

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

---

## 2022 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称“竞赛章程和参赛规则”，可从 <http://www.mcm.edu.cn> 下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，在竞赛中必须合法合规地使用文献资料和软件工具，不能有任何侵犯知识产权的行为。否则我们将失去评奖资格，并可能受到严肃处理。

**我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。**

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）：   C  

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）：   202217241200  

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）：   华中科技大学  

参赛队员（打印并签名）：1.   卢凯  

2.   陈铭锐  

3.   房怿宽  

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：   胡勇  

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期：   2022   年   09   月   15   日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号：\_\_\_\_\_  
(由赛区填写)

全国评阅编号：\_\_\_\_\_  
(全国组委会填写)

---

**2022 高教社杯全国大学生数学建模竞赛**

**编 号 专 用 页**

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号：  
(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

# 论文题目

## 摘要

摘要的具体内容。

**关键字：** 关键词 1   关键词 2   关键词 3

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

### 1.2 待求解的问题

1. 问题一:
2. 问题二:
3. 问题三:

## 二、问题分析

### 2.1 问题一:

### 2.2 问题二:

在问题二中，我们首先假设对于任意的  $D_i$ ，通过测量  $D_0, D_1, D_j$  三个无人机的位置，得到两个小角  $\alpha_1, \alpha_2$ ，进而能够确定自己在  $D_0 - D_1$  坐标系中的位置。

可以假定的是，对于任意的  $D_i$ ，在接收其他无人机的发射信号时，有以下公共知识：

- 位置待定无人机自身的编号  $i$ ，
- 可以辨识从  $D_0$  与  $D_1$  发出的信号，但不确定第三个信号来源，
- 无人机机群的结构，即各个编号无人机在圆上的大致位置与顺序，任意两个无人机不能交换顺序，
- 待定无人机相对于理想位置的偏差较小，即  $\|\omega_i\|^2 < r_0$ 。

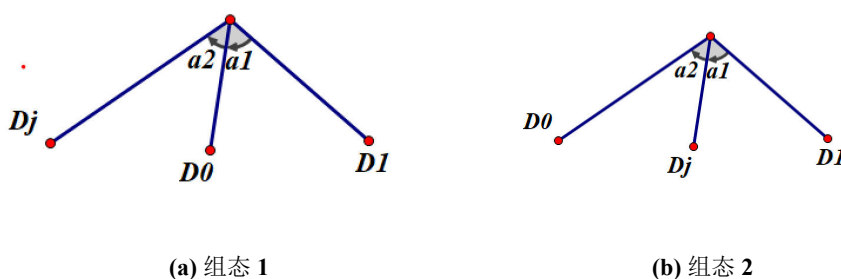


图 1 可能出现的两种组态

基于以上公共知识，需要设计算法  $D_i = f(\alpha_1, \alpha_2)$  求解  $D_i$  在  $D_0 - D_1$  坐标系中的位置。

## 2.3 问题三:

### 三、模型的假设与约定

- one
- two
- three

### 四、符号说明及名词定义

符号	意义
D	木条宽度 (cm)

### 五、模型的建立与求解

#### 5.1 问题一

##### 5.1.1 问题一模型的建立

##### 5.1.2 问题一的具体求解

#### 5.2 问题二

经过我们的研究,我们认为需要除了在圆心的 0 号,还需要在圆弧上的 1 号和另外一个  $j$  号共三架飞机发射信号才能确定任意一架飞机  $i$  的位置。我们的位置解算算法遵循机组组态分析、推断匿名第三者编号、可行域分割的步骤求出  $D_i$  的坐标。在使用逐步分割可行域的方式求解位置坐标时,我们针对多解的情况,着重讨论了对于“略有偏差”的数学定义。

##### 5.2.1 算法的求解过程分析

对于问题  $D_i = f(\alpha_1, \alpha_2)$ , 我们首先需要确定第三架飞机是标签为几的飞机。以待测飞机为 2 号机, 匿名第三信号发射机为 3 号机为例, 建立数学几何模型。

**机组组态分析** 待测飞机为 2 号机的情况下, 2 号机接收到的三个角度值遵循  $\angle D_j D_2 D_1 = \angle D_j D_2 D_0 + \angle D_j D_2 D_1$ , 符合 1 中所示组态 1 的类型。

**匿名第三者位置分析** 在组态 1 的情况下, 匿名第三者编号  $j = 3, 4, 5, 6$  中的一个。

表 1 本论文所使用的符号

$D_i$	编号为 $i$ 的无人机的理想位置
$\widehat{D}_i$	编号为 $i$ 的无人机的有偏实际位置
$D_i(\rho, \theta)$	用极坐标表示的无人机的位置
$\overrightarrow{D_i D_k}$	从 $D_i$ 指向 $D_k$ 的矢量
$\omega_i$	编号为 $i$ 的无人机的误差矢量, 即 $\overrightarrow{\widehat{D}_i D_i}$
$\odot O_i$	第 $i$ 个理想圆
$hc_k$	Holding cost of product k per unit and period;holding cost of product k per unit and period
$hc_k$	holding cost of product k per unit and period
oc	overtime costs per unit
$M_{kt}$	bignumber for product k in period t
$pc_k$	production cost of product k per unit
$pc_k^r$	remanufacturing cost of product k per unit
$sc_k$	setup cost of product k
$sc_k^r$	setup cost of returned product k
$tp_k$	production time for one unit of product k
$tp_k^r$	remanufacturing time for one unit of product k
$ts_k$	setup time of product k
$ts_k^r$	setup time of returned product k
$BL_{kt}$	backlog of product k at the end of period t
$D_{kt}$	external demand of product k in period t
$I_{kt}$	net inventory of product k at the end of period t
$I_{kt}^r$	net inventory of returns of product k at the end of period t
$IP_{kt}$	physical inventory of product k at the end of period t
$IP_{kt}^r$	physical inventory of recoverables at the end of period t
$R_{kt}$	returns of product k in period t
$SF_{kt}^r$	Shortfall of recoverables of product k in t

**可行域分割** 对于所有可能的  $D_j$ , 现已确定  $\angle D_j D_2 D_0 = \alpha_1, |D_j D_0| = r$ , 对于此类定弦定角问题, 有优弧  $D_j \widehat{D}_2 D_0$  上的点为所有可能的  $D_2$  的位置。对于确定的  $\angle D_0 D_2 D_1 = \alpha_2, |D_1 D_0| = r$  优弧  $D_0 \widehat{D}_2 D_1$  上的所有点为所有可能的  $D_2$  的位置。

如图2所示, 对于有微小偏差的无人机  $D'_2$ , 当假设匿名第三者为无人机 3 时, 有可能位置  $P$ 。同理, 分别建立匿名第三者  $j = 4, 5, 6$  时,  $D'_2$  的可能位置, 分别标记为  $Q, R, S$ ,

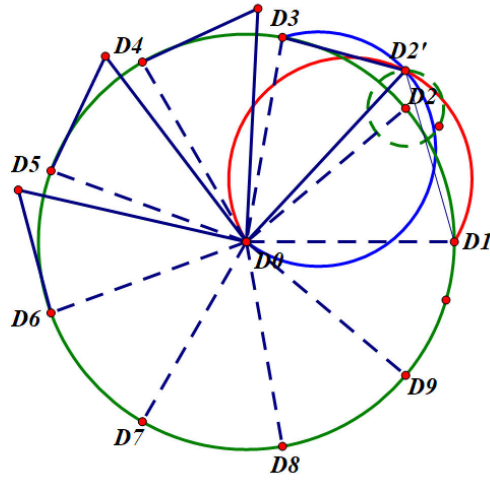


图 2  $\angle D_3D_2D_0$  的可行域  $D_3\widehat{D_2}D_0$  与  $\angle D_0D_2D_1$  的可行域  $D_0\widehat{D_2}D_1$

如图3.

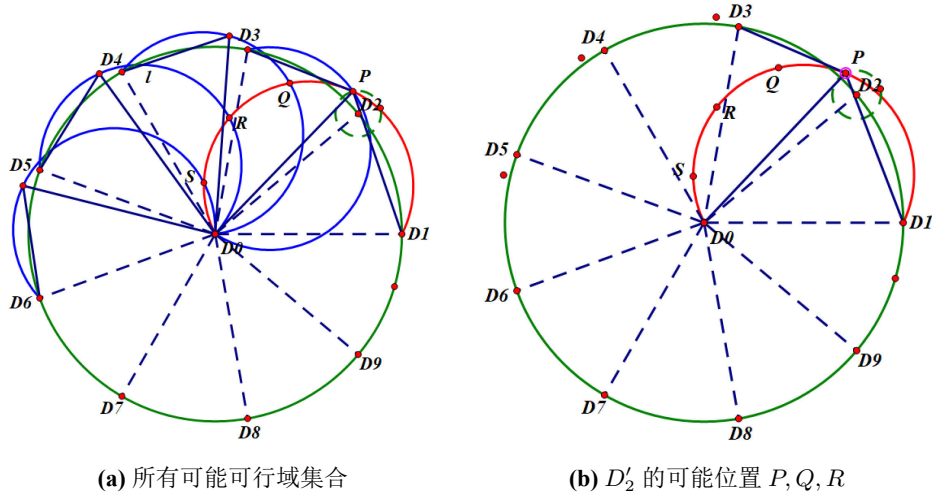


图 3  $D_2'$  的可能位置的求解

至此，对于不确定匿名第三者的情形，飞机  $D_i(D_2)$  由于不能确定第三者编号产生了自己的位置猜测  $P, Q, R, S$ ，在图3的情形下，易确定  $R, S$  的情形不符合题设从而排除，然而我们观察到当 2 号机偏差很大时（即  $\|\omega_i\| = \overrightarrow{D_2D_2'}$  很大时）有可能出现情形如图4. 此时若认为第三者为 4 号机，则会有位置错误估计  $Q$ ，然而在此种情形下，我们认为其实际位置应为图中  $P$  点的位置。因为此种情况的出现，我们要对“偏差较小”进行数学定义。

**多解分析** 因为在三架飞机定位的模式下，匿名第三者未知。这种情况下待定位飞机对于自己的位置估计就可能出现多解的情况。然而我们发现，在待定位飞机距离无偏差位置很远的时候，不能通过解的合理性排除多解情况。所以我们进一步探索了多解的可排除情况的边界条件。

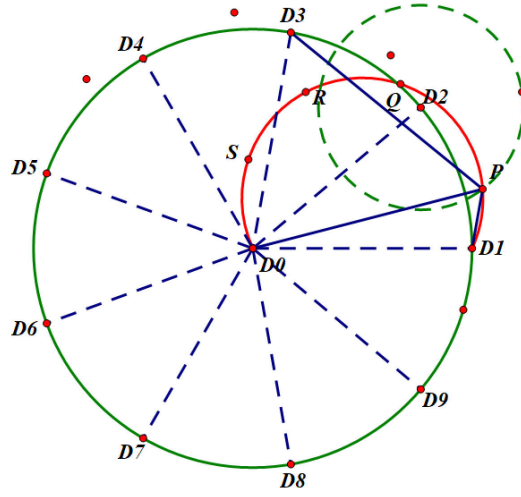


图 4 偏差很大时的一种特殊情况

当  $D'_2$  运动在区域:  $\|\omega_2\| \leq r_0$  内时, 运动点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  的集合分别记为  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{S}$  建立动态几何解析模型, 使  $D'_2$  在其运动区域边界上运动时, 跟踪  $P, Q, R, S$  的轨迹, 其内部即为  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{S}$ .



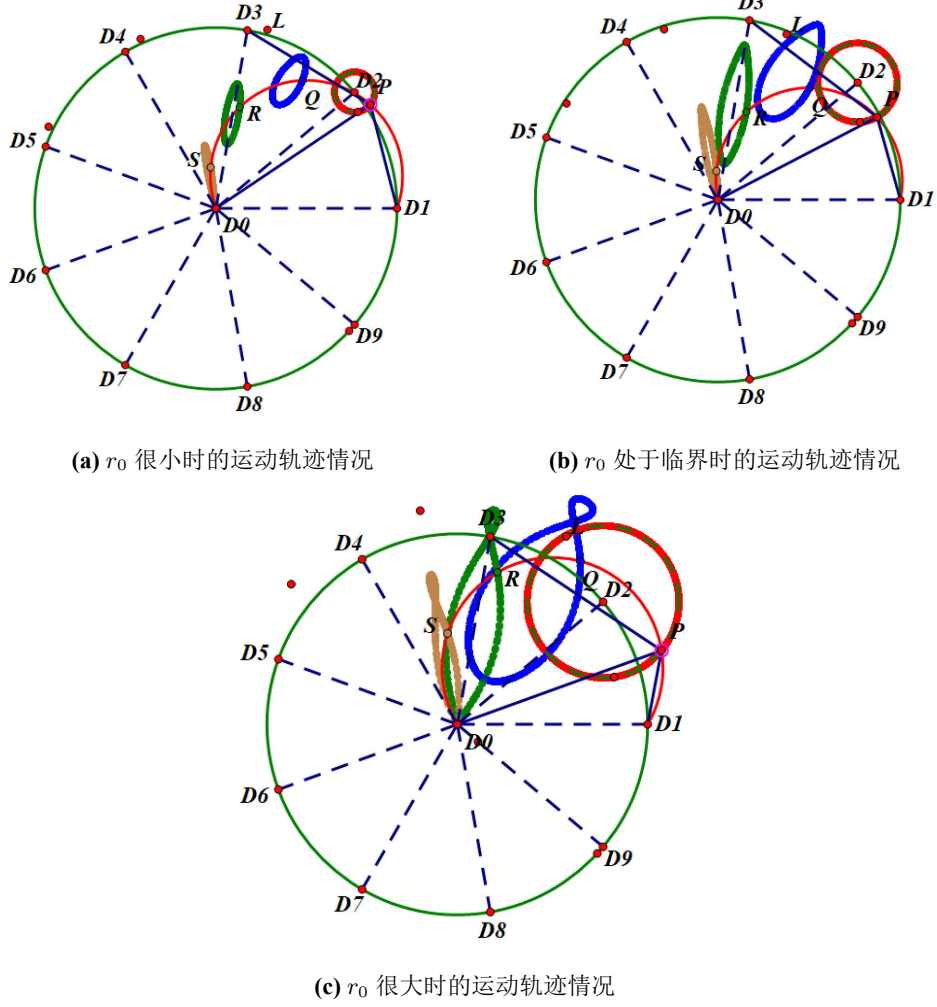


图 5 不同  $r_0$  的取值下  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{S}$  的边界分布

从图5可以看出,  $r_0$  很大时,  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$  的边界有重叠, 即  $\exists p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q} \text{ s.t. } \left| \overrightarrow{pD_2} \right| > \left| \overrightarrow{qD_2} \right|$  此时根据如果根据预测点到理想点最近的原则确定匿名无人机编号, 将会误认为是  $D_4$  发射的信号, 进而将自己的位置误认为  $q$  的位置。如图3所示, 此时无人机的实际位置为  $P$  但是根据上述算法会将其误认为  $Q$ 。

使用动态几何求解器, 我们求得在上述情形下  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$  边界相切时,  $r_{2max} \approx 0.228 \left| \overrightarrow{D_0D_1} \right|$ 。进一步, 我们探索了匿名无人机变化与边界情况  $r_0$  的最大取值之间的关系。我们得出结论:  $r_0$  的最大取值与匿名无人机的变化无关, 只与待测无人机的编号有关。

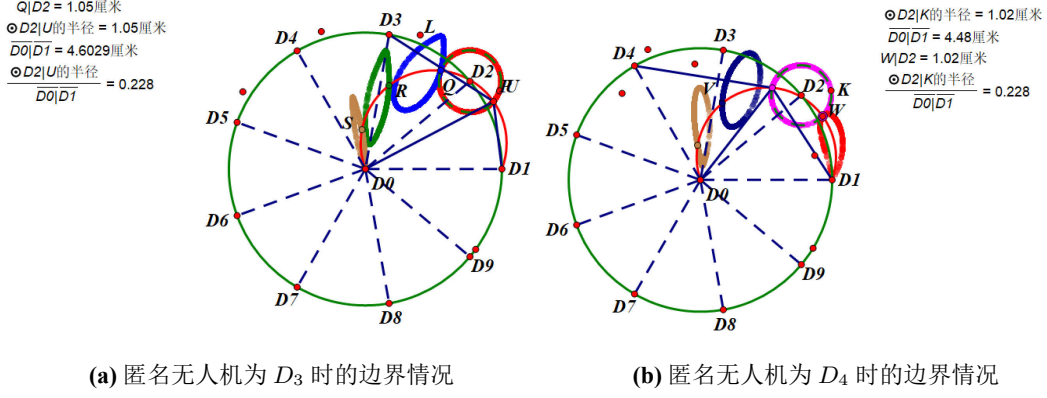


图 6 不同匿名无人机情况对于  $D_2$  唯一解边界情况的影响

进一步，我们探索了不同待测无人机的最大误差范围。根据我们的模拟，我们有如下临界情况：

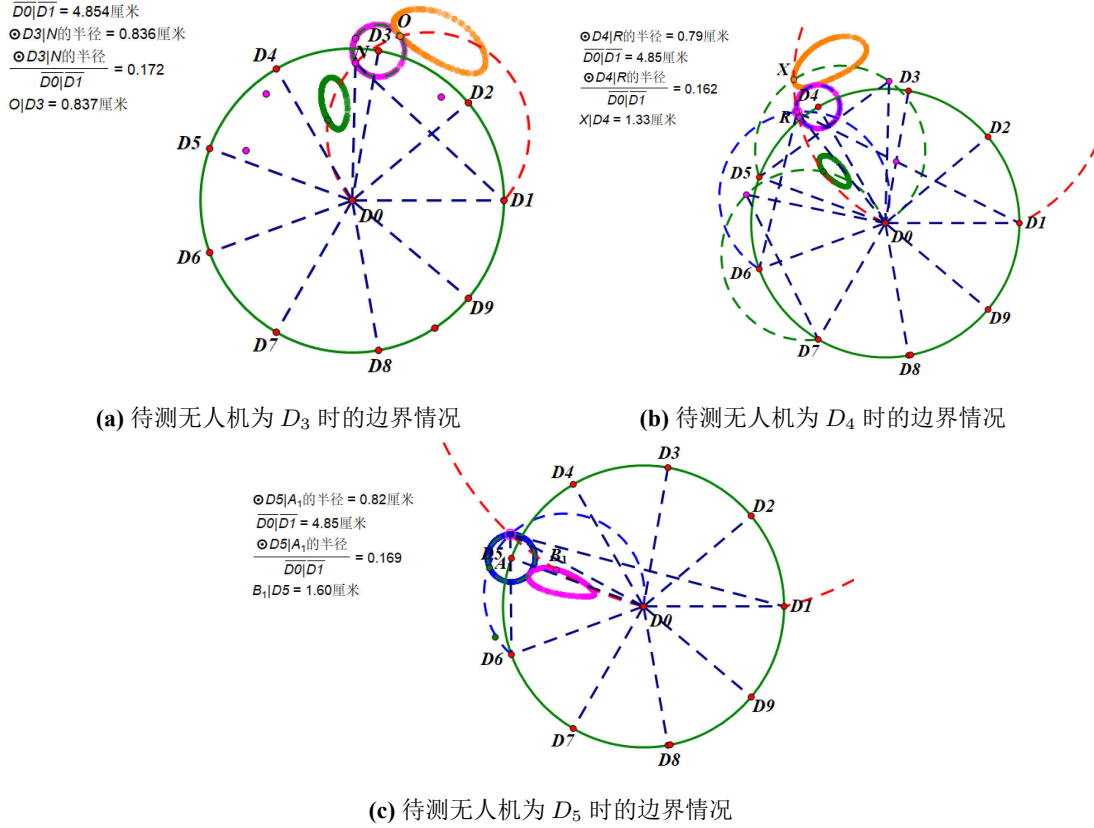


图 7 不同待测无人机唯一解边界情况

令  $r_i$  为第  $i$  个无人机作为待测无人机时，有单一解时  $\overrightarrow{\widehat{D_i D_i}}$  的模长。我们分别得出， $r_{3max} \approx 0.172 \left| \overrightarrow{D_0 D_1} \right|$ ,  $r_{4max} \approx 0.162 \left| \overrightarrow{D_0 D_1} \right|$ ,  $r_{5max} \approx 0.169 \left| \overrightarrow{D_0 D_1} \right|$ 。根据对称性，我们同理可得  $D_6, D_7, D_8, D_9$  分别为待测无人机的情况。

综上，我们进而给出对于任意的无人机，其“偏差较小”的数学定义为  $\left| \overrightarrow{\widehat{D_i D_i}} \right| <$

$0.162|\overrightarrow{\widehat{D_0D_1}}|$ 。若知道具体编号，则可以适用不同的边界情况数据。

**5.2.2 title**

**5.2.3 title**

**5.3 问题三**

**5.3.1 title**

**5.3.2 title**

**5.3.3 title**

## 六、 总结

## 参考文献

[1] ....

附录的内容。