b}_i)^T \mathrm{z}_i, & \text{如果}\|\mathrm{z}_i\|_2 \leq 1 \quad \forall i, \\ -\infty, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4}$$

对偶问题涉及最大化上述对偶函数，并受每个拉格朗日乘子范数必须小于或等于 1 的约束。

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^N (A_i x_0 + b_i)^T z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \|A_i^T z_i\|_2^2 \tag{5}$$

$$\text{subject to} \quad \|z_i\|_2 \leq 1, \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \tag{6}$$