1 单纯形法

线性规划问题的标准形式：

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s.t. } AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

要点：

- 目标函数求最大
- 所有约束写成等号（通过松弛变量等）
- 所有决策变量大于等于 0
- a_{ij} 的符号无限制，b_j **必须为正**

单纯形表

例题：

$$\begin{array}{llllllll} \max z & = 3x_1 & -3x_2 & & +5x_4 & -x_5 & \\ \text{s.t.} & x_1 & & -2x_3 & +2x_4 & & = 12 \\ & & x_2 & -2x_3 & & & = 1 \\ & & & -4x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 27 \\ & & & x_1, & \ldots, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

初始单纯形表

	$c_j \rightarrow$		3	−3	0	5	−1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	12	1	0	−2	[2]	0
−3	x_2	1	0	1	−2	0	0
−1	x_5	27	0	0	−4	3	1
	$c_j - z_j$		0	0	−4	2	0
5	x_4	6	1/2	0	−1	1	0
−3	x_2	1	0	1	−2	0	0
−1	x_5	9	−3/2	0	−1	0	1
		18	−1	0	−2	0	0

上表中有关的说明：

- 全表第一行为目标函数的系数
- "b" 对应的一列为约束的系数，在后续进行线性变换时，**要**跟着变换。另注意标准型要求了 $b > 0$.
- C_B 一列为基变量 X_B 对应的系数，**不**跟随主矩阵进行线性变换，而是在换基迭代完成后更新基变量对应的系数
- $c_j - z_j$ 一行的具体计算方法为 $c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, 例如：$-4 = 0 - 3 \times (-2) - (-3) \times (-2) - (-1) \times (-4)$. 一个技巧为：基变量的此数值必然为 0.
- 当 $c_j - z_j$ 一行全部为负数时，即为最终解。若存在正数，则将其中**最大的正数**对应的作为入基变量
- 确定入基变量后，可确定出基变量。指标为入基变量列对应的**正 b/a 中的最小者**，即：
  1. 确定了入基变量为 x_4
  2. 对 x_1: $12 \div 2 = 6$
  3. 对 x_2: 除数为 0，跳过
  4. 对 x_3: $27 \div 3 = 9$
  5. 选取其中最小的正数为 6，对应 x_1, 因此 x_1 为出基变量
  6. 最终目标为通过线性变换令 [2] 变为 1，且其同一列的其他值为 0
- 最终的目标函数值为 18，计算方法为在最终的单纯形表中，计算 $C_B^T \cdot b$, 即 $5 \times 6 + (-3) \times 1 + (-1) \times 9 = 18$

以符号形式表示的通式：

			C	0
	X_b		X	X_s
0	X_s	b	A	I
C_B	X_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}
		$C_B B^{-1} b$	$C - C_B B^{-1} A$	$-C_B B^{-1}$

有关的说明：

- 这里假设了所有原始问题中的约束都是不等号，松弛变量直接生成了单位矩阵

初始问题无法找到一个单位阵的解决方案

（一）人工变量法（大 M 法）

在等式中引入适当的人工变量使初始单位矩阵存在，并在目标函数中添加 $-Mx_i$（x_i 是添加的人工变量）项，将 M 认为是一个无穷大的数。用这种方法进行换基迭代，如果最终添加的人工变量留在了基内，那就认为这个问题没有可行解。

（二）两阶段法

第一阶段，不处理原问题，而是处理去除人工变量的新问题：

目标函数：最小化所有人工变量之和（转化为最大化所有人工变量的相反数的和），与原目标函数无任何关联

约束：与大 M 法相同，在原约束的基础上增加人工变量，使得存在初始单位矩阵。

若第一阶段使得所有人工变量全部成为非基变量，则进入第二阶段，否则无可行解。

第二阶段，在上一阶段结果的基础上去除所有的人工变量，并且恢复原始的目标函数，继续计算。

例题：转化为标准形式的原始问题为：

$$\begin{array}{llllllll} \max z & = -3x_1 & & +x_3 & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 4 \\ & -2x_1 & +x_2 & -x_3 & & -x_5 & = 1 \\ & & 3x_2 & +x_3 & & & = 9 \\ & & & x_1, & \ldots, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

大 M 法（在此基础上完全按照单纯形法逻辑进行计算即可）：

	$c_j \rightarrow$		−3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	−2	1	−1	0	−1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1

两阶段法，第一阶段：

	$c_j \rightarrow$		0	0	0	0	0	−1	−1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
−1	x_6	1	−2	1	−1	0	−1	1	0
−1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1

据此计算最终将会得到

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2	1/2	−1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	−1/2	1/6
	$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	−1	−1

第二阶段的开始：

	$c_j \rightarrow$		−3	0	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
−3	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2

此后完全按照正常逻辑即可。

无可行解：在所有检验数 ≤ 0 的情况下，基变量中含有非零的人工变量

无穷多最优解：在所有检验数 ≤ 0 的情况下，存在非基变量的检验数为 0

无界解：对某一检验数 > 0, 其对应的 P_j（主体矩阵对应列）中的所有系数均 ≤ 0

---

2 对偶理论

原问题与对偶问题的标准形式：

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s.t. } AX &\leq b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min w &= Y^T b \\ \text{s.t. } A^T Y &\geq C^T \\ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

对非标准情况，具体的变化见下表。

对应项目	原问题	对偶问题
目标函数类型	max	min
目标函数系数与约束右边项	目标函数系数 右边项系数	右边项系数 目标函数系数
变量与约束	变量数 n 约束数 m	约束数 n 变量数 m
变量类型与约束类型	变量 ≥ 0 变量 ≤ 0 变量无限制 约束 $\geq$ 约束 $\leq$ 约束 $=$	约束 $\geq$ 约束 $\leq$ 约束 $=$ 变量 ≤ 0 变量 ≥ 0 变量无限制

例如，一个具体的原问题和对偶问题分别为：

$$\begin{array}{llll} \max z & = 2x_1 & +x_2 & \\ & & 5x_2 & \leq 15 \\ & 6x_1 & +2x_2 & \leq 24 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \min w & = 15y_1 & +24y_2 & +5y_3 & \\ & & 6y_2 & +y_3 & \geq 2 \\ & 5y_1 & +2y_2 & +y3 & \geq 1 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

对其按照标准方法进行单纯形法计算可分别得到：

		原变量		原松弛变量		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
$c_j - z_j$		0	0	0	1/4	1/2
		对偶剩余变量		对偶变量		
		y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

		对偶变量			对偶剩余变量	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	1/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4
y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
$c_j - z_j$		15/2	0	0	7/2	3/2
		原松弛变量			原变量	
		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

注意原变量/松弛变量，约束右边项/最终检验系数，以及 A 矩阵之间负转置的关系。

对偶性质：

- 原问题最优解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界；反之是上界
- 原问题有最优解，则对偶问题有最优解且最终目标函数相等，因此在上例子中，可以只通过一个表读出两个问题的目标函数最优解
- 原问题无界，则对偶问题无可行解
- 原问题无可行解，则对偶问题无界
- **互补松弛性质：** 在原问题最优解中，如果某一约束条件对应的对偶变量值 $\neq 0$, 则这约束取严格等式；反之如果约束条件取严格不等式，则对应的对偶变量必为 0.

一种约束的影子价格：其在对偶问题中对应的变量在最优解时候的值。

单位为：目标函数单位/资源单位

意义为：

- 保持其他条件不变
- 资源在【算出来的一定区间之内】变化
- 增加一单位资源（约束右边项 b）能够增加的目标函数值

对偶单纯形法：

标准形式：其余要求与原标准形式相同，但是不要求 b 的正负性，但要求初始单纯形表中的所有检验系数 $c_j - z_j$ 必须全部为负数。

- 如果所有 $b \geq 0$，则表明问题已经达到最优解，否则取负的 b 中**最小的**（绝对值最大的）作为出基变量
- 在出基变量对应行中，如果所有的 $a_{ij} \geq 0$，则原问题无可行解。否则，对于所有**为负数**的 a_{ij}，选其中 $\dfrac{c_j - z_j}{a_{ij}}$ 的**最小者**对应的变量为入基变量

灵敏度分析（以下 B^{-1} 是最终单纯形表中，位于初始单纯形表中单位矩阵位置的数字）：

c_j 变化：更换最终单纯形表中 c_j，并正常继续计算，**注意开头行和基列都要更换**

b_j 变化：运用公式 $\Delta b' = B^{-1}\Delta b$，将 b 的变化反映到最终的单纯形表中

增加一个变量 x_j：计算 $P_j' = B^{-1}P_j$，并入原表最右侧后计算 $\sigma_j' = c_j - z_j$

参数 a_{ij} 变化：将发生变化的那一列看作是一种新的产品，按上一条的方法并在原列的右侧并删去原列。若原列为基变量， P_j' 可能不再符合基变量的要求。此时通过线性变换将其变换至符合要求（b 以及 A 矩阵的其他部分也跟着变化）。此后再计算时，有可能 $b \geq 0$ 与 $c_j - z_j \leq 0$ 均不满足。此时，将 b 为负的行两端乘以 -1，并加上一个人工变量（原单位矩阵的 1 变为了 -1，因此需要人工变量再生成一个 1），在目标函数中其权重为 $-M$，随后继续通过单纯形法继续计算。

增加一个约束条件：首先，将原问题最优解代入新的约束，如果满足则最优解不变。否则，将新的约束直接作为新的一行添加入。之后，原为单位矩阵的列很可能不再符合要求（新的一行不为 0），要进行线性变换（将新加入一行变为 0）使其符合要求。

参数线性规划：令 $\lambda = 0$ 算出最终单纯形表，之后再将 λ 反映到最终的单纯形表中，再进行上述灵敏度分析类似的计算。

当多个目标函数系数 c_j 同时发生变化时，**使用 100% 法则。**

每个系数 c_j 单独变化时可以算出其最优解保持不变时允许的变化范围 $L_j \leq c_j \leq U_j$. 定义比率系数 $r_j = \begin{cases} \Delta c_j/(U_j - c_j) & \Delta c_j \geq 0 \\ \Delta c_j/(L_j - c_j) & \Delta c_j \leq 0 \end{cases}$，其中 Δc_j 为问题中发生的实际增减量。

对于所有发生变化的 c_j，如果 $\sum r_j \leq 1$，则最优解必然保持不变。反之有可能变化（但是也非必然变化）。

当多个约束右边项系数 b_i 同时变化时，**使用 100% 法则。**

每个系数 b_i 单独变化时可以算出其最优解保持不变时允许的变化范围 $L_i \leq b_i \leq U_i$.

定义比例系数 $r_i = \begin{cases} \Delta b_i/(U_i - b_i) & \Delta b_i \geq 0 \\ \Delta b_i/(L_i - b_i) & \Delta b_i \leq 0 \end{cases}$，其中 Δc_j 为题中实际发生的增减量。

对于所有发生变化的 r_i，如果 $\sum r_i \leq 1$，则所有的影子价格均保持不变。反之有可能变化（但是也非必然变化）。

---

3 运输问题

基本问题标准形式的要求：产销平衡。基变量的个数应当始终保持 $m + n - 1$ 个。产地竖向排列，销地横向排列。表中是费用，优化目标是总费用最小化。

给出运输问题的初始基可行解（Vogel 法过于复杂，略去）：

- 最小元素法，首先尽可能地填充运输费用最小的 cell
- 西北角法，首先尽可能地填充左上角的 cell

所有被填充有数字的就作为基可行解。注意基变量的个数始终保持 $m + n - 1$ 个，如果不足则在适当位置填充 0.

定义：一个空格（非基变量）的闭回路，是除了它以外均为填有数字的格（基变量），由水平和竖直线段连接起来的封闭回路。（标记为 1-2-3...-1）

解的最优性检验：

- 闭回路法：对于一个闭回路，奇数位置的 c_{ij}（运输费用）之和（包括 1 点出发点本身，但是只计算一次）减去偶数位置的 c_{ij} 之和，如果均 ≥ 0，则已经达到最优解。
- **对偶变量法（位势法）**：一个产地（行）对应一个 u_i，一个销地（列）对应一个 v_j，假设任意 u_i 为 0，对每一个基变量所在的 c_{ij}，有 $u_i + v_j = c_{ij}$. 此后，对所有的非基变量，通过 $c_{ij} - u_i - v_j$ 算出检验数。如果均 ≥ 0，则已为最优解。

解的改进：

1. 选定检验系数为负数且最小（绝对值最大）的 x_{ij} 为入基变量
2. 对于入基变量的闭回路，找出偶数顶点上 x_{ij} 最小的那一个
3. 将整条回路上所有奇数顶点增加这个数字，所有偶数顶点减去这个数字

注意如果有两个点同时减为了 0，只能将一个作为空点（打 ×），其他的必须写 0 仍然作为基变量，保证基变量个数始终为 $m + n - 1$.

产销不平衡的情况下，假想存在一个产地/销地，其数量可以使得问题变为产销平衡。同时设其单位运价为 **0**.

销地存在最高最低需求的情况：

1. 假设存在一个产地 Dummy，其产能可以使得总产能满足所有销地的最高需求
2. 将每个销地拆分为 min & **extra** 两个销地
3. Dummy 对 min 的运输费用为 M，对 extra 的运输费用为 0.

---

4 目标规划

对每个决策目标，引入正、负偏差变量 $-d^+$ 和 $+d^-$，分别表示决策值超过或者不足目标值的部分。$d^+ \geq 0, d^- \geq 0, d^+ \cdot d^- = 0$.

所有约束都写成目标约束的形式。

目标：使某些偏差变量**之和**最小。要求恰好达到目标值，$\min P_i(d^+ + d^-)$；要求不超过目标值 $\min P_i(d^+)$；要求不低于目标值 $\min P_i(d^-)$. 通过优先因子 P_l 来反映约束满足需求的优先级 $P_l \gg P_{l+1}$.

检验数分列的单纯形法：由于目标函数系数只有 P_l，因此检验数必然是 P_l 的线性组合。因此可将其写成类似下表的形式。注意这只是对目标函数种各偏差变量之和的间接写法。

	$c_j \to$		0	P_1	P_2	P_3
C_B	X_B	b	x_i	d_1^+	d_2^-	d_3^+
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$c_j - z_j$	P_1	....			
		P_2	....			
		P_3	....			

首先注意这种形式下，目标函数为求 min，因此要求检验数**大于** 0 时才达到最优，若有小于 0 的则，则选择其中最小的（绝对值最大）要换基迭代。之后，只要首先看 P_1 一行，如果全部满足大于 0，再确认 P_2 一行，以此类推。如果 P_1 一行已经无法满足，那么就不需要再确认 P_2 行。

变种：要求约束为获利最大。写成 revenue $- d^+ + d^- = M$，目标函数项为 $\min d^-$.

---

5 整数规划

割平面法：对松弛问题（不限制整数，其他不变）最优表中分数部分最大的 b_i，选取此行构造约束 $\sum_j [-(a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)x_j] + x_{n+1} = -(b_i - \lfloor b_i \rfloor)$，其中 x_{n+1} 为新松弛变量，将此约束加入单纯形表中继续计算并迭代，直到 b 全部为整数为止。（$\lfloor\rfloor$ 代表向下取整。无论 t 的正负，$-(t - \lfloor t \rfloor)$ 必然要是负数。）

	$c_j \to$		3	-1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	$13/7$	1	0	$1/7$	0	$2/7$
-1	x_2	$9/7$	0	1	$-2/7$	0	$3/7$
0	x_4	$31/7$	0	0	$-3/7$	1	$22/7$
	$c_j - z_j$		0	0	$-5/7$	0	$-3/7$

各 b 中最小为第一行 $13/7$，分数部分 $6/7$，新的割平面约束为 $-1/7x_3 - 2/7x_5 + x_6 = -6/7$，将其加入单纯形表新的一行后继续计算。

分支定界法：

1. 解松弛问题，如果无可行解或已经是整数解则结束
2. 随便挑一个整数解作为剪枝的下界
3. 对于松弛问题解中非整数的 $x_j = b_j$，分支两个后续问题，分别添加约束 $x_j \leq \lfloor b_j \rfloor$, $x_j \geq \lfloor b_j \rfloor + 1$
4. 一旦分支问题不可行或者最优解的目标值小于剪枝下界，则剪枝；否则继续迭代。

隐枚举法（针对 01 变量）：

列一张三大列的表，列分别为【x_i 为 01 枚举| z 值|各约束条件是否满足】

首先算出所有的 z 值，然后从第一个开始，检查约束条件是否满足，跳过 z 值比当前 valid 的最大 z 值小的 x_i 组合

指派问题：

标准形式：n 个人，n 件事，一一对应，1 代表指派，0 反之；系数矩阵代表**费用，目标是最小化费用和**

匈牙利解法（以下 ⓪ 代表独立零元素，∅ 代表其他零元素）：

1. 对每一行减去此行最小元素，对每一列减去此列最小元素
2. 变换后的矩阵中确定独立零元素，若有 n 个则为最优解，独立零元素的位置为 1，其他为 0
3. 若独立零元素小于 n 个：对没有 ⓪ 的行打勾；在打勾行中对 ∅ 所在列打勾；在打勾的列中对 ⓪ 打勾；重复以上两步直到没有任何可以打勾的行或列；对**没有**勾的行划横线，对有勾的列划竖线
4. 在没有被直线覆盖的元素中选出一个最小的。将没有被直线覆盖的行减去这个最小元素。此时直线覆盖的元素中将出现负元素，对其所在列加上这一最负元素相反数（使其为零），返回步骤 2.

确定独立零元素：在只有一个零元素的行（或列）中将此 0 变为 ⓪，将位于其同一列或行的所有其他零元素标记为 ∅

---

6 博弈论

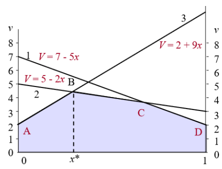
行决策人：一行对应其一个选项，总选项数为行数。列决策人反之。赢得矩阵是行决策人的收益。

纯策略：

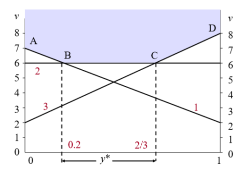
如果每行最小里的最大值 = 每列最大里的最小值：$V_G = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$，则 V_G 为纯策略解。

混合策略图解法，要求其中一方的可选决策数为 2，设其为 M：

1. 设 M 取两种策略的概率分别为 x 和 $1 - x$
2. 对于对手的每一种策略，算出 M 的收益（数学期望，用 x 的式子表示）
3. 若 M 是行决策者，对以上几个收益的数学期望，画图求其最小中的最大；若 M 是列决策者，求其最大值中的最小。



M 行决策者，B 点为最优解



M 列决策者，BC 线段最优

最终最优解，M 的决策和 V_G 的值由代回 x 解出。M 的对手 N 的决策判断如下：

- 若如左图，最优解为顶点，则不过此顶点的直线对应的 N 的决策的概率为 0，过此顶点的决策概率用 V_G 设未知数列方程解出
- 若如右图，最优解为线段，则这条线段的策略是 N 的最优纯策略

例如矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，解的过程对应上左图，最终 V_G 为 $49/11$。则解列决策人最优解的方程组为 $\begin{cases} 3y_2 + 11y_3 = 49/11 \\ 5y_2 + 2y_3 = 49/11 \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$

优超策略：如果有一行 R 的每个元素都**小于任意**另一行的对应元素，则 R 可以直接删去。如果有一列 C 的每个元素都大于任意**大于任意**另一列的对应元素，则 C 可以直接删去。

方程组法（不常用）：解 $\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases}$ 两个方程组

线性规划法，直接看例子：

赢得矩阵为 $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$，则两个线性规划问题为 $\begin{cases} \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \end{cases}$

和 $\begin{cases} \max(y_1 + y_2 + y_3) \\ 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \leq 1 \end{cases}$，注意两者互为对偶问题，只是例子中 A 矩阵对称因而无法体现。Max 问题照抄原矩阵，Min 问题的系数为 A^T.

线性规划的解为 $x = (\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20})^T, y = (\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20})^T$ 目标函数值均为 $\frac{1}{5}$.

则决策问题的解为 $V_G = \frac{1}{\omega} = 5$, $x^* = V_G x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T, y^* = V_G y = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$