Algoritmer og datastrukturer

Hjelpeslides

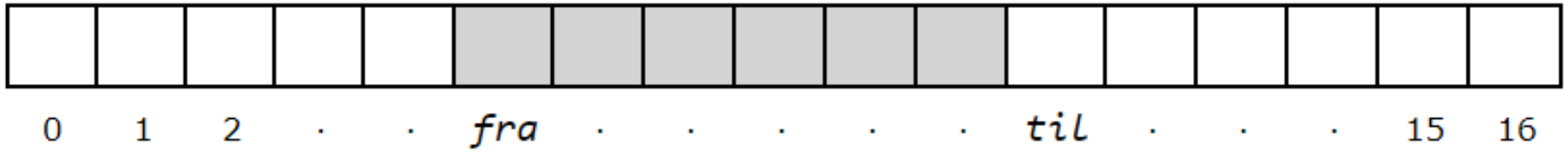
Husk at disse ikke nødvendigvis dekker 100% av pensum!

Grunnleggende tema

- Kapittel 1: Grunnleggende begreper og teknikker
  - 1.1 Algoritmer og effektvivitet: 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
  - 1.2 Nest største tall: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13
  - 1.3 Ordnede tabeller: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11
  - 1.4 Generiske algoritmer: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - 1.5 Rekursjon: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - 1.6 Multidimensjonelle tabeller: 1, 2, 3
  - 1.8: Algoritmeanalyse: 1, 2, 3, 4

Intervaller

```
a[fra:til>   // halvåpent tabellintervall
```




```
metode1(int[] a, int fra, int til, . .)  // a[fra:til>
```

```
a[v:h]   // lukket tabellintervall
```


```
metode2(int[] a, int v, int h, . .)     // a[v:h]
```

Algoritmeanalyse

```java
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Konstant tid – utføres uavhengig av datastørrelse
- Tre operasjoner (to assignment, en indeksering)

Algoritmeanalyse

```
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Lineær tid – utføres n ganger for n elementer
- 2*n-1 operasjoner
  (en assignment, n-1 sammenlikninger og n-1 inkrementer)

Algoritmeanalyse

```
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Lineær tid – utføres n ganger for n elementer
- 2*n operasjoner
  (n indekseringer og n sammenlikninger)

Algoritmeanalyse

```java
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Hvor mange ganger utføres denne? Logaritmisk tid!
- I beste tilfellet (største verdi først), kun én gang
- I verste tilfellet (sortert synkende), hver eneste gang
- I gjennomsnitt (tilfeldig permutasjon), Hn ≈ log(n) + 0.577 ganger
- Totalt 3*(log(n) + 0.577)

Algoritmeanalyse

```
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Konstant tid – utføres en gang
- En operasjon

Algoritmeanalyse

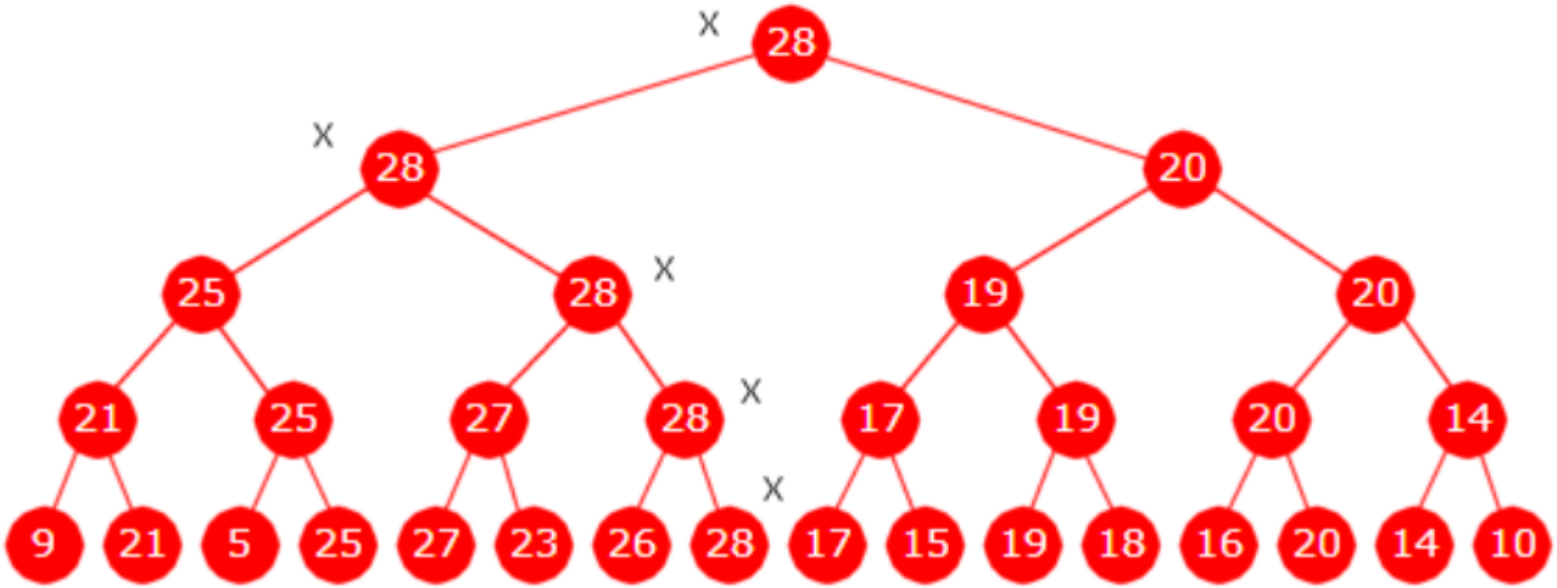
```
public static int maks(int[] a)   // versjon 2 av maks-metoden
{
  int m = 0;                      // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];           // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];             // største verdi oppdateres
    m = i;                        // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

- Total algoritme:
- 3 + 2*n-1 + 2*n + 3*(log(n) + 0.577) + 1 = 4*n + 3*log(n) + 3.557
- I “stor O” notasjon kaller vi det en O(n) algoritme

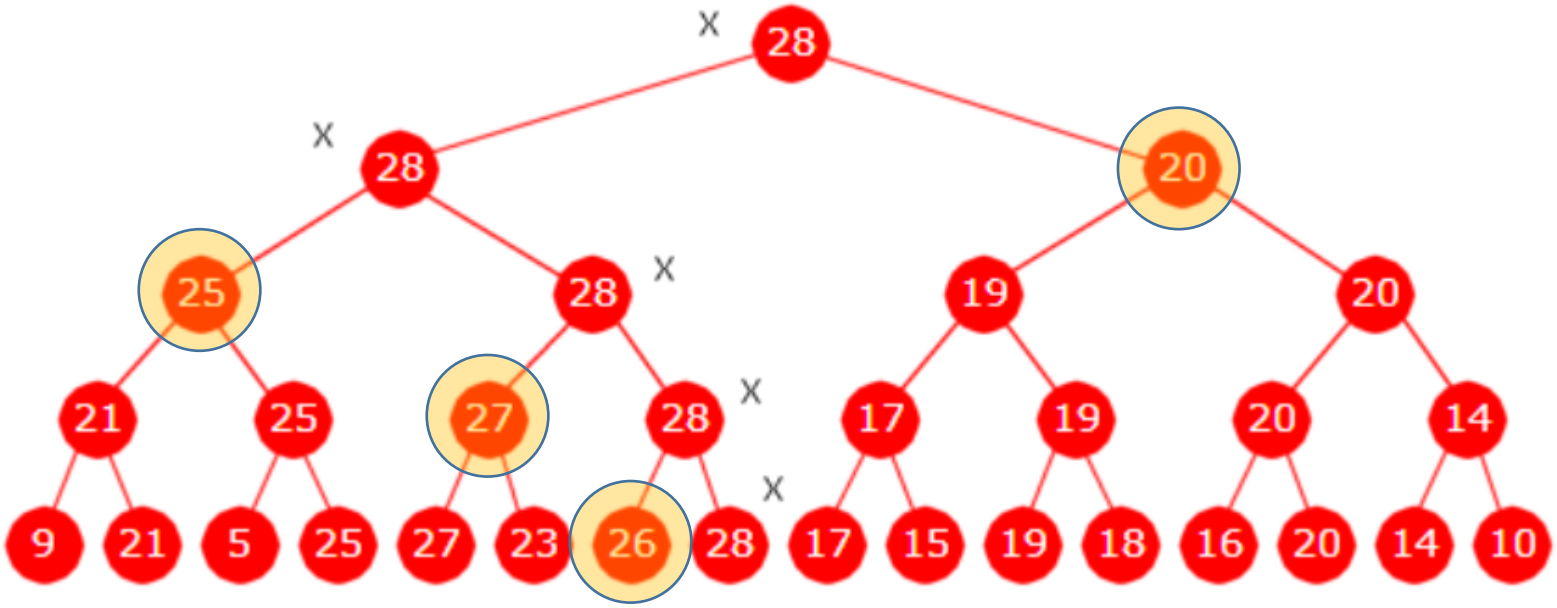
Repetisjon av algoritmeanalyse

Funksjonstype	**n** = 1	**n** = 10	**n** = 100	**n** = 1000	**Beskrivelse**
$f_1(n) = 1$	1	1	1	1	*konstant*
$f_2(n) = \log_2 n$	0	3,3	6,6	9,97	*logaritmisk*
$f_3(n) = \sqrt{n}$	1	3,2	10	31,6	*kvadratrot*
$f_4(n) = n$	1	10	100	1000	*lineær*
$f_5(n) = n \log_2 n$	0	33,2	664,4	9.965,8	*lineæritmisk*
$f_6(n) = n^2$	1	100	10.000	1.000.000	*kvadratisk*
$f_7(n) = n^3$	1	1.000	1.000.000	10 siffer	*kubisk*
$f_8(n) = 2^n$	2	1.024	31 siffer	302 siffer	*eksponensiell*
$f_9(n) = n!$	1	3.628.800	158 siffer	2568 siffer	*faktoriell*

Binære trær – Turneringer!



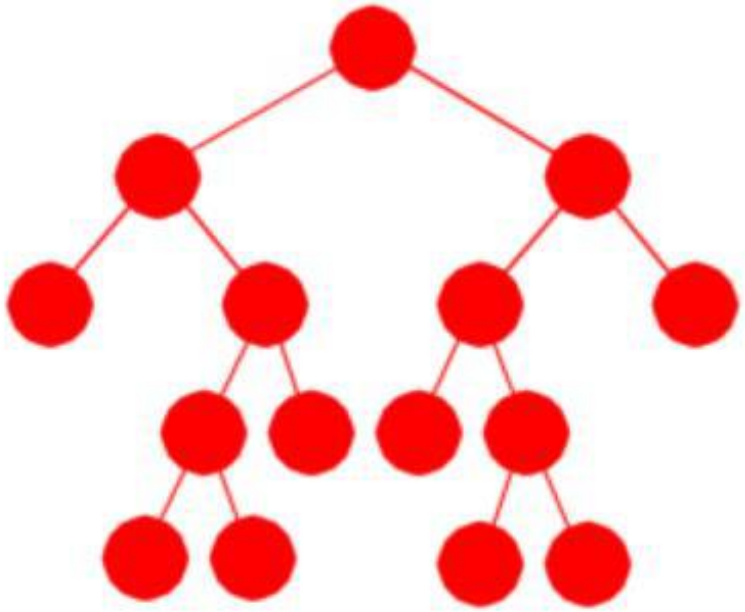
Nest største tall



- Ett av tallene 28 har vunnet over

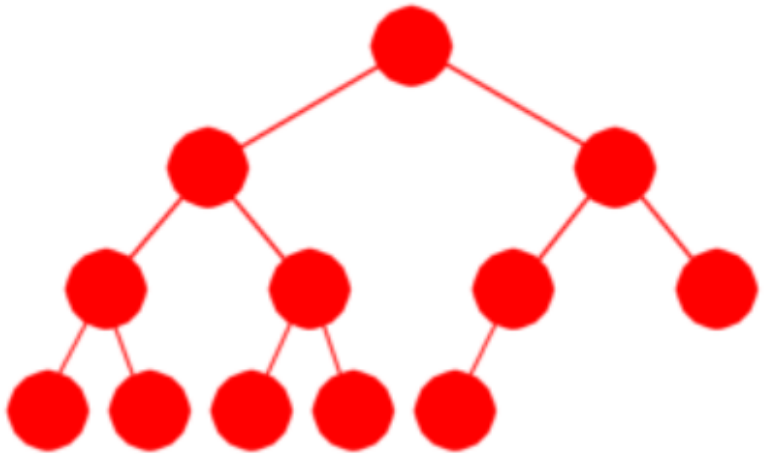
Fullt tre

- Hver node har to eller ingen barn



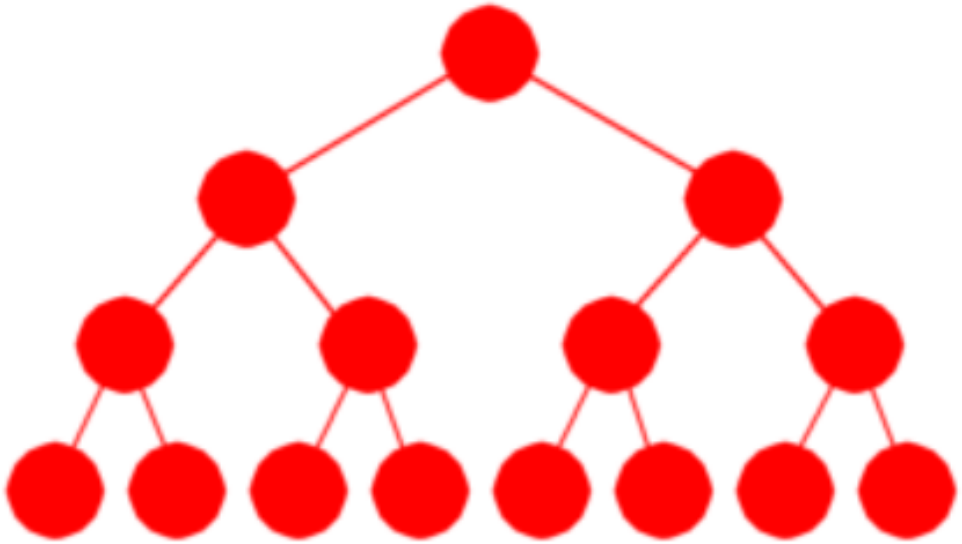
Komplett tre

- Alt unntatt siste nivå er fullt
- Siste nivå er fylt inn fra venstre



Perfekt binærtre

- Alt til og med siste nivå er fullt



Bubble sort

- Gå gjennom hver posisjon i tabellen og «boble» oppover
- For hvert tallpar, bytt så største kommer til høyre
- n*(n-1)/4 operasjoner (antall inversjoner!)

4: [4, 2, 3, 1]
4: [2, 4, 3, 1]
4: [2, 3, 4, 1]
4: [2, 3, 1, 4]

3: [2, 3, 1, 4]
3: [2, 3, 1, 4]
3: [2, 1, 3, 4]

2: [2, 1, 3, 4]
2: [1, 2, 3, 4]

```
public static void boblesortering(int[] a)      // hører til klassen Tabell
{
  for (int n = a.length; n > 1; n--)            // n reduseres med 1 hver gang
  {
    for (int i = 1; i < n; i++)                 // går fra 1 til n
    {
      if (a[i - 1] > a[i]) bytt(a, i - 1, i);   // sammenligner/bytter
    }
  }
}
```

Programkode 1.3.3 e)

Utvalgssortering – selection sort

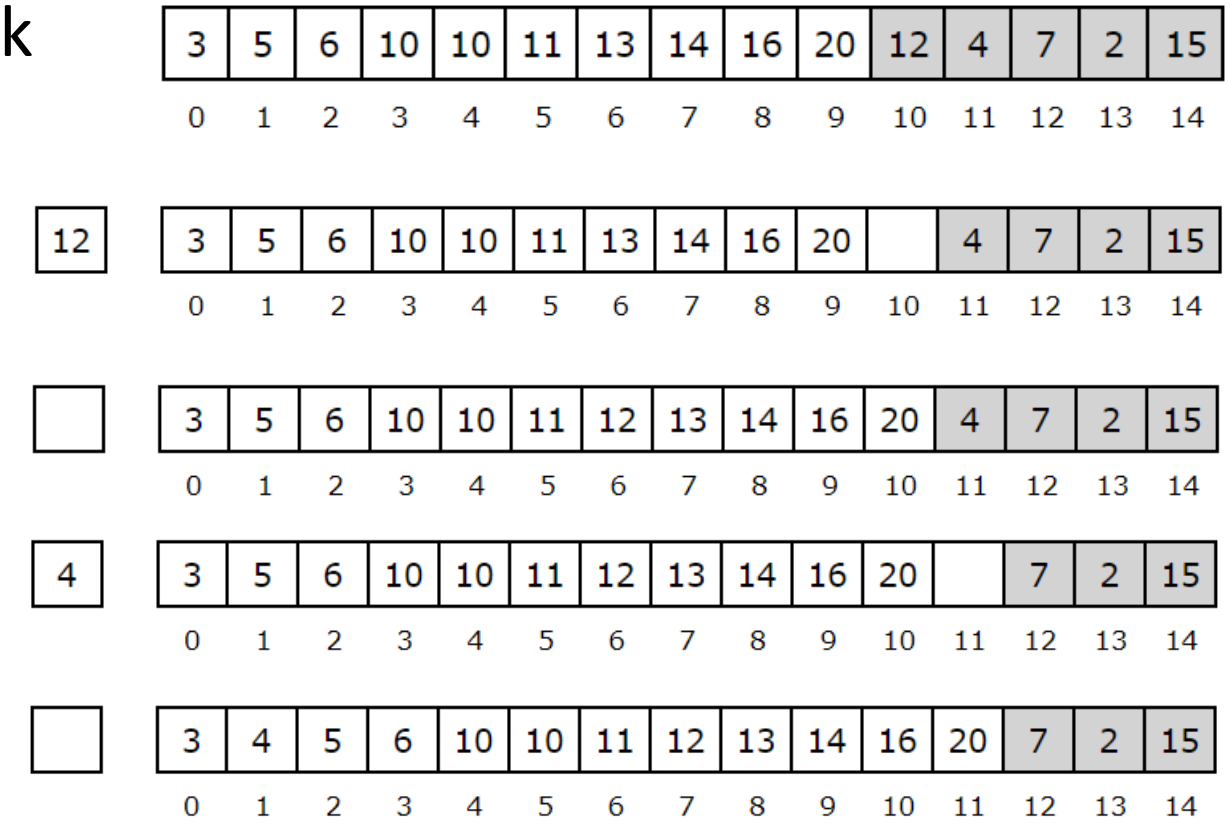
- Finn minste tall og bytt med posisjon 1
- Repeter med tabell størrelse n-1
- n*(n-1)/2 operasjoner

```
public static void utvalgssortering(int[] a)
{
  for (int i = 0; i < a.length - 1; i++)
    bytt(a, i, min(a, i, a.length));  // to hjelpemetoder
}
```

[6, 7, 1, 4, 8, 9, 2, 5, 3, 10]
[1, 7, 6, 4, 8, 9, 2, 5, 3, 10]
[1, 2, 6, 4, 8, 9, 7, 5, 3, 10]
[1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 5, 6, 10]
[1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 5, 6, 10]
[1, 2, 3, 4, 5, 9, 7, 8, 6, 10]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

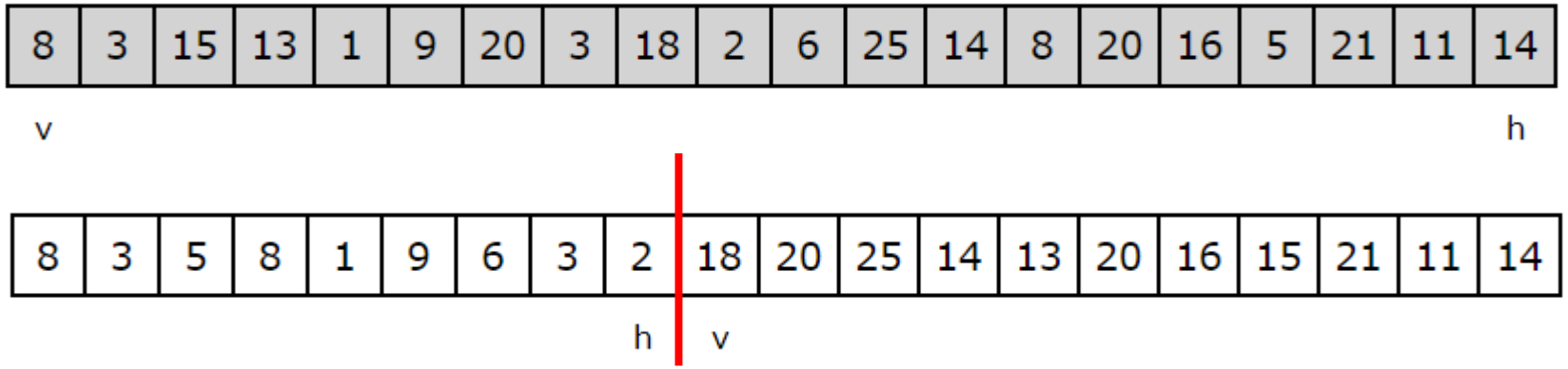
Insertion sort (innsettingssortering)

- Ta en verdi ut av tabellen på plass k
  Krav: alt før plass k er sortert
- Bruk ordnet innsetting i intervallet [0, k-1]
- $n(n + 3)/4 - H_n$ operasjoner i gjennomsnitt



Quick sort (kvikksortering)

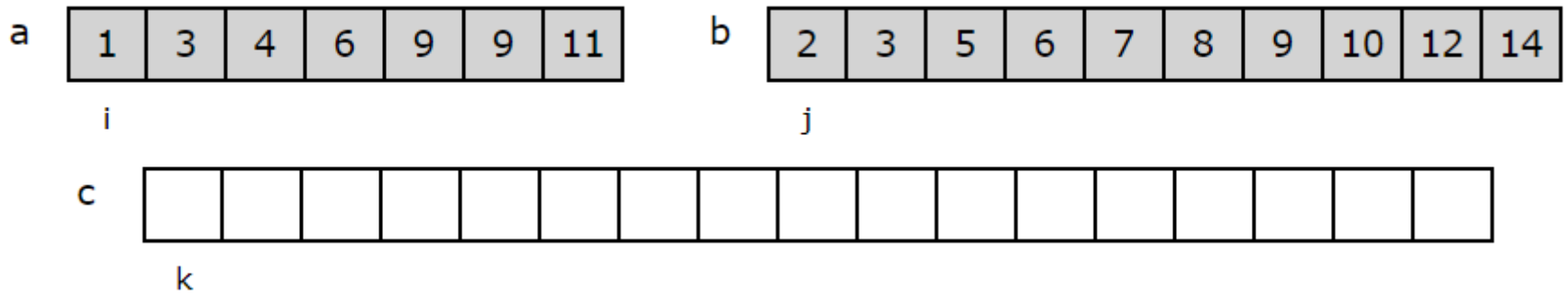
- Bygger på konseptet partisjonering med en «pivot»
- Sorter tabellen slik at alle tall mindre enn pivot ligger til venstre og alle tall større ligger til høyre
- Eksempel: Pivot = 10



Merge sort

- Enkel idé:

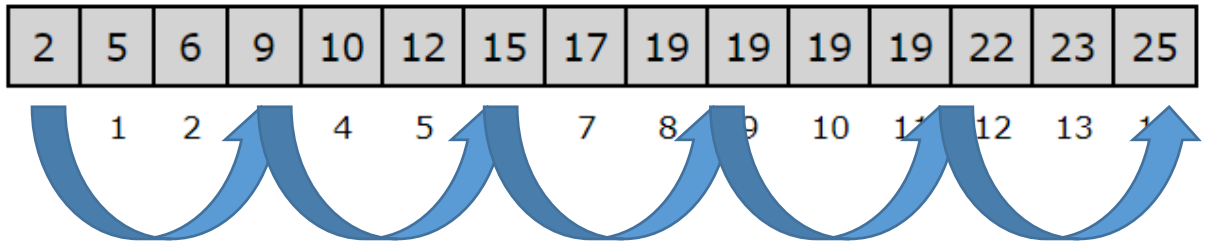
- Gitt to lister med sorterte tall, velg det minste fra de to listene til enhver tid



Kvadratrotsøk

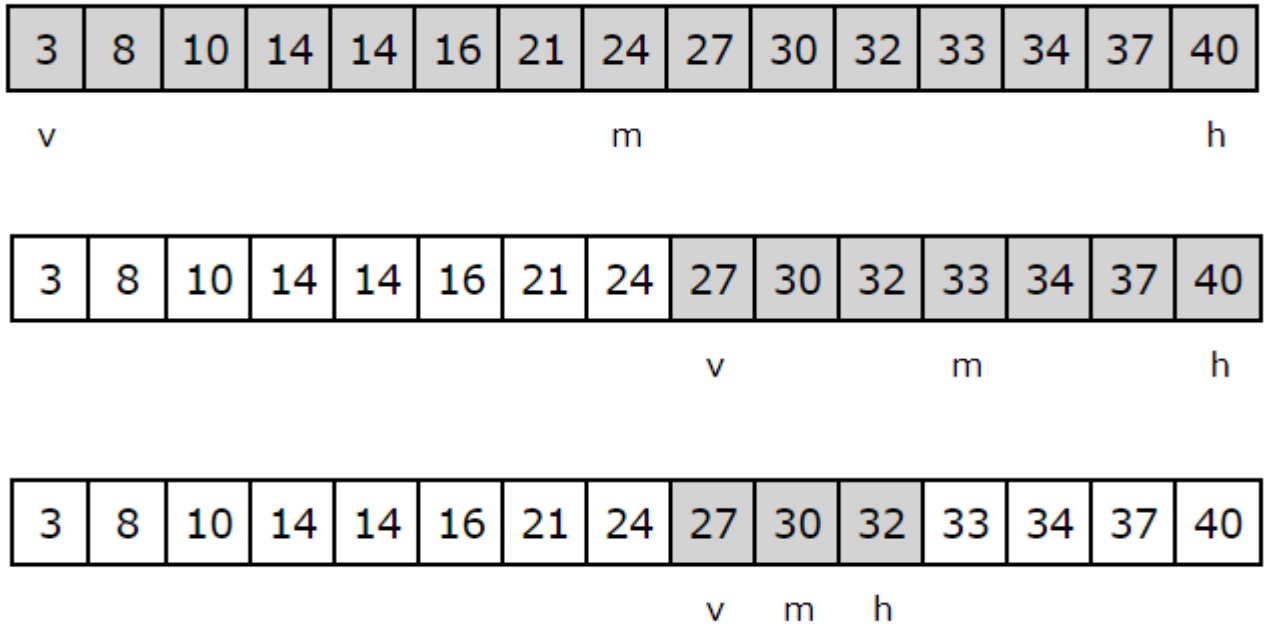
- Som lineært søk (usortert søk), men øk i med kvadratroten av tabellens lengde istedenfor i

- for (int i=0; i<a.length; ++i)
- for (int i=0; i<a.length; i+=sqrt(a.length)) {
  if (a[i] > verdi) { … }



Binærsøk

- Søk etter 30:
  - Er a[m] lik 20?
    Søket er ferdig!
  - Er 30 større enn midt
    Søk i intervallet [m+1, h]
  - Ellers
    Søk i intervallet [l, m]



Flerdimensjonelle tabeller

- To dimensjoner

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

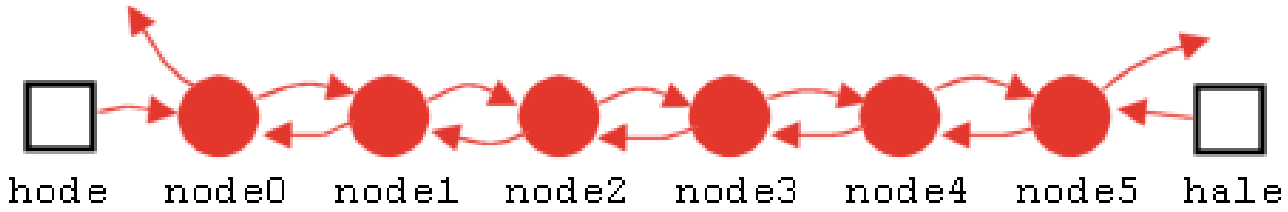
```
int[][] a = {{1,2,3,4,5}, {6,7,8,9,10}, {11,12,13,14,15}};
```

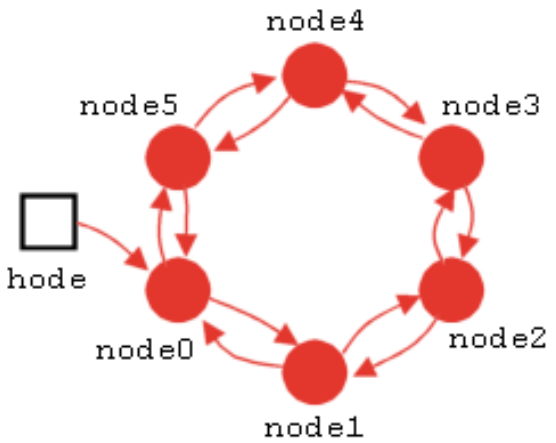
- a[j][i] gir oss rad j, kolonne i
- Eksempel: a[3][2] = 12

Lineære datastrukturer

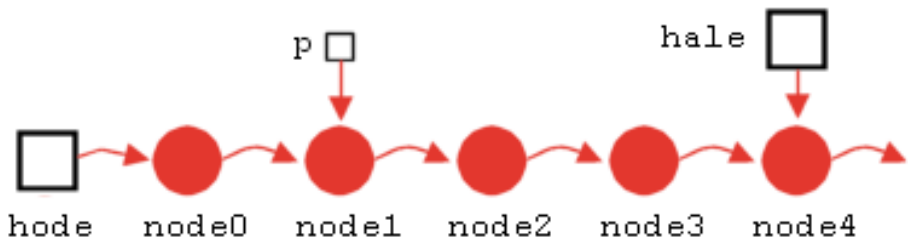
- Kapittel 3: Lineære datastrukturer
  - 3.1 En beholder 1
  - 3.2 Tabellbasert liste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - 3.3 Lenket liste 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Kapittel 4: Stakker og køer
  - 4.1 En stakk 1, 2, 3, 4
  - 4.2 En kø 1, 2, 4, 5
  - 4.3 Toveiskø 1, 2, 3, 4
  - 4.4 Prioritetskø 1, 2, 3, 4, 5
- Kapittel 6: Hashing og hashingteknikker
  - 6.1 Hashing 1, 3, 4, 7

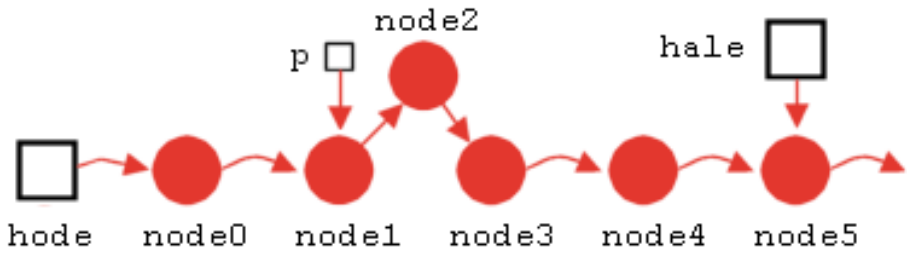
Lenket liste



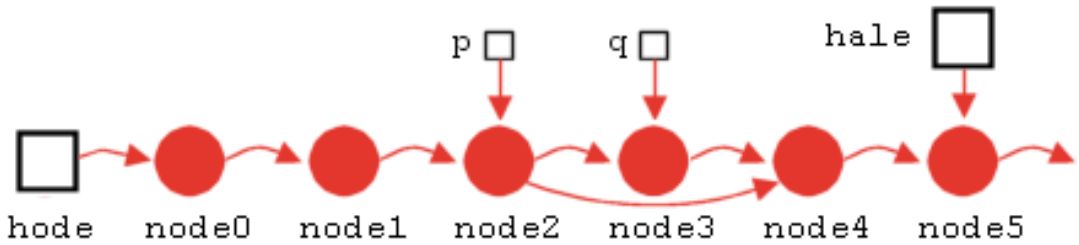


Legge inn på gitt posisjon i listen



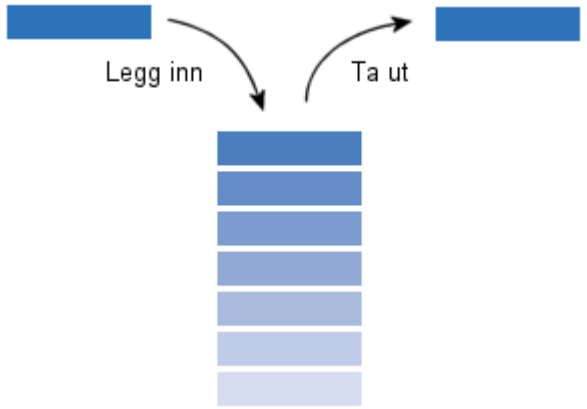


Fjerne fra listen

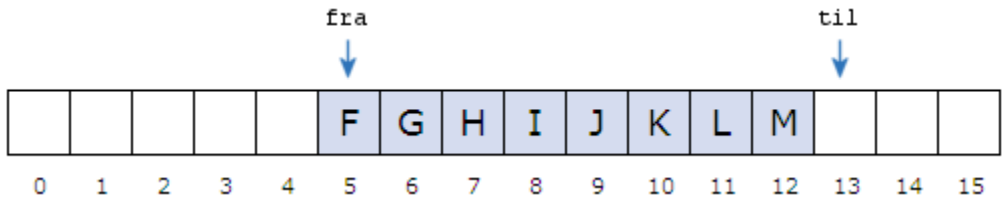


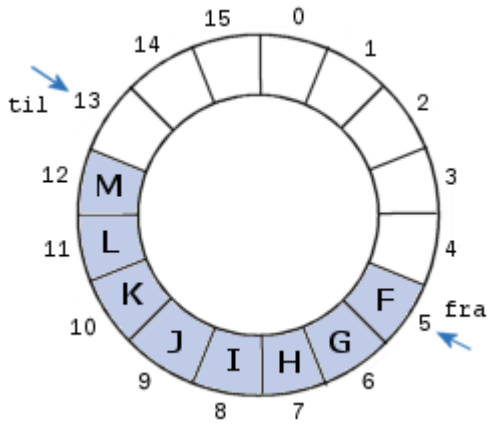
Stack

- Stabbel med tallerkner

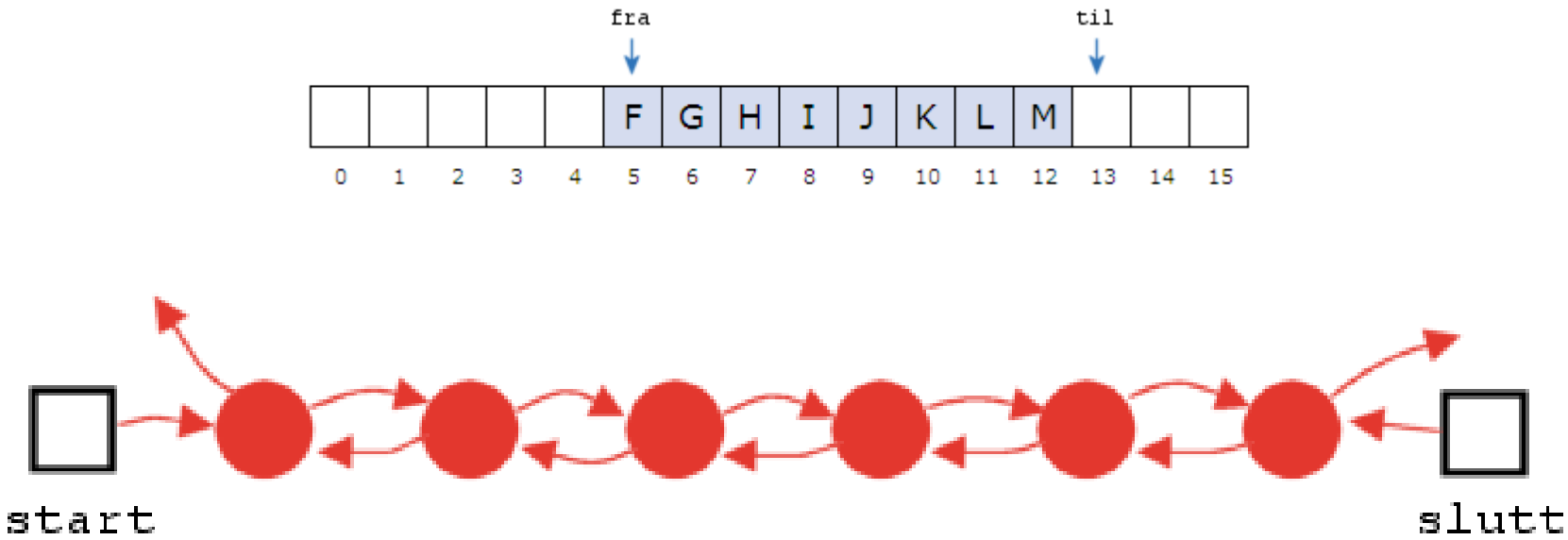


Circular Queue

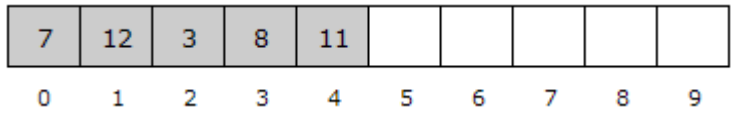




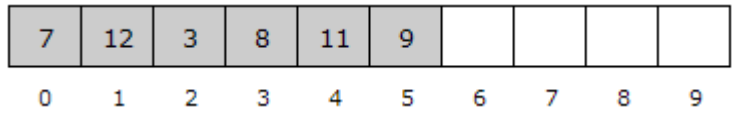
Deque – double ended queue



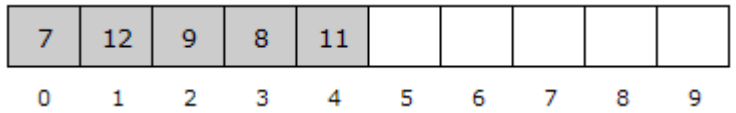
Unsorted Priority Queue



- Legg inn 9

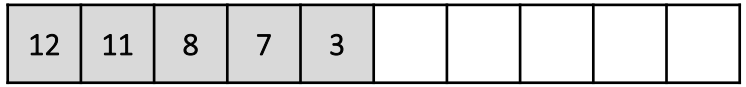


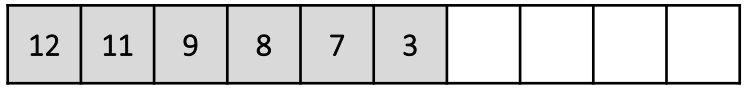
- Finn og fjern høyest prioritet (3)



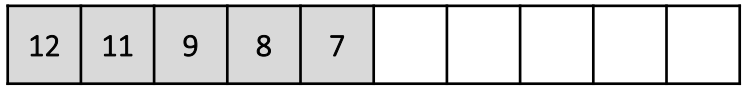
Sorted Priority Queue

- Legg inn 9 på riktig sortert plass





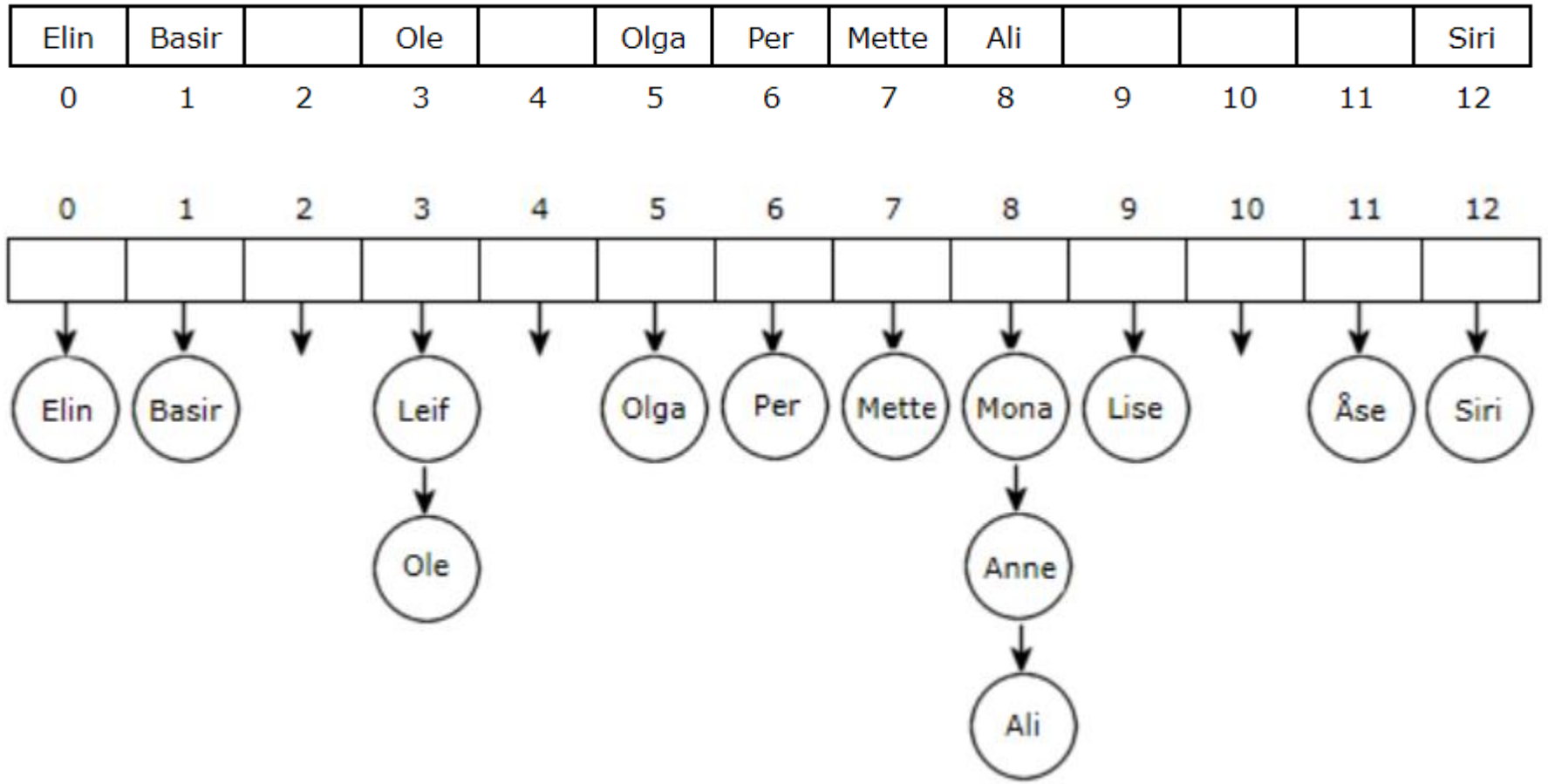
- Fjern høyest prioritet (3)



UsortertTabellPrioritetsKø		
Metode	Operasjoner	Orden
`leggInn`	Et nytt element legges alltid bakerst.	*konstant*
`taUt`	Hvis det er *n* elementer, trengs *n* - 1 sammenligninger for å finne den minste.	*lineær*

SortertTabellPrioritetsKø		
Metode	Operasjoner	Orden
`leggInn`	Det må letes etter rett sortert plass og de til høyre må forskyves.	*lineær*
`taUt`	Den minste ligger alltid bakerst.	*konstant*

Hash tabell – Lukket addressering



Hashtabell – Åpen addressering

- Hashverdi til «Bodil» er 5 => men vi søker linært til vi finner en ledig plass (9)
- Kan også søke med «kvadratisk søk», dvs 5, 5+1, 5+4, 5+9, …

Elin	Basir		Ole		Olga	Per	Mette	Ali				Siri
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

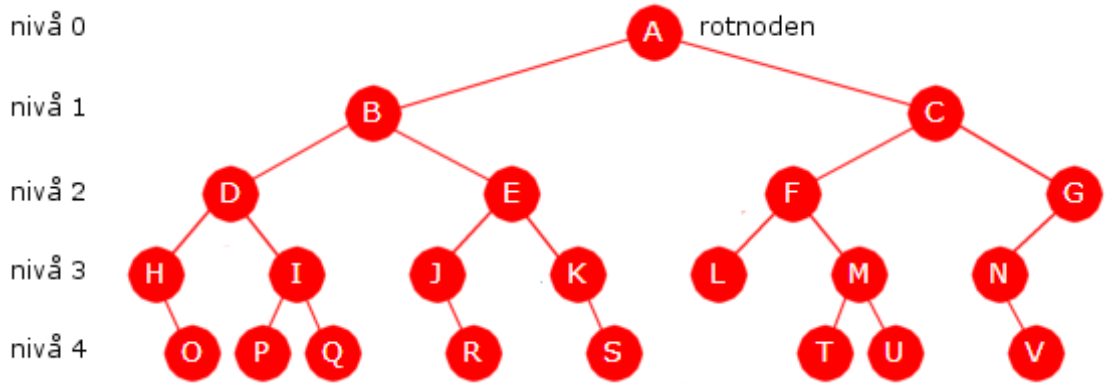
Elin	Basir		Ole		Olga	Per	Mette	Ali	Bodil			Siri
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Binære trær og grafer

- Kapittel 5: Binære trær
  - 5.1 Generelle binære trær 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14
  - 5.2 Binære søketrær 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 14
  - 5.3 Minimums og makstrær 1, 2, 3, 4, 6
  - 5.4 Huffmantrær 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Kapittel 9: Balanserte binærtrær
  - 9.2 Rød-svart og 2-3-4 trær 1, 2, 4, 5
- Kapittel 11: Grafer
  - 11.1 Datastrukturer for grafer 6
  - 11.2 Korteste vei i graf 1

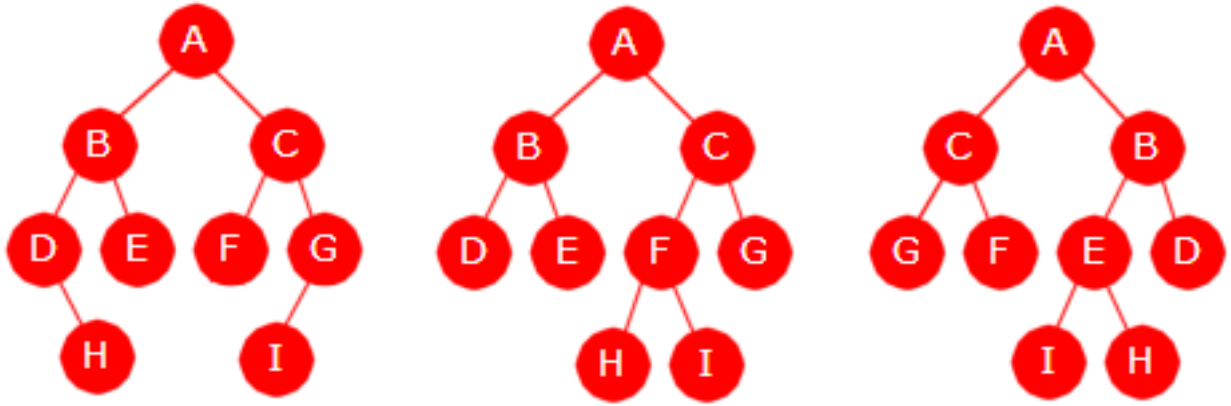
Binærtre

- Level – nivå
- Slektskap
- Rotnode
- Subtrær, gren
- Bladnoder, indre noder
- Vei / path i treet
- Avstand – lengde av vei
- Høyde av tre – lengde av lengste vei
- Dybde av node
- «Ned i treet» => bort fra rotnoden



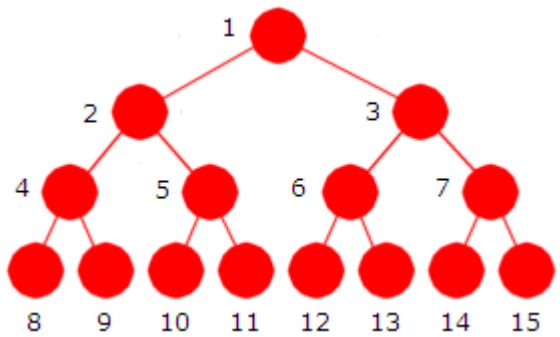
Forskjellige binærtrær

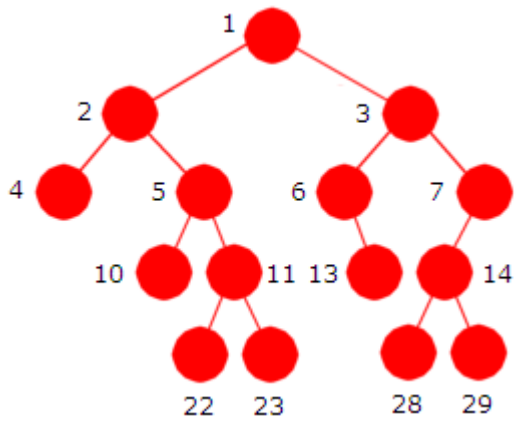
- Catalan-tallet C(n)
  - 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862



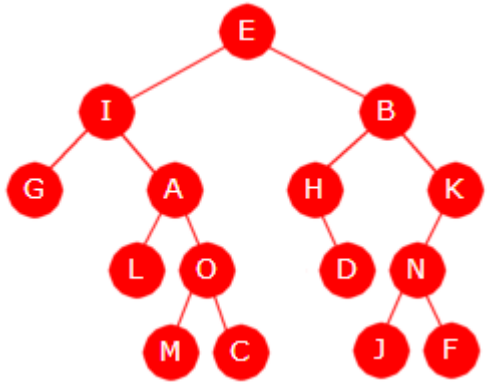
$$(**) \qquad C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Nummerering av noder





Traversering – bredde først – breadth first



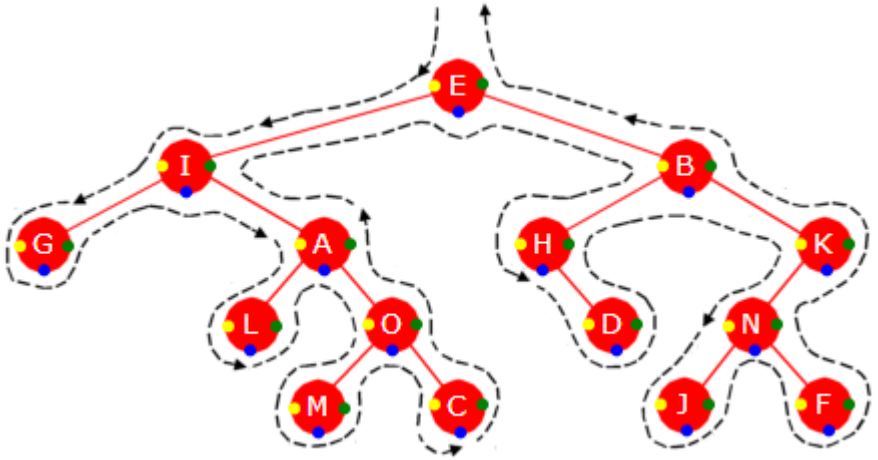
Runde	Ut av køen	Inn i køen	Køens innhold
1	E	I , B	I , B
2	I	G , A	B , G , A
3	B	H , K	G , A , H , K
4	G		A , H , K
5	A	L , O	H , K , L , O
6	H	D	K , L , O , D

E, I, B, G, A, H, K, L, O, D, N, M, C, J, F

- Implementeres med kø

Traversering – dybde først – depth first

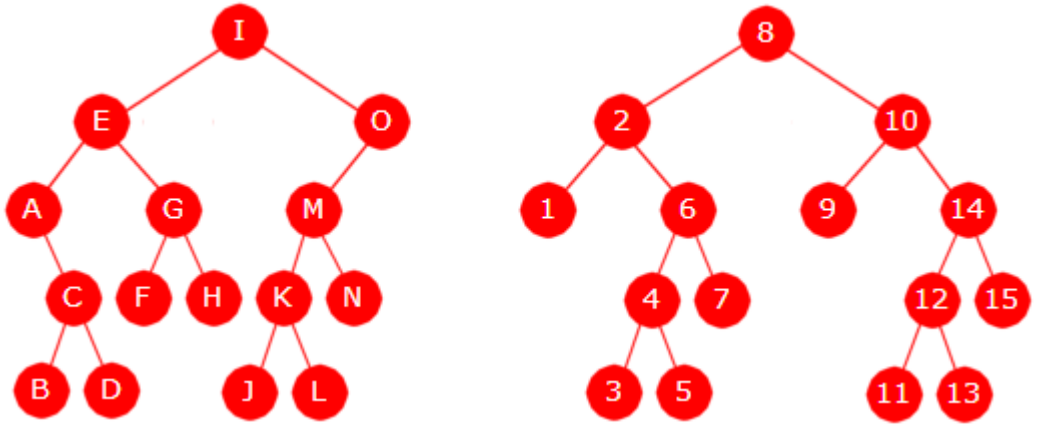
- Preorder (venstre, gul),
  - *E, I, G, A, L, O, M, C, B, H, D, K, N, J, F*
- Inorder (bunnen, blå),
  - *G, I, L, A, M, O, C, E, H, D, B, J, N, F, K*
- Postorder (høyre, grønn)
  - *G, L, M, C, O, A, I, D, H, J, F, N, K, B, E*



- Implementeres med stack eller rekursjon

Binære søketrær

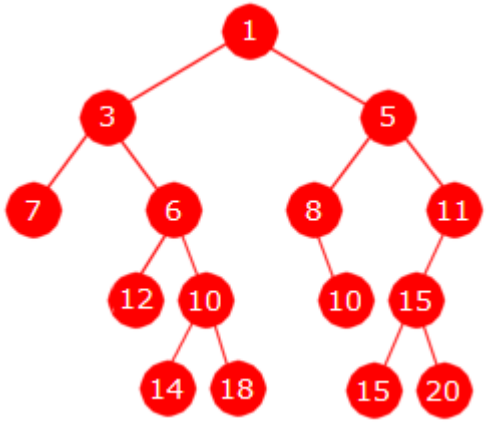
- Stigende inorder sortering

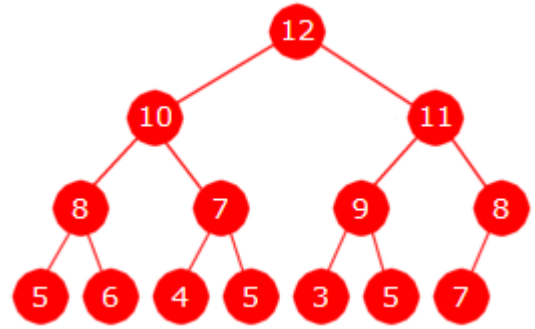


- Alle venstre subtrær er **mindre enn** foreldrenode
- Alle høyre subtrær er **større eller lik** foreldrenode

Minimumstrær

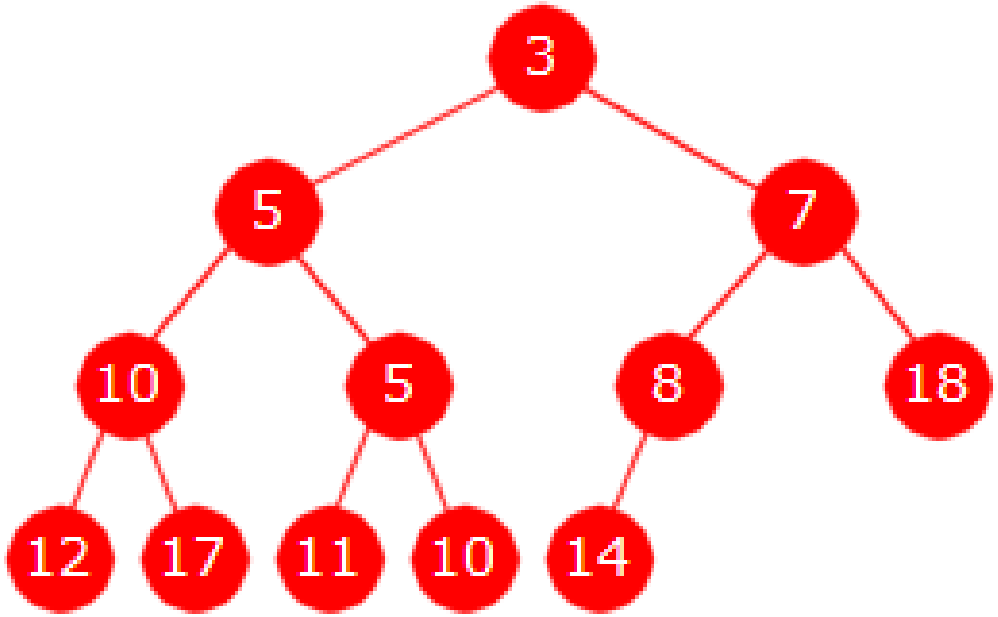
- Sortert stigende/synkende etter nivå





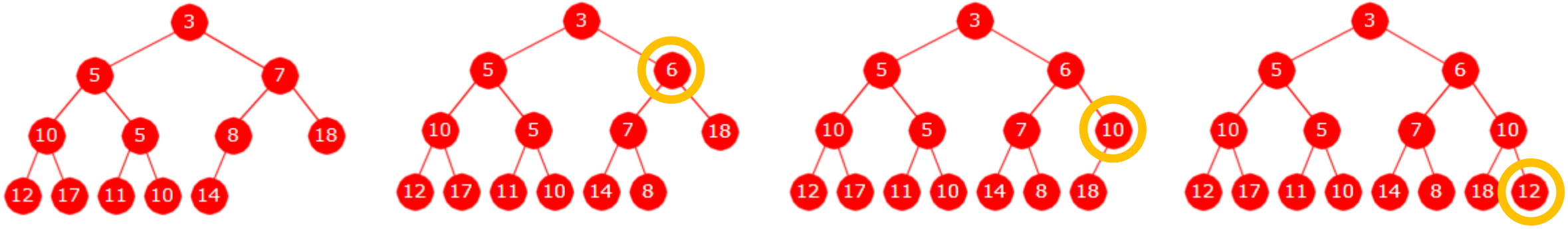
Minheap - minimumsheap

- Komplett binærtre
- Minimumstre



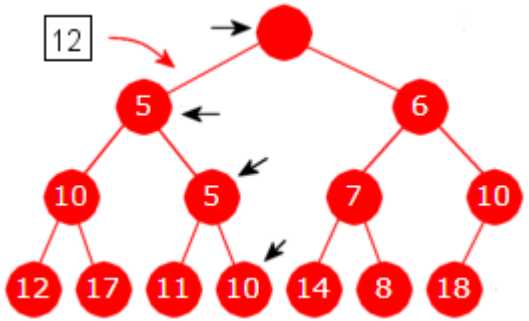
Legge inn noder

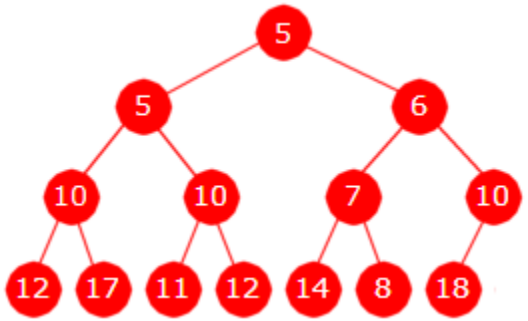
- Legg inn i bunnen av treet
- Bytt med forelder så lenge forelder er større



Fjerne noder

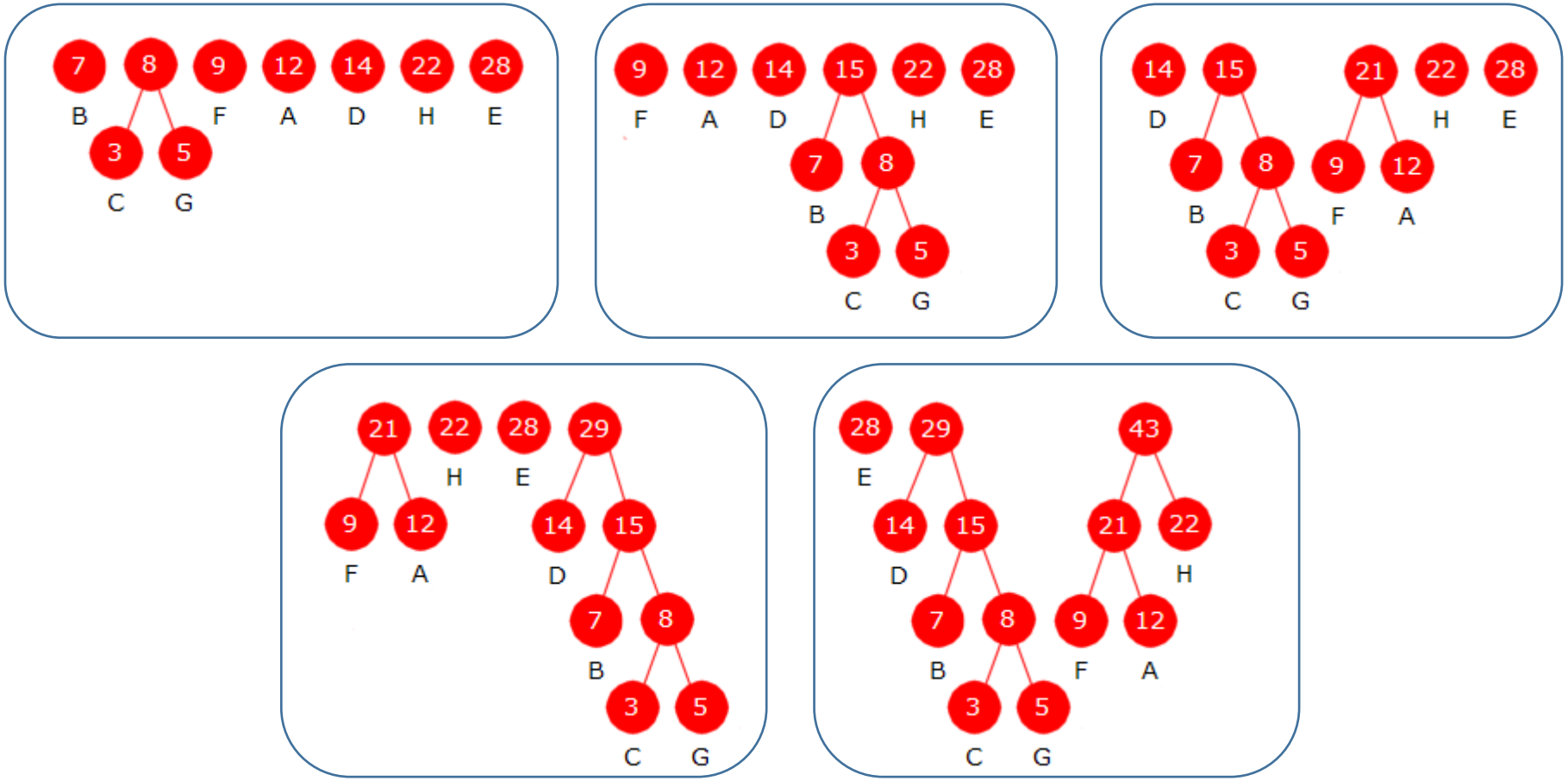
- Ta ut rotnoden
- Sift down – bytt med minste verdi nedover i treet



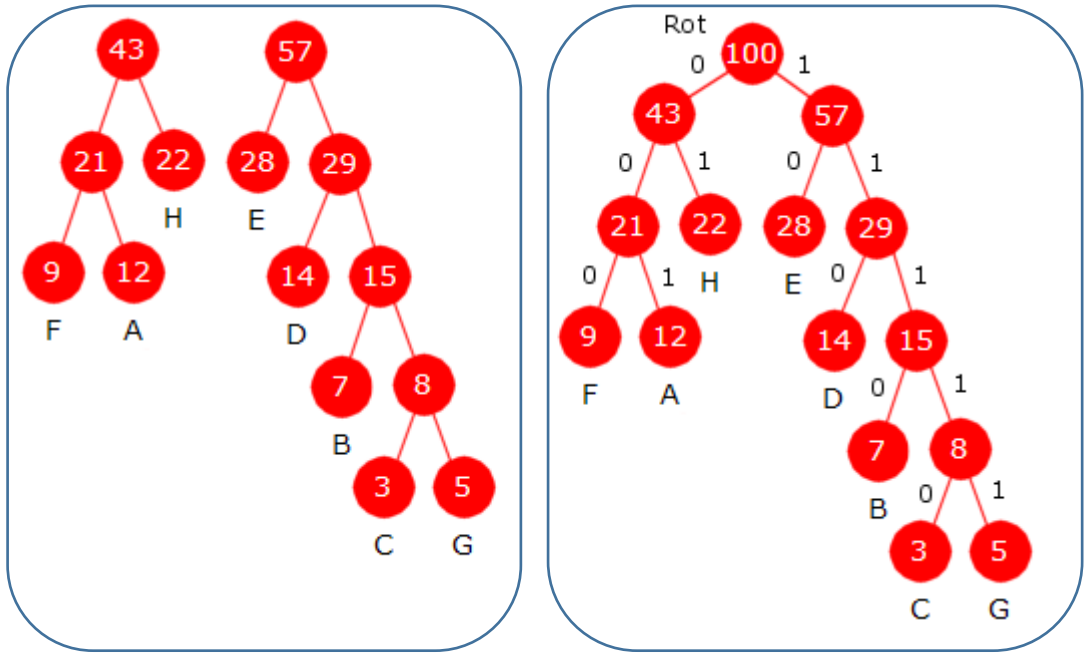


Bygge Huffmantrær

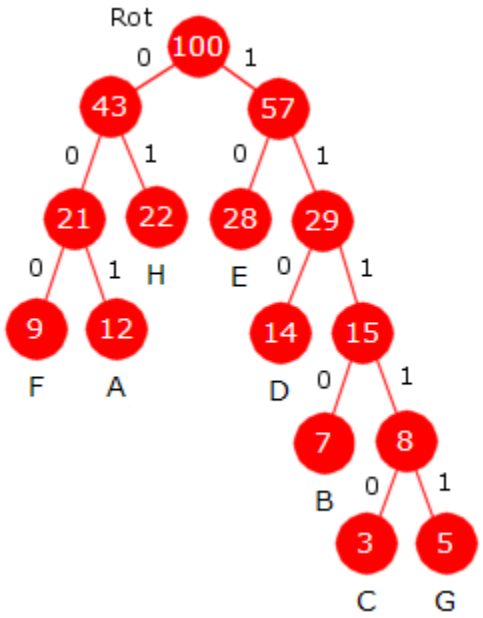
- Velg noder med minst verdi og slå sammen
- Repeter til hele treet er fullt



Bygge Huffmantrær



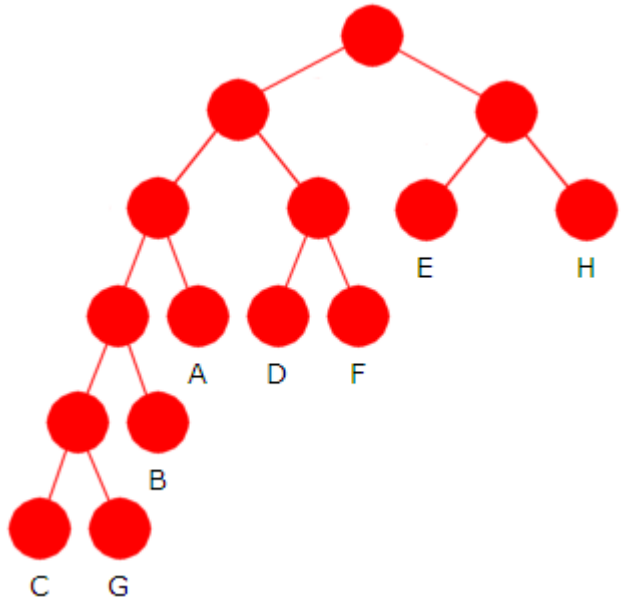
Bygge Huffmantrær



Tegn	A	B	C	D	E	F	G	H
Bitkode	001	1110	11110	110	10	000	11111	01
Bitkodelengde	3	4	5	3	2	3	5	2

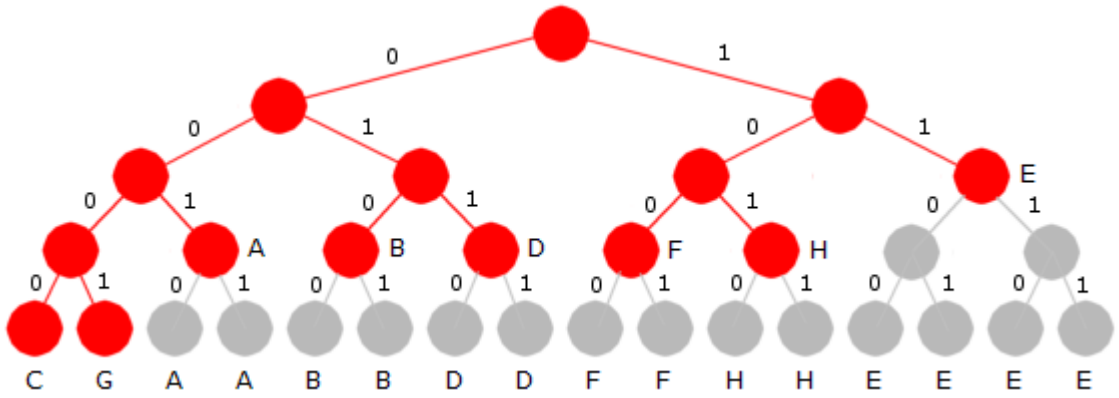
Venstreorientert kanonisk tre

- Fylt ut fra venstre
- Noder på samme nivå er sortert



Tegn	A	B	C	D	E	F	G	H
Bitkode	001	0001	00000	010	10	011	00001	11
Bitkodelengde	3	4	5	3	2	3	5	2

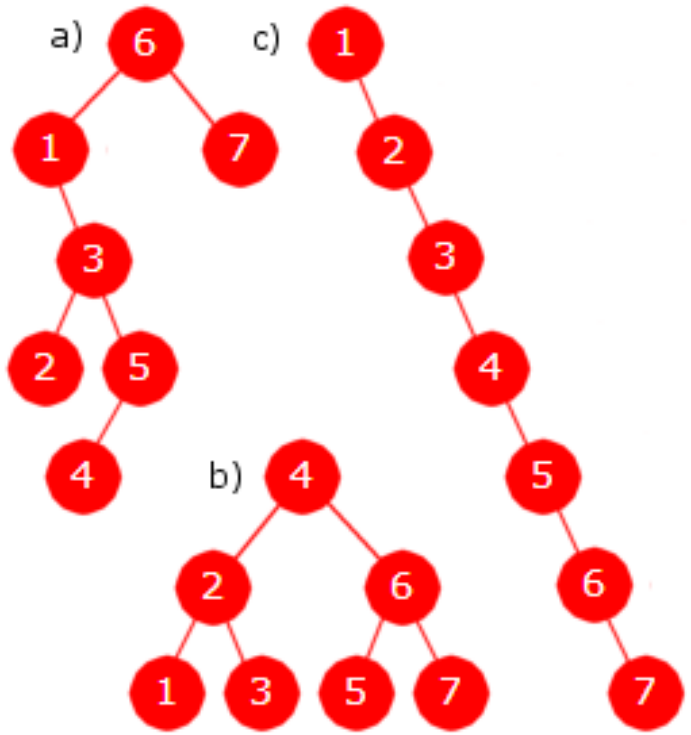
Komplette huffmantrær – effektiv dekomprimering



C	G	A	A	B	B	D	D	F	F	H	H	E	E	E	E
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

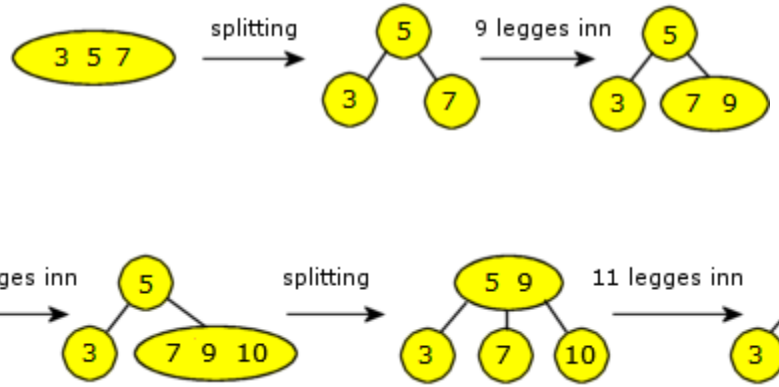
1	1	0	1	2	1	0	1
A	B	C	D	E	F	G	H

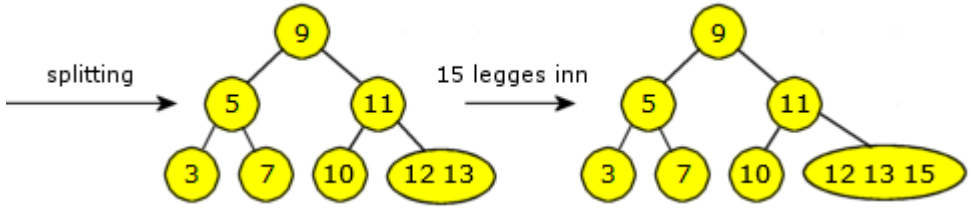
Forskjellige ordninger – balanserte trær

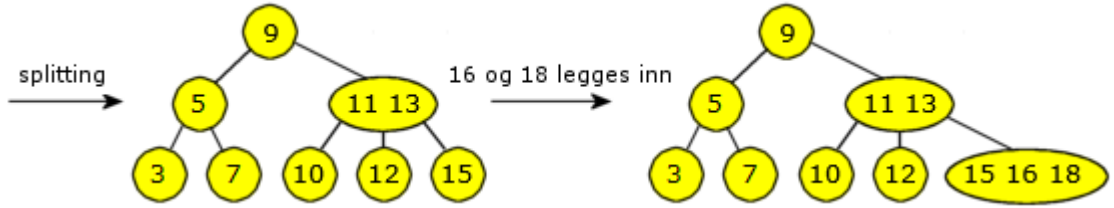


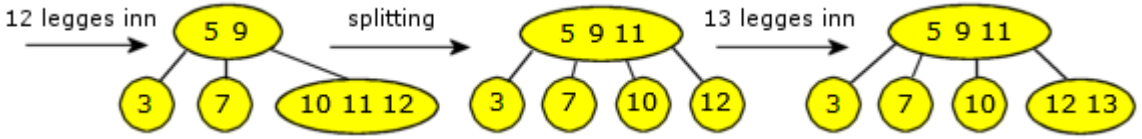
2-3-4 B-trær

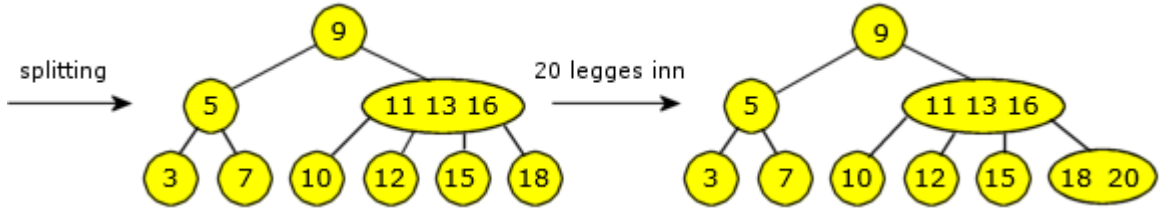
- 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20





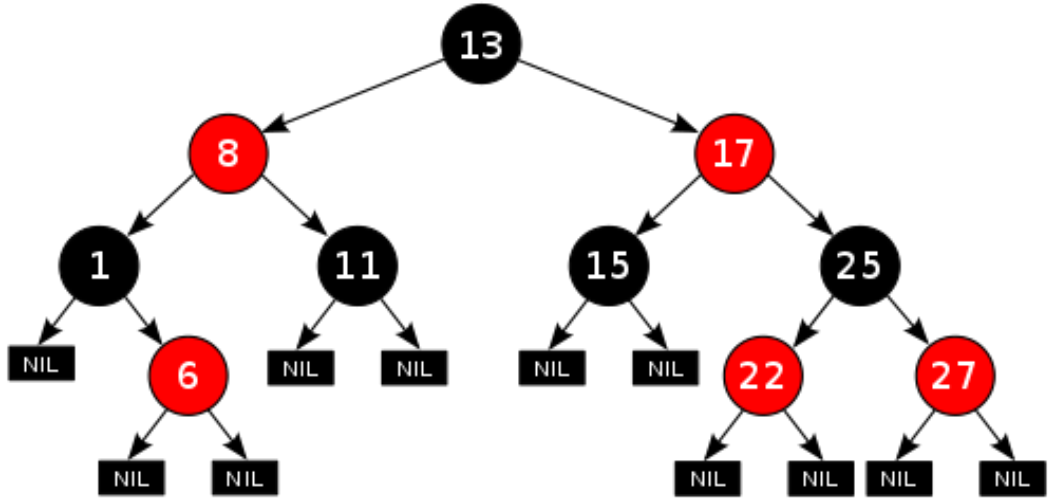






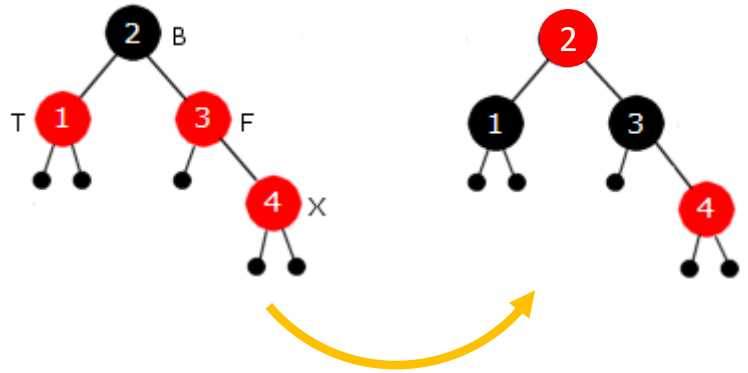
Rød-sorte trær

- Rotnoden skal være sort
- Alle grener skal passere like mange sorte noder
- En rød node har kun sorte barn
- Hver nye node man setter inn er rød

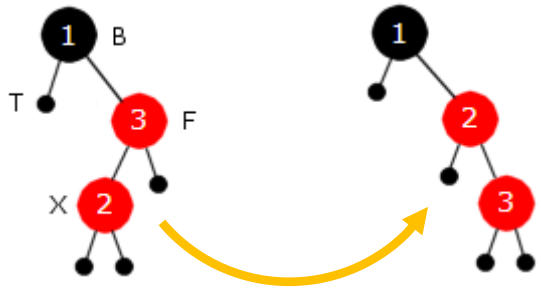


Scenarier

- If Parent == 0 => rotnode
- Else if Parent == Black
  vanlig insert
- Else if Uncle == RED
  Color change!
  Then check grandparent
- Else
  if triangle: Straighten
  Then rotation



Color change



Straighten

Rotation

Dijkstras algoritme