数理逻辑

任世军
e-mail:ren_shijun@163.com

哈尔滨工业大学 计算学部

2023 年 9 月

Outline

相关信息

1. 课程介绍 (离散数学 $\Leftarrow$ 数理逻辑 $\Rightarrow$ 形式语义学,程序设计方法学)
2. 教材
3. 参考书
4. 研究内容
5. 发展历史
   - 初始阶段(1660-19 世纪末)
     1. 亚里士多德
     2. 莱布尼兹
     3. 布尔代数
   - 过度阶段(1900-1940)
     1. 非欧几何公理方法
     2. 实数理论皮亚诺算术
     3. 集合论、数学基础及希尔伯特计划
   - 成熟阶段(1930-)
     1. 哥德尔不完全性定理
     2. 四论 (证明论 模型论 递归论 公理化集合论)

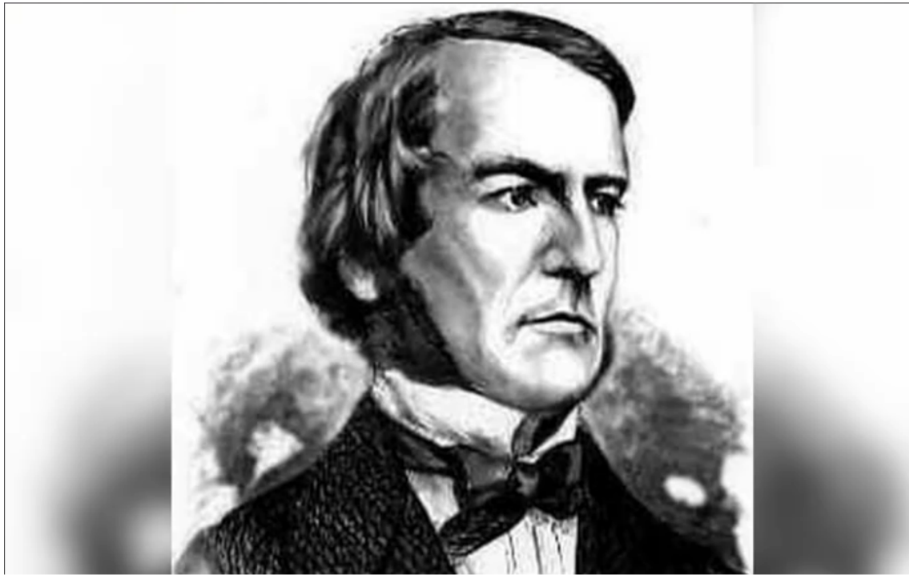
亚里士多德

亚里士多德 (Aristotle，前 384 年-前 322 年)，古希腊哲学家、教育家和科学家。他是柏拉图的学生，亚历山大的老师，他和苏格拉底、柏拉图并称为希腊哲学三贤。

莱布尼茨

莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646-1716),德国哲学家、数学家、物理学家、法学家、历史学家和政治家,是欧洲近代哲学史上最重要的思想家之一。他的思想涵盖了哲学、数学、物理学、逻辑学、语言学、政治学等多个领域,对人类文明的发展和进步产生了深远的影响。

布尔



乔治·布尔(George Boole,1815.11.2∼1864.12.8),1815 年 11 月 2 日生于英格兰的林肯。19 世纪最重要的数学家之一,出版了《逻辑的数学分析》,这是他对符号逻辑的第一次贡献。1854 年,他出版了《思维规律的研究》,这是他最著名的著作。在这本书中布尔介绍了现在以他的名字命名的布尔代数。

逻辑的无处不在

1 刘备的三顾茅庐

徐庶离开时，向刘备说：伏龙凤雏得一而安天下。三顾茅庐的目的是请出诸葛，从而得以安天下。

2 抽烟的论断

班级里一定有一个人，如果他抽烟，那么班级里所有的人都抽烟。

3 成绩的问题

如果大家期末的成绩都低于90分，那么就会有人到教务处提意见。从而班级里一定有成绩优秀者或者去教务处体意见者。

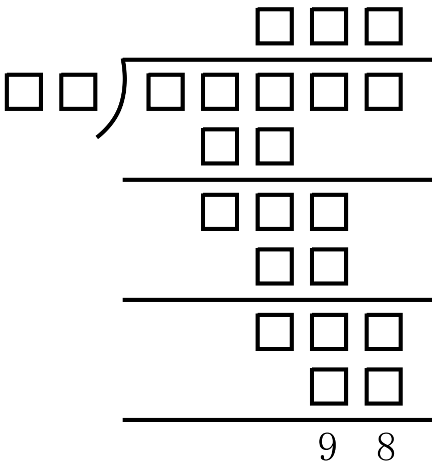
4 反证的问题

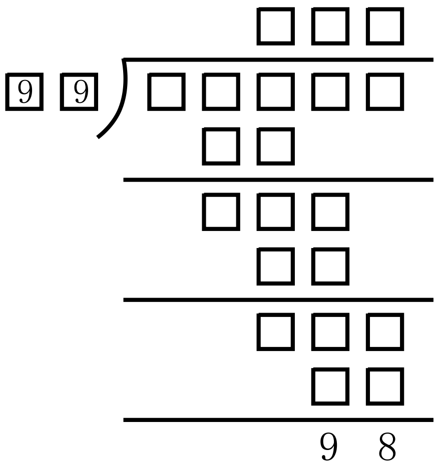
P373-3: 设 V 是实数域 R 上的一个线性空间，证明: V 永远不能表示成有限个真子空间的并。

证明: (用反证法)假设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的真子空间并且 $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$，假设 $V_i \not\subseteq \cup_{k\neq i} V_k$，否则 V_i在并集中是多余的，可以拿掉。由此可以做到取$v_i \in V_i$，使$v_i \notin \cup_{k\neq i} V_k$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$。对 $\forall \alpha, \beta \in R$，如果 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$，必然得到 $\alpha v_1 + \beta v_2 \notin V_1$，否则 $v_2 = \frac{1}{\beta}(\alpha v_1 + \beta v_2) - \frac{\alpha}{\beta} v_1 \in V_1$，同样道理 $\alpha v_1 + \beta v_2 \notin V_2$。所以 $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_n$。由此有 $1 \cdot v_1 + v_2, 2 \cdot v_1 + v_2, \cdots, n \cdot v_1 + v_2 \in V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_n$。由鸽笼原理知，必有 i, j, k 使得 $1 \leq i < j \leq n, 3 \leq k \leq n$，满足 $i \cdot v_1 + v_2, j \cdot v_1 + v_2 \in V_k$，故有 $(j \cdot v_1 + v_2) - (i \cdot v_1 + v_2) \in V_k$ 即 $(j - i)v_1 \in V_k$，从而 $v_1 \in V_k$。这与 $v_1 \notin \cup_{k\neq 1} V_k$相矛盾。

逻辑是研究思维的科学

5 问题求解



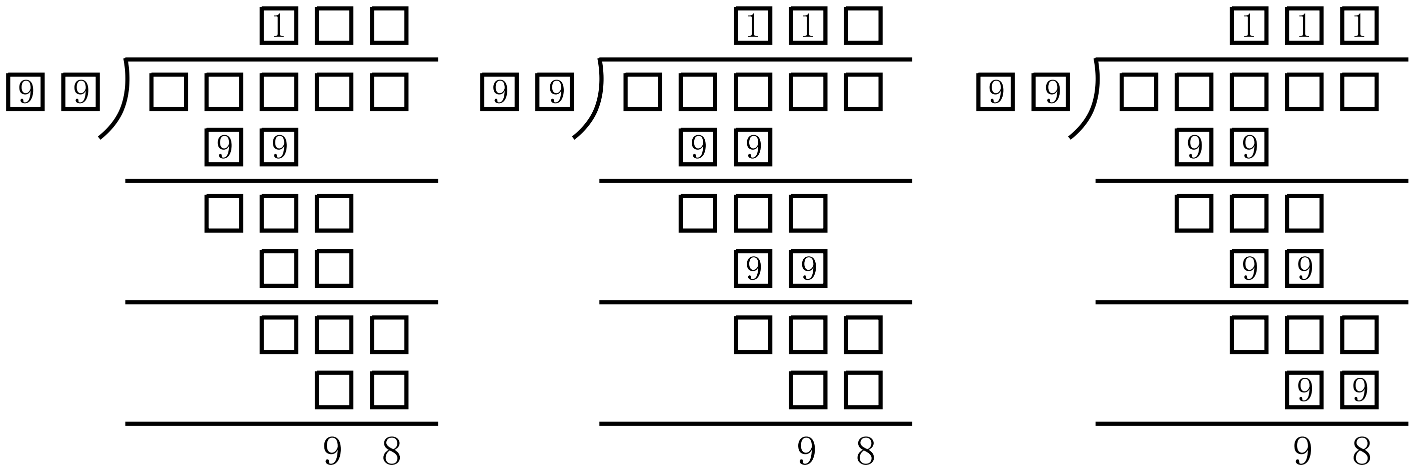


1. 如果 a, b 为整数，$a = qb + r$，那么 $0 \le r < b$。

$$98 < \square\square < 100$$
$$r < b$$

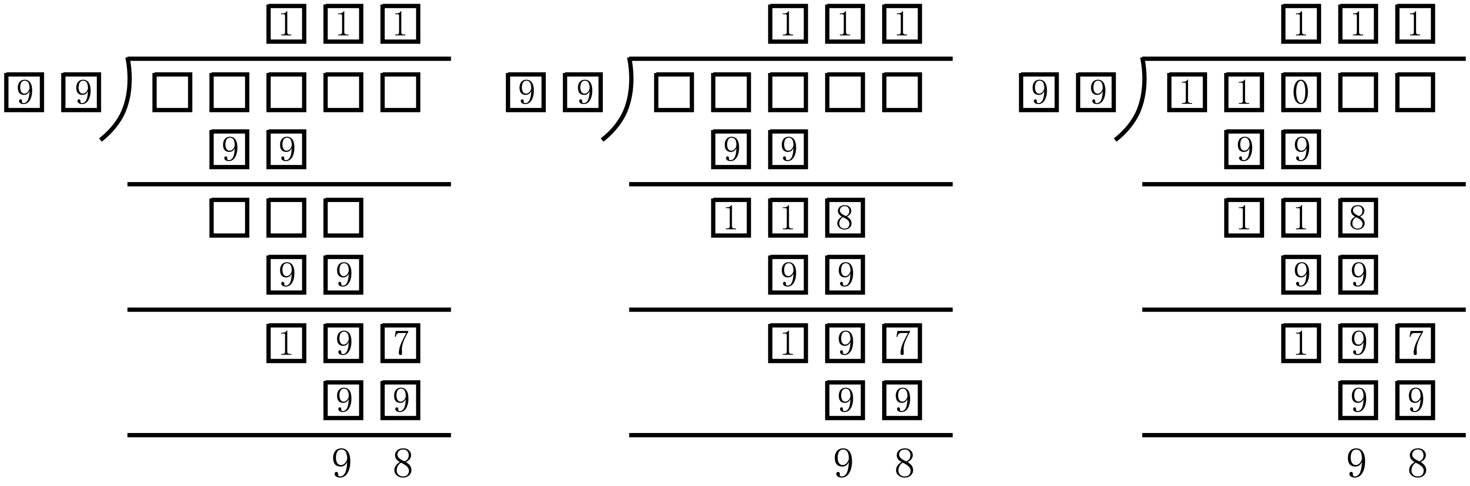
推出除数 $\square\square = 99$

2. 由 $\overset{1}{\square} \times 99 = \overset{2}{\square}\overset{3}{\square} < 100$ 推出 $\overset{1}{\square} = 1$ $\overset{2}{\square}\overset{3}{\square} = 99$



逻辑是研究思维的科学

3. 由 $98+99=197$ 推出 $\square\square\square=197$
4. 由 $19+99=118$ 推出 $\square\square\square=118$
5. 由 $11+99=110$ 推出 $\square\square\square=110$



从程序到模型

```
int n=100;
int bPrime=1;
for(int i=2;i<n;i++){
      if(n%i==0){
         bPrime=0;
            break;
      }
}
if(bPrime==1){
      printf("%d is prime!\n",n);
}
else{
      printf("%d isn't prime!\n",n);
}
```

$$1\ A_1$$
$$2\ A_2$$
$$3\ A_3$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{n}\ A_n$$

$$\begin{aligned} &(A_1)^v \\ \wedge\ &(A_2)^v \\ &\vdots \\ \wedge\ &(A_n)^v \end{aligned}$$

$$(A \to B)^v$$
$$= 1 - A^v + A^v B^v$$

$$\boxed{\begin{aligned} K &= t \\ &\mid f \\ &\mid K \cdot K \end{aligned}}$$

$$t \cdot (f \cdot t) \in K?$$

$$\boxed{\begin{aligned} f \cdot K &\Rightarrow K \\ t \cdot K &\Rightarrow t \end{aligned}}$$

$$f \cdot t \Rightarrow^* t \cdot t?$$

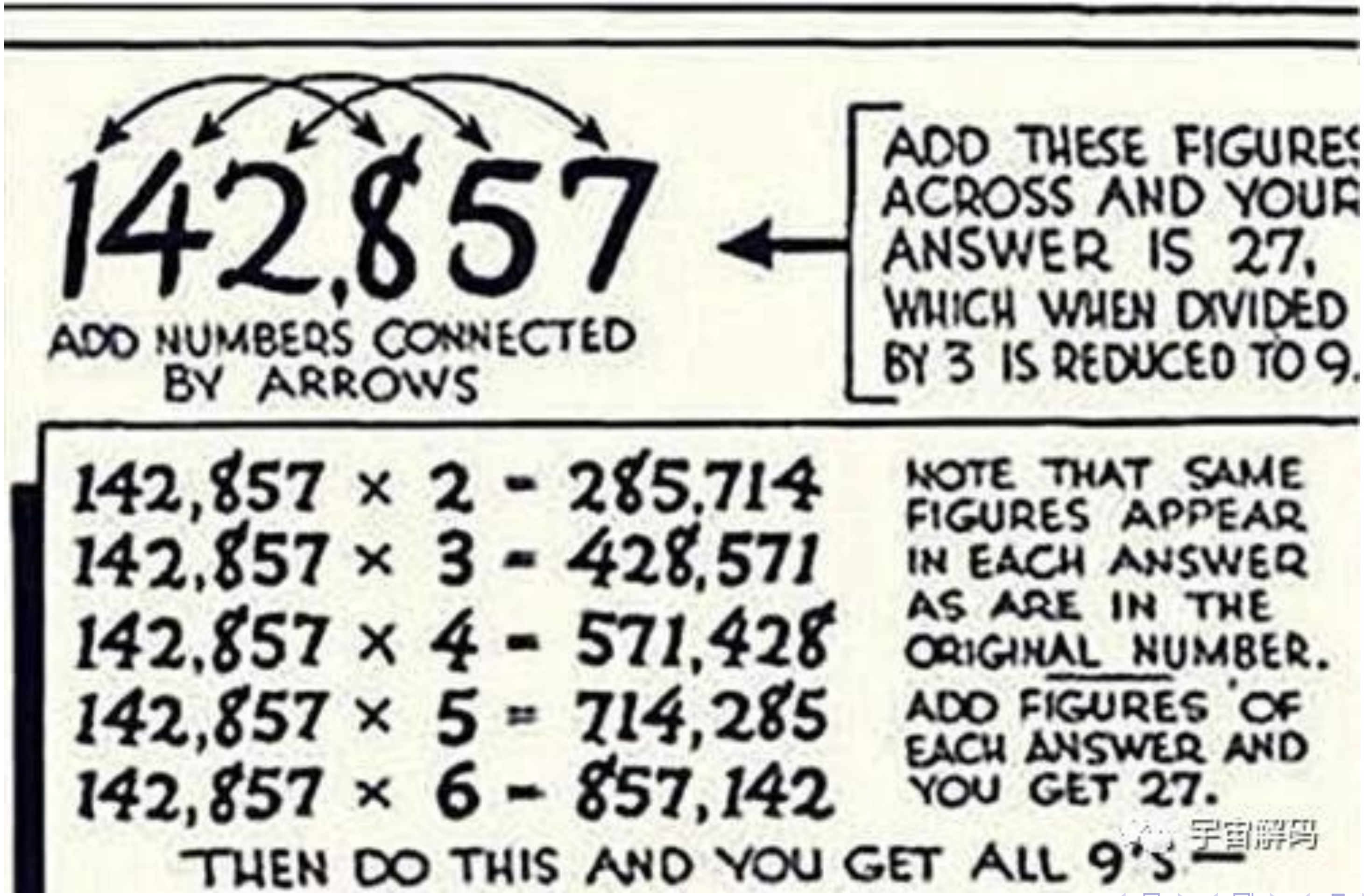
数字字谜问题

已知公式：

```
  D C N A L D
+ G E R A L D
-------------
  R C B E R T
```

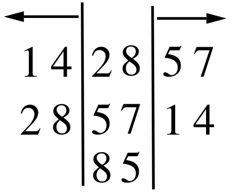
共有10个字母A, B, C, D, E, G, N, L, R, T
每个字母代表0-9中的一个，没有重复。
已知D=5，计算其余9个字母代表的数字。

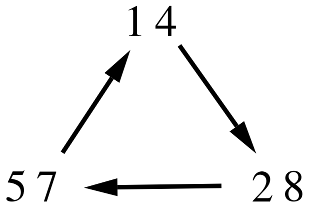
```
  5 2 6 4 8 5
+ 1 9 7 4 8 5
-------------
  7 2 3 9 7 0
```

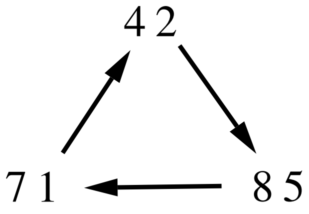

142,857
ADD NUMBERS CONNECTED BY ARROWS
ADD THESE FIGURES ACROSS AND YOUR ANSWER IS 27, WHICH WHEN DIVIDED BY 3 IS REDUCED TO 9.
142,857 × 2 - 285,714
142,857 × 3 - 428,571
142,857 × 4 - 571,428
142,857 × 5 = 714,285
142,857 × 6 - 857,142
NOTE THAT SAME FIGURES APPEAR IN EACH ANSWER AS ARE IN THE ORIGINAL NUMBER.
ADD FIGURES OF EACH ANSWER AND YOU GET 27.
THEN DO THIS AND YOU GET ALL 9'S

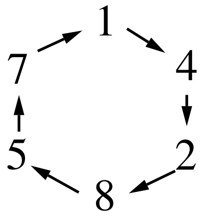
$14 \oplus 14 = 28$ $\quad 14 \oplus 28 = 42$ $\quad 14 \oplus 57 = 71$

$28 \oplus 28 = 57$ $\quad 28 \oplus 57 = 85$ $\quad 57 \oplus 57 = 14$

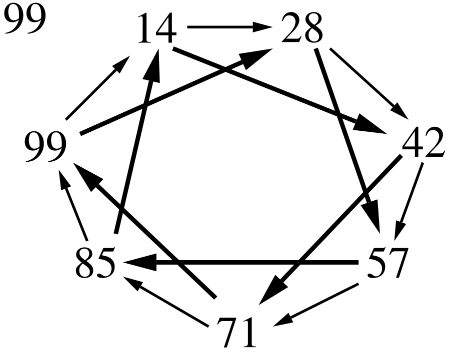








14	28	42	57	71	85	99
28	57	85	14	42	71	99
57	14	71	28	85	42	99



形式逻辑与数理逻辑

孩子放学后，妈妈问：老师教你什么了.
孩子回答：我教她了.
妈妈感到很诧异...
孩子接着说：老师问我1+2等于几，我教他说，等于3.

姐姐打了弟弟，弟弟哭了，向妈妈告状.
妈妈责备姐姐，不该打弟弟.
姐姐说：我没打他，我是扶了他一下.
弟弟说： 不是扶，我这里痛着呢.

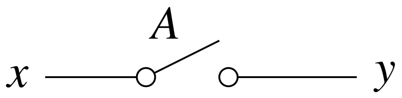
概念 → 集合

判断 → 元素与集合的关系

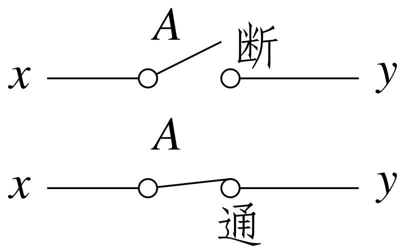
推理

电路中的逻辑——开关

- 开关及其两种状态



开关

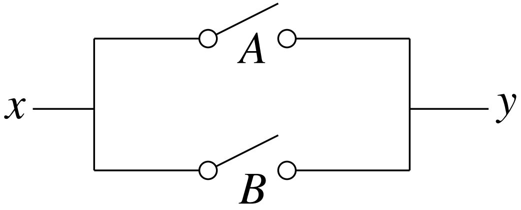


开关的两种状态

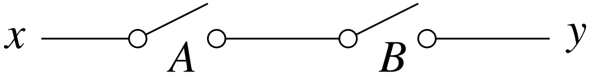
- 开关 $\to$ 事件
  可以从开关 A 得到一个事件："x 和 y 两点是接通的。"
  用 A 表示此事件。
  对立事件 $\overline{A}$ 就是："x 和 y 两点是切断的。"

电路中的逻辑——复杂开关

a 对开关 A 和 B 而言有对应的事件 A 和 B,$A \vee B$ 和 $A \wedge B$ 在电路中意味着什么呢?
事件 $A \vee B$ 表示“或者 A 通或者 B 通”。因此 $A \vee B$ 的发生等价于 A 与 B 之一是通的,这说明事件 $A \vee B$ 对应于开关 A 和 B 并联所得到的电路。



表示事件$A \vee B$ 的开关



表示事件$A \wedge B$ 的开关

事件 $A \wedge B$ 表示“A 通并且 B 通”。因此 $A \wedge B$ 的发生等价于 A 与 B 两者都是通的,这说明事件 $A \wedge B$ 对应于开关 A 和 B 串联所得到的电路。

电路中的逻辑——通断表

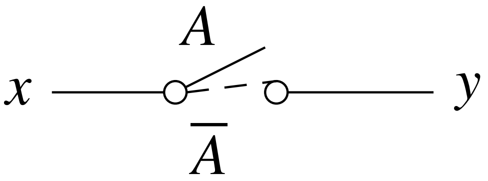
- 复杂开关 $A \vee B$ 的通断表

开关 A	开关 B	复杂开关 $A \vee B$
通	通	通
通	断	通
断	通	通
断	断	断

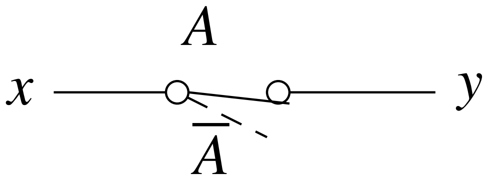
- 复杂开关 $A \wedge B$ 的通断表

开关 A	开关 B	复杂开关 $A \wedge B$
通	通	通
通	断	断
断	通	断
断	断	断

- 与开关 A 状态相反的开关 $\overline{A}$



A 断$\overline{A}$ 通



A 通$\overline{A}$ 断

- 开关 $\overline{A}$ 的通断表

开关 A	开关 $\overline{A}$
通	断
断	通

电路中的逻辑——真值表

- 真值表
- 通断表 $\rightarrow$ 真值表
  1. 通 $\rightarrow$ 真 $\rightarrow 1 \rightarrow T$.
  2. 断 $\rightarrow$ 假 $\rightarrow 0 \rightarrow F$.

  开关的通断对应事件的真假
- 真值表

A	$\bar{A}$
真 (1)	假 (0)
假 (0)	真 (1)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

电路中的逻辑——应用

楼梯上有一盏电灯,问应该如何设计电路以使楼上与楼下均能自由开关它?
设楼下的开关为 A,楼上的开关为 B,应如何设计电路才能达到预定的要求呢?
如果开关 A, B 已经接入电路并已经达到要求,那么这个电路就是一个新的开关 P。

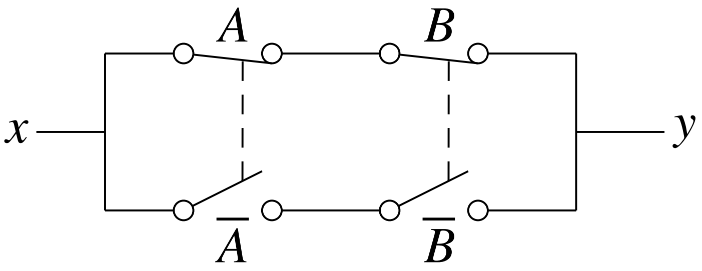
- 如果 $A = B = 1$,那么 $P = 1$.

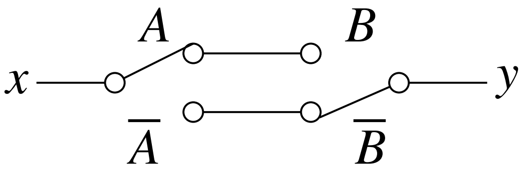
A	B	P
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

电路中的逻辑——应用

A	B	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

于是 $P=(A\wedge B)\vee(\overline{A}\wedge\overline{B})$



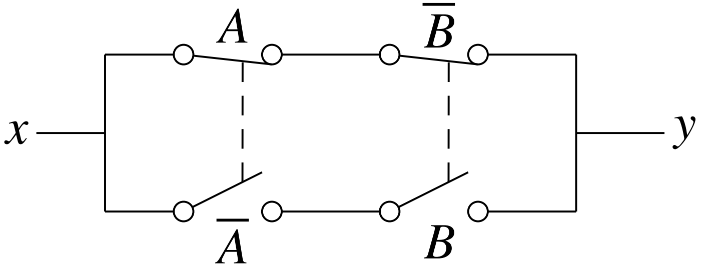


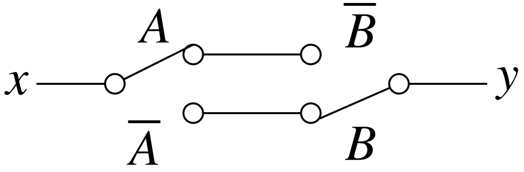
- 如果 $A=B=1$,那么 $P=0$?

电路中的逻辑——应用

A	B	P
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

于是 $P = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$



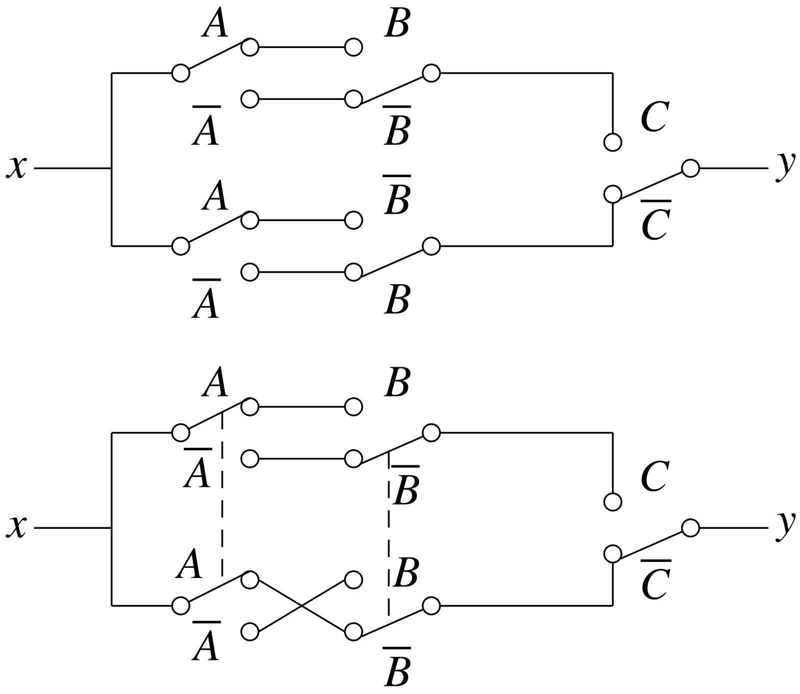


电路中的逻辑——应用扩展

一个展览大厅有三个门,问应该如何设计电路以使三个门处的任何一个均能自由开关展览厅的灯?
设三个门处的开关分别为 A,B 和 C,应如何设计电路才能达到预定的要求。

A	B	C	P
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

电路中的逻辑——应用扩展



A
B
$\overline{A}$
$\overline{B}$
C
x
y
A
$\overline{B}$
$\overline{C}$
$\overline{A}$
B
A
B
$\overline{A}$
$\overline{B}$
C
x
y
A
B
$\overline{C}$
$\overline{A}$
$\overline{B}$

Definition (命题)

命题是一个能判断真假的陈述句。

Definition (真值)

命题的取值 —— 真和假,称为真值。有时用 1 或 T 表示真,用 0 或 F 表示假。集合 {真,假} 称为真值集合。

Definition (原子命题)

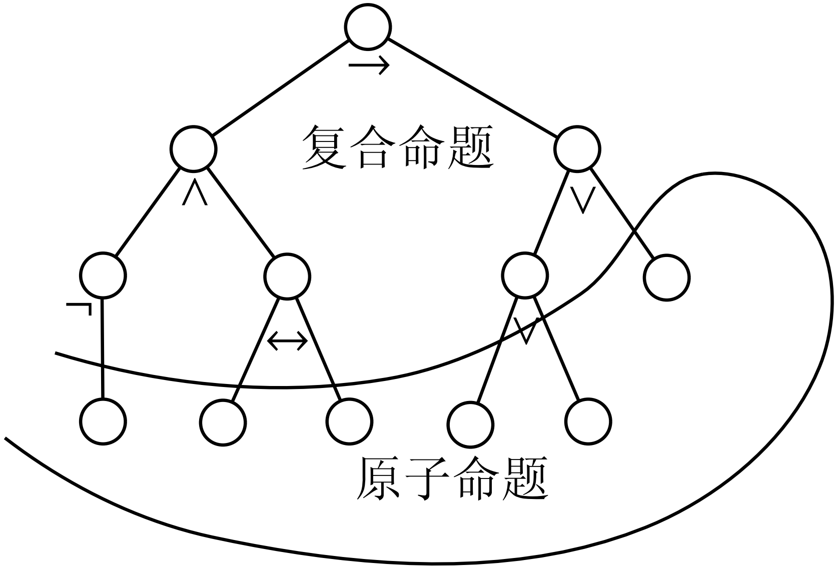
不包含其它命题成分的命题称为原子命题。

Definition (复合命题)

至少包含一个其它命题成分的命题称为复合命题。

Definition (支命题)

组成复合命题的那些命题称为支命题。



命题的符号化 (形式化) 是将命题用大写的英文字母或用带下标的大写英文字母表示出来。

命题的例子

- 雪是白的.
- 雪是黑的.
- 好大的雪啊!
- 任何一个大偶数可以表成两个素数之和.
- 太阳有第 11 颗行星.
- $2 + 2 = 5$.
- 2 是素数又是偶数.
- 陈胜吴广起义之日杭州下雨.
- 你上哪儿去?
- 这句话是假的。
- $x + y < 0$

逻辑联结词

Definition (逻辑联结词)

把几个支命题联结起来构成复合命题的词项叫作逻辑联结词。

常用的逻辑联结词有

- 并非……
- …… 并且……
- …… 或者……
- 如果…… 那么……
- …… 当且仅当……

命题的真假判定原则

- 简单命题的真假取决于它是否反映了客观世界。
- 复合命题的真假也是如此。
- 但是复合命题是由其支命题组成的。支命题的真假完全可以决定复合命题的真假。

自然语言中的联结词

- 逻辑中的联结词可以用某种自然语言来表述，但绝不等同于任何一种自然语言中相关的词。
- 在汉语中说“甲和乙有了孩子，并且结婚了”与说“甲和乙结婚了，并且有了孩子”含义有所不同。
- 在汉语里并且作为连接词，它联结的句子不仅有递进的意思还有时间的先后顺序。但是逻辑中的连接词仅与真假值有关系。

逻辑联结词

否定词是一元逻辑联结词,用 $\neg$ 表示,对应自然语言中的" 不,无,没有,并非" 等。命题 P 加上 $\neg$ 得到新命题 $\neg P$,表示 P 的否定,读作" 非 P"。

Example

用 P 表示" 所有在北京工作的人都是北京人",$\neg P$ 表示" 并非所有在北京工作的人都是北京人"。

合取词是二元逻辑联结词,用 $\wedge$ 表示,对应自然语言中的" 既...... 又......,不仅......,而且......,...... 并且......" 等。将两个命题 P 和 Q 联结起来构成新命题 $P \wedge Q$,读作"P 与 Q",表示 P 与 Q 的合取。

Example

用 P, Q 分别表示" 今天是星期天" 和" 今天是晴天",则复合命题 $P \wedge Q$ 表示" 今天是星期天而且是晴天"。

逻辑联结词

析取词是二元逻辑联结词,用 $\vee$ 表示,对应自然语言中的"…… 与…… 之一,…… 或者……"等。将两个命题 P 和 Q 联结起来构成新命题 $P \vee Q$,读作"P 或 Q",表示 P 与 Q 的析取。

Example

用 P, Q 分别表示" 计算机系的学生学过离散数学" 和" 计算机系的学生学过数据库",则复合命题 $P \vee Q$ 表示" 计算机系的学生学过离散数学或数据库"。

蕴含词是二元逻辑联结词,用 $\rightarrow$ 表示,对应自然语言中的" 如果…… 那么……,由…… 可推得……,若…… 则……" 等。将两个命题 P 和 Q 联结起来构成新命题 $P \rightarrow Q$,读作"P 蕴含 Q",表示 P 与 Q 的蕴含关系,P 称为假设,前提或前件,Q 称为结论,推论或后件。

Example

用 P, Q 分别表示" 今天下雨" 和" 我在家看书",则复合命题 $P \rightarrow Q$ 表示" 如果今天下雨,那么我在家看书"。

逻辑联结词

等价词 (双条件词) 是二元逻辑联结词,用 $\leftrightarrow$ 表示,对应自然语言中的”…… 当且仅当……, …… 充分必要条件是……” 等。将两个命题 P 和 Q 联结起来构成新命题 $P \leftrightarrow Q$,读作”P 等价 Q”,表示 P 当且仅当 Q。

Example

用 P, Q 分别表示” 三角形是等腰三角形” 和” 三角形中有两个角相等”,则复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 表示” 三角形是等腰三角形当且仅当三角形中有两个角相等”。

联结词及真值表

- 否定词 $\neg$:对应于“并非……”
- 合取词 $\wedge$:对应于“…… 并且……”
- 析取词 $\vee$:对应于“…… 或者……”
- 蕴含词 $\rightarrow$:对应于“如果…… 那么……”
- 等价词 $\leftrightarrow$:对应于“…… 当且仅当……”

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

符号化表示

1. 用 p 表示" 今天是星期五"
" 今天不是星期五" 可用 $\neg p$ 来表示。
2. 用 p 表示"2 是素数",q 表示"2 是偶数"
"2 是素数并且 2 也是偶数" 可表示为 $p \wedge q$。
3. 用 p 表示" 研一生上组合数学课",q 表示" 研一生上算法设计课"
" 研一生或者上组合数学课,或者上算法设计课" 可表示为 $p \vee q$。
4. 用 p 表示" 明天下雨",q 表示" 我在家看书"
" 如果明天下雨,那么我在家看书" 可表示为 $p \to q$。
5. 用 p 表示" 你是大一新生",q 表示" 你能在寝室用电脑"
" 只有你不是大一新生,才能在寝室用电脑" 可表示为 $q \to \neg p$。
A 当且仅当 B A 当 B $B \to A$ A 仅当 B $A \to B$
6. 用 p 表示" 三角形是等腰三角形",q 表示" 三角形中有两个角相等"
" 三角形是等腰三角形当且仅当三角形中有两个角相等" 可表示为 $p \leftrightarrow q$。

符号化表示

下面的 $\Rightarrow$ 即表示为

A 当且仅当 $B \Rightarrow A \leftrightarrow B$

A 当 $B \Rightarrow B \to A$

A 仅当 $B \Rightarrow$ 只有 B 才有 $A \Rightarrow$ 非 B 一定非 $A \Rightarrow A \to B$

A 的充分必要条件是 $B \Rightarrow A \leftrightarrow B$

A 的充分条件是 $B \Rightarrow B \to A$

A 的必要条件是 $B \Rightarrow A \to B$

真值函数

设 $D = \{0, 1\}$，一个映射 $f : D^n \to D$ 称为一个 n 元真值函数。

- $\neg$ 是一个一元真值函数
- $\wedge$ 是二元真值函数
- $\vee$ 是二元真直函数
- $\to$ 是二元真值函数
- $\leftrightarrow$ 是二元真值函数
- 有多少个 2 元真值函数?

$$
\left.\left\{\begin{array}{lllllll}
f(0 & 0 & \cdots & 0 & 0) = 0 \text{ or } 1 & & 2 \\
f(0 & 0 & \cdots & 0 & 1) = 0 \text{ or } 1 & & 2 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
f(1 & 1 & \cdots & 1 & 0) = 0 \text{ or } 1 & & 2 \\
f(1 & 1 & \cdots & 1 & 1) = 0 \text{ or } 1 & & 2
\end{array}\right.\right\} \text{选取方法数}
$$

行数的计算 $2\times2\times\cdots\times2\times2 = 2^n$

不同 f 的计数为 $\overbrace{2\times2\times\cdots\times2} = 2^{2^n}$

形式语言的定义

1. 字母表:字符(symbol)的集合称为字母表。命题逻辑中字母表往往包含 $Atom(L^p)$。
2. 字符串:由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串(symbol string)。字符串中字符的个数称为字符串的长度。长度为 0 的字符串称为空串(empty string),ϵ 表示。空串是没有任何字符的字符串,是一个特殊的字符串。若 A 是字母表,则用 A^* 表示上所有字符串的集合(包括空串)。
3. A^* 的子集称为形式语言。

形式语言的例子

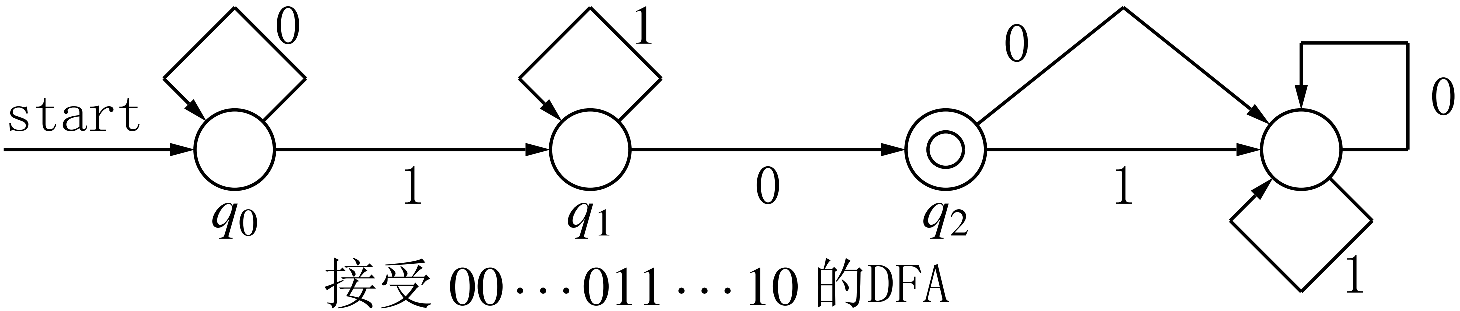
设字母表 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A^*$ 是由 10 个阿拉伯数字组成的所有十进位数的集合且包括空串 ϵ 和有限个“0”构成的字符串(如:00, 000, 0000 等)。下面的(1)-(4)均为字母表 A 上的形式语言:

1. $L_1=\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,\cdots\}$ 表示可以被 5 整除的所有十进制数的集合。
2. $L_2=\{0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,0111,\cdots,1111\}$,该形式语言中的字符串是由 0 和 1 构成的所有长度为 4 的数字的集合,可以看成是长度为 4 的所有二进制数的集合。
3. $L_3=\{1,3,5,7,9,11,13,15,\cdots\}$,该形式语言表示所有奇数的集合。
4. $L_4=\{0,1,4,9,16,25,36,49,\cdots\}$,该形式语言表示所有十进制数的平方的集合。

形式语言的例子

设 $\sum = \{0,1\}, \sum^*$ 中的元素就是 0,1 组成的有限长的字符串构成的集合,包括空串 ϵ, 则集合 $A = \{00\cdots011\cdots10\}$ 就是一个形式语言。字符串前面 0 的个数大于等于 0,1 的个数大于等于 1,最后是一个 0。这个集合包含字符串 10,010,0110,001110 等等。

在形式语言与自动机中可以用有限状态自动机来表示其可接受的字符串集合。这样一个形式语言就和自动机画上了等号。



接受 $00\cdots011\cdots10$ 的DFA

命题变项和指派(赋值)

Definition (命题变项)

表示命题的变元称为命题变元或命题变项。命题变项的集合用 $Atom(L^p)$ 表示。

Definition (指派或赋值)

任意一个映射 $v : Atom(L^p) \to \{0,1\}$ 称为命题演算的一个指派或赋值(valuation)。并且对 $p \in Atom(L^p)$,将 $v(p)$ 记作 p^v,自然有 $p^v \in \{0,1\}$。

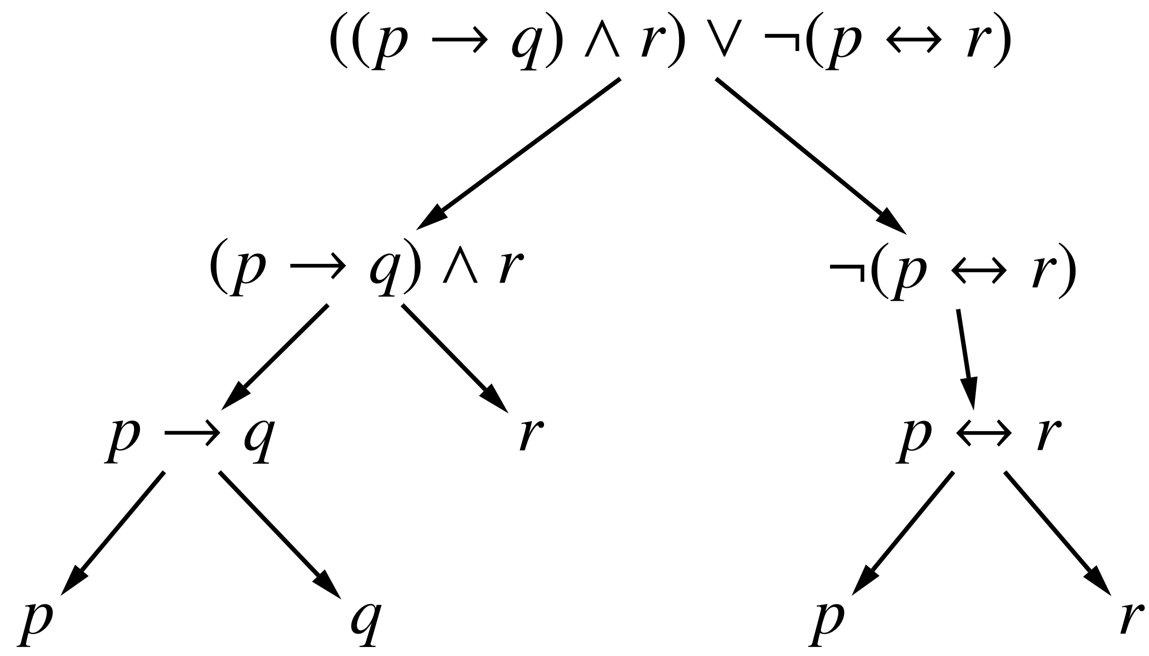
Definition (命题公式)

1. $Atom(L^p)$ 中的元素是命题公式。
2. 如果 A 是命题公式,那么 $\neg A$ 也是命题公式。
3. 如果 A, B 是命题公式,那么 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 都是命题公式。
4. 只有 1,2,3 确定的表达式才是命题公式。

命题公式集合表示为 $Form(L^p)$。

公式的形成过程　语法分析树　联结词的优先级

语法分析树



形成过程

$$p,\quad q,\quad r,\quad p \to q,\quad p \leftrightarrow r,\quad (p \to q) \land r,$$
$$\neg(p \leftrightarrow r),\ ((p \to q) \land r) \lor \neg(p \leftrightarrow r)$$

Definition (弄真和弄假)

设 v 是一个指派(赋值),$A \in Form(L^p)$ 是任意一个命题公式,若在 v 下,公式 A 的值为真,则称 v 弄真 A,记为 $v(A) = 1$ 或 $A^v = 1$; 若在 v 下,公式 A 的值为假,则称 v 弄假 A,记为 $v(A) = 0$ 或 $A^v = 0$;

命题公式 A 的指派 A^v 递归的定义如下：

1. 如果 A 是原子公式 p,则 $A^v = p^v$ 且 $p^v \in \{0,1\}$;
2. 如果 $A = \neg B$ 且 $B^v \in \{0,1\}$,则当 $B^v = 1$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 0$ 时,规定 $A^v = 1$;
3. 如果 $A = B \wedge C$ 且 $B^v, C^v \in \{0,1\}$,那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;
4. 如果 $A = B \vee C$ 且 $B^v, C^v \in \{0,1\}$,那么当 $B^v = 0$ 且 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 1$ 或 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;
5. 如果 $A = B \rightarrow C$ 且 $B^v, C^v \in \{0,1\}$,那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;
6. 如果 $A = B \leftrightarrow C$ 且 $B^v, C^v \in \{0,1\}$,那么当 $B^v = C^v$ 时,规定 $A^v = 1$;当 $B^v \neq C^v$ 时,规定 $A^v = 0$;

以命题公式 $((p \rightarrow q) \wedge r) \vee \neg(p \leftrightarrow r)$ 为例

命题公式的赋值

$p^v = 1 \quad q^v = 1 \quad r^v = 0$

$$v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & (((p \to q) \wedge r) \vee \neg(p \leftrightarrow r))^v = 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & ((p \to q) \wedge r)^v = 0 \arrow[dl] \arrow[d] & & (\neg(p \leftrightarrow r))^v = 1 \arrow[d] \\
(p \to q)^v = 1 \arrow[d] \arrow[dr] & r^v = 0 & & (p \leftrightarrow r)^v = 0 \arrow[dl] \arrow[d] \\
p^v = 1 & q^v = 1 & p^v = 1 & r^v = 0
\end{tikzcd}$$

对语法分析树
的递归过程

命题赋值的计算

设 $A, B \in Form(L^p)$,把 $0, 1$ 看作是通常的实数,并按照通常的实数做运算,那么

1. $(\neg A)^v = 1 - A^v$
2. $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$
3. $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$
4. $(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$
5. $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

赋值的计算与手工列出真值表会得到同样的结果。

公式赋值的性质

命题:真值的确定性

对任意一个赋值 v,和任意的命题公式 $A \in Form(L^p)$,都有 $A^v \in \{0,1\}$。

证明

设 v 是任意一个赋值,$A \in Form(L^p)$ 是一个命题公式,

1. 如果 $A \in Atom(L^p)$ 是原子公式,由于 v 是一个赋值,所以它是从集合 $Atom(L^p)$ 到集合 $\{0,1\}$ 的映射,故 $A^v \in \{0,1\}$。
2. 如果 $A = \neg B$,由数学归纳法知,$B^v \in \{0,1\}$,从而 $A^v = 1 - B^v \in \{0,1\}$。
3. 作业

对任意公式 A,指派 v,$(A^v)^n = A^v \quad (n = 1, 2, \cdots)$

命题公式的分类

设 $A \in Form(L^p)$,则

1. 若对任意的赋值 v,都有 $A^v = 1$,则称 A 为永真式或重言式(tautology)。
2. 若对任意的赋值 v,都有 $A^v = 0$,则称 A 为永假式或矛盾式(contradiction)。
3. 若存在赋值 v,使得 $A^v = 1$,则称 A 为可满足的(satisfiable)。

判定 $A \to (B \to A)$ 为永真式。

- 真值表方法

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- 计算方法

对任意的赋值 $v : Atom(L^p) \to \{0,1\}$,我们有

$$\begin{aligned}(A \to (B \to A))^v &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + A^vB^v) \\ &= 1 - A^vB^v + (A^v)^2B^v \\ &= 1 - A^vB^v + A^vB^v \\ &= 1\end{aligned}$$

- 反证法

对任意赋值 v,若 $(A \to (B \to A))^v = 0$,则推出矛盾。

永假式的判定

判定 $\neg(A \to A)$ 为永假式。

- 真值表方法

A	$A \to A$	$\neg(A \to A)$
0	1	0
1	1	0

- 计算方法
  对任意的赋值 $v : Atom(L^p) \to \{0,1\}$,我们有

$$\begin{aligned}(\neg(A \to A))^v &= 1 - (A \to A)^v \\ &= 1 - (1 - A^v + A^v \cdot A^v) \\ &= A^v - A^v A^v \\ &= 0\end{aligned}$$

可满足公式的判定

判定 $(A \to \neg A) \to A$ 为可满足的。

- 真值表方法

A	$\neg A$	$A \to \neg A$	$(A \to \neg A) \to A$
0	1	1	0
1	0	0	1

- 计算方法
  对任意的赋值 $v : Atom(L^p) \to \{0,1\}$,欲使

$$((A \to \neg A) \to A)^v = 1$$

只须要

$$1 - (A \to \neg A)^v + (A \to \neg A)^v \cdot A^v = 1$$

只须要

$$(A \to \neg A)^v (1 - A^v) = 0$$

只须要

$$A^v = 1$$

逻辑蕴含和逻辑等价

Definition (逻辑蕴含)

设 $\Gamma \subseteq Form(L^p)$, $A \in Form(L^p)$。如果对任意的赋值 v,当 v 对 Γ 中的任一公式赋值为 1 时(即对任意的 $B \in \Gamma$,有 $B^v = 1$),有 v 对命题公式 A 的赋值也为 1(即 $A^v = 1$),则称 Γ 可以语义推出(semantic deduce)A,或称 Γ 可以逻辑推出(logically deduce)A,或称 Γ 可以逻辑蕴含(logically conclude)A,或称 A 是 Γ 的逻辑结果(logical result),记为 $\Gamma \vDash A$ 或 $\Gamma \Rightarrow A$。

Definition (逻辑等价)

设 $A, B \in Form(L^p)$,如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$,则称 A 和 B 逻辑等价,记为 $A \Leftrightarrow B$.

定义的推论

设 $A, B \in Form(L^p)$,$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当对任意的赋值 v 都有 $A^v = B^v$。

(逻辑蕴含) $\Rightarrow$

例1：$\{A, A\to B\} \Rightarrow B$，

即证：对任意的指派 v，$A^v=1$，$(A\to B)^v=1$，使得 $B^v=1$

解：$(A\to B)^v = 1-A^v+A^vB^v=1$ & $A^v=1$

$\Rightarrow B^v=1$

例2：$\{\neg A, B\to A\} \Rightarrow \neg B$

解，$(B\to A)^v = 1-B^v+A^vB^v=1$

$(\neg A)^v = 1-A^v = 1 \Rightarrow A^v=0$

$\Rightarrow 1-B^v=1 \Rightarrow B^v=0$

$\Rightarrow (1-B)^v = 1 = (\neg B)^v$

逻辑等价（$\Leftrightarrow$）

若 $A \Leftrightarrow B$ iff 对于任意 V，有 $A^V = B^V$

(1) $\Leftarrow$（充分性）平凡的

(2) $\Rightarrow$（必要性）

1）若 $A^V=1$ 则由 $A \Leftrightarrow B$ 有 $A \Rightarrow B$ 故 $B^V=1$

2）若 $A^V=0$ 则 $B^V=0$（否则 $B^V=1$，由 $A \Leftrightarrow B$ 有
$B \Rightarrow A$ 必有 $A^V=1$ 与 $A^V=0$ 矛盾）

① 如果 $A \Rightarrow B$，那么 $A \to B$ 是永真式

对于任一指派 v，往证 $(A \to B)^v = 1$

1) 若 $A^v = 1$，由 $A \Rightarrow B$ 和 $B^v = 1$，
$(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$

2) 若 $A^v = 0$，则 $(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$

② 如果 $A \to B$ 是永真式，那么 $A \Rightarrow B$

对任意 v，$(A \to B)^v = 1$，取指派 v，

1) 若 $A^v = 1$，有 $1 = (A \to B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = B^v$
从而 $A^v \Rightarrow B^v$（定义）

$A \Leftrightarrow B$ iff $A \leftrightarrow B$ 是永真式

① 如果 $A \Leftrightarrow B$，那么 $A \leftrightarrow B$ 是永真式

前面某条结论

解：由 $A \Leftrightarrow B$，对任意指派 v，有 $A^v = B^v$

$$(A \leftrightarrow B)^v = A^v B^v + (1-A^v)(1-B^v)$$
$$= (A^v)^2 + (1-A^v)^2 = A^v + 1 - A^v = 1$$

$A^v \in \{0,1\}$，$(1-A^v) \in \{0,1\}$，平方不影响

② 如果 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，那么 $A \Leftrightarrow B$

解，由 $A \leftrightarrow B$ 永真，知：对任意指派 v，

有 $(A \leftrightarrow B)^v = 1 = A^v B^v + (1-A^v)(1-B^v)$

$$= A^v B^v + 1 - A^v - B^v + A^v B^v$$
$$= 2A^v B^v - A^v - B^v + 1 = 1$$

，有 $A^v + B^v - 2A^v B^v = 0$

有 $(A^v)^2 - 2A^v B^v + (B^v)^2 = 0$

$(A^v - B^v)^2 = 0$ 得 $A^v = B^v$

iff $A^v \Leftrightarrow B^v$

(逻辑等价)($\Leftrightarrow$)是等价关系.

等价关系满足3条性质:

1) 自反 $A \Leftrightarrow A$ 2) 对称 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$

3) 传递性 $A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$

例2.1.12　判定下列蕴含式是否成立。

(1)　$\neg A \Rightarrow A \rightarrow B$

(2)　$\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B\} \Rightarrow A \rightarrow C$

通过真值表判定

A	B	C	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

逻辑蕴含和逻辑等价

从真值表可以看出,使 $\neg A$ 为真的指派,也使 $A \to B$ 为真,从而 $\neg A \Rightarrow A \to B$。使得 B 和 $A \to (B \to C)$ 都为真代指派,使得 $A \to C$ 也为真,从而 $\{B, A \to (B \to C)\} \Rightarrow A \to C$。

A	B	C	$\neg A$	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

逻辑蕴含和逻辑等价

A	B	C	$\neg A$	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	$\boxed{1}$	1
0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	$\boxed{1}$	1

由 $(\neg A)^v = 1$,知 $A^v = 0$,进而 $(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$,推得 $\neg A \Rightarrow A \to B$。由 $(A \to (B \to C))^v = 1, B^v = 1$,知 $1 = 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^v C^v) = 1 - A^v + A^v C^v$ $= (A \to C)^v$,推得 $\{A \to (B \to C), B\} \Rightarrow A \to C$。

例2.1.12 证明: $\neg A \to B \Leftrightarrow \neg B \to A$

从真值表可以看出，无论 A 和 B 如何取值，公式 $\neg A \to B$ 与 $\neg B \to A$ 的值均相同。

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to B$	$\neg B \to A$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1

对任意的指派 v

$(\neg A \to B)^v =$
$1 - (\neg A)^v + (\neg A)^v B^v$
$= A^v + B^v - A^v B^v$

$(\neg B \to A)^v =$
$1 - (\neg B)^v + (\neg B)^v A^v$
$= A^v + B^v - A^v B^v$

$(\neg A \to B)^v =$
$(\neg B \to A)^v$

逻辑蕴含和逻辑等价的性质

Theorem (定理 2.1.1)

$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \to B$ 是永真式。

Theorem (定理 2.1.2)

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

逻辑等价是 $Form(L^p)$ 上的等价关系

1. 对任意的 $A \in Form(L^p)$ 都有 $A \Leftrightarrow A$.
2. 对任意的 $A, B \in Form(L^p)$,若 $A \Leftrightarrow B$,则 $B \Leftrightarrow A$.
3. 对任意的 $A, B, C \in Form(L^p)$,若 $A \Leftrightarrow B$,$B \Leftrightarrow C$,则 $A \Leftrightarrow C$.

常用的逻辑等价式

证明想法：$A \Leftrightarrow B$ iff 任意赋值 v 有 $A^v = B^v$，计算公式

设 A、B 和 C 是任意的命题公式，分别用 1 和 0 表示重言式和矛盾式，则

1. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$（对合律）；
2. $A \wedge A \Leftrightarrow A$；$A \vee A \Leftrightarrow A$（幂等律）；
3. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$；$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$（交换律）；
4. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$；$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$（结合律）；
5. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$；$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$（分配律）；
6. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$；$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$（吸收律）；
7. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$；$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$（德摩根律）；
8. $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$；$A \vee 0 \Leftrightarrow A$（同一律）；
9. $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$；$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$（零一律）；
10. $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$；$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$（排中律）；

① $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ 即证：对于任意 V 有

$$1-(1-A^V) = A^V$$

② 1) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ 即证：任意 V

$$A^V \wedge A^V = (A^V)^2 = A^V$$ 成立

2) $(A \vee A)^V = A^V + A^V - (A^V A^V) = A^V$

③ $A^V \wedge B^V \Leftrightarrow B^V \wedge A^V$ ，$A^V B^V = B^V A^V$

$A^V \vee B^V \Leftrightarrow B^V$

常用的逻辑等价式:

(1) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ (2) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

(3) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$ (4) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

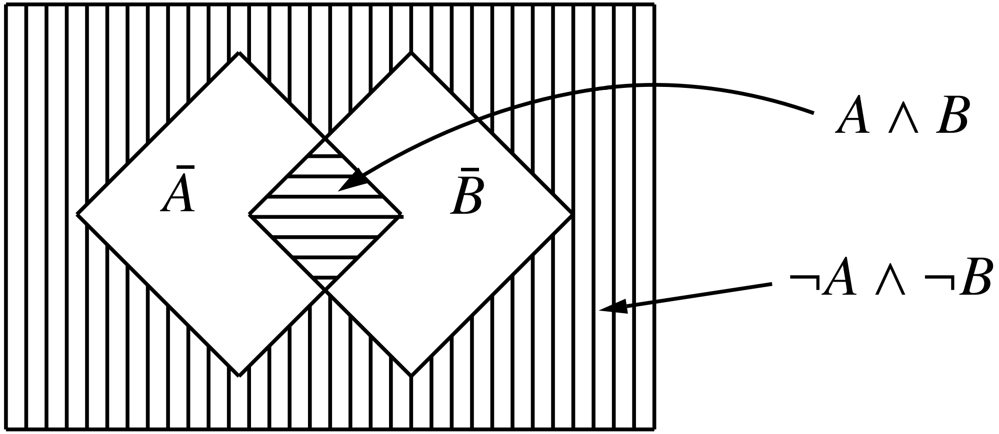
(5) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(6) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow B \to (A \to C)$

(7) $(A \to C) \wedge (B \to C) \Leftrightarrow A \vee B \to C$

$A:\ x \in \bar{A}$

$B:\ x \in \bar{B}$



代入定理和替换定理

代入定理

设 A 是含有命题变元 p 的永真式，那么将 A 中 p 的所有出现均代换为命题公式 B 得到的公式(称为 A 的代入实例)仍为永真式。

例如 $p \to (q \to p)$ $\quad A^v = [A(p)]^v = [A(p^v)]^v, [A(B)]^v = [A(B^v)]^v$

替换定理

设命题公式 A 含有子公式 C(C 为 A 中的符号串并为命题公式)，如果 $C \Leftrightarrow D$，那么将 A 中子公式 C 的某些出现(未必全部)用 D 替换得到公式 B，必有 $A \Leftrightarrow B$。

由 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 有 $(P \to Q) \wedge (R \to (P \to Q)) \Leftrightarrow ?$

$$F = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee (\neg P \vee Q))$$

$$F = (\bar{P} + Q) \wedge (\bar{R} + \bar{P} + Q)$$

$$F^P = \bar{P}Q + \bar{P}Q\bar{R} = \bar{P}Q$$

$$\Rightarrow F = \neg P \vee Q$$

Definition (定义 2.2.1)

文字：命题变元及其否定统称为文字。其中，命题变元称为正文字，命题变元的否定称为负文字。

literal

Definition (定义 2.2.2)

合取式：文字的合取称为合取式。

Definition (定义 2.2.3)

析取式：文字的析取称为析取式。

Definition (定义 2.2.4)

合取范式：形如下列形式的公式称为合取范式。
$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$，其中，$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为析取范式。

范式定义

Definition (定义 2.2.5)

析取范式：形如下列形式的公式称为析取范式。
$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$，其中，$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为合取范式。

Definition (总结)

命题公式 B 称为命题公式 A 的合取(析取)范式(conjunctive(disjunctive) normal form)，如果 $B \Leftrightarrow A$，并且 B 呈如下形式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

clock

其中 $C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的子句，它们形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$，$L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j 为子句的文字。

合取范式：大的方向上是合取，小的方向上是析取

范式定义

Definition (定义 2.2.5)

析取范式：形如下列形式的公式称为析取范式。
$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$,其中,$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为合取范式。

Definition (总结)

命题公式 B 称为命题公式 A 的合取(析取)范式(conjunctive(disjunctive) normal form),如果 $B \Leftrightarrow A$,并且 B 呈如下形式:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

其中 $C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的子句,它们形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$, $L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j 为子句的文字。

文字 —— 命题变元及其否定 (正文字和负文字) 子句 —— 文字的析取式
合取范式 —— 子句的合取式

$(\cdot \vee \cdot \vee \cdots) \wedge (\cdot \vee \cdot \vee \cdots) \wedge \cdots$

范式求解

Theorem (定理 2.2.1)

对任意命题公式 A,均可以做出它的合取(析取)范式。

1. 消去蕴含和等价: 利用
   $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$。
2. 减少否定词的辖域: 利用 $\neg\neg A \Leftrightarrow A, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B), \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$。
3. 变换并化简: 使用合取对析取,析取对合取满足分配律以及幂等律将命题公式化简成合取或析取范式。利用
   $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge A \Leftrightarrow A, A \vee A \Leftrightarrow A$

Example (例 2.2.6)

做出 $(p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$ 的合取范式和析取范式。

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$ 析取范式

主范式

Definition (定义 2.2.6)

合取项：在命题公式 A 的合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$ 中，称析取式 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为合取项。

Definition (定义 2.2.7)

析取项：在命题公式 A 的析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$ 中，称合取式 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为析取项。

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$$

正文字　　析取式　　合取项

$$(\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg r$$

合取式　　负文字　　析取项

主范式

Definition (定义 2.2.8)

主合取范式：设命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的合取范式为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k (k \geq 1)$，若其中每一个合取项 $A_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 的形式为 $A_j = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$，其中 $Q_i = p_i$ 或 $\neg p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k (k \geq 1)$ 为 A 的主合取范式，主合取范式中的合取项称为极大项，用带下标的 M 表示。

公式 $A(p, q) = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ 即为主合取范式。

Definition (定义 2.2.9)

主析取范式：设命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的析取范式为 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k (k \geq 1)$，若其中每一个析取项 $A_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 的形式为 $A_j = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$，其中 $Q_i = p_i$ 或 $\neg p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k (k \geq 1)$ 为 A 的主析取范式，主析取范式中的析取项称为极小项，用带下标的 m 表示。

公式 $A(p, q, r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ 即为主析取范式。

主范式

Definition (定义)

命题公式 B 称为命题公式 A 的主合取(析取)范式(major conjunctive(disjunctive) normal form),如果

1. B 是 A 的合取(析取)范式;
2. B 中的每一个子句均出现 A 中所有命题变元且仅出现一次。

极大项 —— 主合取范式中的合取项
极小项 —— 主析取范式中的析取项

主范式——极大项与极小项

- 含有 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 共有 2^n 个极大项。
- 每个极大项有 2^n 种真值指派,但指派为 0 的只有一个。
- 对同一个指派,任意两个不同的极大项的真值取值不能同为 0。
- 所有 2^n 个极大项的合取 $\wedge$ 式逻辑等价于 0。

- 含有 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 共有 2^n 个极小项。
- 每个极小项有 2^n 种真值指派,但指派为 1 的只有一个。
- 对同一个指派,任意两个不同的极小项的真值取值不能同为 1。
- 所有 2^n 个极小项的析取式 $\vee$ 式逻辑等价于 1。

$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 极大项

$$
\begin{array}{c}
p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \\
p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
p_1 & p_2 & & p_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & & 1
\end{array}
\longleftarrow p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n
$$

只被弄假

极大项是文字的析取

$$0\ 1\ 0\ 1 \cdots\ 1 \longleftrightarrow p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4 \vee \cdots \vee \neg p_n$$

只弄假

$\boxed{\begin{array}{l}\text{正文字变元指派为0} \\ \text{负文字变元指派为1}\end{array}}$ $\Leftrightarrow$ 所有文字被赋值弄假 $\Leftrightarrow$ 极大项被赋值弄假

$L_i^v = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ $\qquad (L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n)^v = 0$

求解步骤

- 求解命题公式的合取 (析取) 范式。
- 除去合取 (析取) 范式中所有永真永假项。
- 合并相同的变元与相同的项。
- 对合取 (析取) 项中缺少的变元 r,通过析取 (合取) 永假式 (永真式)$r \wedge \neg r(r \vee \neg r)$ 并用分配律补齐。

Example (例子)

做出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的主合取范式和主析取范式。

$(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r) \iff \neg p\vee\neg q$

主合取

$\iff (\neg p\vee\neg q\vee(r\wedge\neg r))$

$\iff (\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

主析取:

$\iff 0{-}{-} \quad\vee\quad {-}0{-}$

$\iff (000\vee 001\vee 010\vee 011)$

$\quad \vee(000\vee 001\vee 100\vee 101)$

$\iff (000\vee 001\vee 010\vee 011\vee 100\vee 101)$

弄假指派与范式

Theorem (命题 1)

对于一个命题公式的任何一个指派，这个指派可以弄假一个子句，这个子句包含命题公式中的所有命题变元且只包含一次。在这类子句中，这个指派不能弄假任何其它的子句，从而弄真所有其它的子句。

$$A(p,q,r) = (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \vee (p \wedge \neg r)) \quad v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \neg p \vee \neg q \vee r$$

Theorem (命题 2)

对于一个公式的任何一个弄假指派，则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项，使得这一个指派弄假这个合取项，并且只弄假这个合取项。

$$v \text{ 使 } A^v = 0 \quad A \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \quad \text{必有 } i_0\text{，} A_{i_0}^v = 0 \quad v \rightarrow A_{i_0}$$

弄假指派与范式

Theorem (命题 3)

通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派,这就是公式的所有弄假指派。

$$A \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \text{ 可构造 } v_i \text{ 使 } A_i^{v_i} = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$A_i \to v_i\ \ (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad A^v = 0, v \neq v_i\ \ A_i^v = 1 \longrightarrow A^v = 1$$

Theorem (命题 4)

如果已知公式的所有弄假指派,则可以写出该公式的主合取范式。

Theorem (命题 5)

如果已知公式的所有弄真指派,则可以写出该公式的主析取范式。

主范式与指派

Theorem (定理 2.2.2)

永真式无主合取范式,永假式无主析取范式。

Theorem (定理 2.2.3)

任一命题公式 (非永真,非永假) 都存在唯一与之等价的主合取范式和主析取范式。

交换顺序算同一个

Theorem (定理 2.2.4)

设变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的极大项全体为 $M_1,M_2,\cdots,M_{2^n}$,$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)\Leftrightarrow \wedge_{i\in I}M_i$ 为 A 的主合取范式,其中 $I\subseteq\{1,2,\cdots,2^n\}$,则 A 的主析取范式为 $A\Leftrightarrow\neg\wedge_{i\in\bar{I}}M_i$。$A$ 的极大项与极小项的数目之和为 2^n。

定理2.2.4： 设变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的极大项全体为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow \wedge_{i \in I} M_i$ 为 A 的主合取范式，其中 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, 2^n\}$，则 A 的主析取范式为 $A \Leftrightarrow \neg \wedge_{i \in \bar{I}} M_i$。$A$ 的极大项与极小项数和为 2^n。

p	q	r	极大项		极小项	
0	0	0	M_1	$p \vee q \vee r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg M_1$
0	0	1	M_2	$p \vee q \vee \neg r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg M_2$
0	1	0	M_3	$p \vee \neg q \vee r$	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg M_3$
0	1	1	M_4	$p \vee \neg q \vee \neg r$	$\neg p \wedge q \wedge r$	$\neg M_4$
1	0	0	M_5	$\neg p \vee q \vee r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg M_5$
1	0	1	M_6	$\neg p \vee q \vee \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg M_6$
1	1	0	M_7	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg M_7$
1	1	1	M_8	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	$p \wedge q \wedge r$	$\neg M_8$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to \neg q \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) = M_7 \wedge M_8 \\
&\Leftrightarrow \neg(M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_6) \\
&\Leftrightarrow \neg M_1 \vee \neg M_2 \vee \cdots \vee \neg M_6 \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee \\
&\quad\ (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

证明：对任意的指派 v，必存在极大项 M_{i_0}，使得 $(M_{i_0})^v = 0$ 并且如果 $i \neq i_0$，那么 $(M_i)^v = 1$。

(1) 如果 $i_0 \in I$，那么 $(\wedge_{i\in I} M_i)^v = 0$ 而 $(\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$，从而

$$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$$

(2) 如果 $i_0 \notin I$，那么 $(\wedge_{i\in I} M_i)^v = 1$ 而 $(\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 0$，也有

$$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$$

即 $(\wedge_{i\in I} M_i)^v = 1 - (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = (\neg \wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v$，故 $\wedge_{i\in I} M_i \Leftrightarrow \neg \wedge_{i\in \bar{I}} M_i$。

n 元联结词的个数

命题

n 元命题公式的全体可以划分为 2^{2^n} 个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，都等价于它们公共的主合取范式（主析取范式）。

n个变体，可以有 2^n 个不同指派

2^{2^n} 是给 2^n 个不同的指派进行划分

Example

派三个人 A, B, C 去完成一项任务，需满足以下条件：

- 若 A 去，则 C 也去。
- 若 B 去，则 C 不能去。
- 若 C 不去，则不是 A 去就是 B 去。

分别用 P, Q, R 表示派 A, B, C 去。由条件可做出主析取范式为

$$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$(A \to C) \land (B \to \neg C) \land (\neg C \to (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B))$$

$$(\neg A \lor C) \land (\neg B \lor \neg C) \land (C \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B))$$

$$(\overline{A} + C)(\overline{B} + \overline{C})(C + A\overline{B} + \overline{A}B)$$

$$\overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C} + C(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$$

$$\overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C} + C(AB + \overline{A}\,\overline{B})$$

$$\underline{\overline{A}C} + \overline{B}\,\overline{C} + ABC + \underline{\overline{A}\,\overline{B}C}$$

$$\overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

$$(\overline{A} + C)(\overline{B} + \overline{C})(A + B + C)$$

$$(AB + C)(\overline{B} + \overline{C})$$

$$= AB\overline{C} + \overline{B}C = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}C$$

$$(110 \lor 001 \lor 101)$$

一元联结词

联结词的扩充与规约

能不能相互表示

2^{2^n}个真值函数

Table: 一元联结词

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

其中 Δ_1,Δ_4 为常联结词,Δ_2 为幺联结词,Δ_3 为否定词。

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow \underset{0}{f}, \Delta_4(p) \Leftrightarrow \underset{1}{t}, \underbrace{\Delta_2(p) \Leftrightarrow p}_{幺}, \underline{\Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p}$$

$2^{2^2} = 16$

*16互补 *15互补

Table: 二元联结词

永假, $p \wedge q$, $\neg(p \to q)$, p, $\neg(q \to p)$, q, $\neg(p \leftrightarrow q)$, $p \vee q$

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$p \leftrightarrow q$, $q \to p$, $p \to q$

p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

二元联结词

$$\neg(p *_i q) \Leftrightarrow p *_{17-i} q \quad (i = 1, 2, \cdots, 8)$$

$p *_1 q \Leftrightarrow 0$	常联结词(假)	常联结词(真)	$p *_{16} q \Leftrightarrow 1$
$p *_2 q \Leftrightarrow p \wedge q$	合取词	与非词	$p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
$p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$	蕴含否定词	蕴含词	$p *_{14} q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
$p *_4 q \Leftrightarrow p$	投影联结词	否定词	$p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p$
$p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$	蕴含否定词	蕴含词	$p *_{12} q \Leftrightarrow q \rightarrow p$
$p *_6 q \Leftrightarrow q$	投影联结词	否定词	$p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q$
$p *_7 q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$	异或词	等价词	$p *_{10} q \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$
$p *_1 q \Leftrightarrow p \vee q$	析取词	或非词	$p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

二元联结词

我们有下面的等价式

$$p *_1 q \Leftrightarrow 0, p *_{16} q \Leftrightarrow 1, \text{即 } *_1, *_{16} \text{ 为常联结词}$$

$$p *_4 q \Leftrightarrow p, p *_6 q \Leftrightarrow q, \text{即 } *_4, *_6 \text{ 为投影联结词}$$

$$p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p, p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q, \text{即 } *_{13}, *_{11} \text{ 为二元否定词}$$

先∨再↓(先或后非)

$$p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q), *_9 \text{ 称为或非词,用记号} \downarrow \text{表示,即 } p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

$$p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q), *_{15} \text{ 称为与非词,用记号} \uparrow \text{表示,即 } p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

先∧后↑(先与后非)

$$p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \to q), p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \to p), \text{即 } *_3, *_5 \text{ 为蕴含否定词,可以表示为 } \not\to$$

$$p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

$*_7$ 称为异或词,用记号 V^-(或者 $\oplus$)表示,即

$$pV^-q \Leftrightarrow p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

除此之外,$*_2$ 为 $\wedge$,$*_8$ 为 $\vee$,$*_{12}, *_{14}$ 为 $\to$,$*_{10}$ 为 $\leftrightarrow$。

联结词的表示与完备词组

Definition (联结词的可表示)

称 n 元联结词 h 是由 m 个联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 可表示的，如果 $h(p_1, \cdots, p_n) \Leftrightarrow A$，而 A 中所含的联结词仅取自 $g_1, g_2, \cdots, g_m$。

命题

任何一个一元、二元联结词都可以通过 $\neg, \vee, \wedge$ 表示出来。$\{\vee, \wedge, \neg\}$ 是完备的

Definition (完备联结词组)

当联结词组 $\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ 可表示所有一元、二元联结词时，称其为完备联结词组。

可表示的含义(上面第1条)

命题

Δ_1 是永假

$\{\neg, \rightarrow\}$ 和 $\{\Delta_1, \rightarrow\}$ 都是完备联结词组。

证明：$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的

已知：由$\{\neg, \vee, \wedge\}$完备，只需证 $\neg, \wedge, \vee$ 分别可被$\{\neg, \rightarrow\}$所表示，就可以说$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的

(1) $\neg p \Leftrightarrow \neg p$

(2) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

(3) $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

证明：$\{\Delta_1, \to\}$ 是完备的

(1) $\neg p \Leftrightarrow (\neg p \vee \Delta_1)$

$\Leftrightarrow p \to \Delta_1$

(2) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \to \neg q) \to \Delta_1$

$\Leftrightarrow (p \to (q \to \Delta_1)) \to \Delta_1$

(3) $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q$

$\Leftrightarrow \neg p \to q$

$\Leftrightarrow (p \to \Delta_1) \to q$

联结词的表示与完备词组

命题

$\{\downarrow\}$ 和 $\{\uparrow\}$ 都是完备联结词组。

例: 用 $\{\uparrow\}$ 表示 $(p \to \neg q) \to \neg r$

命题

任何一个 n 元联结词 $h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 都可以通过联结词 $\neg, \to$ 表示出来。

归纳法:$h(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow (p_1 \to h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \to h(0, p_2, \cdots, p_n))$

(1) $\{\downarrow\}$完备 $p\downarrow q \Leftrightarrow$

1) $\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p\downarrow p$

2) $p\wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p\downarrow\neg q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$

3) $p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q)$

$\Leftrightarrow \neg(p\downarrow q)$

$\Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

(2) $\{\uparrow\}$

1) $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$

2) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q)$

$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

3) $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q$

$\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$(p \to \neg q) \to \neg r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r)$

$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow r$

Definition (对偶式的定义)

在仅含有联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 的命题公式 A 中,将 $\wedge$ 换成 $\vee$,$\vee$ 换成 $\wedge$,0 换成 1,1 换成 0,得到的公式称为 A 的对偶式,记为 A^*。

Definition (内否式的定义)

设有命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$,对 A 中的 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 用 $\neg p_i$ 做代入所得的结果为 A 的内否式,记为 A^-。

对偶式

原式 A	对偶式 A^*
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$	$\neg p \wedge (q \vee \neg r)$
$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$	$\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$

原式 A	内否式 A^- 里面变量取反
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg r$
$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$	$\neg\neg p \vee (\neg q \wedge \neg\neg r)$
$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$	$\neg((\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg\neg r)$

减少否定词辖域 $\longrightarrow$

$$(A^*)^* = A$$

$$(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg A^*$$

$$(A^*)^- \Leftrightarrow (A^-)^*$$

$$(A^-)^- \Leftrightarrow A$$

$$(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg A^-$$

$$\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$$

Theorem (对偶式的相关定理) 有的是=，有的是$\Leftrightarrow$，

1. $(A^-)^- \Leftrightarrow A$ 2. $\neg(A^*) \Leftrightarrow (\neg A)^* \Leftrightarrow A^-$ 3. $\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$
4. $\neg(A^-) \Leftrightarrow (\neg A)^-$ 5. $(\neg A)^- \Leftrightarrow A^*$ 6. $(A^*)^* = A$

因为字符串长度不一样

给定指派 v，令 $\bar{v}$ 也是一个指派，使得对任意的命题变元 p 都有 $p^v = 1$ 当且仅当 $p^{\bar{v}} = 0$。对公式 A 有 $(A^-)^v = A^{\bar{v}}$。

Theorem

若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

Theorem

若 $A \to B$ 永真，则 $B^* \to A^*$ 也永真。

第3章

PC 的字母表

PC 的语言部分的字母表(符号表)是集合

$$\sum = \{(,), \neg, \rightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots\}.$$

PC 的公式

1. $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots$ 为(原子)公式。
2. 如果 A, B 是公式,那么 $(\neg A)$,$(A \rightarrow B)$ 也是公式。
3. 只有(1)和(2)确定的 $\sum^*$ 的字符串才是公式。(有限次的使用 1,2 迭代)

公式中最外层的括号可以省略。

所以有一个语法分析树

推理部分

axiom

公理集合

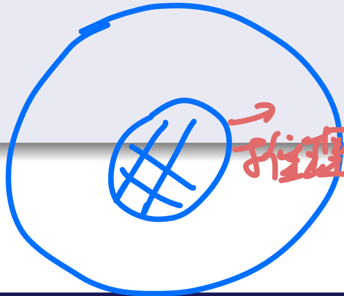
- $A_1 : A \to (B \to A)$ $\Leftrightarrow 1$
- $A_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $\Leftrightarrow 1$
- $A_3 : (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 并且可以推出原命题(反之是定理)

$\Leftrightarrow 1$

推理规则

称为分离规则(modus ponens)，形式如下：

$$r_{mp} : \frac{A, A \to B}{B}$$



推理规则

公理利用推理规律，使集合不断扩充

1) $1 - A^{\vee} + A^{\vee}(B \to A)^{\vee}$

$= 1 - A^{\vee} + A^{\vee}(1 - B^{\vee} + A^{\vee}B^{\vee})$

$= 1 - A^{\vee} + A^{\vee} - A^{\vee}B^{\vee} + A^{\vee}B^{\vee} = 1$

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Definition (证明)

称下列公式序列为公式 A 在 PC 中的一个证明:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

相同的

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$,①$A_i$ 或者是 PC 中的公理,②或者是 $A_j (j < i)$,或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的。其中 A_m 就是公式 A。③

Definition (定理)

称 A 是 PC 中的定理,记为 $\vdash_{PC} A$,如果公式 A 在 PC 中有一个证明。

1 公理必是定理	2 A_1是公理	3 如果$A_2 \neq A_1$, 那么A_2是公理
4 不仅 $\vdash A_m$ 而且 $\vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$	5 A_i为定理证明依然成立	

1) 公理是定理

A在PC中有一个证明

演绎和演绎结果

Definition (演绎)

设 Γ 为 PC 的公式的集合，称以下公式序列为公式 A 的一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 或者是 PC 中的公理，或者是 Γ 的成员，或者是 $A_j (j < i)$，或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 使用分离规则导出的。其中，A_m 就是公式 A。

①②③④

Definition (演绎结果)

称 A 是前提 Γ 在 PC 中的演绎结果，记为 $\Gamma \vdash_{PC} A$，如果公式 A 有一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎。如果 $\Gamma = B$，则用 $B \vdash_{PC} A$ 表示 $\Gamma \vdash_{PC} A$，如果 $B \vdash_{PC} A$ 并且 $A \vdash_{PC} B$ 则记为 $A \vdash\dashv B$。

1) 2)

1 若 $A \in \Gamma$ 则 $\Gamma \vdash A$　2 若 $A_1 \notin \Gamma$ 则 A_1 为公理　3 若 $A_1 \notin \Gamma$ 则 A_1 为公理
4 若 $A_2 \notin \Gamma$ 且 $A_2 \neq A_1$ 则 A_2 是公理　5 $\Gamma \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$

(1) 若$\Gamma=\phi$，则 $\Gamma\vdash_{PC} A$，即 $\phi\vdash A$，$\vdash A$

(2) 若 $A\in\Gamma$，则必有 $\Gamma\vdash A$

基本定理

1. $\vdash A \to A$.　(定理 3.1.1)
2. 如果 $\vdash A \to (B \to C)$, 那么 $\vdash B \to (A \to C)$.　前件互换定理
3. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.　(定理 3.1.6)
4. $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.　加前件定理 (定理 3.1.5)
5. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.　加后件定理 (定理 3.1.7)
6. $\vdash \neg A \to (A \to B)$.　(定理 3.1.3)
7. $\vdash A \to (\neg A \to B)$.
8. (三段论) 如果 $\vdash A \to B$, $\vdash B \to C$, 那么 $\vdash A \to C$.

教材中	定理3. 1. 2: 若 $\vdash P$ 则 $\vdash A \to P$ (即对公理1用分离规则)
	定理3. 1. 4: $\neg\neg A \vdash A$

① $\vdash_{PC} A \to A$ latex: \vdash_{pc}

找一个序列（证明序列）

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{m-1}, (A_m = A \to A)$

1. $A \to ((B \to A) \to A)$ (a_1)
2. $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ (a_1)
3. $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$ (1) (2) rmp
4. $A \to (B \to A)$ (a)
5. $A \to A$. (4)(3)

② (前件互换定理)

如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$ 是定理，那么 $\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ 是定理

1. A_1
2. A_2

$\vdots$

A_m $A \to (B \to C)$

相当于把 A_i 这个定理做证明过程插入

$(m+1)$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (a_2)

$(m+2)$ $(A \to B) \to (A \to C)$ $(A_m)(m+1)$ 用 rmp

想办法消除这个

$(m+3)$ $((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ (a_2)

$(m+4)$ $B \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $(m+2)$ $(m+3)$ 用 rmp

$(m+5)$ $(B \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to ((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C)))$ (a_2)

$(m+6)\quad (B\to(A\to B))\to(B\to(A\to C))\quad (m+4)(m+5)$ 用 rmp

$(m+7)\quad B\to(A\to B)\quad (a_1)$

$(m+8)\quad B\to(A\to C)\quad (m+7)(m+6)$ 用 rmp

③ 要证 $\vdash_{FC} (A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

1. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))\quad (a_2)$
2. $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$ 对 (1) 用 (Th2)
3. $(2)\to(B\to(2))\quad (a_1)$
4. $B\to((A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C)))$ (2)(3) 用 rmp
5. $(4)\to((B\to(A\to B))\to(B\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))))\quad (a_2)$
6. $(B\to(A\to B))\to(B\to((A\to(B\to C))\to(A\to C)))$ 对 (4)(5) 用 rmp
7. $B\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$ 对 $(a_1)(6)$ 用 rmp
8. $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$ 对 (7) 用 Th2

④ (加前件定理) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

1. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))\quad (a_2)$
2. 为了加入 $(1)\to((B\to C)\to(1))\quad (a_1)$
3. $(B\to C)\to((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$ 对 (2)(1) 用 rmp
4. $(3)\to((X\to O)\to(X\to 日))\quad (a_2)$

(3)(4) 用

5. $((B\to C)\to(A\to(B\to C)))\to((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$ 对(3)(4)用 rmp

6. $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ 对(5)(6)用 rmp

⑤(加后件定理) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

1. $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ (Th4)
2. $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ 对(1)用 Th2

出现 $\neg A$，想到 a_3

⑥ $\neg A\to(A\to B)$

1. $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$ (a_3)
2. $\neg A\to(\neg B\to\neg A)$ (a_1) 证明为什么满足传递
3. $(1)\to(\neg A\to(1))$ (a_1)
4. $\neg A\to((\neg B\to\neg A)\to(A\to B))$ 对(1)(3)用 rmp
5. $(4)\to((\neg A\to(\neg B\to\neg A))\to(\neg A\to(A\to B)))$ (a_2)
6. $(\neg A\to(\neg B\to\neg A))\to(\neg A\to(A\to B))$ (4)(5)用 rmp
7. $\neg A\to(\neg B\to\neg A)$ (a_1)
8. $\neg A\to(A\to B)$ (7)(6) 用 rmp

⑦ $A\to(\neg A\to B)$

1. $\neg A\to(A\to B)$ (Th6)
2. $A\to(\neg A\to B)$ 对(1)用(Th2)

⑧ (三段论) 如果 $\vdash_{PC}(A\to B)$，又 $\vdash_{PC}(B\to C)$ 那么 $\vdash_{PC}(A\to C)$

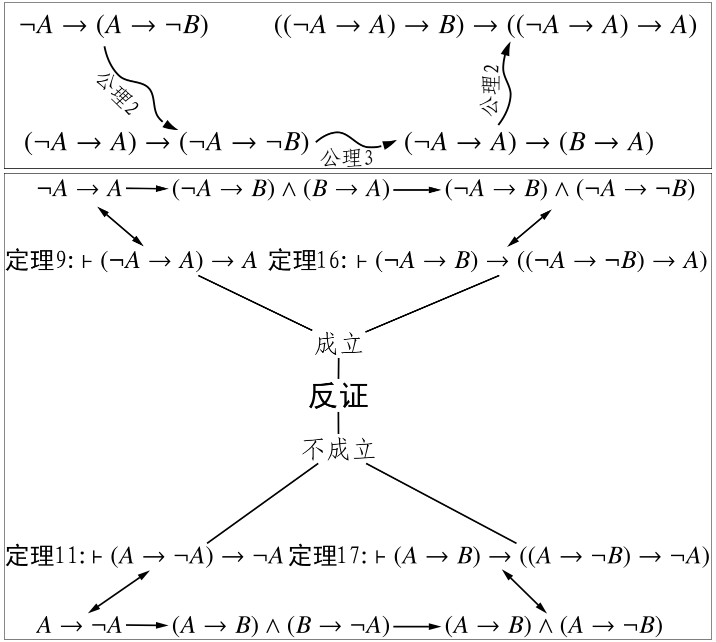
1. $A\to B$ 已知
2. $B\to C$ 已知
3. $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ (1)(Th5 加后件)
4. $(B\to C)\to(A\to C)$ (1)(3) 用 rmp
5. $A\to C$ (2)(4) 用 rmp

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & C \end{tikzcd}$$

三段论

基本定理

9. $\vdash (\neg A \to A) \to A.$ (定理 3.1.8)
10. $\vdash \neg\neg A \to A.$ (定理 3.1.9)
11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A.$
12. $\vdash A \to \neg\neg A.$ (定理 3.1.10)
13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A).$ (定理 3.1.12)
14. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A).$ (定理 3.1.13)
15. $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A).$ (定理 3.1.11)
16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A).$
17. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A).$



⑨ $\vdash_{PC} (\neg A \to A) \to A$

1. $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ (Th6)
2. $(1) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$ (a2)
3. $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$ (1)(2) 用 rmp
4. $(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ (a3)
5. $(\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$ (3)(4) 用 (Th8)
6. $(5) \to (((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ (a2)
7. $((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ (5)(6) 用 rmp
8. $(\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ (Th1)
9. $(\neg A \to A) \to A$ (7)(8) 用 rmp

解释：$(\neg A \to A)$ 如果（从A不成立）推出（A成立）
因此可以知道（A）成立，这是种反证法的思维

⑩ $\vdash \neg\neg A \to A$

1. $\neg\neg A \to (\neg A \to A)$ (Th6. $\neg A \to (A \to B)$)
2. $(\neg A \to A) \to A$ (Th7)
3. $\neg\neg A \to A$ (1)(2) 用 (Th8 三段论)

⑪ $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$

1. $(\neg\neg A \to A)$ (Th10)
2. $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A))$ (Th5) 加后件

3. $(A\to\neg A)\to(\neg\neg A\to\neg A)$ (1)(2)用rmp

4. $(\neg\neg A\to\neg A)\to\neg A$ (Th9)

5. $(A\to\neg A)\to\neg A$ (3)(5)用(Th8三段论)

⑫ $\vdash A\to\neg\neg A$

1. $(\neg A\to\neg\neg A)\to\neg\neg A$ (Th11)

2. $A\to(\neg A\to\neg\neg A)$ (Th7 $A\to(\neg A\to B)$)

3. $A\to\neg\neg A$ (1)(2)用(Th8三段论)

⑬ $\vdash(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ (a3的逆命题)

1. $(\neg\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg A)$ (a3)

2. $\neg\neg A\to A$ (Th10)

3. $B\to\neg\neg B$ (Th12)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[d] \\
\neg\neg A \arrow[u] \arrow[r, bend right] & \neg\neg B
\end{tikzcd}$$

4. $(\neg\neg A\to A)\to((A\to B)\to(\neg\neg A\to B))$ (Th5加后件)

5. $(A\to B)\to(\neg\neg A\to B)$ (2)(4)用rmp

6. $(B\to\neg\neg B)\to((\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B))$ (Th4)

7. $(\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$ (3)(6)用rmp

8. $(A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$ (5)(7)用(Th8)

9. $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ (8)(1)用(Th8)

⑭ $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

1. $(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$ (a3)
2. $B \to \neg\neg B$ (Th12)
3. $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B))$ (Th4)
4. $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$ (2)(3) 用 rmp
5. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ (4)(1) 用 (Th8)

⑮ $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

1. $(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
2. $\neg\neg A \to A$ (Th10)
3. $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$ (Th5)
4. $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$ (2)(3) 用 rmp
5. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (4)(1) 用 (Th8)

反证，想证A成立，假设¬A，即能推出B，又能推出¬B

⑯ $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 逆否

分析：$(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

a₂后件

$\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B)) \to$ 后件

放到一块

那么就是证明 $\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$

$B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

$B\to((\neg A\to\neg B)\to A)$ 又前件互换

$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$ 就是公理.

证明:

1. $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$ (a3)
2. $B\to((\neg A\to\neg B)\to A)$ 对(1)用(Th2)
3. $((\neg A\to\neg B)\to A)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to\neg B))$ (Th13)
4. $B\to(\neg A\to\neg(\neg A\to\neg B))$ (2)(3)用(Th8)
5. $\neg A\to(B\to\neg(\neg A\to\neg B))$ (4)用(Th2)
6. $(5)\to((\neg A\to B)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to\neg B)))$ (a2)
7. $(\neg A\to B)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to\neg B))$ (5)(6)用rmp
8. $(\neg A\to\neg(\neg A\to\neg B))\to((\neg A\to\neg B)\to A)$ (a3)
9. $(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to A)$ (7)(8)用rmp

例: $\vdash((A\to B)\to A)\to A$ 是否是定理

假定这段字符串为假, 可能会有矛盾

上面为假, 则 $A=0$, $(A\to B)\to A=1$,

$(A\to B)\to \underset{0}{A}=1$, 但 $A\to B=1$, 因为 $A=0$ 矛盾了!

注意: 演算系统并没有指派

令 $P=\underline{((A\to B)\to A)}\to\overset{0}{\underline{A}}$

$(\neg P\to Q)\to((\neg P\to\neg Q)\to P)$

证：

P

0.5. $\neg((A\to B)\to A) \to (((A\to B)\to A)\to A)$ (Th6)

前件为真

1. $\neg P \to ((A\to B)\to A)$ 由(0.5)(Th14)，rmp得

1.5. $A \to (((A\to B)\to A)\to A)$ (a_1)

后件为假

2. $\neg P \to \neg A$ (1.5)由(Th13逆否)得

前件为真 后件为假 前件为假

3. $((A\to B)\to A) \to (\neg A \to \neg(A\to B))$ (Th13)

4. $(\neg A) \to (A\to B)$ (Th6)

5. $\neg P \to (\neg A \to \neg(A\to B))$ (1)(3) 用(Th8)

6. $\neg P \to (A\to B)$ (2)(4) 用(Th8)

7. $(\neg P\to\neg A) \to (\neg P \to \neg(A\to B))$ 对(5)(a_2)用rmp

8. $\neg P \to \neg(A\to B)$ (2)(7) 用rmp得

9. $(\neg P\to (A\to B)) \to ((\neg P\to \neg(A\to B))\to P)$

10. $(\neg P\to \neg(A\to B)) \to P$ (6)(9)用(Th16)

11. P (8)(10)用(Th16)

例：$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

分析：$(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$
须想要有 $\neg A \to (A \to B)$ ）可用 Th16

另证：

1. $\neg A \to (A \to B)$ (Th6)
2. $(\neg A \to (A \to B)) \to ((\neg A \to \neg(A \to B)) \to A)$ (Th16)
3. $(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$ (1)(2) 用 rmp
4. $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ (Th13)
5. $((A \to B) \to A) \to A$ 对(3)(4)用(Th8)

另证：

1. $(\neg A \to A) \to A$ (Th9)
2. $\neg A \to (A \to B)$
3. $(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ (Th4) 加后件
4. $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ (2)(3) 用 rmp
5. $(4) \to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$
6. $((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ (4)(5) 用 rmp
7. $((A \to B) \to A) \to A$ (1)(6) 用 rmp

例 $\vdash ((A\to B)\to A)\to A$

1. $\neg A\to(A\to B)$ (Th6)
2. $(\neg A\to(A\to B))\to(((A\to B)\to A)\to(\neg A\to A))$ (Th5 加后件)
3. $((A\to B)\to A)\to(\neg A\to A)$ (1)(2) rmp
4. $(\neg A\to A)\to A$ (Th9)
5. $((A\to B)\to A)\to A$ (3)(4) rmp

Th17 想证 $\neg A$

⑰ $\vdash (A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$ 递归

分析 $(\underline{A}\to B)\to(\underline{A}\xrightarrow{a_2\text{后件}}\neg(A\to\neg B))$

$A\to(B\to\neg(A\to\neg B))$

$A\to((A\to\neg B)\to\neg B)$

$(A\to\neg B)\to(A\to\neg B)$ (Th1)

1. $(A\to\neg B)\to(A\to\neg B)$ (Th1)
2. $A\to((A\to\neg B)\to\neg B)$ (2)(Th2)
3. $((A\to\neg B)\to\neg B)\to(B\to\neg(A\to\neg B))$ (Th15)
4. $A\to(B\to\neg(A\to\neg B))$ (2)(3)(Th8)
5. $(A\to B)\to(A\to\neg(A\to\neg B))$ (4)(a_2)
6. $(A\to\neg(A\to\neg B))\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (Th15)
7. $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (5)(6)(Th8)

另证:

分析: $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$

$\underbrace{(A\to B)}\to(\underbrace{(B\to\neg A)}\to\neg A)$

$(A\to\neg A)\to\neg A$ (Th11)

$(A\to B)\to((B\to\neg A)\to(A\to\neg A))$ 加后件

证:

1. $(A\to B)\to((B\to\neg A)\to(A\to\neg A))$ (Th5)
2. $(A\to\neg A)\to\neg A$ (Th11)
3. $(2)\to(((B\to\neg A)\to(A\to\neg A))\to((B\to\neg A)\to\neg A))$ (Th14)
4. $((B\to\neg A)\to(A\to\neg A))\to((B\to\neg A)\to\neg A)$ (2)(3)用 rmp
5. $(A\to B)\to((B\to\neg A)\to\neg A)$ (1)(4)用 rmp
6. $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$ (Th15)
7. $(6)\to(((B\to\neg A)\to\neg A)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$ (Th5)
8. $((B\to\neg A)\to\neg A)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (6)(7)用 rmp
9. $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (5)(8)用 rmp

(18) 如果 $\vdash\neg A\to C$, $\vdash B\to C$ 那么 $\vdash(A\to B)\to C$

分析:

$$\begin{tikzcd} \neg A \arrow[d] & A \arrow[r] & B \arrow[d] \\ C & (\neg C \arrow[u] \arrow[r] & C) \to C \ (\mathrm{Th9}) \end{tikzcd}$$

证:

1. $B \to C$ (已知)

2. $\neg A \to C$ (已知)

3. $(\neg A \to C) \to (\neg C \to A)$ (Th14) 否定在前

4. $\neg C \to A$ (2)(3) 用 rmp

5. $(\neg C \to A) \to ((A \to B) \to (\neg C \to B))$ (Th5)

6. $(A \to B) \to (\neg C \to B)$ (4)(5) 用 rmp

7. $(B \to C) \to ((\neg C \to B) \to (\neg C \to C))$ (Th4)

8. $(\neg C \to B) \to (\neg C \to C)$ (1)(7) 用 rmp

9. $(A \to B) \to (\neg C \to C)$ (6)(8) 用 (Th8)

10. $(\neg C \to C) \to C$ (Th9)

11. $(A \to B) \to C$ (9)(10) 用 (Th8)

(18.5) 如果 $\vdash (A \to B) \to C$ 那么 $\vdash \neg A \to C$ 且 $B \to C$

证：

1. $(A \to B) \to C$

2. $\neg A \to (A \to B)$ (Th6)

3. $\neg A \to C$ (1)(2) 用 (Th8)

4. $B \to (A \to B)$ (A1)

5. $B \to C$ (4)(1) 用 (Th8)

(19) $\vdash A \to (A \vee B)$，其中 $A \vee B$ 定义为 $\neg A \to B$

证：$A\to(\neg A\to B)$，(Th7)

20 $\vdash A\to(B\vee A)$

证；$A\to(\neg B\to A)$ (a1)

22 $(A\to C)\to((B\to C)\to(\underline{(A\vee B)}\to C))$
$((\neg A\to B)\to C)$
二难推理

解释：$A\to C$ 并且 $B\to C$，那么 $(A\vee B)\to C$

观察：都有 C，且都是后件，逆否

$(\neg C\to\neg A)\to((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$

$(\neg C\to\neg A)\to(\neg C\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B)))$ ↙ a2

$\neg C\to(\neg A\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B)))$ ↙ a2

$\neg A\to((\neg A\to B)\to B)$ ↙ 逆否

$(\neg A\to B)\to(\neg A\to B)$ (a1)

证：

1. $(\neg A\to B)\to(\neg A\to B)$ (a1)
2. $\neg A\to((\neg A\to B)\to B)$ (1) 用 (Th2)
3. $((\neg A\to B)\to B)\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B))$ (Th13)
4. $\neg A\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B))$ (2)(3) 用 (Th8)
5. $(\neg C\to\neg A)\to(\neg C\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B)))$ 对 (4) 用 (Th4)
6. $\neg C\to(\neg B\to\neg(\neg A\to B))$
$\to((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$ (a2)

7. $(\neg C\to\neg A)\to((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$ (5)(6) 用(Th8)

8. $(A\to C)\to(\neg C\to\neg A)$ (Th13)

9. $(B\to C)\to(\neg C\to\neg B)$ (Th13)

10. $((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$ 加后件
$\to((B\to C)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$ (9)(Th5)

11. $(\neg C\to\neg(\neg A\to B))\to((\neg A\to B)\to C)$ (a_3)

12. $((B\to C)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$
$\to((B\to C)\to((\neg A\to B)\to C))$ (11)(Th4)

13. $((\neg C\to B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$
$\to((B\to C)\to((\neg A\to B)\to C))$ (10)(12)(Th8)

14. $(A\to C)\to((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg(\neg A\to B)))$ (7)(8) 用(Th8)

15. $(A\to C)\to((B\to C)\to((\neg A\to B)\to C))$

即 $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

另证：

1. $C\to((\neg A\to B)\to C)$ (a_1)

2. $C\to((\neg A\to B)\to C)\to((B\to C)\to(C\to((\neg A\to B)\to C)))$

3. $(B\to C)\to(C\to((\neg A\to B)\to C))$ (1)(2) 用 rmp

4. $C\to((B\to C)\to$ 加后件定理的后件 $((\neg A\to B)\to C))$ (3) 用(Th2)

前件是: $(\neg A\to B)\to B$

5. $(\neg A\to B)\to(\neg A\to B)$ (Th1)

6. $\neg A\to((\neg A\to B)\to B)$ (5) 用(Th2)

7. $((\neg A \to B) \to B) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

8. $\neg A \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ (6)(7)用(Th8)

9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ (8)(4)用(Th8)

18. $\vdash \neg A \to C$ 并且 $\vdash B \to C$ 当且仅当 $\vdash (A \to B) \to C$
19. $\vdash A \to A \vee B$ (定理 3.1.15),其中 $A \vee B$ 定义为 $\neg A \to B$
20. $\vdash A \to B \vee A$ (定理 3.1.15)
21. 如果 $\vdash P \to Q$,$\vdash R \to S$,那么 $\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$
22. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ (定理 3.1.14)
23. $\vdash A \wedge B \to C$ 当且仅当 $\vdash A \to (B \to C)$ (定理 3.1.17),其中 $A \wedge B$ 定义为 $\neg(A \to \neg B)$
24. $\vdash A \wedge B \to A$ (定理 3.1.16)
25. $\vdash A \wedge B \to B$ (定理 3.1.16)
26. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$ (定理 3.1.18)
27. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$ (定理 3.1.19)

(23) $\vdash \underline{\neg(A \to \neg B)} \to C$ iff $\vdash A \to (B \to C)$

$A \wedge B \to C \iff A \to (B \to C)$

"$\Rightarrow$"

1. $\neg(A \to \neg B) \to C$
2. $(\neg(A \to \neg B) \to C) \to (\neg C \to (A \to \neg B))$ (Th14)
3. $\neg C \to (A \to \neg B)$ (1)(2)用 rmp
4. $A \to (\neg C \to \neg B)$ (3)用(Th2)
5. $(\neg C \to \neg B) \to (B \to C)$ (a3)
6. $A \to (B \to C)$ (4)(5)用(Th8)

"$\Leftarrow$"

1. $A \to (B \to C)$
2. $(B \to C) \to (\neg C \to \neg B)$ (Th13)
3. $A \to (\neg C \to \neg B)$ (1)(2)用(Th8)
4. $\neg C \to (A \to \neg B)$ (3)用(Th2)
5. $(\neg C \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to C)$ (Th14)
6. $\neg(A \to \neg B) \to C$ (4)(5)用 rmp

(24) $\vdash A \wedge B \to A$，即 $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$

1. $\neg A \to (A \to \neg B)$ (Th9)
2. $\neg(A \to \neg B) \to A$ (1)用(Th14)及 rmp

25 $\vdash A \wedge B \to B$, 即 $\vdash \neg(A \to \neg B) \to B$

1. $\neg B \to (A \to \neg B)$ (a_1)
2. $\neg(A \to \neg B) \to B$ (1)用(Th14)及 γmp

26 $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$

1. $A \wedge B \to A \wedge B$ (Th1)
2. $A \to (B \to A \wedge B)$ (1) 用 (Th23)

27 $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

1. $B \to (C \to B \wedge C)$ (Th26)
2. $(B \to (C \to B \wedge C)) \to (A \to (B \to (C \to B \wedge C)))$ (a_1)
3. $(A \to (B \to (C \to B \wedge C)))$
   $\to ((A \to B) \to (A \to (C \to B \wedge C)))$ (a_2)
4. $(B \to (C \to B \wedge C))$
   $\to ((A \to B) \to (A \to (C \to B \wedge C)))$ (2)(3)用(Th8)
5. $(A \to B) \to (A \to (C \to B \wedge C))$ (1)(4) 用 γmp
6. $(A \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$ (a_2)
7. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$ (5)(6) 用 (Th8)

PC 中的定理(续)

28. $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ (定理 3.1.20) $\vdash P \leftrightarrow Q$ 即 $\vdash P \to Q$和 $\vdash Q \to P$
29. $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (定理 3.1.21)
30. $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (定理 3.1.22)
31. $\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (定理 3.1.23)
32. $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ (定理 3.1.24)
33. $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ (定理 3.1.25)
34. $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (定理 3.1.26)
35. $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (定理 3.1.27)

28. $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

仅证"$\Rightarrow$"，即 $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

显然，因为(Th14)

29. $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

仅证"$\Rightarrow$"，即 $\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$

1. $(B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ (Th15)
2. $((B \to \neg A) \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A))$ (Th13)
3. $\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$ (1)(2) 用 rmp

21. 如果 $\vdash P \to Q$，$\vdash R \to S$ 那么 $(Q \to R) \to (P \to S)$

1. $P \to Q$ (已知)
2. $R \to S$ (已知)
3. $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ (Th5)
4. $(Q \to R) \to (P \to R)$ (1)(3) 用 rmp
5. $(P \to R) \to ((R \to S) \to (P \to S))$ (Th5)
6. $(Q \to R) \to ((R \to S) \to (P \to S))$ (4)(5) 用 (Th8)
7. $(R \to S) \to ((Q \to R) \to (P \to S))$ (6) 用 (Th2)
8. $(Q \to R) \to (P \to S)$ (2)(7) 用 rmp

(30) $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

即: $(\neg(A \vee B) \to C) \leftrightarrow (\neg A \to (B \vee C))$

即: $(\neg(\neg A \to B) \to C) \leftrightarrow (\neg A \to (\neg B \to C))$

即: $\left\{\begin{array}{l} (\neg(\neg A \to B) \to C) \longrightarrow (\neg A \to (\neg B \to C)) \\ (\neg(\neg A \to B) \to C) \longleftarrow (\neg A \to (\neg B \to C)) \end{array}\right.$

1) 分析 $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$

$(\neg A \to (\neg C \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$

$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$

1. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ (Th1)
2. $(\neg C \to B) \to (\neg B \to C)$ (Th14)
3. $(\neg A \to (\neg C \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ (2)(Th4)rmp
4. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to (\neg C \to B))$ (Th3)
5. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ (4)(3)(Th8)
6. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ (5)(1)(Th8)

2) 分析 $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$

$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$

$(\neg A \to (\neg C \to B))$

$(\neg A \to (\neg B \to C))$

1. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ (Th1)
2. $(\neg B \to C) \to (\neg C \to B)$ (Th14)

3. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg C \to B))$ (2)(Th4) rmp

4. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg C \to B))$ (1)(3)(Th8)

5. $(\neg A \to (\neg C \to B)) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$ (Th3)

6. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$ (4)(5)(Th8)

7. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (Th14)

8. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (6)(7)(Th8)

另证：$\vdash (\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$

1. $B \to (\neg A \to B)$ (a_1)

2. $\neg(\neg A \to B) \to \neg B$ (1)(Th13) rmp

3. $(\neg B \to C) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (2)(Th5) rmp

下面就是想要 Th18，上面已知有了 $Q \to R$

如果 $\neg P \to R$，$Q \to R$ 那么 $(P \to Q) \to R$

分析：$\neg\neg A \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$

$A \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ 是定理

$A \to (\neg C \to (\neg A \to B))$

$\neg C \to (A \to (\neg A \to B))$，后件 $A \to (\neg A \to B) \Leftrightarrow |$

4. $A \to (\neg A \to B)$ (Th6)

5. $(A \to (\neg A \to B)) \to (\neg C \to (A \to (\neg A \to B)))$ (a_1)

6. $\neg C \to (A \to (\neg A \to B))$ (4)(5) rmp

7. $A \to (\neg C \to (\neg A \to B))$ (6)(Th2)

8. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (Th14)

9. $A \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (7)(8)(Th8)

10. $\neg\neg A \to A$ (Th10)

11. $\neg\neg A \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (10)(9)(Th8)

12. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ (3)(11)(Th18)

32 $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ (吸收律)

即: $\vdash \neg(A \to \neg(A \vee B)) \leftrightarrow A$

$\vdash \neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \leftrightarrow A$

$$\left\{\begin{array}{l} \neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \to A \\ \neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \leftarrow A \end{array}\right.$$

1) 分析 $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to B))$

$\neg A \to ((\neg A \to B) \to \neg A)$ a1

2) $(A \to \neg(\neg A \to B)) \to \neg A$

$((\neg A \to B) \to \neg A) \to \neg A$

1) $\neg(\neg A \to B) \to \neg A \iff 1$?

$A \to (\neg A \to B)$

$\neg\neg A \to (\neg A \to B)$ (Th6)

2) $\neg A \to \neg A$ (Th1)

1)

1. $\neg A \to ((\neg A \to B) \to \neg A)$ (A1)

2. $((\neg A \to B) \to \neg A) \to (A \to \neg(\neg A \to B))$ (Th15)

3. $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to B))$ (1)(2)(Th8)

4. $\neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \to A$ (3)(Th14) rmp

2)

1. $\neg A \to \neg A$ (Th1)
2. $\neg\neg A \to (\neg A \to B)$ (Th6)
3. $A \to \neg\neg A$ (Th12)
4. $A \to (\neg A \to B)$ (2)(3) (Th8)
5. $\neg(\neg A \to B) \to \neg A$ (4)(Th13) rmp
6. $(A \to \neg(\neg A \to B)) \to \neg A$ (1)(5)(Th18)
7. $A \to \neg(A \to \neg(\neg A \to B))$ (6)(Th15)

33 证明方法与 32 类似

34 $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

即 $\neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B) \vee \neg(A \to \neg C)$

即 $\neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \leftrightarrow (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C))$

即证 $\begin{cases} \neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \to (\cancel{\neg\neg}(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \\ \neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \leftarrow (\cancel{\neg\neg}(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \end{cases}$

1) $\neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \to ((A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C))$

把¬统一销毁

Th2 $\downarrow$ $(A \to \neg B) \to (\underline{\neg}(A \to \neg(\neg B \to C)) \to \underline{\neg}(A \to \neg C))$

$(A\to\neg B)\to((A\to\neg C)\to(A\to\neg(\neg B\to C)))$

$(A\to\neg B)\to((A\to\neg C)\to(A\to\neg B\wedge\neg C))$

$(A\to\neg B)\to((A\to\neg C)\to(A\to B\wedge C))$

1. $(A\to\neg B)\to((A\to\neg C)\to(A\to B\wedge C))$ (Th27)
2. $(A\to\neg B)\to((A\to\neg C)\to(A\to\neg(\neg B\to C)))$ (替换)
3. $((A\to\neg C)\to(A\to\neg(\neg B\to C)))$
   $\to(\neg(A\to\neg(\neg B\to C))\to\neg(A\to\neg C))$ (Th13)
4. $(A\to\neg B)\to(\neg(A\to\neg(\neg B\to C))\to\neg(A\to\neg C))$ (2)(3)(Th8)
5. $\neg\neg(A\to\neg B)\to(A\to\neg B)$ (Th10)
6. $\neg\neg(A\to\neg B)\to(\neg(A\to\neg(\neg B\to C))\to\neg(A\to\neg C))$ (5)(4)(Th8)
7. $\neg(A\to\neg(\neg B\to C))\to(\neg\neg(A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))$ (6)(Th2)

2) $((A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$

1) $\neg(A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$

$(A\to\neg(\neg B\to C))\to(A\to\neg B)$

Th4 $\neg(\neg B\to C)\to\neg B$

$B\to(\neg B\to C)$ Th6

1. $\neg\neg B\to(\neg B\to C)$ (Th6)
2. $B\to\neg\neg B$ (Th12)
3. $B\to(\neg B\to C)$ (1)(2)(Th8)
4. $\neg(\neg B\to C)\to\neg B$ (3)(Th13) rmp

5. $(\neg(\neg B\to C)\to\neg B)\to((A\to\neg(\neg B\to C))\to(A\to\neg B))$ (Th4)

6. $(A\to\neg(\neg B\to C))\to(A\to\neg B)$ (4)(5) rmp

$\neg P\to R$

7. $\underline{\neg(A\to\neg B)}\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$ (6)(Th13) rmp

2) $\neg(A\to\neg C)\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$

$(A\to\neg(\neg B\to C))\to(A\to\neg C)$

Th4 $\neg(\neg B\to C)\to\neg C$

$C\to(\neg B\to C)$ a1

8. $C\to(\neg B\to C)$ (a1)

9. $\neg(\neg B\to C)\to\neg C$ (8)(Th13) rmp

10. $(A\to\neg(\neg B\to C))\to(A\to\neg C)$ (9)(Th4) rmp

$Q\to R$

11. $\underline{\neg(A\to C)}\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$ (10)(Th13) rmp

12. $((A\to B)\to\neg(A\to C))\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$ (7)(11) (Th18)

13. $(A\to B)\to\neg\neg(A\to B)$ (Th10)

14. $(\neg\neg(A\to B)\to\neg(A\to C))\to((A\to B)\to\neg(A\to\neg C))$ (13) (Th5)

15. $(\neg\neg(A\to B)\to\neg(A\to C))\to\neg(A\to\neg(\neg B\to C))$ (14)(12) (Th8)

定理 30 $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$$\vdash (\neg(\neg A \to B) \to C) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$$

$$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to C)) \qquad \vdash C \to (\neg A \to (\neg B \to C))$$

$$\vdash B \to (\neg B \to C) \qquad \vdash \neg A \to (C \to (\neg B \to C))$$

$$\vdash C \to (\neg B \to C)$$

$$\vdash (\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

$$\vdash A \to (\neg(\neg A \to B) \to C) \qquad \vdash (\neg B \to C) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

$$\vdash A \to (\neg C \to (\neg A \to B)) \qquad \vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg B$$

$$\vdash \neg C \to (A \to (\neg A \to B)) \qquad \vdash B \to (\neg A \to B)$$

$$\vdash A \to (\neg A \to B)$$

定理 31 $\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$$\vdash \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to \neg(A \to \neg\neg(B \to \neg C))$$

$$\vdash (A \to \neg\neg(B \to \neg C)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg C)$$

$$\vdash \neg A \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \qquad \vdash (B \to \neg C) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg C)$$

$$\vdash \neg A \to (C \to (A \to \neg B)) \qquad \vdash \neg(A \to \neg B) \to B$$

$$\vdash C \to (\neg A \to (A \to \neg B)) \qquad \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$$

$$\vdash \neg A \to (A \to \neg B)$$

$$\vdash \neg(A \to \neg\neg(B \to \neg C)) \to \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C)$$

$$\vdash (\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to (A \to \neg\neg(B \to \neg C))$$

$$\vdash (A \to \neg B) \to (A \to \neg\neg(B \to \neg C)) \qquad \vdash \neg C \to (A \to \neg\neg(B \to \neg C))$$

$$\vdash \neg B \to (B \to \neg C) \qquad \vdash A \to (\neg C \to \neg\neg(B \to \neg C))$$

$$\vdash \neg C \to \neg\neg(B \to \neg C)$$

定理 32 $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ 定理 33 $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

定理32：$\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

$$\vdash \neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \to A \quad\longrightarrow\quad \vdash \neg A \to (A \to \neg(\neg A \to B))$$

$$\vdash A \to \neg(A \to \neg(\neg A \to B)) \quad\longrightarrow\quad \vdash (A \to \neg(\neg A \to B)) \to \neg A$$

$$\vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg A$$

$$\vdash A \to (\neg A \to B)$$

$$\vdash \neg A \to \neg A$$

定理33：$\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

$$\vdash A \to (\neg A \to \neg(A \to \neg B))$$

$$\vdash (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A \quad\longrightarrow\quad \vdash \neg(A \to \neg B) \to A$$

$$\vdash A \to A$$

$$\vdash \neg A \to (A \to \neg B)$$

定理 34 $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$$\vdash \neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \to (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C))$$

$$\vdash (A \to \neg B) \to (\neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \to \neg(A \to \neg C))$$

$$\vdash (A \to \neg B) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg(\neg B \to C)))$$

$$\vdash (A \to \neg B) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg(\neg B \to \neg\neg C)))$$

$$\vdash (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$$

$$\vdash \neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$$

$$\vdash (A \to \neg(\neg B \to C)) \to (A \to \neg B)$$

$$\vdash \neg(\neg B \to C) \to \neg B$$

$$\vdash B \to (\neg B \to C)$$

$$\vdash \neg(A \to \neg C) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$$

$$\vdash (A \to \neg(\neg B \to C)) \to (A \to \neg C)$$

$$\vdash \neg(\neg B \to C) \to \neg C$$

$$\vdash C \to (\neg B \to C)$$

定理 35 $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

$\vdash A \to \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

$\vdash ((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to \neg A$

$\vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg A$

$\neg A$

$\vdash \neg(\neg A \to C) \to \neg A$

$\neg A$

$\vdash \neg(B \to \neg C) \to \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

$\vdash ((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to (B \to \neg C)$

$\vdash \neg(\neg A \to B) \to (B \to \neg C)$

$\neg B$

$\vdash \neg(\neg A \to C) \to (B \to \neg C)$

$\neg C$

$\vdash \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to (\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

定理23

$\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to C) \to (\neg A \to \neg(B \to \neg C)))$

$\vdash \neg A \to (\neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to \neg(B \to \neg C))$

$\vdash \neg A \to ((B \to \neg C) \to ((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)))$

$\vdash (B \to \neg C) \to ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to C) \to A))$

$\vdash (B \to \neg C) \to ((\neg A \to B) \to ((\neg C \to A) \to A))$

定理 35 $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

$\vdash ((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to \neg(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

$\vdash \neg(\neg A \to C) \to \neg(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to (\neg A \to C)$

$\vdash \neg(B \to \neg C) \to C$

$\vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to (\neg A \to B)$

$\vdash \neg(B \to \neg C) \to B$

$\vdash B \wedge C \to B$

$\vdash A \vee (B \wedge C) \to A \vee B$

$\vdash B \wedge C \to C$

$\vdash A \vee (B \wedge C) \to A \vee C$

$$\vdash (A \vee (B \wedge C) \to A \vee B) \to ((A \vee (B \wedge C) \to A \vee C) \to (A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)))$$

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

演绎定理

Theorem (演绎定理)

对 PC 中任意公式集合 Γ 和公式 A, B, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{PC} A \to B$。

例3.1.1 利用演绎定理证明下列定理：

(1) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((C \to D) \to (A \to (B \to D)))$

(2) $\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

(3) $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

证明： (1) 由演绎定理，只需证

$$A \to (B \to C) \vdash (C \to D) \to (A \to (B \to D))$$

只需证 $A \to (B \to C), C \to D \vdash A \to (B \to D)$

只需证 $A \to (B \to C), C \to D, A \vdash B \to D$

只需证 $A \to (B \to C), C \to D, A, B \vdash D$

①回顾：演绎的定义：设Γ是PC的公式的集合，称以下公式序列为公式A的一个以Γ为前提在PC中的演绎：

$A_1, A_2, \cdots, (A_m = A)$ ①

其中 $A_i\ (i=1,2\cdots,m)$ 或者是PC中的公理，或者是Γ的 ② 成员，或者是 ③ $A_j\ (j<i)$，或者是 $A_j, A_k\ (j,k<i)$ 使用 ④ 分离规则导出的。其中，A_m 就是公式A

②"演绎结果"的定义：称A是前提Γ在PC中演绎结果，记为 $\Gamma \vdash_{PC} A$，如果公式A有一个以Γ为前提在PC中的演绎。

③ 如果 $\Gamma = B$，则用 $B \vdash_{PC} A$ 表示 $\Gamma \vdash_{PC} A$，如果 $B \vdash_{PC} A$ 并且 $A \vdash_{PC} B$ 则记为 $A \vdash\dashv B$

定理(演绎结果)(证明)

(1) "⇐"：已知 $\Gamma \vdash A \to B$，往证 $\Gamma; A \vdash B$

有演绎过程 $A_1, A_2 \cdots, (A_m = A \to B)$，在此序列中加上公式A，得到一个以 $\Gamma; A$ 为前提对B的演绎过程

(2) "⇒" 已知 $\Gamma; A \vdash B$ 往证 $\Gamma \vdash A \to B$

对 $\Gamma; A \vdash B$ 的演绎序列的长度 l 为归纳法

① 当 $l=1$ 时，序列中只有 B。从而 1) B 为公理 2) $B \in \Gamma$ 3) $B = A$ 三种情况

对 1) 有 B, $B \to (A \to B)$, $A \to B$ 构成一个证明，从而 $\Gamma \vdash A \to B$

对 2) 有 B, $B \to (A \to B)$, $A \to B$ 构成了一个以 Γ 为前提，对 $A \to B$ 的演绎过程，从而 $\Gamma \vdash A \to B$

对 3) 由 $A = B$, $\vdash A \to B$ ($\vdash A \to A$) 从而 $\Gamma \vdash A \to B$

② 假设当演绎序列长度 $< l$ 时，结论成立。

长度 $= l$ 时，演绎序列为：$A_1 A_2 \cdots (A_l = B)$，

观察 B。如果 B 为公理或者假设中的元素，可仿照 $l=1$ 时的情形证明结论成立。

1) 如果 $B = A_j$，则由于 $\Gamma; A \vdash A_j$，由 $j < l$ 知 $\Gamma \vdash A \to A_j$ 即 $\Gamma \vdash A \to B$ B在序列中出现过

2) 如果 B 为 A_j, A_k ($j, k < l$) 用分离规则导出。

不妨设 $A_k = (A_j \to B)$

由于 $\Gamma; A \vdash A_j$, $\Gamma; A \vdash A_j \to B$ 有 $\Gamma \vdash A \to A_j$ $(l+1)$

$(l+2)$ $\Gamma \vdash A \to (A_j \to B)$ 此两序列加上公式

$l+3$. $(A \to (A_j \to B)) \to ((A \to A_j) \to (A \to B))$ (A_2)

$l+4$. $(A \to A_j) \to (A \to B)$ $(l+2)(l+3)$ rmp

$l+5 \quad A \to B \qquad (l+1)((+4)\ rmp$

得到：以 Γ 为前提，对 $A \to B$ 的演绎过程。

从而 $\Gamma \vdash A \to B$

(2) 由演绎定理，只需证

$$(A \to B) \to (A \to C) \vdash A \to (B \to C)$$

只需证 $(A \to B) \to (A \to C), A \vdash B \to C$

只需证 $(A \to B) \to (A \to C), A, B \vdash C$

1	A	假设	5	$A \to B$	(2) (4) 分离规则
2	B	假设	6	$A \to C$	(5) (3) 分离规则
3	$(A \to B) \to (A \to C)$	假设	7	C	(1) (6) 分离规则
4	$B \to (A \to B)$	公理1			

---

(3) 由演绎定理，只需证

$$A \to C \vdash (B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C)$$

只需证 $A \to C, B \to C \vdash (\neg A \to B) \to C$

只需证 $A \to C, B \to C, \neg A \to B \vdash C$

例1: $\vdash (A\to(B\to C))\to((C\to D)\to(A\to(B\to D)))$

$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ a_2

(演绎定理)

只须证 $\{A\to(B\to C)\}\vdash(C\to D)\to(A\to(B\to D))$

只须证 $\{A\to(B\to C), C\to D\}\vdash A\to(B\to D)$

只须证 $\{A\to(B\to C), C\to D, A\}\vdash B\to D$

只须证 $\{A\to(B\to C), C\to D, A, B\}\vdash D$

1. A
2. B
3. $C\to D$
4. $A\to(B\to C)$
5. $C\to D$ (1)(4) rmp
6. C (2)(5) rmp
7. D (6)(5) rmp

例2: $\vdash((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

只须证: $\{(A\to B)\to(A\to C), A, B\}\vdash C$

1. A
2. B
3. $(A\to B)\to(A\to C)$
4. $B\to(A\to B)$ (a_1)

5. $(A \to B)$ (2)(4) rmp

6. $A \to C$ (5)(3) rmp

7. C (1)(6) rmp