Analyse de Fourier et Applications : Séance 2

KI Club info des Ponts

13 décembre 2016

Exercice 1.3

Pour $u \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $c_n(u)$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a aussi $c_n(u) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L^1}$ donc c_n est une forme linéaire continue de $L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
c_n(\overline{u}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u}(x) \exp(-inx) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u}(x) \exp(i(-n)x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u}(x) \overline{\exp(-i(-n)x)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-i(-n)x) dx} \\
&= \overline{c_{-n}(u)}
\end{aligned}$$

Pour le deuxième résultat, on effectue le changement de variable $y = -x$:

$$\begin{aligned}
c_n(\tilde{u}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(-x) \exp(-inx) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \exp(iny) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \exp(-i(-n)y) dy \\
&= c_{-n}(u)
\end{aligned}$$