선형대수학 HW2.

2.1절 Exercise 24

$AD = I_m$ ($m \times m$ Matrix)

행렬 A와 D의 곱이 identity Matrix가 되기 위해서는 행렬 A와 D가 각각 $(m \times m)$ Matrix 이므로

A는 행(row)이 열 (column)의 개수보다 많을 수 없다.

$Ax = b$ 에서 행렬 A는 행렬 D와 역행렬 관계를 가지므로

$$DAx = Db \quad (\because DA = I)$$

$x = Db$ 이다.

$\therefore$ Db는 $(m \times m)$ 행렬끼리의 곱이므로 $Ax = b$는 항상 해가 존재한다.

2.2절 Exercise 24

$\boxed{\text{Suppose}}$ $A : (n \times n)$

$Ax = b$는 해가 존재한다.

행렬 A가 invertible 하기 위해서는 $Ax = 0$ 이 trivial solution을 갖고 모든 행과 열에 pivot을 갖고 있어야 한다.

각각의 b ($b \in \mathbb{R}^n$) 에 대해서 하나의 solution을 가진다는 얘기는 free-variable이 존재하지 않는다는 뜻이므로

A 행렬은 invertible 하다.

$\therefore$ A must be invertible.

2.5절 Exercise 29

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_3 & 1 \end{pmatrix}$$ 이므로

$A_3(A_2(A_1x))$의 변환이 이루어진다.

$$\therefore A_3A_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 + R_2/R_1 & -R_2 \\ -1/R_1 - R_2/R_1R_3 - 1/R_3 & 1 + \frac{R_2}{R_3} \end{pmatrix}$$

(b).

$$A_3A_2A_1 = \begin{pmatrix} 4/3 & -12 \\ -1/4 & 3 \end{pmatrix}$$ 이므로

계산하면 $R_1 = 36$, $R_2 = 12$, $R_3 = 6$이다

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/36 & 1 \end{pmatrix}$$

2.9절 27 Exercise

(a)

a_j와 B는 모두 W의 벡터와 subspace에 span 한다.

c_j 벡터가 $\mathbb{R}^p$ 안에 있으므로 $(p \times \square)$ 행렬.

행렬 B는 $(w \times p)$ 행렬.

즉, Bc_j 는 $(w \times \square)$ 행렬이고

a_j 또한 $(w \times \Delta)$ 행렬이므로

a_j 와 Bc_j 는 W안에 있는 벡터이다.

그러므로 $a_j = Bc_j$ 가 존재한다.

b)

$$C = \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \cdots & c_q \\ \{ \left(\ \right) & \left(\ \right) & & \left(\ \right) \} \end{array}.$$

행렬 C의 row의 수가 q보다 작은 경우 free variable이 생길 수 있으므로 $Cu = 0$ 일때 nonzero인 u 벡터가 존재한다.

(c).

$C = [c_1 \cdots c_q]$ 에서

$Cu = 0$ 이 nonzero vector인 u를 가지므로 $Au = 0$은 nontrivial solution을 가진다.

$\therefore$ Columns of A는 linearly dependent하다.

2.9절 Exercise 28

A와 B가 subspace W of $\mathbb{R}^n$의 bases인 경우 A와 B는 n차원의 임의의 원소를 표현하는데 필요한 "최소" 벡터로 이루어진 집합이다. ~~그러므로~~

A와 B는 항상 linearly independent 하며 $(n \times n)$ matrix 이므로

A는 B보다 더 많은 벡터를 가질 수 없고 역으로 B또한 A보다 더 많은 벡터를 가질 수 없다.