DCS440最优化理论  HW1：凸集

1. ① $k=2$ 时，由凸集的定义，$\theta_1+\theta_2=1$，$\theta_i\geq 0$，则 $\theta_1 x_1+\theta_2 x_2\in C$

② 若 $k=n$ 时成立（$n\geq 2, n\in Z^+$）

即 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$，$\theta_i\geq 0$ 都有 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i\in C$ （$x_i\in C$）

则 $\forall\theta_i'\in R$，$\sum_{i=1}^{n+1}\theta_i'=1$，有 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i'=1-\theta_{n+1}'$，$\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i'}{1-\theta_{n+1}'}=1$

由于 $k=n$ 成立，则 $\cancel{\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i'}{1-\theta_{n+1}}x_i\in C}$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i'}{1-\theta_{n+1}'}x_i\in C$，由凸集定义：$(1-\theta_{n+1}')\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i'}{1-\theta_{n+1}'}x_i+\theta_{n+1}'x_{n+1}\in C$

即 $\sum_{i=1}^{n+1}\theta_i'x_i\in C$，即对 $k=n+1$ 也成立，由第一数学归纳法，证毕

2. 记S的凸包为H，所有包含S的凸集的交为C，即 $C=\bigcap\{V\mid S\subseteq V \text{且}V\text{为凸集}\}$

① $\forall x_0\in H$，~~用~~ $x_0=\sum_{i=1}^{k}\theta_i x_i$，$x_i\in S$，$\theta_i\geq 0$，$i=1,\cdots,k$，$\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1$

由于 $S\subseteq V$ ~~则 $S\subseteq C$~~ 则 $x_i\in V$，又 $V$ 为凸集，$x_0\in V$，故 $x_0\in C$

$\Rightarrow H\subseteq C$

② 由于H为S的凸包，$S\subseteq H$ 且 H为凸集，即有某个 $V=H$，则 $C\subseteq H$

$\Rightarrow H=C=\bigcap\{V\mid S\subseteq V, V \text{ is convex}\}$

3. 考虑过原点的且与超平面~~垂直~~正交的线，记其与两超平面的交点为 $x_1$，$x_2$

则 $x_1=k_1 a$，$x_2=k_2 a$

$a^T k_1 a=b_1$ $\cancel{\Rightarrow k_1=ab_1a^T=b_1aa^T=b_1\|a\|_2^2}$

$\Rightarrow k_1\cdot a^Ta=b_1\Rightarrow k_1=\frac{b_1}{a^Ta}=\frac{b_1}{\|a\|_2^2}\Rightarrow x_1=\frac{b_1}{\|a\|_2^2}a$，同理 $x_2=\frac{b_2}{\|a\|_2^2}a$

故距离为 $\|x_1-x_2\|_2 = \left\| \frac{b_1}{\|a\|_2^2}a - \frac{b_2}{\|a\|_2^2}a \right\|_2$

$$= \frac{|b_1-b_2|}{\|a\|_2}$$

4、 $\|x-a\|_2 \le \|x-b\|_2$

$\Leftrightarrow \|x-a\|_2^2 \le \|x-b\|_2^2$

$\Leftrightarrow x^Tx - 2a^Tx + a^Ta \le x^Tx - 2b^Tx + b^Tb$

$\Leftrightarrow [2(b-a)]^T x \le b^Tb - a^Ta$

~~5 $a_1x_1+a_2x_2 = a_1x_1+(1-a_1)x_2 = a_1(x_1-x_2)+x_2$~~

~~$\begin{cases} -2\le a_1\le 2, \\ -2\le 1-a_1\le 2 \end{cases} \Rightarrow \{-1\le a_1\le 2$~~

~~不妨设 $x_1,x_2$ 线性独立，记 $x_1-x_2=x_3$，则 $a_1x_1+a_2x_2 = a_1x_3+x_2$，$-1\le a_1\le 2$~~

~~显然~~

5、 $a_1x_1+a_2x_2 = x_1a_1+(1-x_1)a_2 = x_1(a_1-a_2)+a_2$

$\begin{cases} -2\le x_1\le 2 \\ -2\le x_2\le 2 \end{cases} \Rightarrow -1\le x_1\le 2$，不妨设 $a_1,a_2$ 线性独立，记 $a_3=a_1-a_2$，则 $a_1x_1+a_2x_2 = x_1\cdot a_3+a_2$，$-1\le x_1\le 2$，显然为一条线段，是多面体

6、 $\forall x_1,x_2\in C$

$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$\forall 0\le\theta\le 1$，有

$$A[\theta x_1+(1-\theta)x_2] = \theta Ax_1+(1-\theta)Ax_2 = \theta b+(1-\theta)b = b$$

$\Rightarrow \theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$

$\Rightarrow C$ 是凸集

7. 法一：$\forall x_1, x_2 \in C, 0\le\theta\le 1$

$$\begin{cases} x_1^TAx_1+b^Tx_1+c\le 0\\ x_2^TAx_2+b^Tx_2+c\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^TAx_1\le -b^Tx_1-c \\ x_2^TAx_2 \le -b^Tx_2 - c\end{cases}$$

记 $x_3=\theta x_1+(1-\theta)x_2$

则 $x_3^TAx_3+b^Tx_3+c$

$$=[\theta x_1+(1-\theta)x_2]^TA[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+b^T[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+c$$

$$=\boxed{\theta^2x_1^TAx_1+\theta(1-\theta)x_1^TAx_2}+\boxed{\theta(1-\theta)x_2^TAx_1+(1-\theta)^2x_2^TAx_2}+$$
$$b^T[\theta(x_1)+(1-\theta)x_2]+c$$

$$=\boxed{[\theta^2+\theta(1-\theta)]x_1^TAx_1+[\theta(1-\theta)x_1^TAx_2-\theta(1-\theta)x_1^TAx_1]}+$$
$$\boxed{[\theta(1-\theta)\cancel{x_2^TA}+(1-\theta)^2]x_2^TAx_2+[\theta(1-\theta)x_2^TAx_1-\theta(1-\theta)x_2^TAx_2]}+$$
$$b^T[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+c$$

$$=\theta x_1^TAx_1+\theta(1-\theta)x_1^TA(x_2-x_1)+\cancel{(1-\theta)x_2^TAx_2}+\theta(1-\theta)x_2^TA(x_1-x_2)$$
$$(1-\theta)x_2^TAx_2$$
$$+b^T[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+c$$

$$\le -\theta b^Tx_1-\theta c-(1-\theta)b^Tx_2-(1-\theta)c+b^T[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+c$$

$$=0$$

$\Rightarrow x_3\in C$，C为凸集

法二：记 $x=u+tv$，$u,v\in R^n, t\in R$

则 $x^TAx+b^Tx+c$

$$=(u^T+tv^T)A(u+tv)+b^T(u+tv)+c$$

$$=u^TAu+u^TAvt+v^TAut+v^TAvt^2+b^Tu+b^Tvt+c$$

$$=(v^TAv)t^2+(u^TAv+v^TAu+b^Tv)t+(u^TAu+b^Tu+c)$$

$v^TAv\ge 0$，即为二次函数与x轴所围区域，为凸集

8: $\forall\ t_1 = (u_1, v_1) \in S$

$t_2 = (u_2, v_2) \in S$

有: $\exists\ v_1 = y_1 + y_2$ s.t. $(u_1, y_1) \in S_1$, $(u_1, y_2) \in S_2$

$\exists\ v_2 = y_3 + y_4$, s.t. $(u_2, y_3) \in S_1$, $(u_2, y_4) \in S_2$

$\forall\ 0 \le \theta \le 1$, $t_3 = \theta(t_1) + (1-\theta)\, t_2$

$= (\theta u_1 + (1-\theta) u_2,\ \theta v_1 + (1-\theta) v_2)$

$= (\theta u_1 + (1-\theta) u_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_3 + \theta y_2 + (1-\theta) y_4)$

$\because (u_1, y_1) \in S_1$, $(u_2, y_3) \in S_1$

$\therefore (\theta u_1 + (1-\theta) u_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_3) \in S_1$

Similarly, $(\theta u_1 + (1-\theta) u_2,\ \theta y_2 + (1-\theta) y_4) \in S_2$

Thus $t_3 \in S$, $S$ is convex.