Lab 6: styczna i pochodna

Wprowadzenie

Sieczna to prosta przecinająca krzywą w dwóch punktach, styczna ma jesden punkt wspólny z krzywą.

1. Narysuj wykres funkcji $g(x) = x^2 - 2x - 5$ oraz wyznacz i narysuj sieczną przechodzącą przez punkty $(2, g(2))$ i
$(8, g(8))$, znajdź jej współczynnik nachylenia.

2. Narysuj wykres funkcji $g(x)$ oraz wykresy siecznych przechodzących przez następujące punkty
(a) $(4, g(4))$ i $(8, g(8))$,
(b) $(7, g(7))$ i $(8, g(8))$,
wyznacz ich współczynniki nachylenia.

3. Na podstawie powyższych obserwacji wywnioskuj co się dziejez sieczną przechodzącą przez punkty $(x, g(x))$ i
$(8, g(8))$, gdy x dąży do 8. Do jakiej prostej dąży ciąg siecznych, gdy $x \to 8$?

4. Jaki będzie wzór ogólny na współczynnik nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x, g(x))$ i $(8, g(8))$?
Jaki jest współczynnik nachylenia prostej, gdy x dąży do 8? Nazywamy go *współczynnikiem nachylenia prostej*
stycznej. Będzie on wyrażony przez pochodną funkcji $g(x)$ w $x = 8$.

Pochodna funkcji w punkcie

Jak widzieliśmy powyżej pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest też współczynnikiem nachylenia prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Współczynnik nachylenia prostej stycznej może być wyznaczony z wzoru

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tzn. gdy odległość między x a x_0 (oznaczana np. przez h) dąży do 0 (demonstracja), więc inny sposób zapisu wzoru jest następujący

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5. Dla funkcji $g(x)$ znajdź współczynnik nachylenia prostej stycznej w punkcie $(6, g(6))$ korzystając z jednego z
powyższych wzorów. Wyznacz równanie prostej stycznej w tym punkcie, narysuj tę prostą wraz z wykresem
funkcji $g(x)$.

6. Odczytaj z wykresu jaki może być współczynnik nachylenia stycznej dla *x=1*, a następnie sprawdź to i
narysuj oba wykresy w tym samym układzie współrzędnych.

7. Co możesz powiedzieć o pochodnej w punkcie, w którym styczna jest linią poziomą? Jaka jest pochodna w
punktach, w których funkcja jest rosnąca?

8. Znajdź *g'(0)* i na podstwie jej wartości wywynioskuj czy funkcja jest rosnąca czy malejąca.

9. Wykonaj animację rysowania się stycznej do wykresu funkcji *g(x)* na zadanym przedziale na wykresie. Chcemy żeby podczas animacji rysowany układ współrzędnych pozostawał bez zmian (podpowiedź: użyt **PlotRange**).

Linearyzacja

Zauważmy, że styczna do funkcji *f(x)* w $x_0$daje bardzo dobre przybliżenie wartości funkcji dla *x* bardzo bliskich x_0. Nazywamy to *linearyzacją*, ponieważ przybliżamy funkcję linią prostą w małym otoczeniu x_0.

W poniższych ćwiczeniach naszym celem będzie przybliżenie wartości $\sqrt{5}$.

10. Zdefinuj i narysuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - 5$ (tak, aby na wykresie było widać oba pierwiastki).

11. Skorzystamy z tego, że jeden z pierwiastków $(\sqrt{5})$ znajduje się blisko liczby *2.* Znajdź równanie stycznej do
f(x) dla *x=2*.

12. Ponieważ styczna jest dobrym przybliżeniem *f(x)* w otoczeniu *x=2*, wykorzystaj pierwiastek funkcji
opisującej prostą styczną. Porównaj wynik z wartością $\sqrt{5}$, wpisz

N[Sqrt[5]]

13. Wyjaśnij dlaczego styczna wyznaczona w ćwiczeniu 10 nie da dobrego przybliżenia wartości $\sqrt{30}$.

14. Powtórz kroki z ćwiczeń 10 i 11 podstawiając *x=2,2* zamiast *x=2.* Wyjaśnij dlaczego dostajemy lepsze
przybliżenie $\sqrt{5}$ dla *x=2,2*.