Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №3

Вариант – Метод прямоугольников

Выполнил:

Ким Даниил Кванхенович

Группа:

P3231

Преподаватель:

Перл Ольга Вячеславовна

2022

4 семестр

Описание метода, расчетные формулы:

Методы прямоугольников существуют для расчета определенного интеграла заданной функции. Метод полезен тогда, когда использования формулы Ньютона-Лейбница затруднено или вовсе недоступно. Функция может быть задана аналитически или таблично. Суть метода заключается в аппроксимации функции к константе на заданном интервале/интервалах, вследствие чего интеграл найти становится в разы легче.

Среди прямоугольных методов наибольшей точностью обладает метод средних прямоугольников. Доказано, что Алгебраический порядок точности численного метода средних квадратов равен 1, т. е. с его помощью можно точно посчитать значение определенного интеграла любой линейной функции. Для методов левых и правых прямоугольников – равен 0, т. е. точным будет расчет только для функций одного значения вида f(x) = const.

При длине интервала, стремящейся к нулю, значение, полученное с помощью метода прямоугольников стремится к истинному. Поэтому, чем больше количество участков, на которые мы делим заданный интервал, тем точнее расчет.

Погрешность метода средних прямоугольников считается следующим образом:

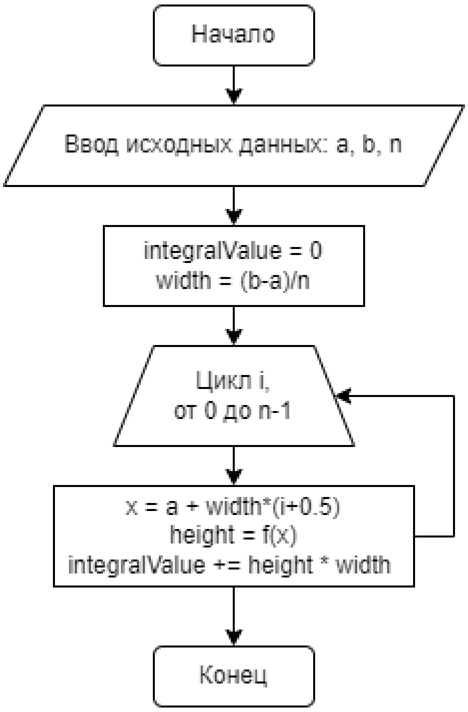
$$R = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a) \cdot h^2}{24}, \quad \text{ГДЕ } h = \frac{b-a}{n}, \ n - \text{ЧИСЛО РАЗБИЕНИЙ}$$

Погрешность метода левых/правых прямоугольников считается следующим образом:

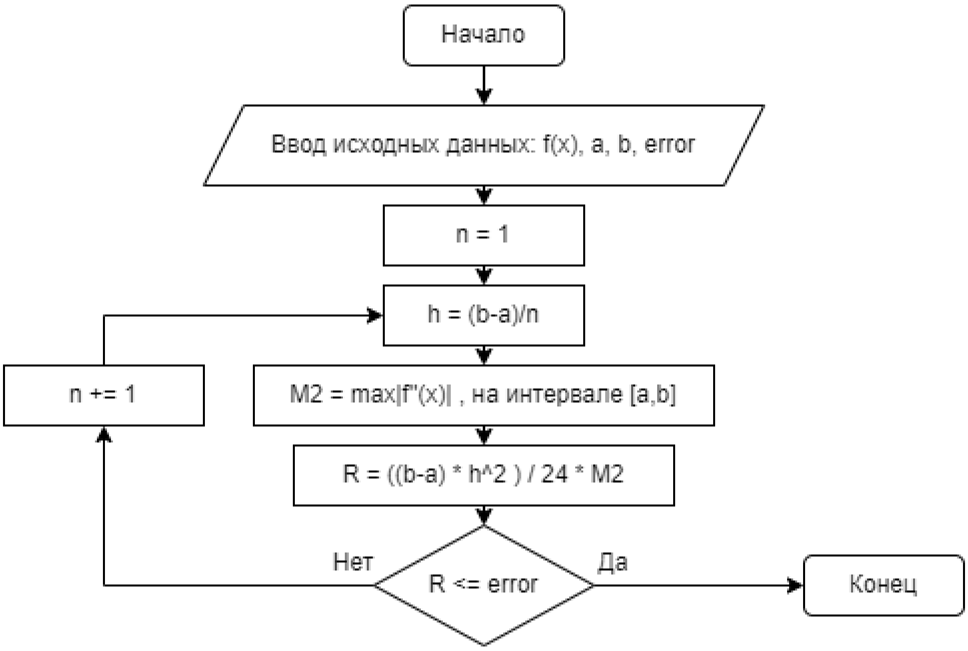
$$R = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \cdot \frac{(b-a) \cdot h}{2}, \quad \text{ГДЕ } h = \frac{b-a}{n}, \ n - \text{ЧИСЛО РАЗБИЕНИЙ}$$

Блок-схема численного метода:

1) Метод средних прямоугольников (остальные аналогичны):



2) Вычисление оптимального числа разбиений (на примере метода средних прямоугольников):



Листинг реализованного численного метода программы:

1) Методы прямоугольников:

```
private ResultWrapper midSquares(double a, double b, int n, OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {
    double integralValue = 0;
    double width = (b-a)/n;
    for ( int i = 0; i < n; i++) {
        double x = a + width*(i+0.5);
        double height = oneDimensionalMath.f(x);
        integralValue += height * width;
    }
    return new ResultWrapper(n, integralValue);
}
private ResultWrapper leftSquares(double a, double b, int n, OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {
    double integralValue = 0;
    double width = (b-a)/n;
    double x = a;
    for ( int i = 0; i < n; i++) {
        x = a + width*i;
        double height = oneDimensionalMath.f(x);
        integralValue += height * width;
    }
    return new ResultWrapper(n, integralValue);
}

private ResultWrapper rightSquares(double a, double b, int n, OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {
    double integralValue = 0;
    double width = (b-a)/n;
    double x = a;
    for ( int i = 0; i < n; i++) {
        x = a + width*(i+1);
        double height = oneDimensionalMath.f(x);
        integralValue += height * width;
    }
    return new ResultWrapper(n, integralValue);
}
```

2) Вычисление оптимального числа разбиений (на примере метода средних прямоугольников):

```
private int getPartitionsCountMidSquares(double a, double b,
                                         double epsilon, OneDimensionalMath oneDimensionalMath) {
    int n = 0;
    double maxF = oneDimensionalMath.getMaxddF(a, b);
    double error = Double.MAX_VALUE;
    do {
        n++;
        double h = (b-a)/n;
        error = maxF*n*h*h*h/24;
    } while (error>epsilon);
    return n;
}
```

Примеры работы программы:

Пример 1 (неустранимый разрыв):

```
Выберите интегрируемую функцию:
    1) 1/x
    2) sin(x) / x
    3) 0.5x^3 + 2x^2 + x + 2
    4) 5x
    5) -5x

[Ввод] Номер уравнения: 1

[Ввод] Введите границу a: -5

[Ввод] Введите границу b: 7

[Ввод] Введите погрешность e: 0.001

[Ошибка] Функция №1 содержит неустранимый разрыв на интервале [-5,000000,7,000000]

Process finished with exit code 0
```

Пример 2 (устранимый разрыв):

```
Выберите интегрируемую функцию:
    1) 1/x
    2) sin(x) / x
    3) 0.5x^3 + 2x^2 + x + 2
    4) 5x
    5) -5x

[Ввод] Номер уравнения: 2

[Ввод] Введите границу a: -10

[Ввод] Введите границу b: 2

[Ввод] Введите погрешность e: 0.01

[Ввод] Устранить точку разрыва? (Y/n) Y

Метод:                  Левых Прямоугольников     Средних Прямоугольников   Правых Прямоугольников
Значение интеграла:      3.262789403435518         3.265430273766725         3.2647304933287566
Число разбиений:         3147                      43                        3147

Process finished with exit code 0
```

Пример 3 (линейные функции):

```
Выберите интегрируемую функцию:
    1) 1/x
    2) sin(x) / x
    3) 0.5x^3 + 2x^2 + x + 2
    4) 5x
    5) -5x

[Ввод] Номер уравнения: 4

[Ввод] Введите границу a: 0

[Ввод] Введите границу b: 10

[Ввод] Введите погрешность e: 0.001

Метод:                  Левых Прямоугольников    Средних Прямоугольников  Правых Прямоугольников
Значение интеграла:      249.99900000399995       250.0                    250.000999996
Число разбиений:         250001                   1                        250001

Process finished with exit code 0
```

Пример 4 (нелинейные функции):

```
Выберите интегрируемую функцию:
    1) 1/x
    2) sin(x) / x
    3) 0.5x^3 + 2x^2 + x + 2
    4) 5x
    5) -5x

[Ввод] Номер уравнения: 3

[Ввод] Введите границу a: -2

[Ввод] Введите границу b: 1

[Ввод] Введите погрешность e: 0.001

Метод:                  Левых Прямоугольников    Средних Прямоугольников  Правых Прямоугольников
Значение интеграла:      8.62492308349768         8.624644931195554        8.625076929651527
Число разбиений:         29250                    89                       29250

Process finished with exit code 0
```

Вывод: изученные 3 типа численных методов интегрирования – методы прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона нужны для расчета определенного интеграла функции. Бывает, что найти неопределенный интеграл проблематично и формулой Ньютона-Лейбница воспользоваться не получается (например, если функция задана таблицей или интеграл - не берущийся). В таких случаях можно заменить функцию на ее приближение (константу, функцию) и посчитать интеграл от нее – аппроксимировать ее. В методе прямоугольников замена происходит на число, в методе трапеций – на линейную функцию, а в методе Симпсона – квадратичную функцию. Очевидно, что не все функции можно заменить на число, линейную/квадратичную функцию так, чтобы все идеально совпало. Из этого следует разница в эффективности вычислений тем или иным методом. Однако нельзя называть тот или иной метод лучшим. Так для метода Симпсона необходимо искать производную функции четвертого порядка, что бывает очень накладно. Выбор наиболее подходящего метода интегрирования зависит как от самой функции, так и от требуемой точности вычислений (например для функций линейного типа отлично подойдет метод средних прямоугольников, значение выйдет точным при минимальном количестве разбиений).