聚集法

第 i 次操作	total
1	0 + 1 = 1
2	1 + 2 = 3
3	3 + 1 = 4
4	4 + 4 = 8
5	8 + 1 = 9
6	9 + 1 = 10
7	10 + 1 = 11
8	11 + 8 = 19
9	19 + 1 = 20
10	20 + 1 = 21
…	…
n	$\sum_{i=1}^{\log_2 n}(2^i - 1) + n$

因此, 可以得到$\text{total} = 2n - \log_2 n - 1$, 即$T(n) = O(3n - \log_2 n - 1) = O(2n) = O(n)$, 那么单次操作$T(1) = \frac{T(n)}{n} = O(1)$

可以得到, 单次操作的平均是$O(1)$

会计法

设摊还代价是 $\hat{c_i} = 3(1 + 1 + 1)$

其中 1 是当前操作的代价.

第 i 次操作, 给第 i 个元素存款, 给第 $i - 2^{\lfloor \log_2(i) \rfloor}$ 个元素存款 1

当 $i = 2^k (k \in \boldsymbol{Z})$, 操作代价是 i, 前面的数都已经存过 1 个代价了, 那么就将前面的存款取出来, 给第 i 次操作.

经验证, 存款的总和非负, 因此这个分析是正确的

因此, 单次操作的平均代价是$O(1)$

势能法

令势能函数$\Phi(n) = 2 \times n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$, 当 n = 0 时, $\Phi(0) = 0$

令$D_n = n, D_0 = 0, \Phi(n) - \Phi(0) = 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) \geq 0$, 也就是: 总的摊还代价 - 总的真实代价 >= 0

因此, 可以确保这个势能函数是正确的(摊还代价是实际代价的上界)

那么第 i 次操作的摊还代价是: $\hat{c_i} = \Phi(i) - \Phi(i-1) = 2 - 2 * \left(2^{\lfloor \log_2 i \rfloor} - 2^{\lfloor \log_2 (i-1) \rfloor}\right) = O(1)$

因此, 单次操作的平均代价是$O(1)$