Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №2

Вариант – 1ВГ

Выполнил:

Ким Даниил Кванхенович

Группа:

P3231

Преподаватель:

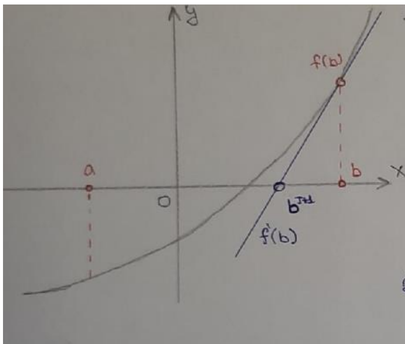
Перл Ольга Вячеславовна

2022

4 семестр

Описание метода, расчетные формулы:

Метод Ньютона (касательных) – итерационный метод решения нелинейных алгебраических уравнений. Данный метод уточняет значение корня на заданном промежутке от a до b. Суть метода заключается в построении касательных в точках f(a) или f(b) и сужении промежутка до определенного момента. За каждую итерацию сдвигается одна из границ, а ее новое значение выводится из формулы касательной.



1) линейная функция: $y = k \cdot x$

добавим сдвиги:

$$y - f(b) = k \cdot (x - b)$$

коэффициент k равен тангенсу угла – производной

⇒ формула касательной выглядит $y = f'(b)(x-b) + f(b)$

2) выведем новое значение границы b:

$$b^{J+1} = b^{J} - \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{y}{f'(b)}$$

при $y = 0$:

$$b^{J+1} = b^{J} - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

В приведенном примере видно, что касательная – ничто иное как линейная функция со сдвигом относительно оси абсцисс на b и относительно оси ординат на f(b).

Метод простых итераций – тоже является итерационным методом поиска корней нелинейных алгебраических уравнений. Он заключается в выводе уравнения вида x = ϕ(x) из общего вида НАУ – выражении неизвестного. Имея начальное приближение и при выполнении условия сходимости формула следующего приближения выгладит следующим образом:

общая формула: $F(x) = 0$

1) выразим x:

$$x = \varphi(x)$$

2) условие сходимости:

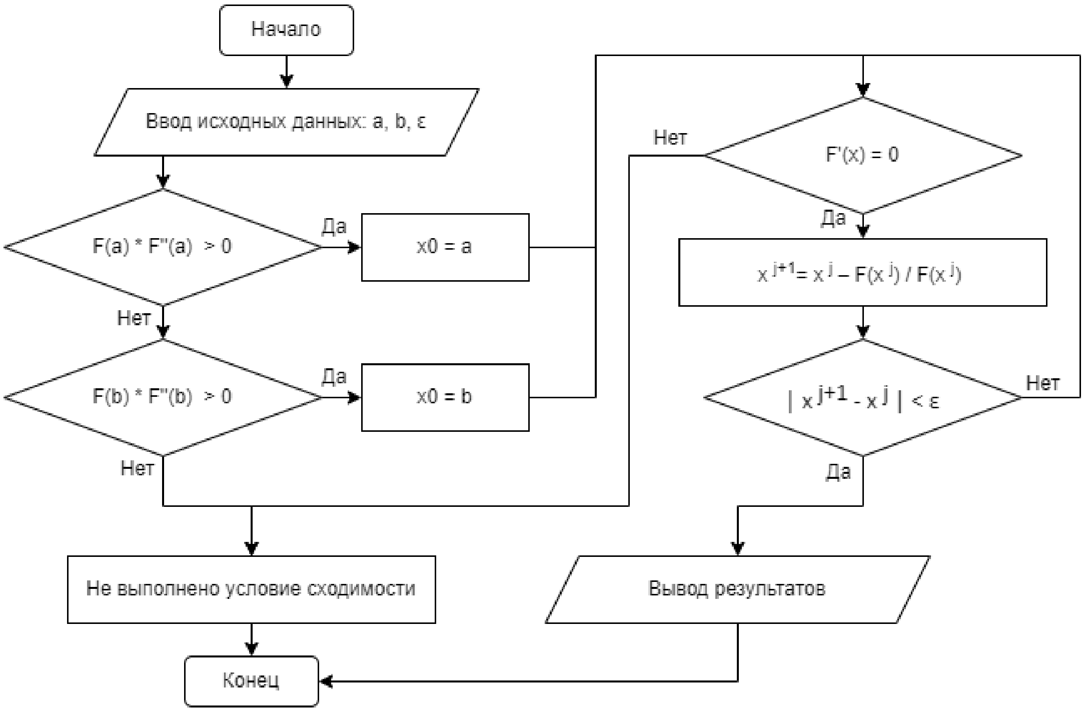
$$|\varphi'(x)| < 1$$

итеративная формула:

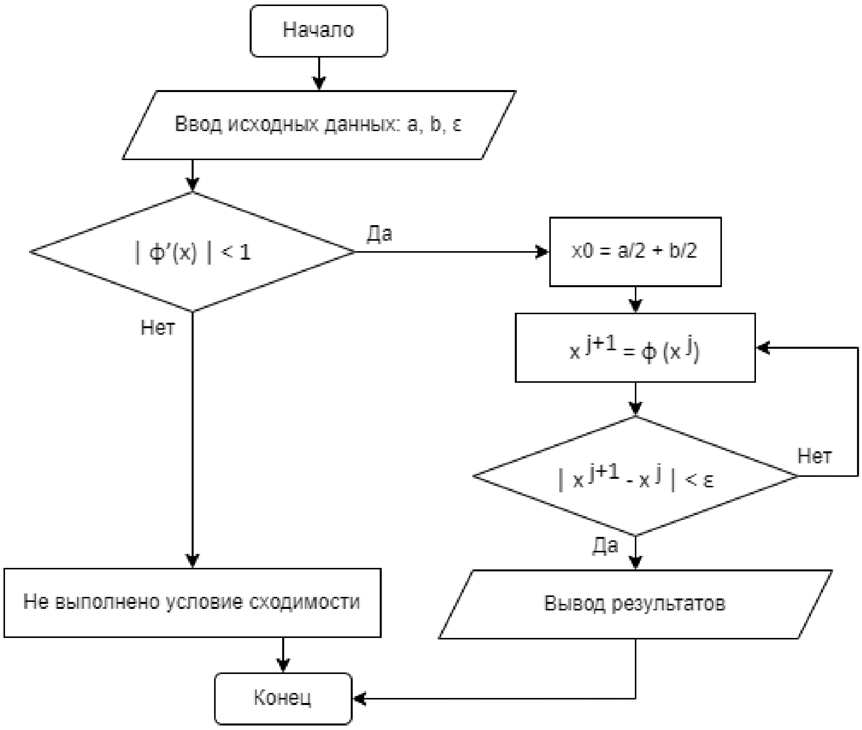
$$\boxed{x^{J+1} = \varphi(x^{J})}$$

Блок-схема численного метода:

1) Метод Ньютона:



2) Метод простых итераций:



Листинг реализованного численного метода программы:

1) Метод Ньютона (касательных):

```
public ResultWrapper newton(double a, double b, double epsilon
        , OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {

    double x_prev = 0, x_cur = 0;
    int iteration_counter = 0;
    if (oneDimensionalMath.f(a) * oneDimensionalMath.ddf(a)>0){
        x_cur = a;
    } else if (oneDimensionalMath.f(b) * oneDimensionalMath.ddf(b)>0) {
        x_cur = b;
    } else {
        ioManager.writeErrorMessage("Не выполнено условие сходимости метода Ньютона!");
        return new ResultWrapper();
    }
    do {
        x_prev = x_cur;
        iteration_counter++;
        if (oneDimensionalMath.df(x_prev) == 0) {
            ioManager.writeErrorMessage("Не выполнено условие сходимости метода Ньютона - производная равна 0!");
            return new ResultWrapper();
        }
        x_cur = x_prev - oneDimensionalMath.f(x_prev) / oneDimensionalMath.df(x_prev);
    } while ( Math.abs(x_prev - x_cur) >= epsilon );
    return new ResultWrapper(iteration_counter, x_cur, oneDimensionalMath.f(x_cur));
}
```

2) Метод простых итераций:

```
public ResultWrapper simpleIterations(double a, double b, double epsilon
        , OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {

    double x_prev = 0, x_cur = (a+b)/2;
    int iteration_counter = 0;
    if (oneDimensionalMath.dfi( x_cur ) >= 1) {
        ioManager.writeErrorMessage("Не выполнено условие сходимости метода простых итераций!");
        return new ResultWrapper();
    }
    do {
        x_prev = x_cur;
        iteration_counter++;
        x_cur = oneDimensionalMath.fi(x_prev);
    } while ( Math.abs(x_prev - x_cur) >= epsilon);
    return new ResultWrapper(iteration_counter, x_cur, oneDimensionalMath.f(x_cur));
}
```

<u>Примеры работы программы:</u>

Пример 1:

```
Выберите систему нелинейных алгебраических уравнений:
    Система №1:
        •sin (x+1) - y = 1.2
        •2x + cos y = 2
    Система №2:
        •x + x * y^3 = 9
        •x * y + x * y^2 = 6
[Ввод] Номер системы: 1

[Ввод] Введите погрешность e: 0.00000001

                        Метод Ньютона
X0:                      0.5101502386750003
X1:                      -0.20183832757807144
```

Пример 2:

```
Выберите нелинейное уравнение с одной переменной:
    1) x - sin x = 0.25
    2) x^3 = e^x - 1
    3) lg x - 7/(2x + 6) = 0
[Ввод] Номер уравнения: 1

[Ввод] Введите границу a: 1

[Ввод] Введите границу b: 3

[Ввод] Введите погрешность e: 0.0000001

                        Метод Ньютона              Метод Простых Итераций
Корень:                  1.171229652501666          1.1712295954340806
ΔF:                      1.1102230246251565E-16     -3.486719823975193E-8
Число итераций:          6                          14
```

Вывод: нелинейные алгебраические уравнения можно решать несколькими методами: метод половинного деления, метод Ньютона (касательных), метод хорд, метод простых итераций. Данные методы отличаются по своей эффективности. По выполнению лабораторной работы я лично увидел, насколько эффективнее метод Ньютона по сравнению с методом прямых итераций. Так, например для решения заданных уравнений первому методу в среднем требовалось в 3 раза меньше итераций. Однако условие сходимости у метода касательных ощутимо строже. Метод касательных рассматривает промежутки, на которых первая и вторая производные не равны 0 – промежутки без точек экстремумов, где функция возрастает/убывает монотонно. Найти такой промежуток получается не всегда. Решение этой проблемы стал метод хорд. Его геометрический смысл не сильно отличается, однако он не использует понятие производной, поэтому и работать с ним легче.

Помимо проблем с условиями сходимости, я столкнулся со сложностью выбора значения для начального приближения. Так, например метод Ньютона работает на промежутках монотонного роста/убывания. Т. к. рассматриваемые функции не линейны то справедливо выражение $f(x)*f''(x) > 0$ хотя бы для одной из границ. Это легко доказывается, т. к. возможных случаев 4. В случае метода простых итераций, если корней несколько, при разных начальных значениях, метод может сходится к разным корням, что не удобно.