

$$(1) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

$$\text{Pr } \{ B \rightarrow A \} \vdash \neg A \rightarrow \neg B$$

$$1. B \rightarrow A$$

$$2. (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \quad (\text{Th13})$$

$$3. (\neg A \rightarrow \neg B) \quad (1)(2) \text{Imp}$$

$$(2) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\text{Pr } \{ A \rightarrow B \} \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\text{Pr } \{ A \rightarrow B, B \rightarrow C \} \vdash A \rightarrow C$$

$$\text{Pr } \{ A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \} \vdash C$$

$$1. A \rightarrow B$$

$$2. B \rightarrow C$$

$$3. A$$

$$4. B \quad (3)(1) \text{Imp}$$

$$5. C \quad (4)(2) \text{Imp}$$

$$(3) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$\text{Pr } \{ (A \rightarrow B) \rightarrow A \} \vdash A$$

$$1. (A \rightarrow B) \rightarrow A$$

$$2. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

$$3. ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \quad (2)(\text{Th5}) \text{Imp}$$

$$4. \neg A \rightarrow A \quad (1)(3) \text{Imp}$$

$$5. (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad (Th9)$$

$$6. A \quad (4)(5) \text{ rmp}$$

$$(4) \vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\text{Pr } \{ \neg(A \rightarrow B) \} \vdash B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$\text{Pr } \{ \neg(A \rightarrow B), B \} \vdash A$$

$$1. \neg(A \rightarrow B)$$

$$2. B$$

$$3. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (Th6)$$

$$4. (3) \rightarrow (B \rightarrow (3)) \quad (A1)$$

$$5. B \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (3)(4) \text{ rmp}$$

$$6. (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (Th14)$$

$$7. B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (5)(6)(Th8)$$

$$8. \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad (2)(7) \text{ rmp}$$

$$9. A \quad (1)(8) \text{ rmp}$$

$$11) \vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

分析: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$1) \neg\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$1. A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (A1)$$

$$2. \neg\neg A \rightarrow A \quad (Th10)$$

$$3. \neg\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (2)(1)(Th8)$$

$$2) \neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$$

$$4. (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad (Th14)$$

$$5. \neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (4)(Th2)$$

$$6. (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (3)(5)(Th18)$$

$$7. (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad (6)(Th2)$$

(2) 已有公理:

$$A1. A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3. (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

$$\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \downarrow \text{前件互换}$$

分析 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \nearrow \text{三段式}$$

$$B \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad \nearrow \text{加后件}$$

Th 2 (前件₂规则): 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 是定理,
那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ 是定理

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $1) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (A_2)$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (1)(2) \text{ } \gamma_{mp}$
4. $(3) \rightarrow (B \rightarrow (3)) \quad (A_1)$
5. $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (3)(4) \text{ } \gamma_{mp}$
6. $(5) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad (A_2)$
7. $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (5)(6) \text{ } \gamma_{mp}$
8. $B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (A_1)$
9. $B \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (7)(8) \text{ } \gamma_{mp}$

lemma 4 (加前件4) $\vdash_{PC} (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (A_2)$
2. $(1) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (1)) \quad (A_1)$
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad (1)(2) \text{ } \gamma_{mp}$
4. $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \quad (A_2)(3) \text{ } \gamma_{mp}$
5. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (A_1)$
6. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (5)(4) \text{ } \gamma_{mp}$

Th 5 (加后件) $\vdash_{PC} (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

1. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{lemma 4})$

$$2. (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (1)(Th2)$$

Th8 (三段式) 如果 $\vdash_{PC} (A \rightarrow B)$, $\vdash_{PC} (B \rightarrow C)$
 那么 $\vdash_{PC} (A \rightarrow C)$

$$1. A \rightarrow B$$

$$2. B \rightarrow C$$

$$3. (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (Th5)$$

$$4. (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (1)(3) \gamma_{mp}$$

$$5. (A \rightarrow C) \quad (2)(4) \gamma_{mp}$$

证明: $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

$$1. (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad (A3)$$

$$2. (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (1)(Th2)$$

$$3. B \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (A1)$$

$$4. ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (3)(Th5) \gamma_{mp}$$

$$5. (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (2)(4)(Th8)$$