Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

member of swissuniversities

AACSB ACCREDITED

Logik
Teil 2: Prädikatenlogik

Künstliche Intelligenz | BSc BAI

Knut Hinkelmann

Aufgabe

- Stelle folgenden Satz in Aussagenlogik dar: Sokrates ist ein Mensch und weil Sokrates ein Mensch ist, ist er sterblich

$$Sokrates\ ist\ ein\ Mensch$$
$$Sokrates\ ist\ ein\ Mensch \rightarrow Sokrates\ ist\ sterblich$$

- Zeige, wie man daraus ableiten kann, dass Sokrates sterblich ist

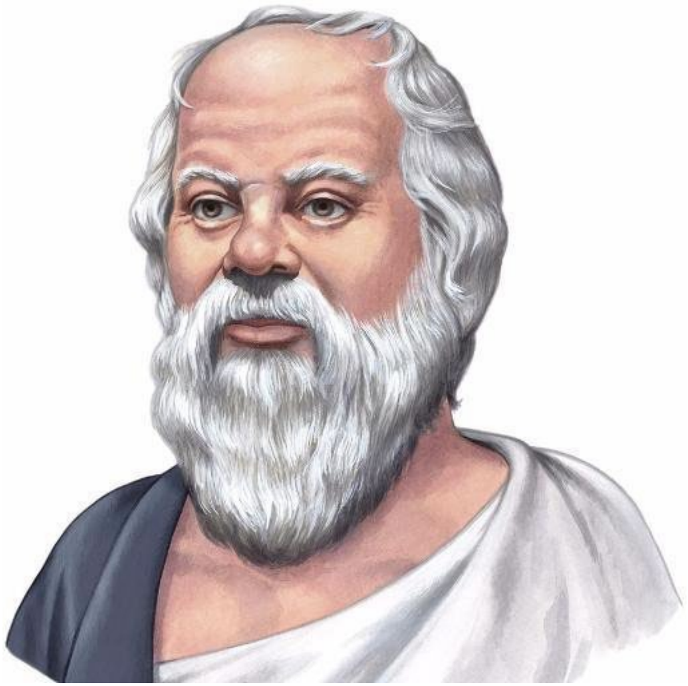
Der Klassiker

Was wissen wir über Sokrates?

Sokrates ist ein Mensch

Alle Menschen sind sterblich

Sokrates ist sterblich



Diskussion

– Wie könnte man in Aussagenlogik ausdrücken, dass alle Menschen sterblich sind um damit herleiten zu können, dass auch Sokrates sterblich ist?

– Man braucht eine Wissensbasis, die für jeden Menschen enthält, dass er/sie sterblich ist:

Sokrates ist ein Mensch → Sokrates ist sterblich
Knut ist ein Mensch → Knut ist sterblich
Peter ist ein Mensch → Peter ist sterblich
Petra ist ein Mensch → Petra ist sterblich
…

– Dies ist unmöglich für alle Menschen. Prädikatenlogik erlaubt eine elegante Formulierung durch Verwendung von Prädikaten, Termen und Quantoren

Der Klassiker in Prädikatenlogik

– Die Prädikatenlogik ermöglicht eine elegantere Formulierung:

$$\text{mensch(sokrates)}$$

Sokrates ist ein Mensch

$$\forall x\ \ \text{mensch}(x) \rightarrow \text{sterblich}\ (x)$$

Alle Menschen sind sterblich

Atomare Formeln in der Prädikatenlogik

- Der wesentliche Unterschied zwischen Aussagenlogik und Prädikatenlogik sind die atomaren Formeln.
- In der Aussagenlogik haben **atomare Formeln** keine weitere Struktur. Es sind einfach aussagenlogische Variablen, die wahr oder falsch sind, z.B.
  - Die Strasse ist Nass
  - A
  - DSn
- In der Prädikatenlogik besteht eine atomare Formel aus einem **Prädikatsymbol** und **Termen**, z.B.
  - mensch(sokrates)
  - sterblich(x)
  - p(a,b,x)

Syntax der Prädikatenlogik (1): Terme

Terme

1. Jede Konstante ist ein Term.
2. Jede Variable ist ein Term.
3. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

- Für **Variablen** verwenden wir meist die Buchstaben vom Ende des Alphabets: x, y, z, v, w, …
- Für **Konstanten** verwenden wir entweder Buchstaben vom Anfang des Alphabets: a,b,c, … oder Zeichenketten, die für ein Ding/Begriff stehen wie Namen: sokrates, bern,
- Für **Funktionssymbole** verwenden wir entweder die Buchstaben f, g, h, … oder Zeichenketten

(Ertel 2021, S. 48)

Syntax der Prädikatenlogik (2): Formeln

– In der Prädikatenlogik bestehen atomare Formeln aus Prädikatssymbolen und Termen

Prädikatenlogische Formeln

1. Ist p ein n-stelliges Prädikatsymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $p(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel.
2. Sind A und B Formeln, dann sind auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B$ Formeln.
3. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind $\forall x\ F$ und $\exists x\ F$ Formeln.

(Ertel 2021, S. 48)

Bezeichnung	Aussagenlogik	Prädikatenlogik
Elementare Aussagen	mensch_sokrates	mensch(sokrates)
∧ Und	$X \land Y$	$X \land Y$
∨ Oder	$X \lor Y$	$X \lor Y$
¬ Negation	$\neg X$	$\neg X$
→ Implikation	$X \rightarrow Y$	$X \rightarrow Y$
↔ Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
∃ Existenzquantifizierung	--	$\exists x$ mensch(x)
∀ Allquantifizierung	--	$\forall x$ mensch(x)

- mensch und sterblich sind Prädikatssymbole
- sokrates ist eine Konstante
- x ist eine Variable
- $\forall x$ heisst "für alle x"

mensch(sokrates)

$\forall x \ \ \text{mensch}(x) \rightarrow \ \text{sterblich}(x)$

Beispiele für prädikatenlogische Formeln

Beschreibung

Alle Menschen sind sterblich

Jeder mag Kuchen

Nicht jeder mag Kuchen

Es gibt jemanden, der Kuchen mag

Keiner mag Kuchen

Es gibt etwas, das jeder mag

Es gibt jemanden, der alles mag

Jedes Ding wird von jemandem geliebt

Jeder mag etwas

Bob mag jeden Kunden

Es gibt einen Kunden, der Bob mag

Alle weiblichen Kinder sind Mädchen

Es gibt einen Bäcker, der alle seine Kunden mag

Jede Mutter ist älter als ihr Kind

Jede Großmutter ist älter als das Kind ihrer Tochter

Interpretation von Prädikaten

- Sei in der realen Welt, Knut der Vater von Jens
- Welches der beiden Prädikate ist korrekt?
  - *vater(knut,jens)*
  - *vater(jens,knut)*

Wahrheitswert prädikatenlogischer Formeln

Der **Wahrheitswert** einer Formel ergibt gibt sich analog der Aussagenlogik, indem man die Formeln auf eine reale Welt abbildet. Diese Abbildung heisst Belegung oder **Interpretation I**.

- Konstanten werden abgebildet auf reale Objekte eines Gegenstandsbereichs G

  $I_{obj} : K \rightarrow G$

- Funktionssymbole werden auf Funktionen A der Bezugswelt abgebildet

  $I_{funktion} : F \rightarrow A$

- Prädikatsymbole werden auf Relationen R der Bezugswelt abgebildet

  $I_{prädikat} : P \rightarrow R$

Beispiele: Sei der Gegenstandsbereich eine Menge von Personen

mensch(sokrates)	*mensch* steht für die Relation "Mensch sein", *sokrates* steht für die Person Sokrates
vater(knut,jens)	Dies ist eine wahre Aussage unter der Interpretation, die *knut* auf den Dozenten dieser Vorlesung abbildet und *jens* auf seinen Sohn
aelter(mutter(uwe), uwe)	Dies ist eine wahre Aussage, wenn die Mutter von Uwe älter ist als Uwe

Lämmel & Cleve 2021, S. 56f),

Wahrheit prädikatenlogischer Formeln

- Eine atomare Formel $p(t_1, \ldots, t_n)$ ist **wahr** unter der Interpretation I, wenn nach Belegung und Auswertung aller Terme $t_1, \ldots, t_n$ und Belegung des Prädikates *p* durch die *n*-stellige Relation *R* gilt
$$(\mathrm{I}(t_1), \ldots, \mathrm{I}(t_n)) \in R\,.$$
- Die Wahrheit von quantorenfreien Formeln ergibt sich aus der Wahrheit der atomaren Formeln – wie in der Aussagenlogik – über die Semantik der logischen Operatoren.
- Eine Formel $\forall x\, F$ ist wahr unter der Interpretation I genau dann, wenn sie bei beliebiger Änderung der Belegung für die Variable *x* wahr ist.
- Eine Formel $\exists x\, F$ ist wahr unter der Interpretation I genau dann, wenn es für die Variable *x* eine Belegung gibt, welche die Formel wahr macht.
- Eine Interpretation, die eine Formel wahr macht, heisst **Modell** der Formel

Beispiele: Sei der Gegenstandsbereich eine Menge von Personen

$\forall x\ aelter(mutter(x), x)$ Dies ist eine wahre Aussage, wenn unter allen Interpretation von x die Mutter von x älter ist als x

Prädikatenlogische Äquivalenzen für Quantoren

– Umwandlung von All- in Existenzquantoren

Bezeichnung	Aussagenlogik
All-Quantor	$\forall x\ Y \equiv \neg \exists x \neg Y$
Existenzquantor	$\exists x\ Y \equiv \neg \forall x \neg Y$
Negierter All-Quantor	$\neg \forall x\ Y \equiv \exists x \neg Y$
Negierter Existenzquantor	$\neg \exists x\ Y \equiv \forall x \neg Y$

(Lämmel & Cleve 2023, S. 58)

Prädikatenlogik und Wissensrepräsentation

Die Prädikatenlogik ist die Basis für verschiedene Arten der Wissensrepräsentation, z.B.

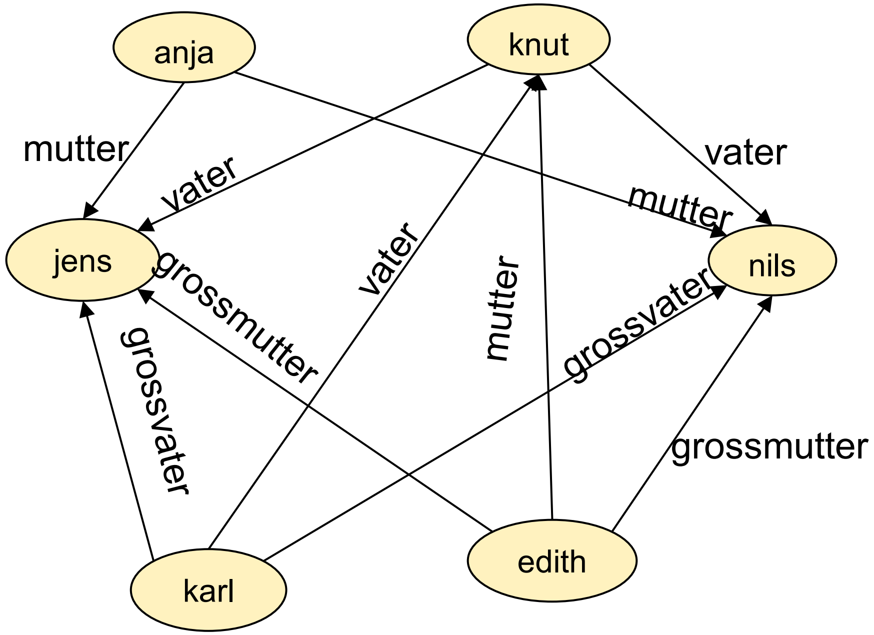
Regelbasierte Systeme

Beispiel: Prolog

```
mensch(sokrates).
mensch(knut).
vater(knut,jens).
vater(karl,knut).
mutter(anja,jens)
mutter(anja,nils).
mutter(edith,knut).

elternteil(X,Y)   :- mutter(X,Y).
elternteil(X,Y)   :- mutter(X,Y).
grossvater(X,Y)   :- vater(X,Z,
                     elternteil(Z,Y).
grossmutter(X,Y)  :- mutter(X,Z,
                     elternteil(Z.Y).
```

Wissensgraphen



Semantische Folgerung

– Die semantische Folgerung in Prädikatenlogik ist definiert wie in der Aussagenlogik

Sei X eine Menge prädikatenlogischer Formeln, Y eine prädikatenlogische Formel.

Y ist eine **semantische Folgerung** von X

oder

Y **folgt** aus X

falls jedes Modell von X auch **Modell** von Y ist. Man schreibt dafür $X \models Y$.

(Lämmel & Cleve 2023, S. 57)

Ableitbarkeit

– Auch in der Prädikationlogik gibt es Ableitung analog zur Aussagenlogik

Y ist aus X ableitbar,

$$X \vdash Y$$

wenn eine endliche Folge von Inferenzschritten existiert, so dass man von X zu Y gelangt.

Hornklausel-Wissenbasis in Prädikatenlogik

Relevant für Wissensrepräsentation sind Hornklauseln

Eine **Hornklausel** ist wie in der Aussagenlogik eine Klausel mit maximal einem positiven Literal

B	*(Fakt)* oder
$A_1 \land . . . \land A_m \rightarrow B$	*(Regel)* oder
$A_1 \land . . . \land A_m \rightarrow f$	*(negiert Anfrage)*

Die Variablen der Klauseln sind all-quantifiziert, die Quantoren werden weggelassen.

Ein **Literal** hat die Form $p(t_1, . . . , t_n)$ oder $\neg p(t_1, . . . , t_n)$

Beispiele:

$mensch(sokrates)$

$mensch(x) \rightarrow sterblich(x)$

$kind(x) \land weiblich(x) \rightarrow maedchen(x)$

In Klauselform:

$mensch(sokrates)$

$\neg\ mensch(x) \lor sterblich(x)$

$\neg\ kind(x) \lor \neg\ weiblich(x) \lor maedchen(x)$

Prolog-Syntax

"if" / "wenn"	:-
"and" / "und"	,
"or" / "oder"	;
"not" / "nicht"	not

– Variablen: beginnen immer mit einem Grossbuchstaben oder einem "Underscore"
– Beispiel von Fakten und Regeln:

```
likes(dan, sally).
likes(sally, dan).
likes(josh, brittney).
```

```
friendship(X, Y) :-
likes(X, Y);
likes(Y, X).
```

```
mensch(sokrates)
sterblich(X) :- mensch(X).
```

Beispiel für Regel: Es existiert eine Freundschaft zwischen X und Y, **wenn** X likes Y **oder** Y likes X.

Zwei Arten von Anfragen

Prädikatenlogik:

$\text{mensch}(\text{sokrates})$
$\forall x \ \text{mensch}(x) \rightarrow \text{sterblich}(x)$

Prolog:

```
mensch(sokrates)
sterblich(X) :- mensch(X).
```

- Überprüfungen ob eine Aussage wahr ist
  - Beispiel: Ist Sokrates sterblich?
  - Zu beweisende Aussage: $\text{sterblich}(\text{sokrates})$

```
?- sterblich(sokrates).
```

- "Berechnen" für welche Werte eine Aussage wahr ist
  - Finde alle Variablenbelegungen, die eine Aussage wahr machen
  - Beispiel: Wer ist sterblich?
  - Zu beweisende Aussage: $\text{sterblich}(x)$

```
?- sterblich(X).
```

Beweisverfahren

- Die Beweisverfahren (Kalküle) sind analog zur Aussagenlogik
  - Modus Ponens
  - Modus Tollens
  - Resolution

- Beispiel: Aus

$$\text{mensch(sokrates)}$$
$$\forall x \ \text{mensch}(x) \rightarrow \text{sterblich}(x)$$

kann man sterblich(sokrates) ableiten

Problem?

Wie kann der Kalkül wissen, dass "sokrates" für die Variable x eingesetzt werden kann

Ableitung in Prädikatenlogik

– In der Prädikatenlogik werden die Inferenzregeln dahingehend erweitert, dass Variablen belegt werden können

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{l} \text{mensch(sokrates)} \\ \forall x \ \text{mensch}(x) \rightarrow \ \text{sterblich}\ (x) \end{array}}{\text{sterblich (sokrates)}}$$

wenn x durch sokrates ersetzt wird.
Man schreibt dafür {x/sokrates}

Resolution:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{mensch(sokrates)} \\ \neg\, \text{mensch}(x) \lor \ \text{sterblich}\ (x) \\ \{x/\text{sokrates}\} \end{array}}{\text{sterblich (sokrates)}}$$

Resolutionsregel für Prädikatenlogik

Die Resolutionsregel für zwei Klauseln in Prädikatenlogik lautet

$$\frac{(A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee B), \quad (\neg B' \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n) \qquad s(B) = s(B')}{(s(A_1) \vee \ldots \vee s(A_m) \vee s(C_1) \vee \ldots \vee s(C_n))},$$

wobei s der allgemeinste Unifikator von B und B' ist.

– Beispiel:

$$\frac{(mensch(sokrates)), \quad (\neg\, mensch(x) \vee sterblich(x)) \qquad \{x/sokrates\}}{sterblich(sokrates)}$$

(Ertel 2021, S. 61)

Unifikation

Zwei Literale L_1 und L_2 heissen **unifizierbar**, wenn es eine Ersetzung (Substituion) s für alle Variablen gibt, welche die Literale gleich macht:

$$s(L_1) = s(L_2)$$

Solch eine Substitution s heisst **Unifikator** von L_1 und L_2 .

Ein Unifikator heisst **allgemeinster Unifikator** (engl. most general unifier - MGU), wenn sich aus ihm alle anderen Unifikatoren durch Ersetzung von Variablen ergeben.

Um den allgemeinsten Unifikator zu finden, geht man von links rechts durch die beiden Literale und ersetzt die Variable in einem Literal durch die entsprechenden Terme im anderen Literal

(Lämmel & Cleve 2023, S. 61)

Aufgaben Unifikation

– Berechne die Unifikatoren der folgenden Literale

kenntt(peter, x) und *kennt(peter, maria)*	$\{x/maria\}$
kennt(peter,x) und *kennt(y,paul)*	$\{x/paul, y/peter\}$
kennt(peter,x) und *kennt(y,mutter(y))*	$\{y/peter, x/mutter(peter)\}$
kennt(peter,x) und *kennt(x,maria)*	Fehler

Die letzte Unifikation schlägt fehl, weil x nicht gleichzeitig die Werte peter und maria annehmen kann.