

PMI Pendule double

Nicolas Obrier, Kilian Mouginot, Antoine Michel, Vincent Leroi

Janvier 2023

Contents

1	Introduction	2
1.1	Contexte du problème	2
1.2	Organisation du travail	2
2	Modélisation du pendule simple	3
2.1	Modélisation du pendule simple avec point d'accroche fixe	3
2.2	Modélisation du pendule simple avec un point d'accroche oscillant verticalement	4
2.3	Conclusion de l'étude du pendule simple	4
3	Modélisation du pendule double	5
3.1	Modélisation du pendule double avec point d'accroche fixe	5
3.2	Modélisation du pendule double avec un point d'accroche oscil- lant verticalement	8
4	Conclusion	9

1 Introduction

1.1 Contexte du problème

Un pendule double est un pendule auquel on attache un autre pendule. Le pendule double est une application classique de la physique mettant en jeu les mouvements dits "chaotiques". A travers ce sujet, nous allons étudier les équations du mouvement du système dans différents cas de figure et nous commencerons par l'étude du pendule simple afin de bien cerner les difficultés de conception d'une modélisation numérique.

1.2 Organisation du travail

Afin de traiter le sujet au mieux, l'étude a été scindée en quatre parties :

- La détermination des équations physiques du système
- La conception d'une interface graphique permettant de visualiser les résultats des simulations (sous Python avec Tkinter)
- L'écriture du code servant à la simulation des différents cas de figure (sous Python)
- La rédaction du compte-rendu (sous Latex)

2 Modélisation du pendule simple

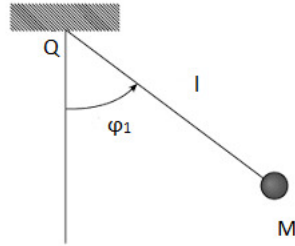


Figure 1: Schéma du pendule simple

2.1 Modélisation du pendule simple avec point d'accroche fixe

On effectue un Théorème du Moment Cinétique (TMC) sur le point M :

$$\dot{\vec{L}}_Q(M) = \frac{d}{dt}(\vec{Q}\vec{M} \wedge m\vec{v}) = \sum \vec{M}_Q$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_Q(M) = ml^2\ddot{\varphi} \vec{U}_\Gamma$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\varphi} \vec{U}_\Gamma = l \vec{U}_r \wedge m\vec{g}$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\varphi} = mlg(-\sin(\varphi))$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0}$$

2.2 Modélisation du pendule simple avec un point d'accroche oscillant verticalement

Le référentiel n'est plus galiléen car le point d'accroche est en mouvement, on calcule donc l'accélération selon l'axe z :

$$z(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t)$$

On en déduit la force appliquée en M qui est égale à : $-m\ddot{z}(t)$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F} = \omega^2 A \sin(\omega t) m \vec{U}_z}$$

On effectue un Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) sur la masse M avec : $\vec{Q}M = l\ddot{\varphi} \vec{U}_\theta - l\dot{\varphi}^2 \vec{U}_r$

$$\Rightarrow m[l\ddot{\varphi} \vec{U}_\theta - l\dot{\varphi}^2 \vec{U}_r] = m\vec{g} + \vec{T} - \omega^2 A \sin(\omega t) m \vec{U}_z$$

Projection sur \vec{U}_θ : $ml\ddot{\varphi} = -mg \sin(\varphi) + 0 + m\omega^2 A \sin(\omega t) \sin(\varphi)$

$$\text{On a donc : } \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) - \frac{\omega^2}{l} A \sin(\omega t) \sin(\varphi) = 0}$$

2.3 Conclusion de l'étude du pendule simple

Pour savoir si la méthode de résolution numérique est bonne, on compare l'évolution de l'énergie mécanique du système. Lorsque cette dernière reste stable, on considèrera que la méthode est bonne.

3 Modélisation du pendule double

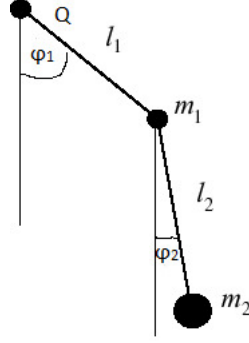


Figure 2: Schéma du pendule double

3.1 Modélisation du pendule double avec point d'accroche fixe

Afin de trouver l'équation du double pendule nous utilisons une méthode énergétique, on commence par calculer l'énergie cinétique notée T :

$$T = T_1 + T_2$$

$$\begin{cases} \vec{v}(M_1|R) = \frac{d}{dt} \vec{QM}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \vec{U}_{r_1} \\ \vec{v}(M_2|R) = \frac{d}{dt} \vec{QM}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \vec{U}_{r_1} + l_2 \dot{\varphi}_2 \vec{U}_{r_2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Or } \vec{U}_{r_2} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \vec{U}_{r_1} + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \vec{U}_{\theta_1}$$

$$(\vec{v}(M_2|R))^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$\text{On a donc : } T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2]$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

On cherche l'énergie potentielle \mathbf{U} :

$$\delta W = (\vec{P}_1 + \vec{T}_1 - \vec{T}_2).d\vec{Q}\vec{M}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{T}_2).d\vec{Q}\vec{M}_2$$

$$\vec{T}_1.d\vec{Q}\vec{M}_1 = -l_1 T_1 \vec{U}_{r_1}.(d\vec{U}_{r_1}) = -l_1 T_1 d(\frac{\vec{U}_{r_1}^2}{2}) = 0$$

$$\begin{aligned} -\vec{T}_2.d\vec{Q}\vec{M}_1 + \vec{T}_2.d\vec{Q}\vec{M}_2 &= \vec{T}_2.d\vec{Q}\vec{M}_1 + \vec{T}_2.d\vec{M}_1\vec{M}_2 - \vec{T}_2.d\vec{Q}\vec{M}_1 = T_2 l_2 \vec{U}_{r_2}.(d\vec{U}_{r_2}) \\ &= l_2 T_2 d(\frac{\vec{U}_{r_2}^2}{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta W = \vec{P}_1.d\vec{Q}\vec{M}_1 + \vec{P}_2.d\vec{Q}\vec{M}_2$$

$$= d(m_1 \vec{g}.Q\vec{M}_1) + d(m_2 \vec{g}.Q\vec{M}_2)$$

$$= d[m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g l_2 \cos(\varphi_2) + m_2 g l_1 \cos(\varphi_1)]$$

$$= -d\mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{U} = -(m_1 + m_2)g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g l_2 \cos(\varphi_2) + C} ; C \in \mathbb{R}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{L} = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + (m_1 + m_2)g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g l_2 \cos(\varphi_2)}$$

On introduit les coordonnées généralisées :

$$\boxed{q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1 + l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) m_2 \dot{\varphi}_2}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) m_2 \dot{\varphi}_1}$$

L'hamiltonien du système \mathbf{H} est :

$$\boxed{\mathbf{H} = T + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - (m_1 + m_2)g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g l_2 \cos(\varphi_2)}$$

On écrit maintenant les équations d'Hamilton du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{d}{d\varphi_1}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{d}{d\varphi_2}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 [\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] \\ &= -l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + (m_1 + m_2) g \sin(\varphi_1) = 0$$

$$l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \sin(\varphi_2) = 0$$

On effectue un changement de variable pour se ramener à une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 (afin d'utiliser la méthode de résolution de Runge-Kutta 4) :

$$\dot{\varphi}_1 = z_1 \quad \dot{\varphi}_2 = z_2$$

$$\dot{z}_1 = \ddot{\varphi}_1 = \frac{m_2 g \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) [l_1 z_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2 z_2^2] - (m_1 + m_2) g \sin(\varphi_1)}{l_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

$$\dot{z}_2 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{(m_1 + m_2) [l_1 z_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - g \sin(\varphi_2) + g \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] + m_2 l_2 z_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

3.2 Modélisation du pendule double avec un point d'accroche oscillant verticalement

Comme pour le pendule simple oscillant, le référentiel n'est plus galiléen, il y a donc une autre force appliquée sur chacune des masses :

$$\vec{F}_1 = m_1 \omega^2 A \sin(\omega t) \vec{U}_z ; \vec{F}_2 = m_2 \omega^2 A \sin(\omega t) \vec{U}_z + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \vec{u}_{r_1} - l_1 \ddot{\varphi}_1 \vec{u}_{\theta_1}$$

Comme pour le double pendule, le travail de la tension est nul, on a donc seulement:

$$\delta W = (\vec{P}_1 + \vec{F}_1) \cdot d\vec{Q}\vec{M}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{Q}\vec{M}_2$$

$$\mathbf{U} = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos(\varphi_1) + (m_1 + m_2)l_1\omega^2 A \sin(\omega t)\cos(\varphi_1) - m_2gl_2\cos(\varphi_2) + m_2l_2\omega^2 A \sin(\omega t)\cos(\varphi_2) - m_2[\varphi_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \ddot{\varphi}_1l_1l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] + C$$

La vitesse est elle aussi modifiée, et on a comme expression:

$$\vec{v}_1 = \vec{Q}\vec{M}_1 = l_1\dot{\varphi}_1 \vec{U}_{\theta_1} + \omega A \cos(\omega t) \vec{U}_z$$

$$\vec{v}_2 = \vec{Q}\vec{M}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 \vec{U}_{\theta_1} + l_2\dot{\varphi}_2 \vec{U}_{\theta_2} + \omega A \cos(\omega t) \vec{U}_z$$

$$\text{et en sachant que : } T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \text{ et } T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

On en déduit alors:

$$\mathbf{T} = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) - 2l_1\dot{\varphi}_1\omega A \cos(\omega t)\sin(\varphi_1)] + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l_1A\omega\dot{\varphi}_1 \cos(\omega t)\sin(\varphi_1) + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - 2l_2A\omega\dot{\varphi}_2 \cos(\omega t)\sin(\varphi_2) + A^2\omega^2 \cos^2(\omega t)]$$

Comme pour le pendule non-oscillant, on calcule les différentes expressions nous permettant de faire la résolution numérique :

$$q_1 = \frac{1}{2}m_1[2l_1^2\dot{\varphi}_1 - 2l_1\omega A \cos(\omega t)\sin(\varphi_1)] + \frac{1}{2}m_2[2l_1^2\dot{\varphi}_1 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l_1A \cos(\omega t)\sin(\varphi_1)] + m_2[2l_1^2\dot{\varphi}_1 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$q_2 = \frac{1}{2}m_2[2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2l_2^2\dot{\varphi}_2 - 2l_2A\omega \cos(\omega t)\sin(\varphi_2)]$$

$$\frac{dq_1}{dt} = (m_1 + 3m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + (m_1 + m_2)l_1\omega^2 A \sin(\omega t)\sin(\varphi_1) - m_1l_1\omega\dot{\varphi}_1 A \cos(\omega t)\cos(\varphi_1) + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)m_2l_1\omega A \cos(\omega t)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2m_2l_1l_2[\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$\frac{dq_2}{dt} = m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_2A\omega^2 \sin(\omega t)\sin(\varphi_2) - m_2l_2A\omega\dot{\varphi}_2 \cos(\omega t)\cos(\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_1l_1\dot{\varphi}_1\omega A \cos(\varphi_1) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_1A\omega\dot{\varphi}_1 \cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\varphi_1) + (m_1 + m_2)l_1\omega^2 A \sin(\omega t)\sin(\varphi_1) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \ddot{\varphi}_1l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)m_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \varphi_1) - m_2l_2A\omega\dot{\varphi}_2 \cos(\omega t)\cos(\varphi_2) - m_2gl_2 \sin(\varphi_2) + m_2l_2\omega^2 A \sin(\omega t)\sin(\varphi_2) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \frac{3m_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 2m_1l_2 - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)[m_2l_2 - 2m_2l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]}{(m_1 + 3m_2)l_1 + 3m_2l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2m_2l_2l_1 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)} - \frac{m_2A\omega\dot{\varphi}_1 \cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - (m_1 + m_2)g \sin(\varphi_1) + m_2g \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\sin(\varphi_2)}{(m_1 + 3m_2)l_1 + 3m_2l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2m_2l_2l_1 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{-2l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - g \sin(\varphi_2) - 2l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1}{l_2} \end{aligned}$$

4 Conclusion

La résolution numérique du pendule simple nous a permis de vérifier le fait que la méthode d'Euler était moins précise que celle de Runge-Kutta car elle ne renvoie pas une simulation avec conservation de l'énergie mécanique. La fonction que nous avons utilisé pour résoudre les équations du pendule double fait intervenir RK et est donc assez précise. Pour tendre à une représentation encore plus fidèle, il serait possible d'utiliser une méthode de résolution de RK à pas adaptatif qui conserve presque l'énergie mécanique du système.