DCS440 最优化理论
第二次作业：凸函数、凸优化问题与对偶理论

12月14日上课交

1. 给定 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$，试用凸函数的定义证明**分段线性函数** $f(\boldsymbol{x}) = \max\left\{\boldsymbol{a}_1^\top x + b_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n^\top x + b_n\right\}$ 是凸函数。

2. **推导**线性规划问题的**对偶问题**和**KKT条件**：

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & Gx \leq h \\
& Ax = b
\end{aligned}
$$

3. **推导**以下问题的**对偶问题**：

$$
\min_{x} \quad \frac{1}{2}||x - x_0||_2^2 + \sum_{i=1}^{N} ||A_i x + b_i||_2
$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。（提示：引入新的变量 $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ 以及等式约束 $y_i = A_i x + b_i$，将原无约束优化问题转化为约束优化问题后，再推导其对偶问题。）