1、增长的阶：

$\Theta(n)$, $O(n)$, $\Omega(n)$, $o(n)$, $\omega(n)$

数学定义

2. 和式的估计

Σ是一种数学语言（蒋炎岩）

数学归纳法：

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$$

即证：$\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c \cdot 3^n$

$$\sum_{k=0}^{m+1} 3^k = \sum_{k=0}^{m} 3^k + 3^{m+1}$$

$$\le c \cdot 3^m + 3^{m+1}$$

$$= c \cdot 3^{m+1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\le c \cdot 3^{m+1} \Rightarrow \text{取 } \frac{1}{3} + \frac{1}{c} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \le \frac{2}{3} \Rightarrow c \geq \frac{3}{2}$$

和式的计算，直接计算，

积分放缩

3. 递归方程

例如：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+11n$

就描述了递归关系

两种主要方法：

1) 递归树

2) master 定理.

$T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$

(1) $n^{\log_b a}>f(n)$

则 $T(n)=O(n^{\log_b a})$

(2) $n^{\log_b a}<f(n)$

则 $T(n)=O(f(n))$

(3) $n^{\log_b a}=f(n)$

则 $T(n)=n^{\log_b a}\cdot\lg n$

如果这种大于、小于不是"多项式"的，master 失效！！！

作业：

① 可以使用极限来证明：

证 $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$ 是 $\theta(n^3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2}{n^3 - (n-1)^3}$$

离散洛必达

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{3}$$

常数说明是紧界

$+\infty$ $\Omega(f(n))$

$0.$ $O(f(n))$

② ~~数~~学归纳法：

$T(n) = O(f(n))$ 即证 $T(n) < c f(n)$

$\exists\, n_0$ 与 $c > 0$，当 $n > n_0$ 时成立，

也就是找到 c 与 n_0.

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$，证 $T(n) = O(n)$

$T(n) \leq c(\frac{n}{2}) + n = n(\frac{c}{2} + 1) \leq cn$

$\Rightarrow \frac{c}{2}+1 \le c \Rightarrow \quad c \geq 2$

③ 不是多项式可比的 $\Rightarrow$ 用递归树分析

④ 主定理

迭代法就是递归树

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
\lg(n!) &= \frac{1}{2}\lg 2\pi n + n\lg\left(\frac{n}{e}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\lg 2\pi + \lg n) + n(\lg n - \lg e) \\
&= \frac{1}{2}\lg 2\pi + \frac{1}{2}\lg n + n\lg n - n\lg e
\end{aligned}$$