

## 数理逻辑作业-2

1 用  $\{\neg, \rightarrow\}$  表示下列公式:

$$(1) \quad p \wedge \neg q \leftrightarrow p \vee q$$

$$(2) \quad \neg p \vee q \vee r \leftrightarrow p$$

$$(3) \quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

2 (p44-6). 用  $\downarrow$  和  $\uparrow$  表示下列公式:

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

$$(4) \quad p \leftrightarrow q$$

---

$$(5) \quad (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$$

3 (p85-1). 在PC中证明下列事实:

$$(1) \quad \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(3) \quad A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

$$(5) \quad \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$

$$(7) \quad \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(9) \quad ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$(11) \quad ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$$

$$(13) \quad (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$$

$$1. (1) \quad p \wedge \neg q \leftrightarrow p \vee q$$

$$\text{Bp } \neg(p \rightarrow \neg\neg q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

$$\text{Bp } (\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \wedge \\ ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg q))$$

$$\text{Bp } \neg \left( \begin{array}{l} (\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \\ \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg\neg q)) \end{array} \right)$$

$$(2) \quad \neg p \vee q \vee r \leftrightarrow p$$

$$\text{Bp } ((\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow p) \\ \wedge (p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r))$$

$$\text{Bp } \neg \left( \begin{array}{l} ((\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow p) \\ \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)) \end{array} \right)$$

$$(3) \quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

$$\text{Bp } (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow p$$

$$\text{Bp } ((\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p) \\ \wedge (p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)))$$

$$\exists p \neg \left( \left( (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p \right) \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))) \right)$$

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$1) \Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$2) \quad \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \uparrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q$$

$$1) \quad \neg \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow (q \uparrow q))$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

$$2) \quad \neg(\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p) \downarrow q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

$$1) \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \uparrow q$$

$$2) \quad \neg \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$(4) \quad p \Leftrightarrow q$$

$$1) \quad p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \downarrow \neg(\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg q \downarrow p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)$$

$$2) \quad \neg \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \uparrow (\neg q \vee p))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge \neg q) \uparrow \neg(\neg p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \uparrow \neg q) \uparrow \neg(\neg p \uparrow q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow \neg((P \downarrow P) \uparrow Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow (((P \uparrow P) \uparrow Q) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow Q)))$$

$$\Leftrightarrow \left( \left( \left( (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \right) \uparrow \left( (P \uparrow P) \uparrow Q \right) \right) \uparrow \left( (P \uparrow P) \uparrow Q \right) \right)$$

$$(1) \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$1. (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (Th1)$$

$$2. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (Th6)$$

$$3. (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (1)(2)(Th18)$$

$$(3) \{ A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \} \vdash A \rightarrow C$$

仅须证  $\{ A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A, A \} \vdash C$  (演绎定理)

$$1. A$$

$$2. A \rightarrow B$$

$$3. \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$$

$$4. B \quad (1)(2) \gamma_{mp}$$

$$5. (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (A3)$$

$$6. A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (3)(5) \gamma_{mp}$$

$$7. B \rightarrow C \quad (1)(6) \text{Imp}$$

$$8. C \quad (4)(7) \text{Imp}$$

$$(5) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$

$$\text{分析: } (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$

$$(C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))$$

$$1. (C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \quad (Th4)$$

$$2. ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (Th4)$$

$$3. (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (1)(2) (Th8)$$

$$4. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (3)(Th2)$$

$$(9) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$1. \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (Th6)$$

$$2. (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (Th14)$$

$$3. \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad (1)(2) \text{Imp}$$

$$4. A \rightarrow A \quad (Th1)$$

$$5. ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (3)(4) (Th18)$$

$$(7) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

分析  $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

1.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  由上面第9题可得

2.  $(1) \rightarrow ((B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A))$  (Th4)

3.  $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  (1)(2)  $\gamma_{mp}$

4.  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A))$  (Th3)

5.  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  (3)(4) (Th8)

$$(11) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$$

1)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \nearrow A_2$$

$$A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$$

1.  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  (Th6)

2.  $(1) \rightarrow (A \rightarrow (1))$  (A1)

3.  $A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$  (1)(2)  $\gamma_{mp}$

4.  $\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))$  (3) (Th2)

5.  $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$  (A2)
6.  $\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$  (4)(5)(Th8)
7.  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$  (6)(Th2)
8.  $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  (Th14)
9.  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  (7)(8)(Th8)
10.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  (9)(Th2)
- 2)  $C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$
11.  $C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  (A2)
12.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  (10)(11)(Th18)

$$(13) \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)$$

分析:  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$

$$\begin{aligned}
 1) & \neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \\
 & (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))) \\
 & (B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \\
 & (B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))) \\
 & (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)))
 \end{aligned}$$

1.  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  (Th6)
2.  $(1) \rightarrow (A \rightarrow (1))$  (A1)
3.  $A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$  (1)(2)  $\gamma_{mp}$
4.  $(3) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (3))$  (A1)



5.  $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)))$  (3)(4)  $\gamma_{mp}$
6.  $(A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B)))$  (Th3)
7.  $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B)))$  (5)(6) (Th8)
8.  $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$  (A2)
9.  $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))) \rightarrow (\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)))$  (8) (Th4)  $\gamma_{mp}$
10.  $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)))$  (8)(9) (Th8)
11.  $(\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)))$  (Th3)
12.  $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$  (Th14)
13.  $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C))$  (12) (Th4)  $\gamma_{mp}$
14.  $(\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C))$  (11)(13) (Th8)
15.  $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C))$  (10)(14) (Th8)
16.  $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$  (Th4)
17.  $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$  (15)(16) (Th8)
18.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$  (17) (Th3)
19.  $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$  (Th8)
20.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$  (18)(19) (Th8)
21.  $B \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$
- $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$
- $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$
21.  $(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$  (Th1)
22.  $(21) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (21))$  (A1)
23.  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$  (21)(22)  $\gamma_{mp}$

$$24. ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad (Th3)$$

$$25. (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad (23)(24)(Th8)$$

$$26. B \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad (25)(Th2)$$

$$27. ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad (20)(26)(Th18)$$

$$28. (A \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad (27)(Th2)$$

$$29. (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (Th3)$$

$$30. (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (28)(29)(Th8)$$