Chapter 1. 基础知识

21307099
liyj323@mail2.sysu.edu.cn

目录

1 绪论

1.1 最优化

一般描述为：

$$\text{miminize} \quad f(x) \tag{1}$$
$$\text{subject to} \quad x \in \Omega \tag{2}$$

1.2 课程内容

- 凸集、凸函数、凸优化问题
- 对偶理论
- 无约束优化：算法结构、一阶方法、二阶方法
- 有约束优化：罚方法、增广拉格朗日乘子法、交替方向乘子法
- 现代优化算法

2 基础知识

2.1 向量

Definition 1. 范数 称一个从向量空间 $\mathbb{R}^n$ 到实数域 $\mathbb{R}$ 的非负函数 $\|\cdot\|$ 为范数, 如果

-
- 正定性 $\|v\| \geq 0, \forall v \in \mathbb{R} \quad and \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- 齐次性 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- 三角不等式 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

Definition 2. 相容范数

满足相容性 (次可乘性) 的范数, 即 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

注意到 AB,A,B 可能在不同的空间上, 相容范数应在所有空间上都满足该性质.

对于给定 v, w:

- 内积:$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- $\ell_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

- $\ell_p(p \geq 1) : \|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
- ℓ_0半范 : $\|x\| = (x$的所有分量中非 0 元素的个数$)$

Proposition 1.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : -\|x\|_2\|y\|_2 \leq \langle x, y\rangle \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

Hölder 不等式:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p\|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Minkowski 不等式:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, p \in [1, \infty)$$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_q$$

2.2 矩阵

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Definition 3. 矩阵

- 内积: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$即对应位置元素积的和
- Frobenius 范数: $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$
- 诱导范数
  我们希望 $\|AX\| \leq \|A\|\|x\|$, 故定义

$$\|A\| \triangleq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

- 诱导 ℓ_1 范数 (最大列和范数)

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

- 诱导 ℓ_2 范数 (谱范数)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

  特别地, 当 A 是 Hermi

- 诱导 ℓ_∞ 范数 (最大行和范数)

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

- 核范数

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i, r = rankA, \sigma\text{为非零奇异值}$$

Definition 4. 正定矩阵
如果对于任意 $x \neq 0, x^T Ax > 0$，则称 A 是正定的，记为 $A \succ 0$

Definition 5. 半正定矩阵
如果对于任意 $x \neq 0, x^T Ax \geq 0$，则称 A 是半正定的，记为 $A \succeq 0$

$$\begin{aligned}
&\forall x \neq 0, x^T Ax \geq 0 &(3)\\
\Rightarrow &\forall A\vec{v} = \lambda\vec{v}, v^T Av \geq 0 &(4)\\
\Rightarrow &\lambda v^T v \geq 0 &(5)\\
&Since\ v^T v \geq 0 &(6)\\
\Rightarrow &\lambda \geq 0 &(7)
\end{aligned}$$

2.3 Basic Concepts In Optimization

Definition 6. 最优化问题的数学模型

$$\begin{aligned}
\text{miminize} \quad & f(x) &(8)\\
\text{subject to} \quad & x \in \Omega &(9)
\end{aligned}$$

- 决策变量 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- 可行域 (决策集) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\begin{cases} \text{无约束优化问题,} & \Omega = \mathbb{R}^n, \\ \text{约束优化问题,} & \text{Otherwise.} \end{cases}$

可行域: 等式约束, 不等式约束

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, c(x) \le 0\}$$

Definition 7.

- 可行域中的点，或满足约束条件的点称为可行点；
- 对于 $x^* \in \Omega$，若对任意的 $x \in \Omega$，都有 $f(x^*) \le f(x)$，则称 x^* 是问题的一个全局最优解。对应的目标函数值，即 $f(x^*)$，为全局最优值。记为 $x^* \in \arg\min_{x\in\Omega} f(x)$。
- 对于局部最优，若 x^* 还满足对任意的 $x \in \Omega \setminus \{x^*\}$，都有 $f(x) > f(x^*)$，则称 x^* 为严格全局最优解；
- 对于 $x^* \in \Omega$，若存在 x^* 的邻域 $B(x^*, \delta) = \{x : \|x - x^*\| \le \delta\}$ 使得对于任意的 $x \in \Omega \cap B(x^*, \delta)$，有 $f(x^*) \le f(x)$，则称 x^* 为局部最优解；
- 对于局部最优，若 x^* 满足对任意的 $x \in \Omega \cap B(x^*, \delta), x \ne x^*$，有 $f(x) > f(x^*)$，则称 x^* 为严格局部最优解。

2.4 迭代算法

基本框架

- 取初始点 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ 及其他有关参数, $k = 0$.

- 验证停机准则.
- 给出搜索方向 $d^k \in \mathbb{R}^n$, 通常要求 d^k 是下降方向, 即 $(\nabla f_0(x^k))^T d^k < 0$.
- 计算迭代步长 $\alpha_k > 0$ 使得 $f_0(x^k + \alpha_k d^k) < f_0(x^k)$.
- $x^{k+1} := x^k + \alpha_k d^k, k := k + 1$.

2.5 最优化问题

2.5.1 分类

- 约束优化 & 非约束优化

- 连续优化 & 非连续优化

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, c(x) \leq 0\}$$

- 线性规划:f, h, c 都是线性的
- 非线性规划:f, h, c 至少有一个非线性的
- 二次规划:f 是二次函数,h, c 是线性
- 凸优化: 目标函数为凸函数, 可行域为凸集

2.5.2 算法评价标准

全局收敛与局部收敛

- 若 $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = 0$, 则称 x^k 收敛于 x^*
- 子列收敛于 x^*, 称聚点
- 全局收敛性、局部收敛性

收敛速度

1 设算法产生的迭代点列 x^k 收敛于 x^*, 即 $x^k \to x^*$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+!} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = \mu$$

- $\mu \in (0, 1)$ 称 Q-线性收敛（Q 表示 quotient（分式），线性表示误差取对数后，随迭代步数 k 显线性）
- $\mu = 0$: Q-超线性收敛, $\mu = 1$: Q-次线性收敛

2

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+!} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^p} = \mu, p > 1 \quad \text{称为 Q-p 阶收敛到} x^*$$

3 R-线性收敛, R-超线性收敛

3 凸集 仿射集 凸锥

Definition 8. 凸集 Convex Set
过集合 C 内任意两点的线段都在 C 内, 则称 C 为凸集:

$$x1, x2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

Definition 9. 凸组合 Convex Combination
$\theta_i \geq 0\ and\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ 则 称 $\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$ 为 $x_1, \ldots, x_m$ 的一个凸组合

Definition 10. 仿射集 Affine Set
过集合 C 内任意两点的直线都在 C 内, 则称 C 为仿射集:

$$x1, x2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1 + \theta_2 = 1$$

显然仿射集的要求更高, 因此任何仿射集都是凸集, 但凸集未必是仿射集

Definition 11. 仿射组合 Affine Combination
$\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ 则 称 $\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$ 为 $x_1, \ldots, x_m$ 的一个仿射组合

3.1 仿射维数和相对内部

Definition 12. 仿射维数
集合 C 的仿射维数为其仿射包的维数。

Definition 13. 相对内部
定义集合 C 的相对内部为 aff C 的内部，记为 relint C 即

$$\text{relint } C = \{x \in C | B(x, r) \cap \text{aff } C \subseteq C, \exists r > 0\}$$

Definition 14. 相对边界
定义集合 C 的相对边界为 cl$C$relint$C$

Definition 15. 凸锥 Convex Cone

$$\forall x \in C, \theta \geq 0, \text{都有} \theta x \in C, \text{则称 C 为锥}$$

若 C 为凸集, 则称 C 为凸锥, 即

$$x_1, x_2 \in C \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C, \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

Definition 16. 凸锥组合 Conic Combination

$$\theta_1 \ldots \theta_m \geq 0$$

称

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$$

为 $x_1 \ldots x_m \geq 0$ 的一个凸锥组合

Definition 17. 凸包 仿射包 凸锥包

集合 C 中任意元素的凸组合、仿射组合、凸锥组合称为 C 的凸包、仿射包、凸锥包

3.2 超平面与半空间

超平面：

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$$

或者

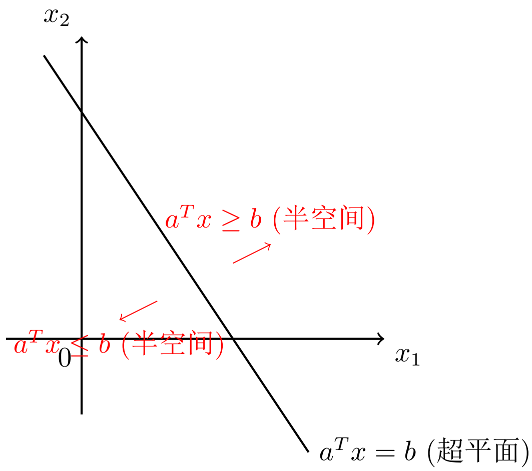
$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T (x - x_0) = 0\}$$

其中 x_0 是超平面上任意一点。超平面是凸集、仿射集，过原点时为凸锥

半空间：

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}, a \neq 0$$

显然, 半空间是凸集, 但不是仿射集. 过原点时为凸锥



3.3 范数球

Definition 18. Norm Ball

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_c\|_p \leq r\}$$

显然, 范数球是凸集且当 $r \neq 0$ 时不可能是仿射集和凸锥

3.4 球和椭球

Definition 19. 球

$$b(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\} \tag{10}$$

$$= \{x \mid \sqrt{(x - x_c)^T (x - x_c)} \leq r\} \tag{11}$$

Definition 20. 椭球

$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$

其中 $P = P^T \succ 0$, 半轴长度由 $\sqrt{\lambda_i}$ 给出

例如:

$$x^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} x \leq 1$$

则

$$\frac{1}{4} x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

特征值为 4 和 1, 则半轴长为 2 和 1

3.5 多面体与单纯形

Definition 21. 多面体 polyhedron

$$P = \{x \mid a_i^T x \leq b_i, \ i = 1 \ldots m \ \ and \ \ c_j^T x = d_j, \ j = 1 \ldots p\}$$

仿射集合、射线、线段和半空间都是多面体

Definition 22. 单纯形 simplex

$v_0, v_1, \ldots v_k$ 共 k+1 个点仿射无关（即 $v_1 - v_0, \ldots v_k - k_0$ 线性无关），则 $C = \mathrm{Conv}\{v_0, v_1, \ldots v_k\}$

3.6 矩阵空间

Proposition 2.

1. *对称矩阵集* S^n 　　*显然是凸锥、凸集、仿射集*
2. *对称半正定矩阵集* S^n_+ 　　*是凸锥、凸集，不是仿射集（如* n*=1 时为全体非负实数* $\mathbb{R}_+$*）*
3. *对称正定矩阵集* S^n_{++} 　　*是凸集，不是凸锥、仿射集（如* n*=1 时为全体正实数* R_{++}*）*

对称半正定矩阵是凸锥

Prove:

$$\forall A, B \in S^n_+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0, x^T B x \geq 0 \tag{12}$$

$$\forall \theta_0, \theta_1 \geq 0, \quad x^T(\theta_0 A + \theta_1 B)x \tag{13}$$

$$= \theta_0 x^T A x + \theta_1 x^T B x \tag{14}$$

$$\geq 0 \tag{15}$$

显然 θ_0, θ_1 可以同时 0，因此严格的 $>$ 是不满足的，即对称正定矩阵集合不是凸锥（但显然是凸集，因为凸集中 $1^T\vec{\theta} = 1$，不能同时取 0）