Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

member of swissuniversities

AACSB ACCREDITED

Logik
Teil 1: Aussagenlogik

Künstliche Intelligenz | BSc BAI

Knut Hinkelmann

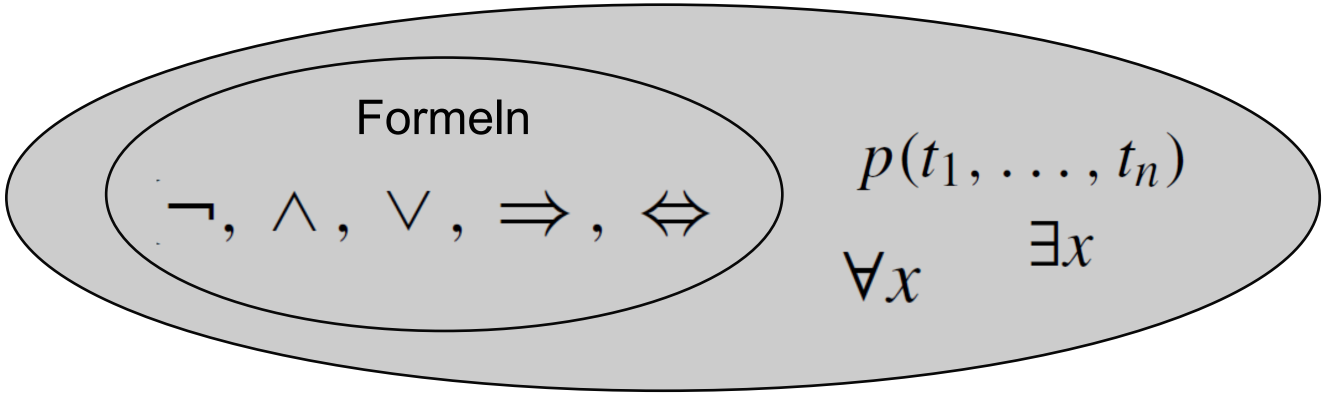
Logik…

…korrektes, folgerichtiges **Denken**

Formen der Logik

- In der **Aussagenlogik** geht es um den Gültigkeit von Aussagen, die durch logische Operatoren zusammengesetzt sind.

- In der **Prädikatenlogik** haben atomare Aussagen eine Struktur (Prädikat und Argumente) und sie verwendet Quantoren (es existiert, für alle)



Aussagen

- Aussagen können nur wahr oder falsch sein, sie sind nicht halbwahr oder wahrscheinlich.
- Beispiele für Aussage:
  - Es regnet.
  - Die Firma hat Gewinn erwirtschaftet.
  - Der Schweizer Fußballmeister 2028 heisst FC Wohlen.

Zweiwertige Aussagen

- Die klassische Logik betrachtet nur zweiwertige Aussagen:
  - Jede Aussage ist **entweder wahr oder falsch**.
  - Es gibt keine Aussage, die sowohl falsch als auch wahr ist.
- Man bezeichnet diese Annahmen als den Satz vom ausgeschlossenen Dritten oder vom ausgeschlossenen Widerspruch.

Beispiele für verknüpfte Aussagen: UND

– Sei A diese Aussage:

  „Die BMW-Aktie ist um 10% gestiegen.“

– Sei B die Aussage

  „Der Dollar ist um 1% gefallen.“,

– Die Formel A ∧ B für die Verknüpfung der beiden Aussagen A und B:

  „Die BMW-Aktie ist um 10% gestiegen und der Dollar ist um 1% gefallen.“

Syntax der Aussagenlogik

In der Aussagenlogik werden elementare Aussagen durch **aussagenlogische Variablen** dargestellt.

- Alle Aussagenvariablen sind Formeln.
- Sind A und B aussagenlogische Formeln, dann auch:

  (A)

  $\neg A$

  $A \wedge B$

  $A \vee B$

  $A \rightarrow B$

  $A \leftrightarrow B$

Diese elegante rekursive Definition der Menge aller Formeln erlaubt uns nun die Erzeugung von unendlich vielen Formeln, z.B.

$A \wedge B$, $A \wedge B \wedge C$, $A \wedge A \wedge A$, $C \wedge B \vee A$, $(\neg A \wedge B) \rightarrow (\neg C \vee A)$

Lämmel & Clve 2021, S. 34), (Ertel 2021, S. 29)

Bedeutung der Verknüpfungen

Symbol	Bezeichnung	Beispiel	Aussage ist wahr, falls …
$\wedge$	Und	$X \wedge Y$	X und Y wahr sind
$\vee$	Oder	$X \vee Y$	X oder Y wahr sind
$\neg$	Negation	$\neg X$	X falsch ist
$\rightarrow$	Implikation	$X \rightarrow Y$	Y wahr ist, falls X wahr ist
$\leftrightarrow$	Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y$	X genau dann wahr ist, wenn Y wahr ist

Aufgabe

- Repräsentiere die folgenden Sätze als aussagelogische Formel
  - Petra mag sowohl Äpfel als auch Birnen
  - Petra mag weder Äpfel noch Birnen
  - Klaus fährt nur mit dem Fahrrad wenn die Sonne scheint
  - Es stimmt nicht, dass die Erde eine Scheibe ist
  - Wenn die Sonne scheint fährt Klaus mit dem Fahrrad

Alltagssprache und logische Formeln

Satz	Aussagenlogische Form
… und …	$A \wedge B$
Sowohl … als auch …	$A \wedge B$
Aber, jedoch, obwohl	$A \wedge B$
… oder …	$A \vee B$
Wenn A dann B; aus A folgt B	$A \rightarrow B$
A, vorausgesetzt dass B gilt	$B \rightarrow A$
A, falls/wenn B	$B \rightarrow A$
A nur dann, wenn B	$A \rightarrow B$
A genau dann, wenn B	$A \leftrightarrow B$
Entweder A oder B	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
Weder A noch B	$\neg A \wedge \neg B$
A, es sei denn B	$(B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg B \rightarrow A)$
Es stimmt nicht, dass …	$\neg(\ldots)$

Semantik: Bedeutung einer aussagenlogischen Formel

Sei M die Menge aller aussagenlogischen Formeln. Eine Funktion

$$I : M \rightarrow \{w, f\}$$

heisst **Belegung** oder **Interpretation**

- Eine Interpretation ordnet jeder aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zu
- Mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle kann den Wahrheitswert einer zusammengesetzten aussagenlogischen Formel bestimmen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Wahrheitswerttabelle

– Mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle kann man den Wahrheitswert einer zusammengesetzten aussagenlogischen Formel bestimmen.

A	B	$\neg A$	$A \land B$	$A \lor B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aufgabe

– Was wäre eine Interpretation der logischen Variablen?

$PmA \land PmB$

$\neg PmA \land \neg PmB$

$So \rightarrow Kf$

$\neg Ei$

$So \rightarrow KfF$

Interpretationen

- Es gibt beliebig viele Interpretationen von Formeln
  - Beispiel: die Formel

    PmA

    könnte z.B. folgende Interpretationen haben:

    Petra mag Äpfel

    Pascel malt ein Auto

    Franz trinkt Kaffee

    …

- Für Formeln, die als Satz geschrieben sind, nimmt man in der Regel als Interpretation die übliche Bedeutung des Satzes

  Petra mag Äpfel

NICHT $\neg$

– Ist ein Satz wahr, dann ist die Verneinung falsch

A	$\neg A$
w	f
f	w

A:	Der Kreis ist rund	*wahr*
$\neg$ A:	Der Kreis ist NICHT rund	*falsch*

A:	Das Viereck ist dreieckig	*falsch*
$\neg$ A:	Das Viereck ist NICHT dreieckig	*wahr*

UND $\wedge$

– UND ist wahr wenn beide Sätze wahr sind

– UND ist falsch wenn mindestens ein Satz falsch ist

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A: Ein Kreis ist rund *wahr*
B: Ein Rechteck ist viereckig *wahr*

A: Ein Kreis ist viereckig *falsch*
B: Ein Rechteck ist dreieckig *falsch*

ODER $\vee$

- ODER ist wahr wenn einer von zwei Sätzen wahr ist
- ODER ist falsch, wenn beide Sätze falsch sind

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A: Ein Kreis ist dreieckig *falsch*
B: Ein Rechteck ist viereckig *wahr*

A: Ein Kreis ist dreieckig *falsch*
B: Ein Rechteck ist rund *falsch*

ODER $\vee$

Petra mag Birnen $\vee$ Petra mag Äpfel

Wir wissen nicht, welches Obst Petra mag. Wir wissen nur, dass es Birnen oder Äpfel sind – oder beides

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

WENN … DANN $\rightarrow$

WENN es regnet DANN ist die Strasse nass

- Wenn die Bedingung wahr ist, dann ist auch die Folgerung wahr
- Wenn die Bedingung falsch ist, dann ist der Satz immer wahr

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A: Es regnet *wahr*
B: Die Strasse ist nass *wahr*
wahr ✓

A: Es regnet *wahr*
B: Die Strasse ist trocken *falsch*
falsch ✓

A: Es regnet nicht *falsch*
B: Die Strasse ist nass *wahr*
wahr ✓

A: Es regnet nicht *falsch*
B: Die Strasse ist trocken *falsch*
wahr ✓

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Eine Formel heisst

- **erfüllbar**, falls sie bei mindestens einer Interpretation wahr ist.
- **falsifizierbar**, falls eine Interpretation existiert, so dass die Formel falsch wird,
- **allgemeingültig** oder **wahr**, falls die Formel unter jeder Interpretation wahr wird; eine allgemeingültige Formel wird auch **Tautologie** genannt.
- **unerfüllbar** oder **falsch**, falls keine Interpretation existiert, so dass die Formel wahr wird.

Übung: Allgemeingültige Aussagen

– Prüfe, ob folgende Aussage erfüllbar, unerfüllbar oder allgemeingültig sind

$$\text{Die Strasse ist nass} \lor \neg\ \text{Die Strasse ist nass}$$
$$\text{Die Strasse ist nass} \land \neg\ \text{Die Strasse ist nass}$$
$$\text{Die Strasse ist nass} \lor \text{Rom liegt in Italien}$$
$$\text{Die Strasse ist nass} \land \text{Rom liegt in Italien}$$
$$\text{Rom liegt in Spanien} \land \text{Rom liegt in Italien}$$
$$\text{Rom liegt in Italien} \rightarrow \text{Die Strasse ist nass}$$
$$\text{Rom liegt in Spanien} \rightarrow \text{Die Strasse ist nass}$$

Beweise durch Wahrheitstabelle

- Die Überprüfung, ob eine Aussage allgemeingültig ist, nennt man Beweis.
- Eine Möglichkeit, eine Aussage auf Allgemeingültigkeit zu prüfen, ist es, eine Wahrheitstabelle mit allen möglichen Belegungen der Aussagevariablen zu erstellen

Die Aussage ist allgemeingültig, denn ihr Wahrheitswert is w für alle Belegungen von A und B.

- Beispiel: Beweis von $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$A \longrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Allgemeingültigkeit und Äquivalenz

Zwei aussagenlogische Formeln X und Y heissen **äquivalent**,

$$X \equiv Y ,$$

falls für jede beliebige Interpretation gilt: Eine Interpretation ist ein Modell für X genau dann, wenn sie auch Modell für Y ist.

– Man kann es auch anders ausdrücken:

Zwei aussagenlogische Formeln X und Y sind **äquivalent**,
$X \equiv Y$, genau dann wenn $X \leftrightarrow Y$ allgemeingültig ist

Allgemeingültige Aussagen

– Die folgenden Äquivalenzen sind allgemeingültig

$A \lor \neg A$	$\leftrightarrow$	w	
$A \land \neg A$	$\leftrightarrow$	f	
$A \lor w$	$\leftrightarrow$	w	
$A \lor f$	$\leftrightarrow$	A	
$A \land f$	$\leftrightarrow$	f	
$A \land w$	$\leftrightarrow$	A	
$\neg A \lor B$	$\leftrightarrow$	$A \rightarrow B$	(Implikation)
$A \rightarrow B$	$\leftrightarrow$	$\neg B \rightarrow \neg A$	(Kontraposition)
$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$	$\leftrightarrow$	$(A \leftrightarrow B)$	(Äquivalenz)
$\neg(A \land B)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \lor \neg B$	(Erste Regel von De Morgan)
$\neg(A \lor B)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \land \neg B$	(Zweite Regel von De Morgan)
$A \lor (B \land C)$	$\leftrightarrow$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$	(Distributivgesetze)
$A \land (B \lor C)$	$\leftrightarrow$	$(A \land B) \lor (A \land C)$	

$A \lor \neg A$	$\equiv$	w
$A \land \neg A$	$\equiv$	f
$A \lor w$	$\equiv$	w
$A \lor f$	$\equiv$	A
$A \land f$	$\equiv$	f
$A \land w$	$\equiv$	A
$\neg A \lor B$	$\equiv$	$A \rightarrow B$
$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \rightarrow \neg A$
$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$	$\equiv$	$(A \leftrightarrow B)$
$\neg(A \land B)$	$\equiv$	$\neg A \lor \neg B$
$\neg(A \lor B)$	$\equiv$	$\neg A \land \neg B$
$A \lor (B \land C)$	$\equiv$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$
$A \land (B \lor C)$	$\equiv$	$(A \land B) \lor (A \land C)$

Wissensbasis

- Eine Wissensbasis ist eine (eventuell umfangreiche) aussagenlogische Formel

$$(S \lor R) \land ((\neg S \land R) \lor (So \land \neg S)) \land (\neg R \lor So)$$

- Ist die Wissensbasis eine Konjunktion von Formeln, wird das die Formeln verbindende $\land$ meist weggelassen

$S \lor R$	*Es schneit* $\lor$ *Es regnet*
$(\neg S \land R) \lor (So \land \neg S)$	($\neg$*Es schneit* $\land$ *Es regnet*) $\lor$ (*Die Sonne scheint* $\land$ $\neg$*Es schneit*)
$\neg R \lor So$	$\neg$*Es regnet* $\lor$ *Die Sonne scheint*

- In diesem Fall besteht die Wissensbasis aus einer Menge von Formeln

Semantische Folgerung (Inferenz)

- In der KI sind wir daran interessiert, aus bestehendem Wissen neues Wissen herzuleiten, beziehungsweise Anfragen zu beantworten.
- In der Aussagenlogik geht es darum zu zeigen, ob aus einer Menge X von Formeln (der Wissensbasis) eine Formel Y folgt.

Sei X eine Menge von aussagenlogischen Formeln, Y eine aussagenlogische Formel.

Y ist eine **semantische Folgerung** von X

falls jedes Modell von X auch Modell von Y ist. Man schreibt dafür

$$X \models Y$$

und sagt auch Y folgt aus X.

Inferenz mit der zweiten Regel von De Morgan

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

→ *Beide müssen falsch sein*

Was wissen wir über A und B?

A	B	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Beispiel:

$\neg$ (Petra mag Birnen $\vee$ Petra mag Äpfel)

$\neg$ Petra mag Birnen $\wedge$ $\neg$ Petra mag Äpfel

Petra mag weder Birnen noch Äpfel

Erläuterung der Schreibweise:Wenn die Formeln oberhalb der Linie wahr sind, dann ist auch die Aussage unterhalb der Linie war

Beweisverfahren (Kalkül)

- Eine Möglichkeit, das Durchprobieren aller Belegungen bei der Wahrheitstafelmethode zu vermeiden, ist die syntaktische Manipulation der Formeln X und Y durch Anwendung von Inferenzregeln
- Ziel ist es dabei, die Formel so stark zu vereinfachen, dass man am Ende sofort erkennt, dass $X \models Y$.
- Man bezeichnet diesen syntaktischen Prozess als Ableitung und schreibt $X \vdash Y$.
- Solch ein syntaktisches **Beweisverfahren** wird **Kalkül** genannt.

Logische Formeln und Wissensrepräsentation

- Für die Repräsentation von Wissen sind wir vor allem an logischen Implikationen interessiert
- Durch logische Implikationen können Regeln repräsentiert werden

Gesellschafter_hat_25000 → Gründung_GmbH_möglich

Es regnet → Die Strasse ist nass

Einkommen ist hoch → Kreditrisiko ist gering

Schneefall → Schnee

Wetter_schön ∧ Schnee → Skifahren

Beispiele für Inferenzregeln mit Implikationen/Regeln

Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Modus tollens

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Erläuterung der Schreibweise:
Wenn die Formeln oberhalb der Linie wahr sind, dann ist auch die Aussage unterhalb der Linie war

Modus Ponens - Beispiele

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Petra mag Birnen → Petra mag Äpfel
Petra mag Birnen

Petra mag Äpfel

Gesellschafter_hat_25000 → Gründung_GmbH_möglich
Gesellschafter_hat_25000

Gründung_GmbH_möglich

Logische Schlussfolgerung: Modus Tolens

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Petra mag keine Äpfel
Petra mag Birnen → Petra mag Äpfel

Petra mag keine Birnen

Ableitbarkeit

Y ist aus X ableitbar,

$$X \vdash Y$$

wenn eine endliche Folge von Inferenzschritten existiert, so dass man von X zu Y gelangt.

– Die Ableitbarkeit hängt von den zugrundeliegenden Schlussregeln ab

$X \models Y$	semantische Folgerung
$X \vdash Y$	Ableitbarkeit

Korrektheit und Vollständigkeit

Ein Beweisverfahren heisst **korrekt**, wenn für beliebige Formeln X,Y gilt:

Falls **X |– Y** dann gilt auch **X |= Y.**

Ein Beweisverfahren heisst **vollständig**, wenn für beliebige Formeln X,Y gilt:

Falls **X |= Y** gilt, dann gilt auch **X |– Y.**

- Die **Korrektheit** eines Kalküls stellt sicher, dass der Kalkül **keine „falschen Folgerungen“** produziert: alle abgeleiteten Aussagen sind logische Folgerungen
- Die **Vollständigkeit** eines Kalküls stellt sicher, dass der Kalkül **immer einen Beweis findet** , wenn die beweisende Formel aus der Wissensbasis folgt.

Resolution

- Modus Ponens und Modus Tolens als einzige Regeln sind zwar korrekt, aber nicht vollständig.
- Fügt man weitere Regeln hinzu, so kann man einen vollständigen Kalkül erzeugen, aber das Verfahren ist komplex, da man in derselben Situation verschiedene Inferenzregeln anwenden kann.
- Ein vollständiger und korrekter Kalkül ist der **Resolutionskalkül**.
  - Er besteht aus einer Inferenzregel: **Resolutionsregel**
  - Er verwendet eine einheiliche Darstellung von Formeln (Normalform)
  - Der Beweis erfolgt durch **Widerspruch**

Resolutionsregel

– Allgemeine Resolutionsregel leitet aus zwei Klauseln eine neue Klausel ab:

$$\frac{(A_1 \lor \ldots \lor A_m \lor B), \quad (\neg B \lor C_1 \lor \ldots \lor C_n)}{(A_1 \lor \ldots \lor A_m \lor C_1 \lor \ldots \lor C_n)}$$

– Die Resolutionsregel löscht aus den beiden Klauseln ein Paar von komplementären Literalen *B* und ¬*B* und vereinigt alle restlichen Literale zu einer neuen Klausel (genannt Resolvente).

– In der Resolvente werden Duplikate von Literalen in Klauseln löschen, d.h. A ∨ A wird zu A und ¬A ∨ ¬A wird zu ¬A (man nennt dies Faktorierung)

Resolutionsregel

– Allgemeine Resolutionsregel leitet aus zwei Klauseln eine neue Klausel ab:

$$\frac{(A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee B), \quad (\neg B \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n)}{(A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n)}$$

– Die Resolutionsregel löscht aus den zwei Klauseln (Disjunktionen) ein Paar von komplementären Literalen *B* und ¬*B* und vereinigt alle restlichen Literale zu einer neuen Klausel (genannt Resolvente).

– In der Resolvente werden Duplikate von Literalen in Klauseln gelöscht, d.h.

  – A ∨ A wird zu A und ¬A ∨ ¬A wird zu ¬A

Modus Ponens und Modus Tollens durch Resolution

Modus Poensn und Modus Tollens sind Spezialformen der Resolution

Modus ponens:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$$\frac{\neg A \vee B \qquad A}{B}$$

Modus tollens:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

$$\frac{\neg A \vee B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Konjunktive Normalform (2)

– Der Resolutionskalkül basiert auf Formeln in konjunktiver Normalform.

Ein **Literal** ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.

Hat eine Formel die Struktur: $(A \lor \ldots \lor B) \land \ldots \land (X \lor \ldots \lor Y)$
und sind A, B,X,Y ... Literale, so ist die Formel in **konjunktiver Normalform**.

Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)** genau dann, wenn sie aus einer **Konjunktion**

$$K_1 \land K_2 \land \ldots \land K_m$$

von Klauseln besteht. Eine Klausel K_i besteht aus einer **Disjunktion**

$$(L_{i1} \lor L_{i2} \lor \ldots \lor L_{in_i})$$

von Literalen.

Jede aussagenlogische Formel lässt sich in eine äquivalente konjunktive Normalform transformieren.

Aufgabe

– Bringe die folgende Formel in konjunktive Normalform: $A \lor B \rightarrow C \land D$

$$A \lor B \rightarrow C \land D$$

Hornklausel-Wissensbasen

- Von besonderem Interesse sind Wissensbasen bestehend aus atomaren Formeln (= Fakten) sowie Regeln mit einer Konjunktion von Bedingungen und genau einer Konklusion.
  - Fakten:

    $Wetter\_schön$ Das Wetter ist schön.

    $Schneefall$ Es schneit.

  - Regeln:

    $Schneefall \rightarrow Schnee$ Wenn es schneit, dann liegt Schnee.

    $Wetter\_schön \land Schnee \rightarrow Skifahren$ Wenn das Wetter schön ist und es liegt Schnee, dann kann man Ski fahren

Regeln als Hornklauseln

Darstellung als Fakten und Regeln

$$
\begin{aligned}
&Wetter\_schön\\
&Schneefall\\
&Schneefall \rightarrow Schnee\\
&Wetter\_schön \land Schnee \rightarrow Skifahren
\end{aligned}
$$

Darstellung als Klauseln

$$
\begin{aligned}
&Wetter\_schön\\
&Schneefall\\
&\neg Schneefall \lor Schnee\\
&\neg Wetter\_schön \lor \neg Schnee \lor Skifahren
\end{aligned}
$$

Widerspruchsbeweis

Äquivalenz von semantischer Folgerung und Widerspruchsbeweis

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $X \models Y$
- $X \wedge \neg Y$ ist widersprüchlich

– Um zu zeigen dass Y aus X folgt kann man auch die negierte Formel ¬Y zu X hinzufügen und daraus einen Widerspruch ableiten:

  – $X \models Y$ gilt genau dann wenn $X \wedge \neg Y$ unerfüllbar ist.

  (Y folgt aus X ableitbar, wenn das Hinzufügen von ¬Y zu X zu einem Widerspruch führt)

Widerspruchsbeweis durch Resolution

- Um im Resolutionskalkül zu beweisen, dass aus einer Wissensbasis WB eine Anfrage Q folgt, wird ein Widerspruchsbeweis durchgeführt
  - Die Wissensbasis wird in konjunktive Normalform umgewandelt
  - Die Klausel (¬Q) wird zur Wissensbasis hinzugefügt
- Widerspruch: Wir die Resolution auf zwei Klauseln (A) und (¬A) angewendet, so ergibt sich die leeren Klausel, die den Widerspruch repräsentiert.

Der Resolutionskalkül zum Beweis der Unerfüllbarkeit von Formeln in konjunktiver Normalform ist **korrekt** und **vollständig**. Das heisst, für jede unerfüllbare Formel kann man mit Resolution die leere Klausel herleiten.

Hornklausel-Wissensbasen

- Von besonderem Interesse sind Wissensbasen bestehend aus atomaren Formeln (= Fakten) sowie Regeln mit einer Konjunktion von Bedingungen und genau einer Konklusion.
  - Fakten:

$$Wetter\_schön$$

$$Schneefall$$

Das Wetter ist schön.

Es schneit.

  - Regeln:

$$Schneefall \rightarrow Schnee$$

$$Wetter\_schön \wedge Schnee \rightarrow Skifahren$$

Wenn es schneit,
dann liegt Schnee.

Wenn das Wetter schön ist und
es liegt Schnee,
dann kann man Ski fahren

- Anfragen werden negiert und als Regeln mit f als Konklusion dargestellt

$$Skifahren \rightarrow f$$

Kann man Ski fahren?

Resolution mit Hornklauseln

Darstellung als Regeln

$(1)\ Wetter\_schön$
$(2)\ Schneefall$
$(3)\ Schneefall \rightarrow Schnee$
$(4)\ Wetter\_schön \wedge Schnee \rightarrow Skifahren$

$(5)\ Skifahren \rightarrow f$

$(6)\ Wetter\_schön \wedge Schnee \rightarrow f$
$(7)\ Schnee \rightarrow f$
$(8)\ Schneefall \rightarrow f$
$(9)\ (\ )$

Wissensbasis

Anfrage (Ziel)

Resolutionsschritte

Darstellung als Klauseln

$(1)\ Wetter\_schön$
$(2)\ Schneefall$
$(3)\ \neg Schneefall \vee Schnee$
$(4)\ \neg Wetter\_schön \vee \neg Schnee \vee Skifahren$

$(5)\ \neg Skifahren$

$(6)\ \neg Wetter\_schön \vee \neg Schnee \quad Res(4,5)$
$(7)\ \neg Schnee \quad Res(6,1)$
$(8)\ \neg Schneefall \quad Res(7,3)$
$(9)\ (\ ) \quad Res(8,2)$

Hornklauseln

– Fakten sowie Regeln mit genau einer Konklusion sind äquivalent zu Hornklauseln

Klauseln mit höchstens einem positiven Literal der Formen

$$(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B) \text{ oder } (\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m) \text{ oder } B$$

heissen **Hornklauseln**

Sie sind äquivalent zu

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B \quad \text{oder} \quad A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow f \quad \text{oder} \quad B.$$

Eine Klausel mit nur einem positiven Literal heisst **Fakt**.

Das positive Literal einer Klausel heisst **Kopf**.

Resolutionsregel für Hornklauseln

– Resolutionsschritt für Regelformat

$$\frac{A_1 \land \ldots \land A_m \rightarrow B_1, \quad B_1 \land B_2 \land \ldots \land B_n \rightarrow f}{A_1 \land \ldots \land A_m \land B_2 \land \ldots \land B_n \rightarrow f}.$$

– Resolutionsschritt für Klauselformat

$$\frac{\neg A_1 \lor \ldots \lor \neg A_m \lor B_1, \quad \neg B_1 \lor \neg B_2 \lor \ldots \lor \neg B_n}{\neg A_1 \lor \ldots \lor \neg A_m \lor \neg B_2 \lor \ldots \lor \neg B_n}.$$

– Die Literale der negierten Anfrage heissen **Ziel** (engl.goal), die Literale der aktuellen Klausel heissen Teilziele

SLD-Resolution

- SLD-Resolution = Selection rule driven linear resolution for definite clauses
  - **Linear:** Es wird immer mit der aktuell hergeleiteten Klausel weitergearbeitet
  - **Selection rule driven**: die Literale werden der Reihe nach in fester Reihenfolge abgearbeitet (z.B. von links nach rechts)
- Jede Klausel hat genau ein positives Literal, das mit dem aktuellen Teilziel gematcht werden kann

$$\frac{\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B_1, \quad \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n}{.\ \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n}$$

- Um zu zeigen, dass B_1 wahr ist, muss nun gezeigt werden, dass $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ wahr sind.
- Dieser Prozess setzt sich so lange fort, bis die Liste der Teilziele der aktuellen Klausel (der so genannte goal stack) leer ist. Damit ist ein Widerspruch gefunden

Prolog

- SLD-Resolution spielt eine wichtige Rolle in der Logikprogrammiersprache **Prolog**
- In Prolog wird der Kopf der Hornklausel auf die linken Seite geschreiben
- Statt des Pfleiles wird :- geschrieben
- Damit lässt sich die Abarbeitung einfach verstehen:
  - In jedem Resolutionsschritt suche die Klausel (Regel oder Fakt), deren Kopf mit dem ersten Teilziel «identisch) ist.

PL1/Klauselnormalform	Prolog	Bezeichnung
$(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B)$	`B :- A1, ..., Am.`	Regel
$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow B$	`B :- A1, ..., Am.`	Regel
A	`A.`	Fakt
$(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$	`?- A1, ..., Am.`	Anfrage (Query)
$\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$	`?- A1, ..., Am.`	Anfrage (Query)

Resolution mit Hornklauseln

Darstellung als Regeln

$(1)\ Wetter\_schön$
$(2)\ Schneefall$
$(3)\ Schneefall \Rightarrow Schnee$
$(4)\ Wetter\_schön \wedge Schnee \Rightarrow Skifahren$

Darstellung in Prolog

```
wetter_schoen.
schneefall.
schnee :- schneefall.
skifahren :- wetter_schoen, schnee.
```

Anfrage

$(5)\ Skifahren \Rightarrow f$

Anfrage

```
?- skifahren.
```

Resolutionsschritte

$(6)\ Wetter\_schön \wedge Schnee \Rightarrow f$
$(7)\ Schnee \Rightarrow f$
$(8)\ Schneefall \Rightarrow f$
$(9)\ (\ )$

```
?- wetter_schoen, schnee.
?- schnee.
?- schneefall.
?- true
```

Wissensbasis

Diskussion

– Was ist der Zusammenhang von SLK-Resolution mit Suche?
– Was ist der Suchbaum bei der Resolution?
– Mit welcher Strategie wird der Suchbaum abgearbeitet?

SLD-Resolution = Tiefensuche

- Der Suchbaum entspricht den jeweils möglichen Inferenzschritten, d.h. der Auswahl der Klausel, die mit der aktuellen Klausel resolviert wird
- Die Tiefensuche wird erreicht, indem jeweils mit der aktuellen Klausel weitergearbeitet wird
- Wenn keine Klausel gefunden wird, die mit der aktuellen Klausel resolviert werden kann, gehe zurück (Backtracking)