0.1 Ôn tập

Chú ý

1) Tìm đạo hàm bằng định nghĩa
2) Đạo hàm hàm ẩn- Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong
3) Xấp xỉ tuyến tính
4) Sự tồn tại GTLN-GTNN
5) Xấp xỉ tích phân bằng tổng Riemann- Xấp xỉ tích phân với sai số không vượt quá một ngưỡng
6) Tích phân suy rộng
7) Chuỗi số
8) Chuỗi lũy thừa

Dạng 0.1.1. Tìm đạo hàm bằng định nghĩa

Bài toán 1

Sử dụng định nghĩa tìm đạo hàm cấp một của hàm số sau.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

2) $H(s) = s\sqrt{s^2 + 2}$.

3) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

4) $h(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

Với $x \in D_f$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\lim\limits_{z \to x} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$

$\boxed{\text{VĐinh } \frac{0}{0}}$ → K⁰ dùng L'hospital

→ Khử vô định ← phân tích nhân tử

nhân lượng liên hiệp

Dạng 0.1.2. Đạo hàm hàm ẩn- Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong

Cho (C): $x+y=2e^{y}$ là đths $y=f(x)$

a) Tìm $f'(x)$

b) Viết PTTT với (C) tại $(2,0)$.

Ta có $x+f(x)=2e^{f(x)}$

Đhàm 2 vế, ta được $1+f'(x)=2e^{f(x)}f'(x)$

$\Longrightarrow \left[2e^{f(x)}-1\right]f'(x)=1$

"$\Longrightarrow$" $f'(x)=\dfrac{1}{2e^{f(x)}-1}$ (ĐK: $2e^{f(x)}-1\neq 0$).

b) Nhắc lại: PTTT với (của) đths f tại (x_0, y_0):

(Δ): $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Giải Ta có $f'(2)=\dfrac{1}{2e^{f(2)}-1}=1$ (vì $f(2)=0$)

PTTT với (C) tại $M(2,0)$ chính là PTTT với đths f tại M:

(Δ): $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$\Leftrightarrow y=1.(x-2)+0$

$\Leftrightarrow y=x-2.$ $\square$

$\boxed{x-2}$

$ax+by+c=0$

$\hookrightarrow y=Ax+B$

LaTeX by LE VAN CHANH

Dạng 0.1.3. Xấp xỉ tuyến tính

Bài toán 2

Trong lý thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật thể di chuyển với vận tốc v là

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật thể ở trạng thái nghỉ và c là tốc độ của ánh sáng. Động năng của là sự khác biệt giữa cơ năng và năng lượng của nó ở trạng thái nghỉ:

$$K^E = mc^2 - m_0c^2$$

Chứng minh rằng khi v rất nhỏ so với c, biểu thức K tương thích với vật lý Newton cổ điển: $K^N = \frac{1}{2}m_0v^2$.

Xét hs $f(x) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-x}}$

$= m_0(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

Ta có $f(0) = m_0$

$f'(x) = m_0 . \left(-\frac{1}{2}\right) . (-1) . (1-x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}m_0.$

Khi đó ta có XXTT của f quanh 0:

$f(x) \simeq f(0) + f'(0)x$ khi $x \simeq 0$

$\simeq m_0 + \frac{1}{2}m_0 . x$

$\Rightarrow m = f\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \simeq m_0 + \frac{1}{2}m_0 . \left(\frac{v}{c}\right)^2$ khi $|v| << c.$

$\Rightarrow K^E = mc^2 - m_0c^2 \simeq \left(m_0 + \frac{1}{2}m_0\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)c^2 - m_0c^2$

$\simeq \frac{1}{2}m_0v^2 = K^N$ (khi $|v| << c$)

....

....

....

....

Bài toán 3

Lực do sự hấp dẫn tác động một vật có khối lượng m ở chiều cao h so với bề mặt trái đất là

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

trong đó R là bán kính của trái đất, và g là gia tốc trọng trường.

Sử dụng ý tưởng xấp xỉ tuyến tính để chỉ ra $F \approx mg$; điều này thường được dùng khi h rất nhỏ so với R.

Dạng 0.1.4. Sự tồn tại GTLN-GTNN

f liên tục trên $[a,b]$ $\Longrightarrow$ f đạt GTLN & GTNN trên $[a,b]$

Bài toán 4

Trong một môi trường dinh dưỡng có 1000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi quy luật:

$$p(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}, \quad t \in (0, \infty)$$

trong đó t là thời gian tính theo giờ. Chứng minh rằng có một thời điểm mà số lượng vi khuẩn tăng lên là lớn nhất.

Ta có: $p'(t) = \dfrac{100(100+t^2) - 100 \cdot 2t^2}{(100+t^2)^2} = \dfrac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$.

. $p'(t) = 0 \overset{t\in(0,\infty)}{\Longleftrightarrow} t = 10$.

. Bảng biến thiên của p:

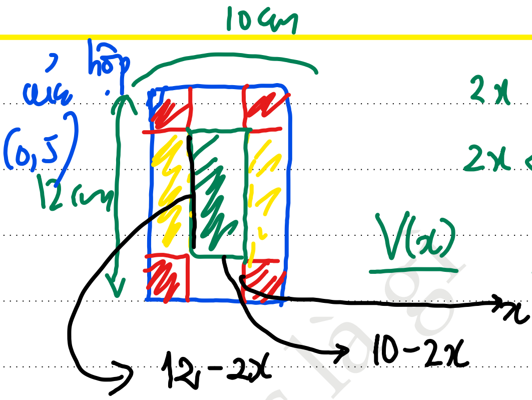
t	0		10		∞
$p'(t)$		+	0	−	
$p(t)$	$\boxed{?}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\boxed{?}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy ...

Bài toán 5

Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 12 cm và chiều rộng bằng 10 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x(cm), rồi gập tấm nhôm như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Chứng minh tồn tại x sao cho thể tích của hộp đạt giá trị lớn nhất.

$V(x) = x(10-2x)(12-2x)$ là thể tích của hộp (cm^3) với $x \in (0,5)$



$2x < 10$

$2x < 12$

$\underline{V(x)}$ $\quad x \in (0,5)$

$V'(x) = ?$

$V'(x) = 0 \iff x = x_0 \in (0,5)$

BBT

x	0		x_0		5
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗		↘	

−

Dạng 0.1.5. Xấp xỉ tích phân bằng tổng Riemann-Xấp xỉ tích phân với sai số không vượt quá một ngưỡng

Bài toán 6

[] Công thức xấp xỉ hình thang

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \overbrace{\cancel{g_n}\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]}^{S_n}$$

có sai số thỏa $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n\right| \le \frac{M_2(b-a)\Delta x^2}{12}$.

$\boxed{M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$

Xét $f(x)=e^{-x}, a=0, b=1$. Hãy tìm n để ta có xấp xỉ không vượt quá 10^{-10}.

$|f''(x)| \le M_2 \ \forall x \in [a,b]$

$\left|\int_0^1 e^{-x} - S_n\right| \le 10^{-10} \Longleftarrow \frac{M_2(b-a)\Delta x^2}{12} \le 10^{-10}$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\frac{M_2(b-a)\Delta x^2}{12} = \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12n^2}$

Giải: Ta có $f''(x) = e^{-x} \Rightarrow |f''(x)| = e^{-x} \le M_2 = 1$

$\| M_2 := \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.

Chọn n: $\frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12n^2} \le 10^{-10} \Leftrightarrow \frac{1}{12n^2} \le 10^{-10}$

$\Leftrightarrow n \ge \sqrt{\frac{10^{10}}{12}} \approx$

$\Leftrightarrow n \ge n_0 \ (n_0 \in \mathbb{N})$

Chọn $n = n_0$, ta có

$\left|\int_0^1 e^{-x}dx - S_{n_0}\right| \le \frac{1}{12n_0^2} \le 10^{-10}$. $\blacksquare$

Xấp xỉ tích phân

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq S_n := \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i^*)$$

$\boxed{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\downarrow$

$i=\overline{0,n}$ $\quad x_i = a + i\Delta x$

$\downarrow$

$i=\overline{1,n}$ $\quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$

$$x_i^* = \begin{cases} x_{i-1} & \text{(điểm biên trái)} \\ \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2} & \text{(trung điểm)} \\ x_i & \text{(điểm biên phải)} \end{cases}$$

Dạng 0.1.6. Tích phân suy rộng

Bài toán 7

[]1Khảo sát sự hội tụ và tính tích phân suy rộng (nếu hội tụ).

5) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x.$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x}.$

7) $\displaystyle\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x.$

8) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,\mathrm{d}x.$

9) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$

11) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2+1}.$

Dạng 0.1.7. Chuỗi số

Dạng 0.1.8. Chuỗi lũy thừa

Bài toán 8

[]1 Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{3n^2+1}\right)^n\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+3)}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)x^n}{3^n}$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3x-1)^{n+1}}{3n}$.

....

....

....

....