

# 数字逻辑设计

王鸿鹏

计算机科学与技术学院

wanghp@hit.edu.cn

# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 组合逻辑电路的设计方法

---

|    |    |      |
|----|----|------|
| 已知 | —— | 设计要求 |
| 待求 | —— | 逻辑图  |

- 1.根据设计要求确定真值表
- 2.根据真值表确定逻辑表达式(卡诺图)
- 3.化简
- 4.按设计要求，变换逻辑表达式
- 5.画出逻辑图

# 组合逻辑电路的设计目标

---

- 实现逻辑功能
- 满足性能指标
- 综合考虑各项因素：

规模、功耗、价格、可靠性、速度、易实现、易维修、美观等

**设计不唯一，最佳设计方案随新技术的不断推出而变化**

# 怎样设计组合逻辑电路？

---

## ■方法1：直接转换(简单情况下)

- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

## ■方法2：真值表转换

- 由真值表可直接写出标准形式的逻辑表达式
  - 标准与或式 (最小项表达式: **and-or**)
  - 标准或与式 (最大项表达式: **or-and**)

# 直接转换法例子1

方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式

逻辑关系

Mary watches TV **if** it is Monday night **and** she has finished her homework



定义输入输出：

$F = 1$ : 看电视

$F = 0$ : 没看电视

$A = 1$ : 周一晚上

$A = 0$ : 不是周一晚上

$B = 1$ : 完成作业

$B = 0$ : 没完成作业

$$F = A \cdot B$$

# 直接转化法例子2

---

The alarm will **ring**

F: 1 ring 0 not ring

if the alarm switch is turned **on** **and** the door is not **closed**,

A: 1 on, 0 off

B: 1 closed 0: not closed

**or** it is **after 6 P.M.** **and** the window is not **closed**.

C: 1 after, 0 not ..

D: 1 closed 0: not closed

$$F = AB' + CD'$$

如果1代表**not closed**, 逻辑函数表达式F=?

# 怎样设计组合逻辑电路？

---

## ■方法1：直接转换（简单情况下）

- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

## ■方法2：真值表转换

- 由真值表可直接写出两种标准形式的逻辑表达式
  - 标准与或式（最小项表达式：and-or）
  - 标准或与式（最大项表达式：or-and）



# 逻辑函数（逻辑表达式）

输入逻辑变量 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , 输出逻辑变量 $F$ ;

输出可以记为 $F = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$

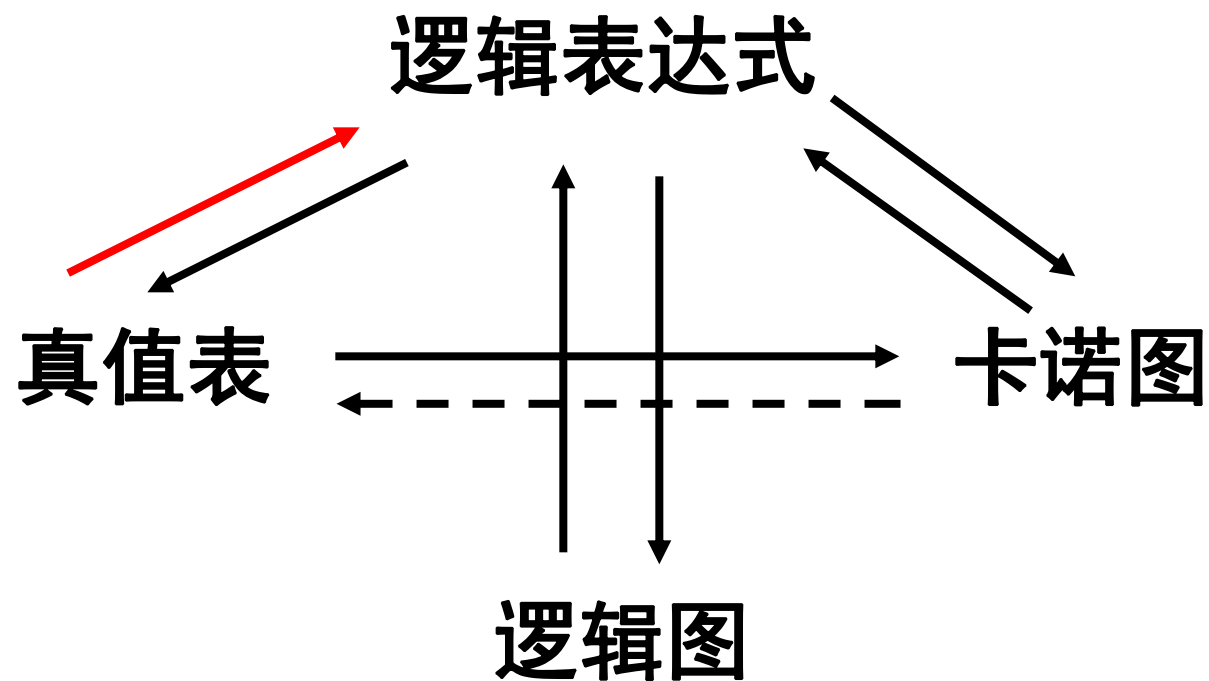


输入变量（自变量）取值：0、1；

输出变量（逻辑函数值）取值：0、1。

# 数字系统的表示方法

---

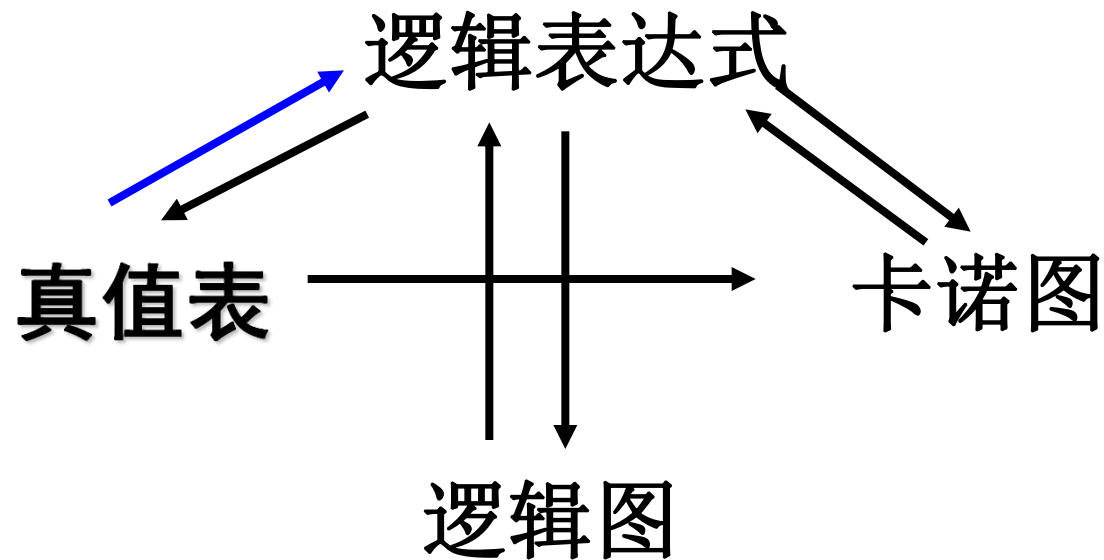


# 由真值表获得逻辑表达式

真值表

| AB C  | F |
|-------|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 |
| 0 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 |

真值表  $\longrightarrow$  (逻辑) 表达式



# 逻辑表达式的几个基本定义

---

- 因子(literal)是一个变量或变量的补(反)—— $X$ ,  $Y$ ,  $X'$ ,  $Y'$
- **与项**/乘积项(product term): 单个因子或2个及以上因子的逻辑积/与, 例如:  $X \cdot Y'$ ,  $X \cdot Y \cdot Z$ ,  $W' \cdot Y' \cdot Z$ ,  $Y'$
- **或项**/求和项(sum term): 单个因子或2个及以上因子的逻辑和/或, 例如:  $W + X + Y$ ,  $X + Y' + Z$ ,  $Y'$
- **与或式**/“积之和”式(sum-of-products expression): 乘积项的逻辑和, 例如:  $Z' + WXY$ ,  $XZ + Y'Z$
- **或与式**/“和之积”式(product-of-sum expression): 求和项的逻辑积, 例如:  $Z' \cdot (W + X + Y)$ ,  $(X + Y' + Z) \cdot (W' + Y' + Z)$

# 一个逻辑函数有多种不同的表达式

$$F=AB+A\bar{C} \quad \dots\dots \text{与-或}$$

$$\overline{\overline{AB+A\bar{C}}}$$

$$=\overline{\overline{AB}} \cdot \overline{\overline{A\bar{C}}} \quad \dots\dots \text{与非-与非}$$

$$=(\overline{A+B}) \cdot (\overline{A+C}) \quad \dots\dots \text{或-与非}$$

$$=(\overline{A+B}) + (\overline{A+C}) \quad \dots\dots \text{或非-或}$$

$$F=(A+B) \cdot (A+\bar{C}) \quad \dots\dots \text{或-与}$$

$$\overline{\overline{(A+B) \cdot (A+\bar{C})}}$$

$$=\overline{\overline{(A+B)}} + \overline{\overline{(A+\bar{C})}} \quad \dots\dots \text{或非-或非}$$

$$=\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C \quad \dots\dots \text{与-或非}$$

$$=\overline{\overline{A}} \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}} C \quad \dots\dots \text{与非-与}$$

# 使用真值表设计组合逻辑电路——与或式

真值表

| AB C  | F   |
|-------|-----|
| 0 0 0 | 0   |
| 0 0 1 | 0   |
| 0 1 0 | 0   |
| 0 1 1 | 1 ✓ |
| 1 0 0 | 0   |
| 1 0 1 | 1 ✓ |
| 1 1 0 | 1 ✓ |
| 1 1 1 | 1 ✓ |

真值表  $\longrightarrow$  (逻辑) 表达式

① 写出标准与或式 (乘积之和)

关注表中输出值为1的所有输入取值组合

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

输入取值组合中

1——原变量

0——反变量

# 使用真值表设计组合逻辑电路——或与式

真值表  $\longrightarrow$  表达式

②写出标准**或与式**（**和之积**）

关注表中**输出值为0**的所有输入取值组合

输入取值组合中

**0**——原变量

**1**——反变量

真值表

| A | B | C | F   |
|---|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 ✓ |
| 0 | 0 | 1 | 0 ✓ |
| 0 | 1 | 0 | 0 ✓ |
| 0 | 1 | 1 | 1   |
| 1 | 0 | 0 | 0 ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 1   |
| 1 | 1 | 0 | 1   |
| 1 | 1 | 1 | 1   |

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

# 布尔代数的应用实例

---

- 例子： 某电路有三个输入端 $A, B, C$ , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f = 1$ , 否则 $f = 0$ .

步骤:

1. 根据设计要求确定真值表
2. 根据真值表获得卡诺图(表达式)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



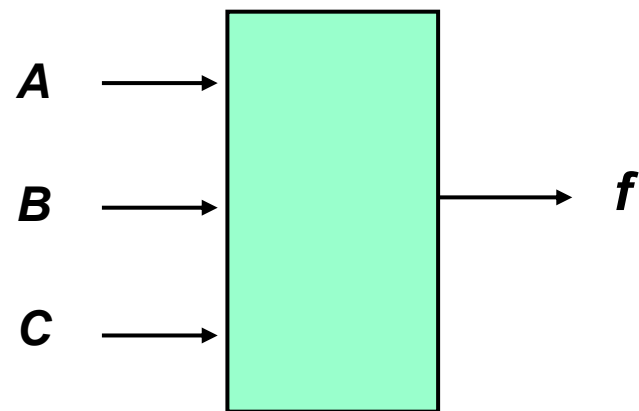
# 布尔代数的应用实例（续）

例： 某电路有三个输入端 $A, B, C$ , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f = 1$ , 否则 $f = 0$ .

穷举法

## ① 真值表

| $A$ | $B$ | $C$ | $f$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   | 0   |
| 0   | 0   | 1   | 0   |
| 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1   |
| 1   | 1   | 1   | 1   |



# 布尔代数的应用实例（续）

## ② 逻辑表达式

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

| A | B | C | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

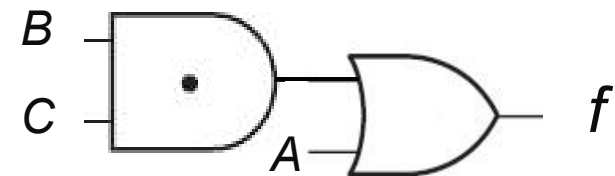
## ③ 化简

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

$$= A'BC + AB' + AB$$

$$= A'BC + A = BC + A$$

## ④ 逻辑图



# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 最大项Maxterm、最小项Minterm的定义

| 序号 |     | 最小项            | 最大项                  |
|----|-----|----------------|----------------------|
| 0  | 000 | $A'B'C' = m_0$ | $A + B + C = M_0$    |
| 1  | 001 | $A'B'C = m_1$  | $A + B + C' = M_1$   |
| 2  | 010 | $A'B C' = m_2$ | $A + B' + C = M_2$   |
| 3  | 011 | $A'B C = m_3$  | $A + B' + C' = M_3$  |
| 4  | 100 | $A B'C' = m_4$ | $A' + B + C = M_4$   |
| 5  | 101 | $A B'C = m_5$  | $A' + B + C' = M_5$  |
| 6  | 110 | $A B C' = m_6$ | $A' + B' + C = M_6$  |
| 7  | 111 | $A B C = m_7$  | $A' + B' + C' = M_7$ |

■ 编号次序：自左向右从高到低

最小项输入取值组合中

原变量——1

反变量——0

最大项输入取值组合中

原变量——0

反变量——1

- $n$ 个变量组成的最小项 $m_i$ ：是一个与项（包含 $n$ 个变量）
- $n$ 个变量组成的最大项 $M_i$ ：是一个或项（包含 $n$ 个变量）
- 每个变量或者以原变量的形式、或者以反变量的形式出现，并且只出现一次。因子：原变量或反变量
- $n$ 个变量能组成的最小（大）项的个数是 $2^n$

# 最小项的特点

|     | $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ | $\overline{A}\overline{B}C$ | $\overline{A}B\overline{C}$ | $\overline{A}BC$ | $A\overline{B}\overline{C}$ | $A\overline{B}C$ | $AB\overline{C}$ | $ABC$ |
|-----|--|-----------------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|------------------|-------|
| 000 | 1                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 001 | 0                                      | 1                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 010 | 0                                      | 0                           | 1                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 011 | 0                                      | 0                           | 0                           | 1                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 100 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 1                           | 0                | 0                | 0     |
| 101 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 1                | 0                | 0     |
| 110 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 1                | 0     |
| 111 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 1     |

①  $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$

②  $m_i \cdot m_j = 0 \quad (i \neq j)$

③ 对所有输入组合，  
只有一个最小项为  
1 (输入组合等于最  
小项编号时)

# 最大项的特点

| A,B,C | $A + B + C$ | $A + B + \bar{C}$ | $A + \bar{B} + C$ | $A + \bar{B} + \bar{C}$ | $\bar{A} + B + C$ | $\bar{A} + B + \bar{C}$ | $\bar{A} + \bar{B} + C$ | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ |
|-------|-------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 000   | 0           | 1                 | 1                 | 1                       | 1                 | 1                       | 1                       | 1                             |
| 001   | 1           | 0                 | 1                 | 1                       | 1                 | 1                       | 1                       | 1                             |
| 010   | 1           | 1                 | 0                 | 1                       | 1                 | 1                       | 1                       | 1                             |
| 011   | 1           | 1                 | 1                 | 0                       | 1                 | 1                       | 1                       | 1                             |
| 100   | 1           | 1                 | 1                 | 1                       | 0                 | 1                       | 1                       | 1                             |
| 101   | 1           | 1                 | 1                 | 1                       | 1                 | 0                       | 1                       | 1                             |
| 110   | 1           | 1                 | 1                 | 1                       | 1                 | 1                       | 0                       | 1                             |
| 111   | 1           | 1                 | 1                 | 1                       | 1                 | 1                       | 1                       | 0                             |

- ①  $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$
- ②  $M_i + M_j = 1 \quad (i \neq j)$
- ③ 对所有输入组合，只有一个最大项为0(输入组合等于最小项编号)

# 最小项和最大项的性质

1. 最小项的反是最大项，最大项的反是最小项（编号相同）；

$$\overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C}} = \overline{m_0} = A + B + C = M_0$$

$$\overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{M_3} = \overline{A} BC = m_3$$

2. 全部最小项之和恒等于“1”；

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

3. 全部最大项之积恒等于“0”；

$$M_0 M_1 M_2 M_3 = 0$$

4. 一部分最小项之和的反等于其余所有最小项之和

$$\overline{m_1 + m_2} = m_0 + m_3$$

$$\overline{m_0} = m_1 + m_2 + m_3$$

# 最小项和最大项的性质——续

---

5. 两个不同的最小项之积恒等于“0”；

例如： $ABC \cdot AB \overline{C} = 0$

6. 两个不同的最大项之和恒等于“1”；

例如： $(A + B + C) + (A + B + \overline{C}) = 1$

与或标准型

$$Y = \sum m_i = \sum m(0,1,4,6,7) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7$$

或与标准型

$$Y = \prod M_i = \prod M(0,1,4,6,7) = M_0 M_1 M_4 M_6 M_7$$



# 最小项表达式——标准与或式

- 关注真值表中取值为“1”的最小项

$$\begin{aligned} &011101110111 \\ F &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\ &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 \\ &= \Sigma m(3, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 最大项表达式——标准或与式

- 关注真值表中取值为**0**的最大项

**0 0 0      0 0 1      0 1 0      1 0 0**

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

$$= \prod M(0, 1, 2, 4)$$

| A | B | C | F        |
|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | <b>0</b> |
| 0 | 0 | 1 | <b>0</b> |
| 0 | 1 | 0 | <b>0</b> |
| 0 | 1 | 1 | 1        |
| 1 | 0 | 0 | <b>0</b> |
| 1 | 0 | 1 | 1        |
| 1 | 1 | 0 | 1        |
| 1 | 1 | 1 | 1        |

# 逻辑表达式之间的变换

---

$$F=A'B+BC'+AB'C$$

• 标准与或式:

$$F=A'B(C'+C)+(A'+A)BC'+AB'C$$

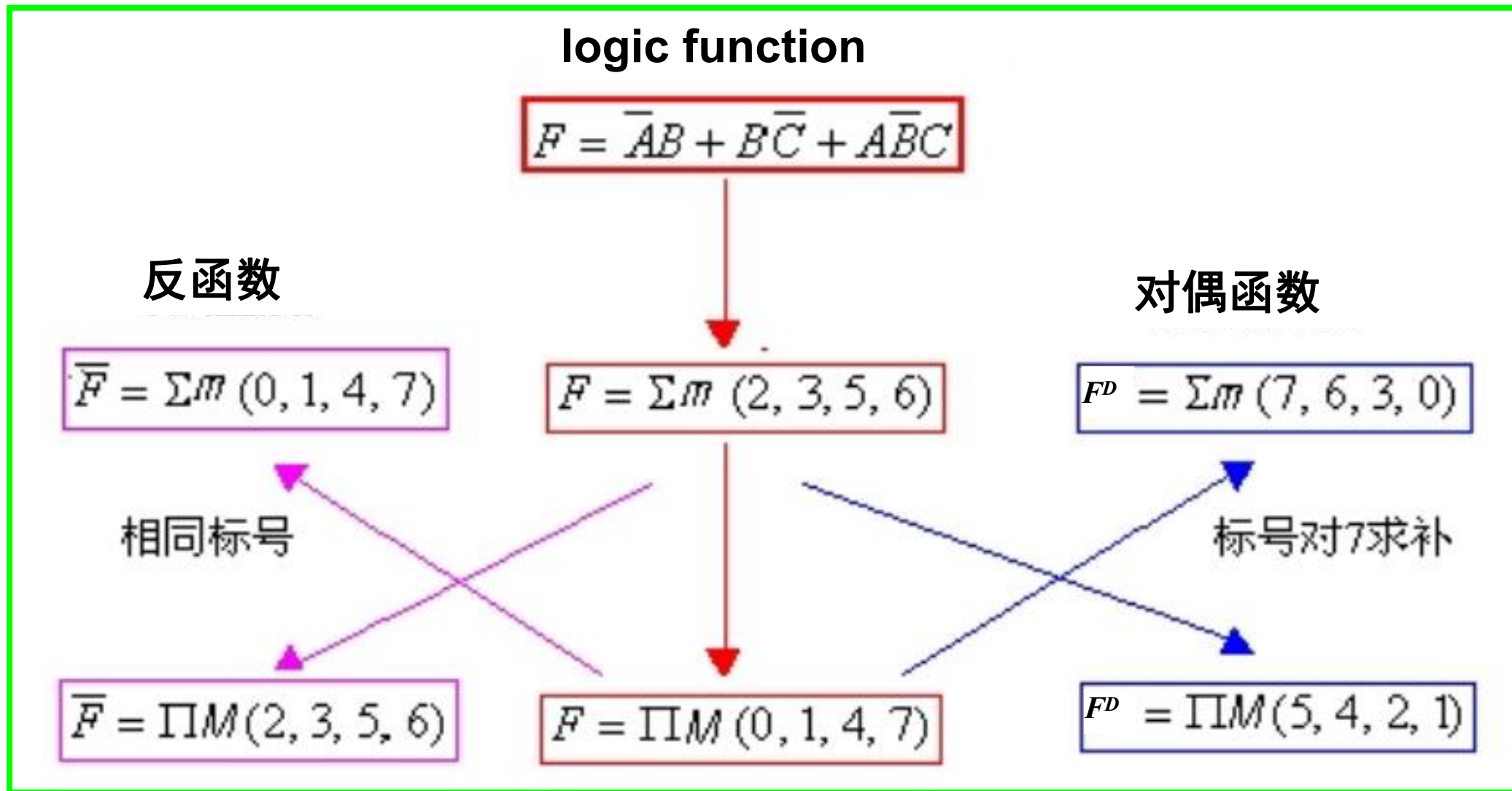
$$=A'BC'+A'BC+AB'C+ABC'=m_2+m_3+m_5+m_6$$

$$F^D=(A'+B+C')(A'+B+C)(A+B'+C)(A+B+C')=M_5M_4M_2M_1$$

$$F'=(m_2+m_3+m_5+m_6)'$$

$$=m_2' m_3' m_5' m_6' =M_2M_3M_5M_6$$

# 最大项、最小项表达式之间的变换



# 最大项、最小项表达式——练习

练习：

|                                    | Minterm<br>Expansion<br>of $f$ | Maxterm<br>Expansion<br>of $f$ | Minterm<br>Expansion<br>of $f'$ | Maxterm<br>Expansion<br>of $f'$ |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $f =$<br>$\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$ | _____                          | $\Pi M(0, 1, 2)$               | $\Sigma m(0, 1, 2)$             | $\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$          |
| $f =$<br>$\Pi M(0, 1, 2)$          | $\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$      | _____                          | $\Sigma m(0, 1, 2)$             | $\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$          |

# 目 录

---

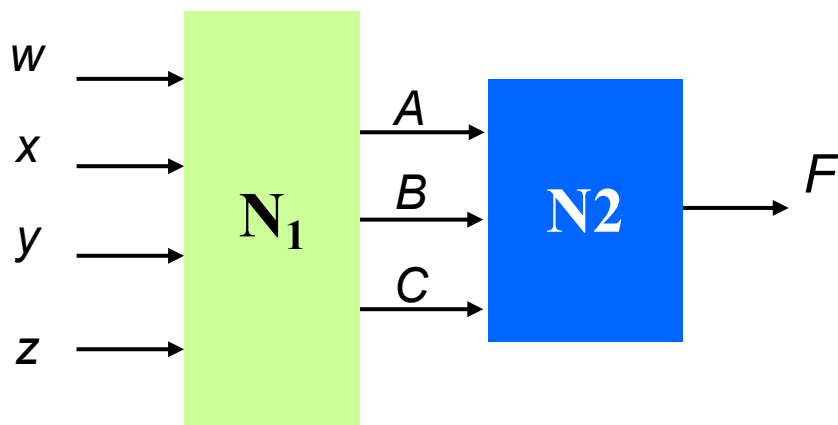
- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 无关项 (Don't care terms)

- 不可能存在的输入取值组合
- 所有的输入取值组合都存在，但是对于某些输入取值，我们并不关心它们导致的输出结果是0还是1，因为没有意义。

假设：无论wxyz取何值，

电路N1的输出都不为001或者110。



| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | X |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | X |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 不完全给定函数

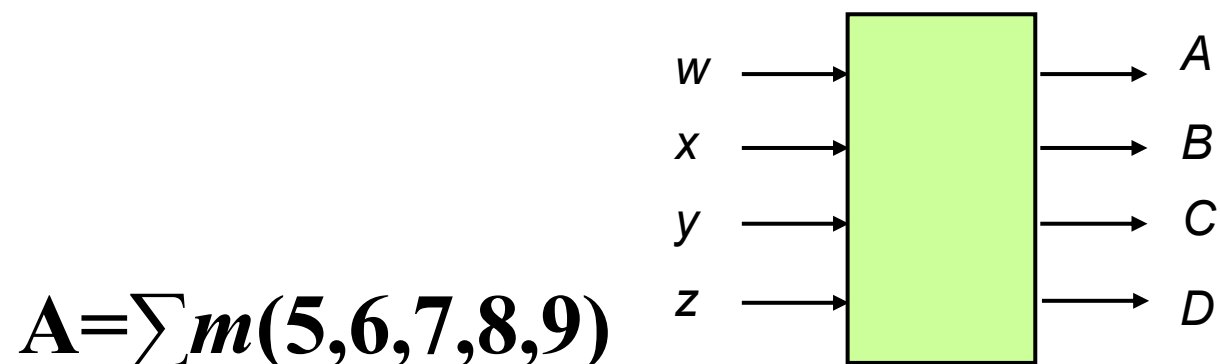
$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum d(1, 6)$$

$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod D(1, 6)$$

| <i>A B C</i> | <i>F</i> |
|--------------|----------|
| 0 0 0        | 1        |
| 0 0 1        | X        |
| 0 1 0        | 0        |
| 0 1 1        | 1        |
| 1 0 0        | 0        |
| 1 0 1        | 0        |
| 1 1 0        | X        |
| 1 1 1        | 1        |



# 例：8421BCD转余三码



| 十进制  | 8421BCD<br>wxyz | 余三码<br>ABCD |
|------|-----------------|-------------|
| 0    | 0000            | 0011        |
| 1    | 0001            | 0100        |
| 2    | 0010            | 0101        |
| 3    | 0011            | 0110        |
| 4    | 0100            | 0111        |
| 5    | 0101            | 1000        |
| 6    | 0110            | 1001        |
| .... | ....            | ....        |
| 9    | 1001            | 1100        |
| 10   | 1010            | xxxx        |
| .... | ....            | ....        |
| 15   | 1111            | xxxx        |

# 小结

---

- 进制和编码：进制转换、8421BCD码、余三码、典型格雷码等
- 开关代数：基本逻辑运算、复合逻辑运算、常用定理等
  - 第二分配律、德摩根定律、蕴含律、对偶规则等
- 逻辑表达式
  - 最大项表达式、最小项表达式、不完全给定函数
- 代数化简法的优缺点

# 布尔（逻辑）代数常用定理

---

$$(T8D) \ A+BC=(A+B) \cdot (A+C)$$

第二分配律

$$(T9) \ A+AB=A$$

$$(T9D) \ A(A+B)=A$$

（吸收律）

$$(T11) \ A+A'B=A+B$$

（消除律）

$$(T12) \ AB+A'C+BC=AB+A'C$$

（蕴含律）

$$(A+B)'=A'B'$$

$$(AB)'=A'+B'$$

（德摩根定律）

对偶规则：变量不变，与变或，或变与，同或变异或，异或变同或。

另一种求对偶式的方法：对整个表达式求反，然后再对每个变量取反。