DCS440 最优化理论
第一次作业：凸集

1. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸集。**证明**：对任意 k 个向量 $x_1, \cdots, x_k \in C$，以及 $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \mathbb{R}$ 满足 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, $\theta_i \geqslant 0$，都有 $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$。（注：凸集的定义要求此式在 $k = 2$ 时成立，这里需要证明对任意 $k \geq 2$ 都成立）

2. 证明集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交。

3. 两个平行的超平面 $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b_1\right\}$ 和 $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b_2\right\}$ 之间的距离是多少?

4. 令 a 和 b 为 $\mathbb{R}^n$ 上不相同的两个点。证明所有距离 a 比距离 b 近 (在 Euclid 范数意义下) 的点的集合 $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leqslant \|x - b\|_2\right\}$ 是一个半空间，即该集合可以用形如 $c^\top x \leqslant d$ 的不等式进行表示。

5. 设集合 $S = \left\{a_1 x_1 + a_2 x_2 \mid -2 \leqslant x_1 \leqslant 2, -2 \leqslant x_2 \leqslant 2, x_1 + x_2 = 1\right\}$，其中 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$。请问 S 是否为多面体？

6. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性方程组的解集, 即
$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\right\}$$
其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$。**证明**：C 是凸集。

7. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为二次不等式的解集，即
$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A x + b^\top x + c \leqslant 0\right\},$$
其中 $A \in \mathbf{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$。**证明**: 若 $A \succeq 0$（即 A 是半正定矩阵），则 C 是凸集。

8. **证明**：如果 S_1 和 S_2 是 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 中的凸集，那么它们的部分和
$$S = \left\{ (x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,\ (x, y_1) \in S_1,\ (x, y_2) \in S_2\right\}$$
也是凸集。