TP 1 :

* les démonstration 1, 2, 3 sont pour le cas <u>discret</u>. Vu que $\int$ et Σ sont des fonctions linéaires les démonstration sont les mêmes.

(1)

on a $H[x,y] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(x_i, y_j) \log(P(x_i, y_j))$

donc $H(x,y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \log(P(y_j|x_i) \cdot p(x_i))$

$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \log(p(x_i)) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \log(P(y_j|x_i))$

$= -\sum_{i=1}^{n} \log(p(x_i)) \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) + H(y|x)$

$= -\sum_{i=1}^{n} \log(p(x_i))\, p(x_i) + H(y|x)$

$H(x,y) = H(x) + H(y|x)$

(2)

$$I(x,y) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)\, P(y_j)}$$

$$= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log\left(\frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)}\right)$$

$$= \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log P(x_i|y_j) - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log P(x_i)$$

$$= -H(x|y) - \sum_i \log P(x_i) \sum_j p(x_i, y_j)$$

$$= -H(x|y) - \sum_i \log P(x_i)\, p(x_i)$$

$$= -H(x|y) + H(x)$$

(3)

On a $Cov(x,y) = E\left((x-E(x))(y-E(y))\right)$

$= E\left(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right)$

l'espérance est une fonction linéaire

$= E_{XY}(XY) - E(XE(Y)) - E(YE(X)) + E(E(X)E(Y))$

$= E_{XY}(XY) - E(Y).E(X) - \cancel{E(X)E(Y)} + \underbrace{\cancel{E(X)E(Y)}}_{\text{constante}}$

$E(cste) = cste$

$$Cov(x,y) = E_{XY}(XY) - E(Y)E(X)$$

(4) la variable aléatoire X est binaire, elle peut prendre que deux valeurs 0 et 1.

a) $P(X=0) = \dfrac{\text{nb d'occurences}}{\text{nb total}} = \dfrac{7}{10}$

$P(X=1) = \dfrac{\text{nb d'occurences}}{\text{nb total}} = \dfrac{3}{10}$

b) $\mathbb{E}(X) = 0 . P(X=0) + 1 . P(X=1)$

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{10}$

c) $V(X) = \dfrac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - E(X))^2$

$= \dfrac{1}{10}\left(7 . E(X)^2 + 3 . (1 - E(X))^2\right)$

$= \dfrac{1}{10}\left(7 \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 + 3 . \left(\dfrac{7}{10}\right)^2\right)$

$= \dfrac{7 . 3}{10^2}\left(\dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10}\right)$

$= \dfrac{7 . 3}{10^2}$

$= \dfrac{21}{100}$

Autre méthode : on remarque que $X^2 = X$

et on sait que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= \mathbb{E}(X)(1 - \mathbb{E}(X))$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{21}{100}$$

d) $H(X) = -\sum_{i=1}^{10} p(x_i) \log(p(x_i))$

$$= -\frac{3}{10} \log\left(\frac{3}{10}\right) - \frac{7}{10} \log\left(\frac{7}{10}\right)$$

$H(X) = 0,88$