

数字逻辑设计

王鸿鹏

计算机科学与技术学院

wanghp@hit.edu.cn

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

函数的最简形式

When a function is realized using **AND** and **OR** gates, the cost of realizing the function is directly related to **the number of gates and gate inputs** used.

$$F = AB + \bar{A}C$$

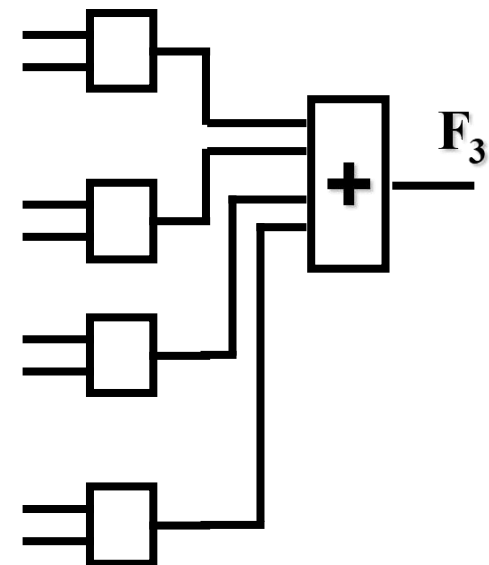
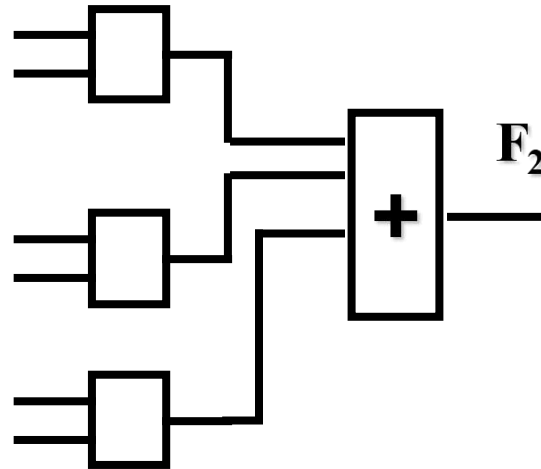
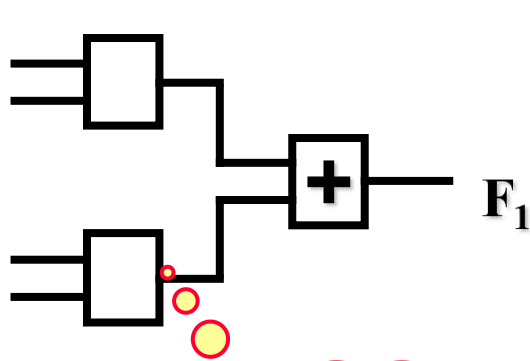
$$= AB + \bar{A}C + BC$$

$$= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$$

$$\dots\dots\dots \textcircled{1} F_1$$

$$\dots\dots\dots \textcircled{2} F_2$$

$$\dots\dots\dots \textcircled{3} F_3$$



低成本
高可靠

开关函数的最简形式

一个最简表达式中

- 逻辑门的数量最少
- 逻辑门的输入个数最少

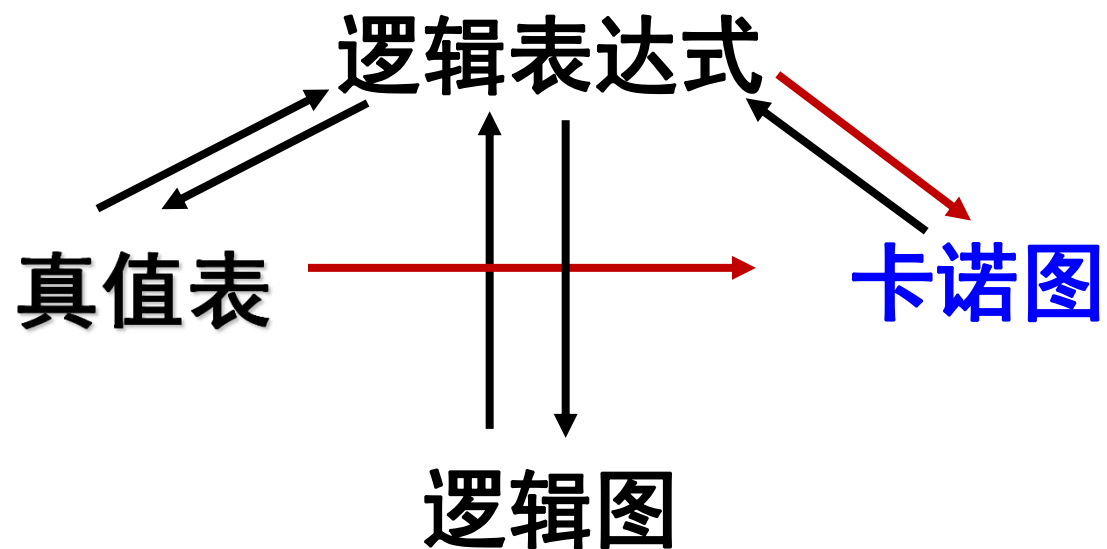
与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式**不一定是唯一的**.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

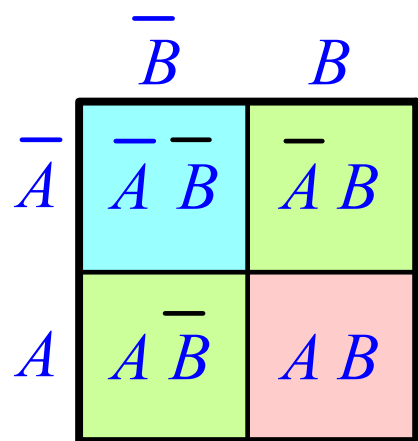
逻辑函数的表达方式之一



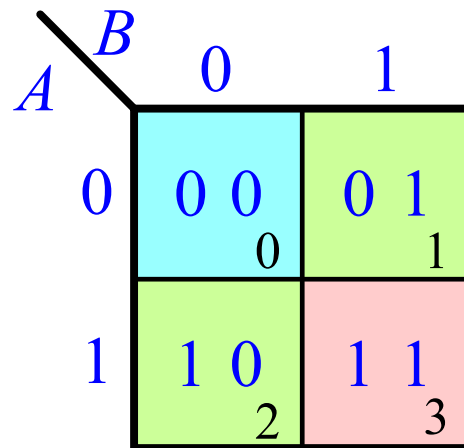
- 化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

什么是卡诺图？

- 卡诺图通常为 2^n 个小格构成的正方形或矩形，每个小格代表一个最小项（最大项）。
- 单元格对应的最小项（最大项）按**典型格雷码**摆放
- 任两个相邻单元格对应的项**只有一个变量取值不同**



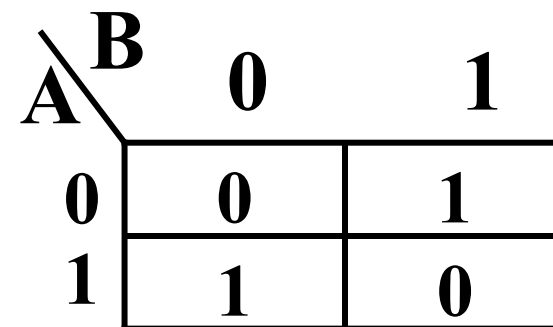
(a)



(b)

1. 两变量卡诺图

例： $F=f(A, B)=A'B+AB'$



卡诺图的特征

- 卡诺图上几何相邻的最小项逻辑上也相邻。
 - 几何相邻 { 相接
行或列首尾相接
- 逻辑相邻——两个最小项中只有一个变量出现的形式不同

三变量卡诺图&四变量卡诺图

$F=f(A, B, C)$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$F=f(A, B, C, D)$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

五变量卡诺图

$$F=f(A, B, C, D, E)$$

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	19	18	22	23	21	20

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

填写卡诺图

- 已知真值表
- 已知标准与或式

与项是最小项时，按最小项编号的位置直接填入。

$$F = \Sigma m(3, 5, 6, 7)$$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

- 已知标准或与式

$$F = \Pi M(0, 1, 2, 4)$$

真值表

AB C	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

填写卡诺图——例1

$$F=AB+\textcolor{red}{BC}+AC$$

$$=AB(C+\bar{C})+BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})$$

$$=ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C$$

最小项编号： 7 6 7 3 7 5

BC		00	01	11	10
A					
0		0	0	1	0
1		0	1	1	1

填写卡诺图——例2

$$F = \overline{(A \oplus B)(C+D)}$$

$$= \overline{A \oplus B} + \overline{(C+D)}$$

$$= \overline{A}\overline{B} + AB + \overline{C}\overline{D}$$

最小项编号

$$\overline{A}\overline{B} = \underline{0000}_0 + \underline{0001}_1 + \underline{0010}_2 + \underline{0011}_3$$

$$AB = \underline{1100}_{12} + \underline{1101}_{13} + \underline{1110}_{14} + \underline{1111}_{15}$$

$$\overline{C}\overline{D} = \underline{0000}_0 + \underline{0100}_4 + \underline{1000}_8 + \underline{1100}_{12}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

填写卡诺图——例3

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A \oplus C} \cdot \overline{\overline{B}} (\overline{A \bar{C} \bar{D}} + \overline{\bar{A} C \bar{D}}) \\
 &= \overline{A \oplus C} + \bar{B} (\overline{A \bar{C} \bar{D}} + \overline{\bar{A} C \bar{D}}) \\
 &= A \odot C + A \bar{B} \bar{C} \bar{D} + \bar{A} \bar{B} C \bar{D} \\
 &= \textcolor{blue}{AC} + \textcolor{red}{\bar{A}\bar{C}} + A \bar{B} \bar{C} \bar{D} + \bar{A} \bar{B} C \bar{D} \\
 &= \textcolor{blue}{1010} + \textcolor{blue}{1011} + \textcolor{blue}{1110} + \textcolor{blue}{1111} + \textcolor{red}{\underline{0000}} \\
 &\quad + \textcolor{red}{\underline{0001}} + \textcolor{red}{\underline{0100}} + \textcolor{red}{\underline{0101}} + 1000 + 0010
 \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

按相邻关系填写卡诺图

与项不是最小项的形式，直接填入卡诺图。

例： $F(A, B, C, D) = A'CD + ABD$

$$A'CD = A'(B' + B)CD$$

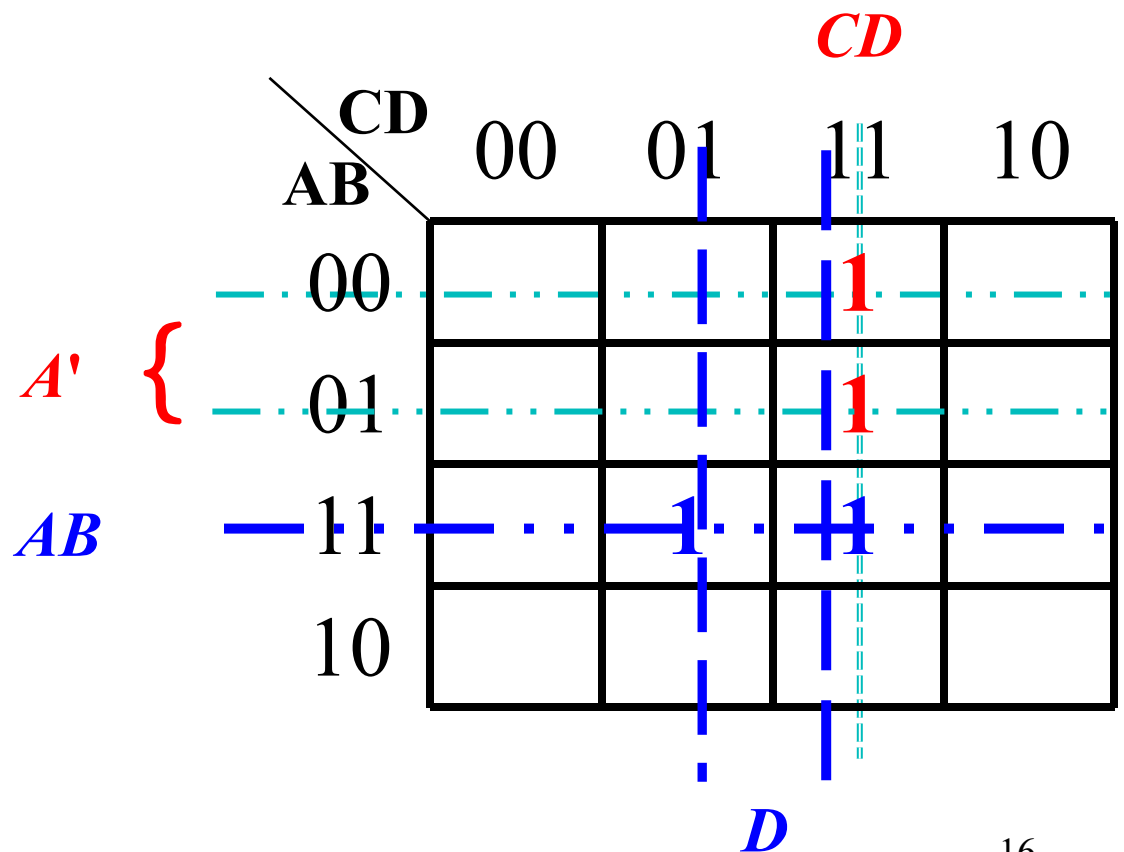
$$= (A'B' + A'B)CD$$

$$= A'B'CD + A'BCD$$

$$ABD = AB(C' + C)D$$

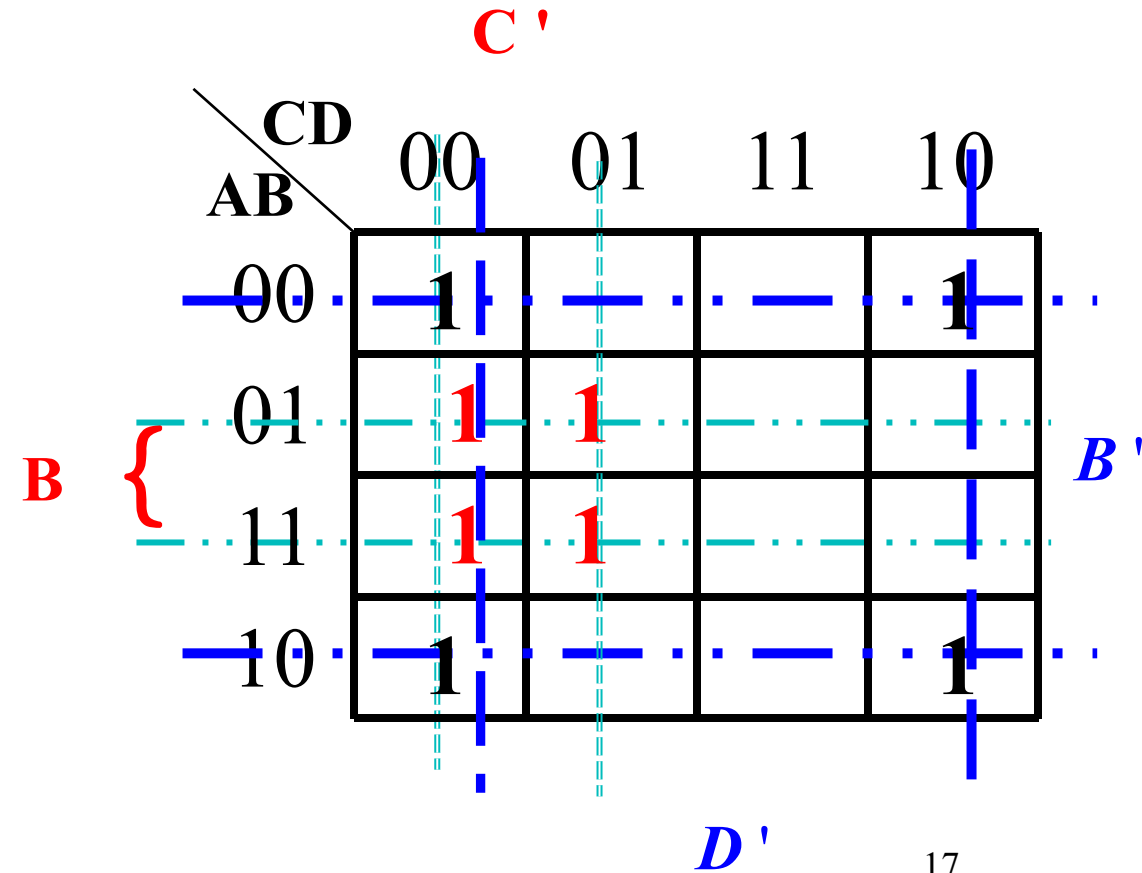
$$= AB(C'D + CD)$$

$$= ABC'D + ABCD$$



例4 将逻辑表达式直接填入卡诺图

将逻辑表达式 $F=BC'+B'D'$ 填入卡诺图



例5 将逻辑表达式直接填入卡诺图

将逻辑表达式 $F=B'C+ABD'$ 填入卡诺图

CD \ AB		00	01	11	10
00				1	1
01					
11	1				1
10				1	1

基于卡诺图的逻辑运算

$$F=(AB'C'+A'B'C)\cdot(AC'+A'BC)$$

对应的小方格进行逻辑运算

BC \ A	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	0

BC \ A	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

•

=

BC \ A	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0

+

BC \ A	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

⊕

BC \ A	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1

9

基于卡诺图的逻辑运算

		F			
BC A		00	01	11	10
	0		1	1	
	1	1	1		

		yF			
BC A		00	01	11	10
	0		y	y	
	1	y	y		

		F			
BC A		00	01	11	10
	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	0

		F			
BC A		00	01	11	10
	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	1

F

\bar{F}

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

卡诺图化简法

- 代数法

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= ABC + A'BC \\ &= (A + A')BC = BC \end{aligned}$$

- 卡诺图法

- 图形法化简逻辑函数

BC A	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

从卡诺图读取逻辑表达式

1 圈/画 卡诺圈

2 按照规则读卡诺图

从一个卡诺图中可以读取：

- 最简与或式 (AND-OR)
- 最简或与式 (OR-AND)
- 最简与或非式 (AND-OR-NOT)

如何从卡诺图读最简与或式——1

① 画卡诺圈(K圈)

- 将**相邻**为**1**的小方格圈在一起，且圈必须为**矩形或者正方形**
 - 相邻:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的小方格
- 圈中小方格的个数必须为 2^m ($m=0,1,2\dots$)
- 圈**越大越好**
- 小方格可以**重复**使用（被圈多次）

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

卡诺圈练习

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	0

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{CD} \\ \diagdown \end{array}$ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

如何从卡诺图读最简与或式——2

每个圈代表一个与项

变量取值不同——消去相应变量

变量取值相同——按约定保留相应变量

$\left\{ \begin{array}{l} 1: \text{原变量} \\ 0: \text{反变量} \end{array} \right.$

$A'C'D$

BD

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

B'

如何从卡诺图读最简与或式——3

将所有的与项相或(相加)

$$\begin{aligned} F = & B'D' \\ & + A'C' \\ & + AC \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

$$F = A'C' + AC + B'D'$$

从卡诺图读出的最简与或式唯一吗？

$$F = A'B' + AC + BC'$$

BC		00	01	11	10
A					
0	1	1	0	1	
1	0	1	1	1	

$$F = A'C' + B'C + AB$$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1

如何从卡诺图读最简与或式

从卡诺图中读取：

- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）

如何从卡诺图读最简或与式——1

① 画卡诺圈(K圈)

- 将**相邻**为**0**的小方格圈在一起，且圈必须为**矩形或者正方形**
 - 相邻:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的小方格
- 小方格的个数必须为 2^m ($m=0,1,2\dots$)
- 圈**越大越好**
- 小方格可以**重复**使用 (被圈多次)

A \ BC	00 01 11 10			
	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

AB \ CD	00 01 11 10			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

AB \ CD	00 01 11 10			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或式——2

每个圈代表一个或项（和项）

变量取值不同——消去相应变量

变量取值相同——按约定保留相应变量

$\left\{ \begin{array}{l} 0: \text{原变量} \\ 1: \text{反变量} \end{array} \right.$

$A+C+D'$

$B'+D'$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

B

如何从卡诺图读最简或式——3

将所有的和项相与(相乘)

$$F=(B+D)$$

$$(A+C)$$

$$(A'+C')$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

读取与或式

$$F_1'=F$$

$$F_1=A'C'+AC+B'D'$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

卡诺图化简法

从卡诺图中读取

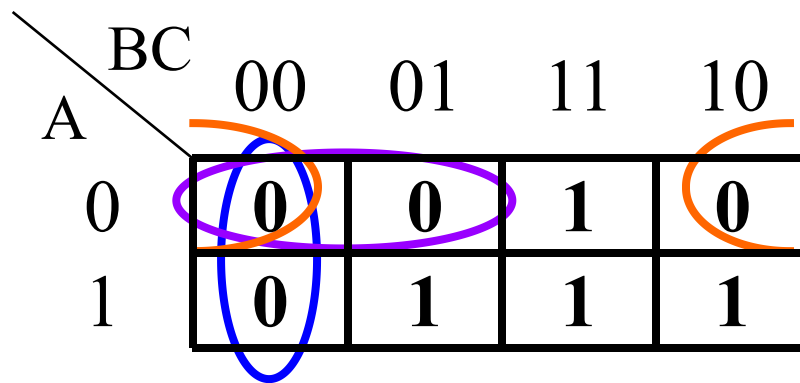
- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)

如何从卡诺图读最简与或非式

- 读 F' 的与或式

- 方法：按读取与或式的规则（1：原变量，0：反变量），但是主要关注“0”

- 对 F' 求反



A Karnaugh map for three variables A, B, and C. The rows are labeled A (0, 1) and the columns are labeled BC (00, 01, 11, 10). The map contains 1s at (A=0, BC=11), (A=1, BC=01), (A=1, BC=11), and (A=1, BC=10). There are 0s at (A=0, BC=00), (A=0, BC=01), and (A=0, BC=10). Three groupings are shown: a blue circle around the 0s at (0,00) and (1,00), a purple circle around the 0s at (0,00) and (0,01), and an orange circle around the 0s at (0,01) and (0,10).

BC \ A	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

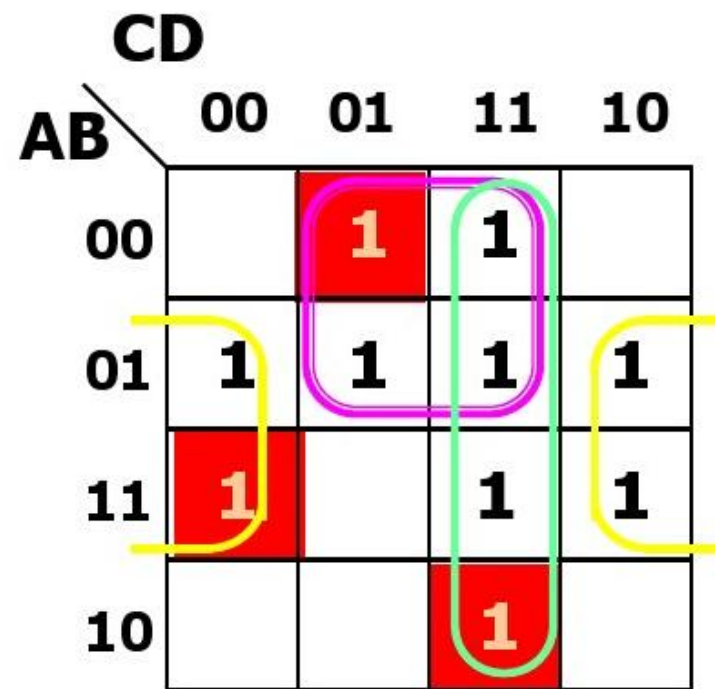
$$F = (A+B)(B+C)(A+C)$$

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$$

$$F = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}}$$

卡诺图中的几个概念

- 蕴含项 (implicant)：只包含1的卡诺圈
- 主蕴含项/首要蕴含项 (prime implicant)：扩展到最大的蕴含项
- 所有首要蕴含项都可以通过卡诺图求得
- 最简积之和由某些首要蕴含项组成
 - 若含有非首要蕴含项，可能不是最简式
- 完全由无关项组成的首要蕴含项不可能成为最简结果的一部分



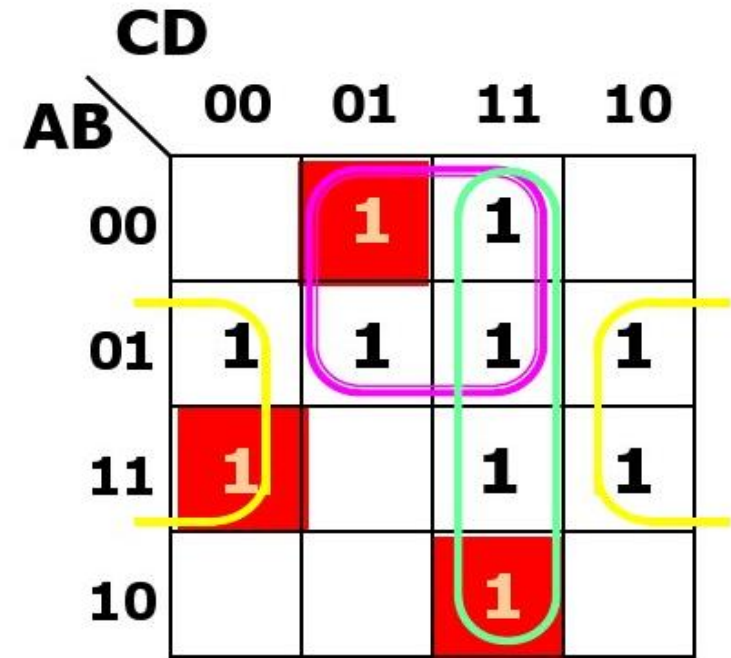
卡诺图中的几个概念——续

- 奇异“1”单元（Distinguished 1-cell）：仅被
单一首要蕴含项覆盖的输入组合

技巧： 圈卡诺图时，从合并奇异1单元开始

- 质主蕴含项（Essential Prime implicant） /
基本首要蕴含项：

覆盖一个或者多个奇异“1”单元的主蕴含项

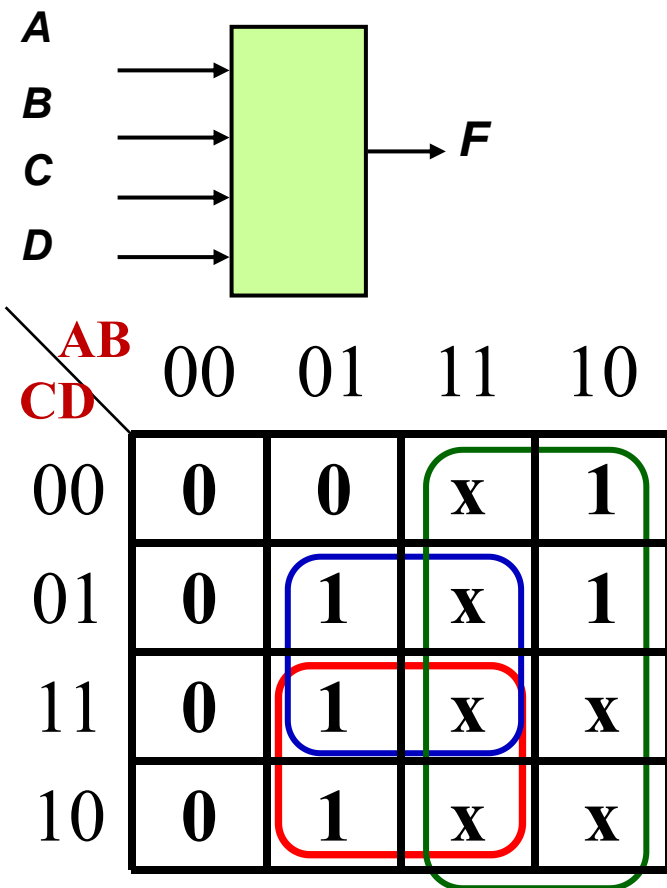


扩展知识： 如何使逻辑表达式最简？

- 卡诺图
 - 具体步骤参见P111-112
- 首要蕴含项表（P136）
 - 假设某逻辑函数的表达式如6-2所示。
 - 经过化简后如6-3所示
 - 用表6-2和6-3得到最简积之和表达式

带无关项的卡诺图化简——例

输入信号X为 8421BCD码,设计组合逻辑电路, 当 $X \geq 5$, 输出 $F=1$ 。

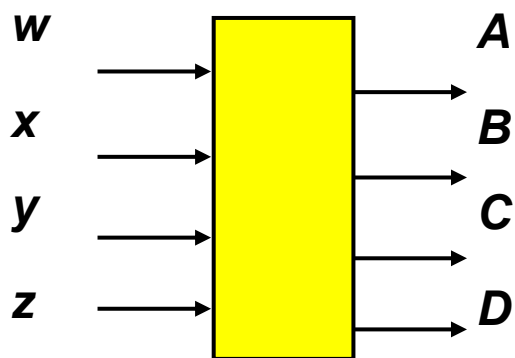


A B C D	F	A B C D	F
0 0 0 0	0	1 0 0 0	1
0 0 0 1	0	1 0 0 1	1
0 0 1 0	0	1 0 1 0	×
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×
0 1 0 0	0	1 1 0 0	×
0 1 0 1	1	1 1 0 1	×
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×
0 1 1 1	1	1 1 1 1	×

$$F = BD + BC + A$$

带无关项的卡诺图化简——例

设计一个能将4位二进制数转换为余3码的电路



二进制数				余三码				二进制数				余三码			
W	X	Y	Z	A	B	C	D	W	X	Y	Z	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	×			
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	×			
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	×			
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	×			
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	×			
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	×			

带无关项的卡诺图化简

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$A = W + XZ + XY$$

$$B = \bar{X}Z + \bar{X}Y + X\bar{Y}\bar{Z}$$

YZ \ WX	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

$$C = \bar{Y}\bar{Z} + YZ$$

$$D = \bar{Z}$$

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

YZ \ WX	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法