時間序列分析
–總體經濟與財務金融之應用–

定態時間序列 II: ARMA 模型

陳旭昇

2013.12

移動平均模型

定義 (q 階移動平均模型)

若隨機過程 $\{y_T\}$ 為現在與過去 q 期隨機衝擊 $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q})$ 之加權平均:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

$$\varepsilon_t \sim^{i.i.d.} (0, \sigma^2),$$

則稱為 q 階移動平均模型 (q-order moving average model), 簡稱 MA(q) 模型。

移動平均模型

- 無窮階移動平均模型 MA(∞) 為

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

- MA(∞) 定態之條件為

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty,$$

亦即 $\{\psi_j\}$ 為「絕對可加」(absolutely summable)。因此, 有限階次移動平均模型 MA(q) 必為定態。

移動平均模型

性質 (MA(q) 的可逆性)

給定

$$y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

如果 $\theta(z) = 0$ 之根落於單位圓之外, 則 MA(q) 序列可以寫成:

$$\frac{1}{\theta(L)} y_t = \varepsilon_t,$$

且稱該 MA(q) 序列具「可逆性」(invertible)。

移動平均模型

性質 (Absolutely Summable Inverses of Lag Polynomials)

給定一個 p 階落後運算多項式:

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p.$$

如果 $\beta(z) = 0$ 的根均落在單位圓之外, 則

$$\beta(L)^{-1} = \varphi(L) = \varphi_0 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \cdots$$

其中

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j| < \infty,$$

亦即 $\beta(L)$ 的逆落後運算多項式之係數為「絕對可加」。

ARMA 模型

- 將 AR 與 MA 模型結合在一起, 考慮一個 ARMA(p,q) 模型:

$$y_t = \beta_1 \, y_{t-1} + \cdots + \beta_p \, y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \, \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \, \varepsilon_{t-q}$$

- 令

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots \beta_p L^p$$
$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots \theta_q L^q$$

- ARMA(p, q) 可寫成

$$\beta(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

ARMA 模型

性質 (ARMA (p,q) 模型的定態條件)

給定

$$\beta(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

如果 $\beta(z) = 0$ 的根均落在單位圓之外, 則 y_t 為定態。

ARMA 模型

若 y_t 為定態, 則 ARMA(p,q) 可寫成 MA(∞):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \underbrace{\beta(L)^{-1}\theta(L)}_{\psi(L)}\varepsilon_t \\
&= \left[\frac{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_q L^q}{1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\cdots-\beta_p L^p}\right]\varepsilon_t \\
&= \psi(L)\varepsilon_t \\
&= \varepsilon_t+\psi_1\varepsilon_{t-1}+\psi_2\varepsilon_{t-2}+\cdots \\
&= \mathrm{MA}(\infty).
\end{aligned}
$$

其中 $\psi_0 = 1$,

$$
\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty.
$$

ARMA 模型

性質 (ARMA(p,q) 模型的可逆條件)

給定

$$\beta(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

如果 $\theta(z) = 0$ 的根均落在單位圓之外, 則 y_t 為可逆。

- 若 $\theta(z) = 0$ 的根均落在單位圓之外, 則

$$\underbrace{\theta(L)^{-1}\beta(L)}_{b(L)} y_t = \varepsilon_t$$

ARMA 模型

- 亦即

$$b(L)y_t = \varepsilon_t,$$

其中

$$b(L) = 1 - b_1 L - b_2 L^2 - \cdots$$

- 因此, ARMA (p,q) 模型可寫成 AR(∞):

$$y_t = \varepsilon_t + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \cdots = \text{AR}(\infty).$$

ARMA 模型之估計

- 欲估計 ARMA 模型有一個大問題是: 我們有資料 $\{y_T, y_{T-1}, \ldots, y_1\}$, 卻無法觀察到 $\{\varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \ldots, \varepsilon_1\}$。
- 一種做法是給定起始值下以遞迴 (recursively) 的方式找出 $\{\varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \ldots, \varepsilon_1\}$, 然後以非線性最小平方法 (nonlinear least square method) 將 β_j 與 θ_j 估計出來。

ARMA 模型之估計

給定 ARMA(p,q) 模型,

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

假設我們擁有資料 $\{y_t\}_{t=1}^{T}$, 以及起始值:

$$\underline{y_0} = (y_0, y_{-1}, \ldots, y_{-p+1})$$
$$\underline{\varepsilon_0} = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \ldots, \varepsilon_{-q+1})$$

且

$$\varepsilon_t \sim^{i.i.d.} N(0, \sigma^2).$$

ARMA 模型之估計

令 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p), \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$, 則聯合機率分配為

$$
\begin{aligned}
& f(y_T, y_{T-1}, \ldots, y_1 | \beta, \theta, \sigma^2, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}) \\
&= f(y_T | y_{T-1}, \ldots, y_1, \beta, \theta, \sigma^2, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}) \cdot f(y_{T-1}, \ldots y_1 | \beta, \theta, \sigma^2, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}) \\
& \quad \vdots \\
&= \prod_{t=1}^{T} f(y_t | y_{t-1}, \ldots, y_1, \beta, \theta, \sigma^2, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0})
\end{aligned}
$$

ARMA 模型之估計

由於給定 $(y_{t-1}, \ldots, y_1, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}, \beta, \theta, \sigma^2)$, y_t 的條件分配為

$$
\begin{aligned}
& y_t \big| (y_{t-1}, \ldots, y_1, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}, \beta, \theta, \sigma^2) \\
& \quad \sim N(\beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

我們可以得到

$$
\begin{aligned}
& f(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_1, \beta, \theta, \sigma^2, \underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y_t - \beta_1 y_{t-1} - \cdots - \beta_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2}{2\sigma^2} \right\}
\end{aligned}
$$

ARMA 模型之估計

因此對數概似函數為

$$\log L = \frac{-T}{2}\log\sigma^2 - \frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\beta_1\, y_{t-1}-\cdots-\beta_p y_{t-p}-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q})^2}{\sigma^2}$$

由於我們無法觀察到 $\{\varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \ldots, \varepsilon_1\}$, 我們將以遞迴 (recursively) 的方式將它們找出來。首先注意到,

$$\varepsilon_t = y_t - \beta_1 y_{t-1} - \cdots - \beta_p y_{t-p} - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}.$$

ARMA 模型之估計

因此,

1. 給定 $\underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}, y_1, \beta, \theta$ 我們可以得到 $\varepsilon_1(\beta, \theta)$
2. 給定 $\underline{y_0}, \underline{\varepsilon_0}, y_1, y_2, \varepsilon_1(\beta, \theta), \beta, \theta$ 我們可以得到 $\varepsilon_2(\beta, \theta)$
3. 依此類推, 我們可以得到 $\varepsilon_t(\beta, \theta)$, $t = 1, 2, \ldots T$, 注意到 $\varepsilon_t(\beta, \theta)$ 為 β 與 θ 的非線性函數。

ARMA 模型之估計

我們可以得到估計式為

$$(\hat{\beta}_{ml}, \hat{\theta}_{ml}) = \text{arg min} \sum_{t=1}^{T} \Big(y_t - \beta_1 y_{t-1} - \cdots - \beta_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1}(\beta, \theta) - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}(\beta, \theta) \Big)^2$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2_{ml} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Big(y_t - \hat{\beta}_1 \; y_{t-1} - \cdots - \hat{\beta}_p \; y_{t-p} - \hat{\theta}_1 \; \varepsilon_{t-1}(\hat{\beta}, \hat{\theta}) - \ldots - \hat{\theta}_q \; \varepsilon_{t-q}(\hat{\beta}, \hat{\theta}) \Big)^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t(\hat{\beta}, \hat{\theta})^2 \end{aligned}$$

ARMA 模型之預測以及衝擊反應函數

我們可以將一個 ARMA(p,q) 模型:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

改寫成一階形式:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \dots & \dots & \beta_p & \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \theta_q \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \\ \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_t$$

ARMA 模型之預測以及衝擊反應函數

亦即

$$\begin{aligned}\underbrace{Y_t}_{(p+q)\times 1} &= \underbrace{\Phi}_{(p+q)\times(p+q)} Y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \epsilon_{t-j}\end{aligned}$$

- 預測式

$$E_t(y_{t+j}) = [1\ 0 \cdots 0]\Phi^j Y_t.$$

ARMA 模型之預測以及衝擊反應函數

- 衝擊反應函數

$$\Psi(j) = \frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_t} = [1\ 0 \cdots 0]\Phi^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

實務上則以 $\hat{\Phi}$ 替代之。

Wold Representation 定理

定理 (Wold Representation 定理)

任何均值為零的定態時間序列 $\{y_t\}$ 都能寫成

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j} = \varphi(L)\varepsilon_t.$$

Wold Representation 定理

其中

1. $\varepsilon_t \equiv y_t - \mathrm{P}(y_t | H_{t-1})$ 稱為干擾項 (innovation), 乃是將序列 y_t 投射到 $H_t = S_p[y_t, y_{t-1}, y_{t-2} \dots]$ 的投射殘差 (projection residual)
2. $\varphi(L) = 1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \cdots$
3. $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty, \varphi_0 = 1$ (y_t 為定態)
4. $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
5. $\varphi(z) = 0$ 的根均落於單位圓外 (y_t 可逆)
6. $\{\varphi_j\}$ 與 $\{\varepsilon_t\}$ 具唯一性 (unique)

Wold Representation 定理

- 值得注意的是, Wold Representation 定理是 $\{y_t\}$ 的「一種」表示法, 卻不是「唯一」的表示法。而 $\{\varphi_j\}$ 與 $\{\varepsilon_t\}$ 的唯一性是指 Wold Representation 只有一個,「僅此一家, 別無分號」。也就是說, 如果兩個時間序列具有相同的 Wold Representation, 則它們為相同的時間序列。

Wold Representation 定理

- Wold Representation 定理說明了任何定態時間序列都能以一個線性模型表示之。然而, 問題是 Wold Representation 定理告訴我們此線性模型為無窮多個干擾項所組成, 因而 $\varphi(L)$ 中就有無窮多個有待估計的參數, 這在實務上並不可行。
- 一個實務上的解決方式是以 $\frac{\theta(L)}{\beta(L)}$ 來近似 (approximate) $\varphi(L)$,

$$
\begin{aligned}
\varphi(L) &\approx \frac{\theta(L)}{\beta(L)}, \\
\beta(L) &= 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p, \\
\theta(L) &= 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q.
\end{aligned}
$$

亦即, 以一個 ARMA(p,q) 來近似 Wold Representation。

實例應用: ARMA(p,q) 模型之估計

圖 : ARMA(2,1) 估計結果

Dependent Variable: LS
Method: Least Squares
Date: 09/05/07 Time: 16:43
Sample (adjusted): 1972:3 2007:4
Included observations: 142 after adjustments
Convergence achieved after 8 iterations
Backcast: 1972:2

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.464545	0.085820	40.36971	0.0000
AR(1)	1.516098	0.151257	10.02330	0.0000
AR(2)	-0.533734	0.149067	-3.580496	0.0005
MA(1)	-0.084751	0.178677	-0.474325	0.6360

R-squared	0.983602	Mean dependent var	3.497304
Adjusted R-squared	0.983245	S.D. dependent var	0.147681
S.E. of regression	0.019116	Akaike info criterion	-5.048818
Sum squared resid	0.050428	Schwarz criterion	-4.965556
Log likelihood	362.4661	Hannan-Quinn criter.	1.998440
F-statistic	6.2E-123		

Inverted AR Roots	.96	.56
Inverted MA Roots	.08	

實例應用: ARMA(p,q) 模型之估計

圖 : AR 與 MA 之根的倒數