考察$f(n)=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

令$g(x)=x-\ln(1+x)$，其中$0<\frac{1}{n}\leq 1$，即$0<x\leq 1$

求导得$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}\geq 0$，故$g(x)$在$(0,1]$上单调递增

又$g(0)=0$，故$f(n)=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq 0$

故$\sum_{i=1}^{n}f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(2)-\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-...-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0$

即$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n)-\ln(n-1)+...+\ln(2)-\ln(1)$