Lab 2: Tw. o trzech funkcjach

Wprowadzenie

Czasami może być trudno wyznaczyć granicę funkcji, gdy x dąży do pewnej wartości c. Możemy jednak ją “wcisnąć” między dwie inne funkcje, których zachowanie w otoczeniu interesującej nas wartości znamy, aby określić granicę wyjściowej funkcji.

Twierdzenie o trzech funkcjachmówi, że jeśli f(x)≤g(x)≤h(x) w sąsiedztwie x i $\lim_{x\to a} f(x)= \lim_{x\to a} h(x)=L$, to $\lim_{x\to a} g(x)=L$.

Uwaga: analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągów.

Ostatnio badaliśmy własności funkcji podobnej do $f(x)= x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, gdy x dąży do ∞. Jak ta funkcja będzie się zachowywała, dla wartości bliskich $x=0$? (demonstracja)

1. Dla n=1 sprawdź jakie funkcje ograniczają $f(x)$ z góry i z dołu i wyznacz dla nich granice, gdy $x \to 0$.

2. Na podstawie ćwiczenia 1 i wykresu z demonstracji zapisz założenia i tezę twierdzenia o trzech funkcjach
   dla $f(x)$.

3. Skorzystaj z demonstracji i wyznacz granice $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$i $\lim_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, (sprawdzając założenia
   twierdzenia).

4. Korzystając z wyniku ćwiczenia 2 wyznacz granicę $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Wykorzystując polecenie **Animate** narysuj animujący się wykres trzech funkcji $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{-1}{x}$, $y = \frac{\sin x}{x}$ (chcemy animować położenie się wykresu w układzie współrzędnych, parametr ***u*** w przedziale **[0, 20]** odpowiada za wyświetlanie się układu współrzędnych: wyświetlajmy ramkę **[u, u+5] × [-1,1]**).

Zastosujemy teraz twierdzenie o trzech funkcjach do obliczenia kolejnej granicy.

5. Narysuj wykres funkcji $g(x)= \frac{\cos^2(2x)}{2x-3}$ dla dużych wartości x.

6. Znajdź funkcje ograniczające z góry i z dołu $g(x)$, wyznacz ich granice dla $x\to\infty$ i korzystając z twierdzenia o
   trzech funkcjach oblicz $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(2x)}{2x-3}$.