22

$\boxed{\text{Ex 3b}}$

$3x_1^2 + 2x_1x_2$

$\to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ex 9}}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\therefore \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$

$\therefore \lambda = 2$ or $\lambda = 6$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to x_1 = x_2$

$\lambda = 2$ 일때 unit eigenvector는

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \to x_1 = -x_2$

$\lambda = 6$ 일때 unit eigenvector는

$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$x = Py$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$

$= x^TAx$

$= (Py)^T A (Py)$

$= y^T P^T A P y$

$= y^T D y = 2y_1^2 + 6y_2^2$

여기서 $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ 이다.

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

New quadratic form

: $2y_1^2 + 6y_2^2$

$\boxed{\text{Ex 23}}$

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$

$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$

그리고

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$

계수비교에 의해

$a + d = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_1\lambda_2 = ad - b^2$

$= \det A$

$\boxed{24}$

exercise 23에 의해서
$\det A > 0$ 이면, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 이므로
λ_1과 λ_2는 동일한 부호를 갖는다.

a) $\det A > 0$ 이고 $a > 0$ 이면
$d > 0$ 이기 때문에
$ad > 0$ 이다.
Ex23번에 의해 $\lambda_1 + \lambda_2 =$
$a + d > 0$ 이므로
λ_1과 λ_2는 동일한 부호를 가지며
둘 다 positive 하다.
그러므로 Q는 positive definite하다.

b). $\det A > 0$ 이고 $a < 0$ 이면
$d < 0$ 이기 때문에
$ad > 0$ 이다.
Ex23번에 의해 $\lambda_1 + \lambda_2 =$
$a + d < 0$ 이므로
λ_1과 λ_2는 동일한 부호를 가지며
둘 다 negative 하다.
그러므로 Q는 negative definite하다.

c) $\det A < 0$ 이면
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ 이므로
λ_1과 λ_2가 반대의 부호를 가진다.
그러므로 Q는 indefinitive하다.

$\boxed{25}$

B : $m \times n$ Matrix인 경우
$(BB^T)^T = B^{TT}B^T = BB^T$ 이므로
BB^T는 symmetric이다.
또한
$x^T B^T B x = (Bx)^T Bx$
$= \|Bx\|^2 \geq 0$ 이므로
quadratic form은
positive semidefinite이다.
$\therefore B^T B$: is positive semidefinite

B가 square, invertible 한
Matrix라고 가정해보자.
If) $x^T B^T B x = 0$ 이면
$\|Bx\| = 0$ 이고 $Bx = 0$ 이다.
B는 invertible 하므로
$x = 0$ 이다. 그러므로 $x \neq 0$ 이면
$x^T B^T B x > 0$ 이고
$B^T B$는 positive definite이다.