

Lab 5: Szybkość zmian

Wprowadzenie

Prędkość średnia jest szybkością zmian wartości wyjściowych (wartości funkcji) na pewnym przedziale wartości wejściowych (wartości x), prędkość (chwilowa) jest szybkością zmian wartości wyjściowych dla pojedynczej wartości wejściowej.

Będziemy chcieli przybliżyć prędkości zmian.

Jedną z najpowszechniejszych wielkości tego rodzaju jest prędkość pojazdu wyrażona np. w kilometrach na godzinę. Możemy o niej myśleć jako o zmianie położenia pojazdu (w km) względem czasu (w h), a jednostka tej zmiany to km/h (prędkość (chwilowa) pojazdu zazwyczaj jest różna w różnych momentach).

Naszym celem jest obliczenie szybkości zmian przy użyciu funkcji.

Łączną sprzedaż pewnego produktu zadaje funkcja

$$s(x) = 0,17 \cdot (4,2)^x \text{ milionów jednostek (funkcja wykładnicza } const \cdot a^x)$$

gdzie $x=0$ jest początkiem roku, w którym produkt został wprowadzony na rynek. Zastanowimy się jak szybko (względem czasu) zmienia się jego sprzedaż.

Przypomnijmy, że prostą przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) możemy opisać równaniem $y -$

$$y_0 = m(x - x_0) \text{ lub}$$

$$y = mx + b, \text{ gdzie } m \text{ jest współczynnikiem nachylenia.}$$

1. Znajdź współczynnik nachylenia prostej dla $x=0$ i $x=2$ przecinającej funkcję $s(x)$. W jakich jednostkach wyrażony jest ten współczynnik nachylenia?

2. Jak zinterpretujesz współczynnik nachylenia w terminach szybkości zmian?

3. Wyznacz równanie prostej przecinającej funkcję $s(x)$ dla $x=0$ i $x=2$.

4. Narysuj funkcję $s(x)$ i prostą z ćwiczenia 3 w tym samym układzie współrzędnych.

Chcelibyśmy wiedzieć jak szybko zmienia się sprzedaż produktu dokładnie na koniec drugiego roku (lub początek trzeciego, czyli dla $x=2$) po wprowadzeniu na rynek.

5. Znajdź współczynnik nachylenia w następujących punktach:

(a) $x = 1$ i $x = 2$

(e) $x = 2$ i $x = 3$

(b) $x = 1,5$ i $x = 2$

(f) $x = 2$ i $x = 2,5$

(c) $x = 1,9$ i $x = 2$

(g) $x = 2$ i $x = 2,1$

$$(d) x = 1,99 \text{ i } x = 2 \qquad (h) x = 2 \text{ i } x = 2,01$$

6. Na podstawie powyższych wyników oszacuj chwilową prędkość sprzedaży dla $x = 2$.

7. Zanimuj (np. poleceniem **Animate** lub **Manipulate** sieczną do wykresu funkcji s , która to sieczna przechodzi przez $(u, s[u])$ oraz $(2, s[2])$, gdzie parametr u przebiega przedział $[-1, 3]$.