

Estudio de la resonancia y antiresonancia de circuitos RLC

Marcos Sidoruk
marcsid2003@gmail.com

Gaspar Casaburi
gaspar.casaburi@gmail.com

Candelaria Rico
canderico78@gmail.com

Febrero 2023

Resumen

En este trabajo se caracterizo la respuesta de circuitos RLC en serie y paralelo a una fuente de tensión armónica de frecuencia variable. Se busco verificar la validez del modelo de parámetros concentrados como medio para describir dichos circuitos a distintas frecuencias. En ambos casos, los modelos utilizados no resultaron adecuados para describir el sistema en frecuencias lejanas a la frecuencia de resonancia.

1. Introducción

La tensión emitida por una fuente de corriente alterna varía en función del tiempo como una senoide. Alternativamente, se puede expresar como la parte real de una exponencial compleja, como muestra la expresión (1) [2]

$$V = V_0 e^{j\omega t}, \quad (1)$$

donde V_0 es la amplitud real, j es la unidad imaginaria, ω es la frecuencia y t es el tiempo. La corriente, al igual que la diferencia de potencial, también se puede escribir de la misma manera, con I_0 siendo la amplitud.

La respuesta de un componente al paso de la corriente se denomina *impedancia*, y esta, al igual que la corriente, se modela con números complejos. La impedancia Z_R de una resistencia está dada por la expresión (2) [2]

$$Z_R = R, \quad (2)$$

donde R es la resistencia. En el caso de una inductancia, la impedancia Z_L esta descripta por la ecuación (3)

$$Z_L = j\omega L, \quad (3)$$

con j la unidad imaginaria, ω la frecuencia y L la inductancia. La impedancia Z_C de una capacitancia C esta dada por la ecuación (4)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}. \quad (4)$$

La impedancia cumple con una relación análoga a la ley de Ohm dada por la ecuación 5,

$$V = IZ, \quad (5)$$

donde V es la caída de potencial en el componente, Z es su impedancia e I la corriente que circula por este.

La potencia disipada por una resistencia esta dada por la expresión (6)

$$P = \frac{V_{ef}^2}{R} \quad (6)$$

donde V_{ef} es valor RMS de la tensión, es decir, $V_0/\sqrt{2}$.

La diferencia de fase se obtiene con la ecuación (7)

$$\Delta\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\Im V_s/V_0}{\Re V_s/V_0}\right). \quad (7)$$

donde V_s es la diferencia de potencial medida a la salida de un circuito.

En este trabajo, se estudió la resonancia de un circuito RLC en serie. Este circuito consiste en conectar en serie una fuente de tensión alterna, una resistencia, una inductancia y un capacitor. En este sistema, el Voltaje RMS o efectivo viene dado por la ecuación (8)[1].

$$V_{ef}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (8)$$

Esta expresión posee un máximo cuando el denominador es mínimo, es decir, cuando el término con la inductancia y la capacitancia se anulan. Esto sucede cuando la frecuencia ω toma el valor de ω_0 , dado por la ecuación (9)[1]

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (9)$$

A esta frecuencia ω_0 se la denomina *frecuencia de resonancia*, y determina el punto en el cual la corriente es máxima. Esta frecuencia se puede reescribir como (10)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (10)$$

Cuando la frecuencia del sistema es ω_0 , se considera que el sistema está en *resonancia*.

La potencia P disipada por el circuito esta dada por la expresión [1]

$$P(\omega) = \frac{V_{ef}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} R. \quad (11)$$

Esta función posee un máximo en ω_0 , al igual que la expresión (8), y tiene forma de campana. Ésta se denomina campana de resonancia, se caracteriza con su ancho cuando la potencia disipada es la mitad de la máxima. Esto se denomina ancho de banda ($\Delta\omega$), y cuando se reemplaza este valor de potencia en la expresión (11), se obtiene la ecuación 12 [1]

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}. \quad (12)$$

A partir de esta ecuación, se puede definir el factor de mérito del circuito, que representa selectividad del circuito para disipar la potencia en ciertas frecuencias. Este factor Q está dado por la expresión (13) [1]

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (13)$$

y, reemplazando los valores de ω_0 y $\Delta\omega$, se obtiene otra forma de representar este factor, descripta por la ecuación (14)

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (14)$$

El defasaje $\Delta\phi$ de la corriente en el circuito esta descripta en la ecuación (15)

$$\Delta\phi = \arctan Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (15)$$

En este trabajo también se estudió la *antirresonancia* de un circuito RLC paralelo. Este circuito consiste en conectar una fuente de tensión alterna al paralelo formado por un capacitor y una resonancia e inductancia conectadas en serie entre si. La impedancia total del sistema $Z_{||}$ esta dada por la ecuación (16)

$$Z_{||} = \frac{\left[\frac{L}{C} - j \frac{R}{\omega C} \right] \left[R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (16)$$

La frecuencia de antirresonancia del sistema esta descripta por la ecuación (17)

$$\omega_{0||} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}, \quad (17)$$

donde ω_0 es el expresado en (9). En esta frecuencia, la impedancia del sistema es máxima, por lo que la potencia será mínima.

En ambos circuitos, se puede analizar la transmisión y la atenuación. La transmisión de un circuito esta dada por la ecuación (18)

$$T = \left| \frac{V_s}{V_0} \right|, \quad (18)$$

siendo V_0 el modulo de la tensión emitida por la fuente, y V_s la tensión a la salida del circuito. La atenuación esta dada por la expresión (19)

$$A = -20 \log_{10} T. \quad (19)$$

En este trabajo, se estudió la respuesta de circuitos RLC en serie y en paralelo a distintas frecuencias y, en particular, sus resonancias y antirresonancias respectivamente.

2. Desarrollo experimental y resultados

En este trabajo se estudió la resonancia de un circuito RLC en serie (2.1) y la antirresonancia de un circuito RLC en paralelo (2.2). Además, se graficaron los diagramas de Bode de ambos circuitos.

2.1. RLC en serie

En esta sección, se estudió la respuesta de un circuito RLC en serie y, en particular, su resonancia. Para esto, se armó el circuito de la figura 1, que consiste de una fuente de tensión alterna, un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie.

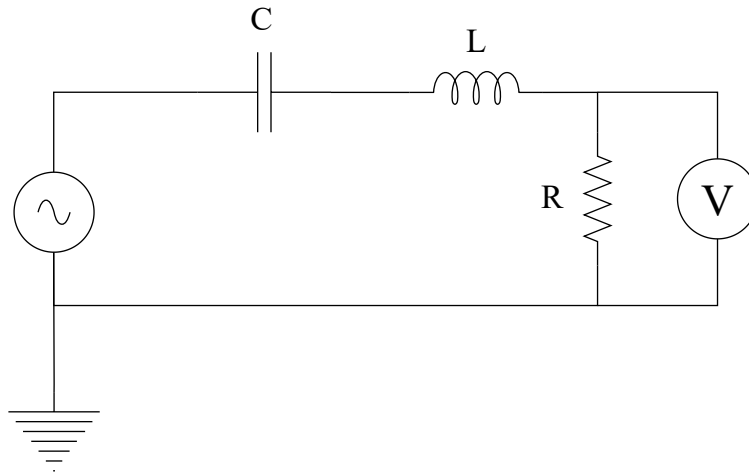


Figura 1: Esquema que representa el circuito RLC en serie formado por una fuente de tensión alterna, una resistencia R , una capacitancia C y una inductancia L . Sumado a esto, se agrega un voltímetro que mide la caída de tensión en la resistencia.

Se realizó un barrido de frecuencias y se registró la caída de tensión en R y el defasaje para tres valores de R . El valor de R modifica significativamente el ancho de la campana y, por lo tanto, el factor de mérito. Este registro se realizó con un osciloscopio, recolectando los datos para cada frecuencia directamente del dispositivo. Con estos datos, se realizó un ajuste para determinar la frecuencia y la tensión y, utilizando estos coeficientes con sus respectivos errores, se realizó un ajuste con la ecuación. Este procedimiento resultó en errores relativos muy bajos. En la figura se encuentran el gráfico la potencia disipada por la resistencia R , los diagramas de Bode del defasaje y la atenuación, todos en función de ω/ω_0 , para el primer valor de resistencia.

Se analizaron tres configuraciones para el RLC-serie con distintos valores de R medidos aparte con un ohmetro. Se debe destacar que la resistencia total del sistema es una suma de las resistencias del resistor, inductor y fuente.

Para el ajuste de la potencia se utilizó la ecuación (8).

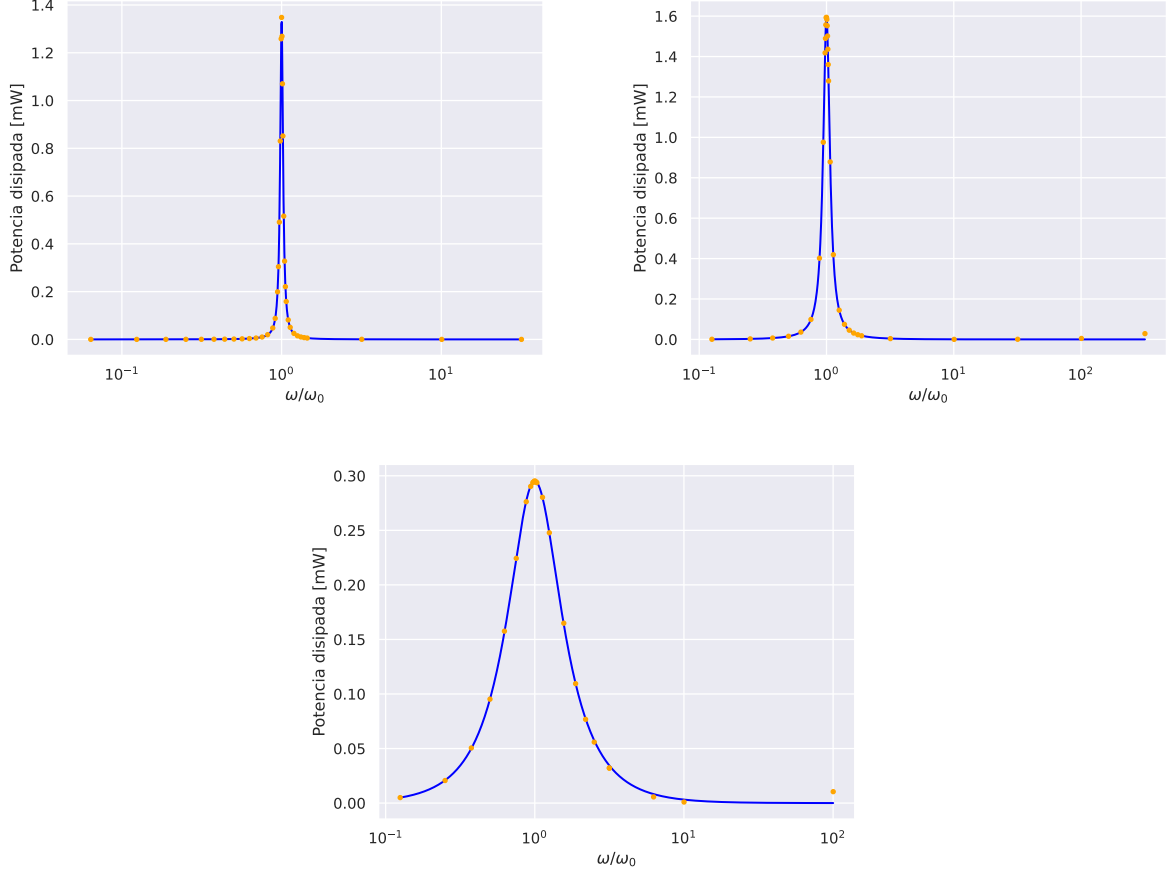


Figura 2: Gráfico de la potencia en función de $\frac{\omega}{\omega_0}$. Como puede apreciarse, la función aumenta hasta alcanzar un máximo en f_0 y luego comienza a descender. Este comportamiento es propio de un sistema resonante, donde la frecuencia de resonancia es aquella en la que la función alcanza su máximo. El f_0 de la configuración 2 y 3 coincide mayormente con el de la configuración 1. Sin embargo, se distinguen diferencias en el ancho de la campana de resonancia. A medida que se aumentó la resistencia, se obtuvieron campanas más anchas. Cabe destacar que por encima del orden de los 10^5 Hz la curva de las configuraciones 2 y 3 ya no pasan por los puntos.

Para la primera configuración se utilizó una resistencia de $(R = 151 \pm 1) \Omega$. Se obtuvo un $f_0 = (1590,22 \pm 0,03)$ Hz. Se obtuvo un factor de mérito de $Q_1 = 20,49 \pm 0,02$.

Para la segunda configuración se usó una resistencia de $(R = 1151 \pm 1) \Omega$. Se obtuvo una resonancia en $f_0 = (1590,08 \pm 0,09)$ Hz, como puede verse en la figura 2. Este resultado es consistente, dado que no se varió ningún elemento del sistema que pueda afectar a f_0 . El ancho de banda obtenido es de $Q_2 = (6,84 \pm 0,01)$. Esto es coherente dado que al aumentar la resistencia, la campana aumenta en ancho, por lo que su factor de mérito disminuye. Por encima del orden de los 10^5 Hz el modelo no se ajusta correctamente a los datos, por lo que el modelo no es útil para frecuencias tan altas en esta configuración.

En la tercera configuración se usó una resistencia de $(R = 10151 \pm 1) \Omega$. el f_0 obtenido fue de $f_0 = (1597,62 \pm 0,61)$. El factor de mérito obtenido es de $Q_3 = 0,97 \pm 0,01$.

La campana de resonancia en los tres casos está ubicada sobre el mismo f_0 . A medida que se aumentó la cantidad de resistencia, se observó un aumento en el ancho de la campana. El aumento de la resistencia, también se evidenció en la disminución en Q . Por encima del orden de los 10^5 Hz y al igual que en el caso anterior, el modelo no se ajusta correctamente a los datos, por lo que no es útil para frecuencias tan altas en esta configuración.

Con este análisis se puede apreciar que la campana de resonancia aumentó en ancho a medida que se aumentaba R , reduciendo así su factor de mérito. La frecuencia de resonancia no sufrió cambios significativos

con la variación de R . Las frecuencias de resonancia obtenidas son razonablemente similares, pero no exactamente, especialmente en el último caso. Por último, se debe tener en cuenta que el modelo utilizado presenta inconsistencias y estas se evidencian progresivamente con el aumento de R .

De estos mismos datos se obtuvo el gráfico de la figura que muestra la atenuación en función de $\frac{\omega}{\omega_0}$. Este ajuste se realizó por medio de la ecuación (8) en la ecuación (19).

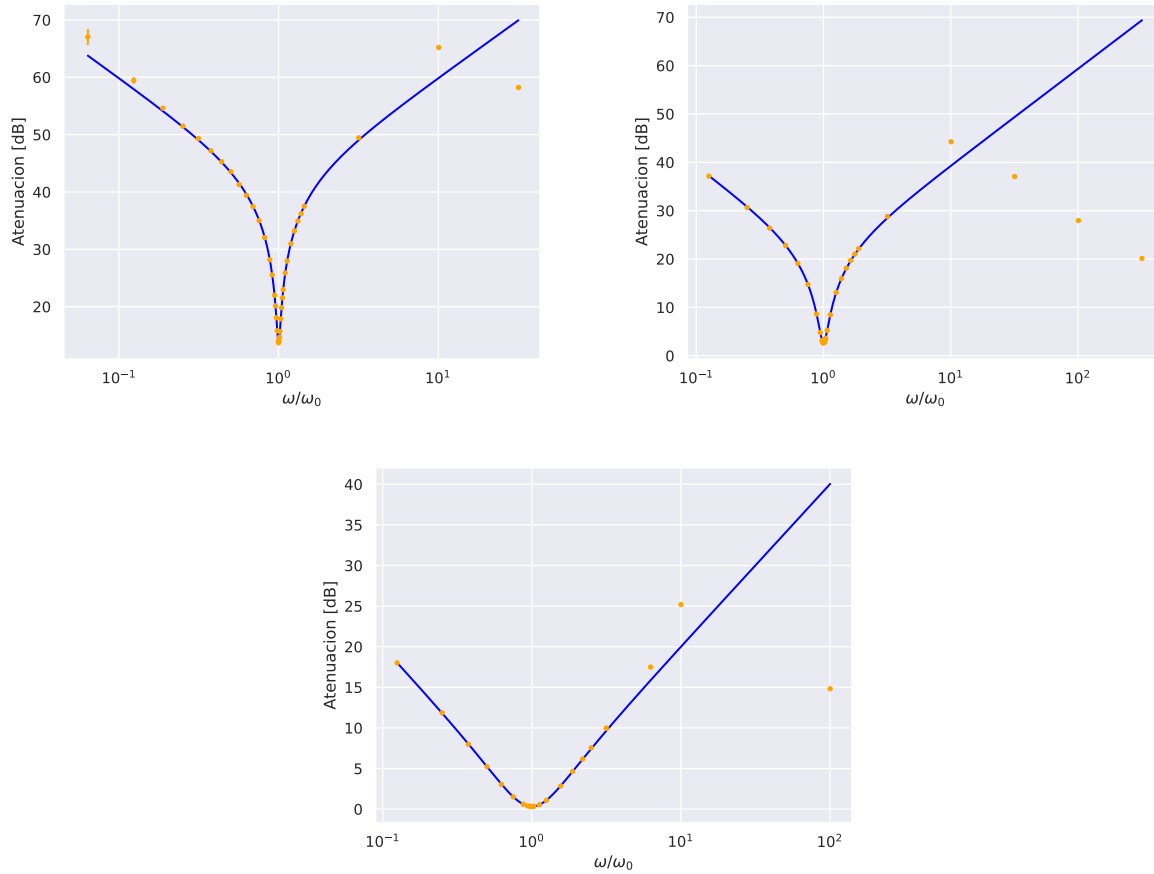


Figura 3: Se observa una disminución en la atenuación, un mínimo y a medida que se sigue aumentando la frecuencia, vuelve a aumentar la atenuación. En el orden de los MHz el modelo no se ajusta a los datos.

Para el desfase, se realizó un ajuste por la ecuación (15).

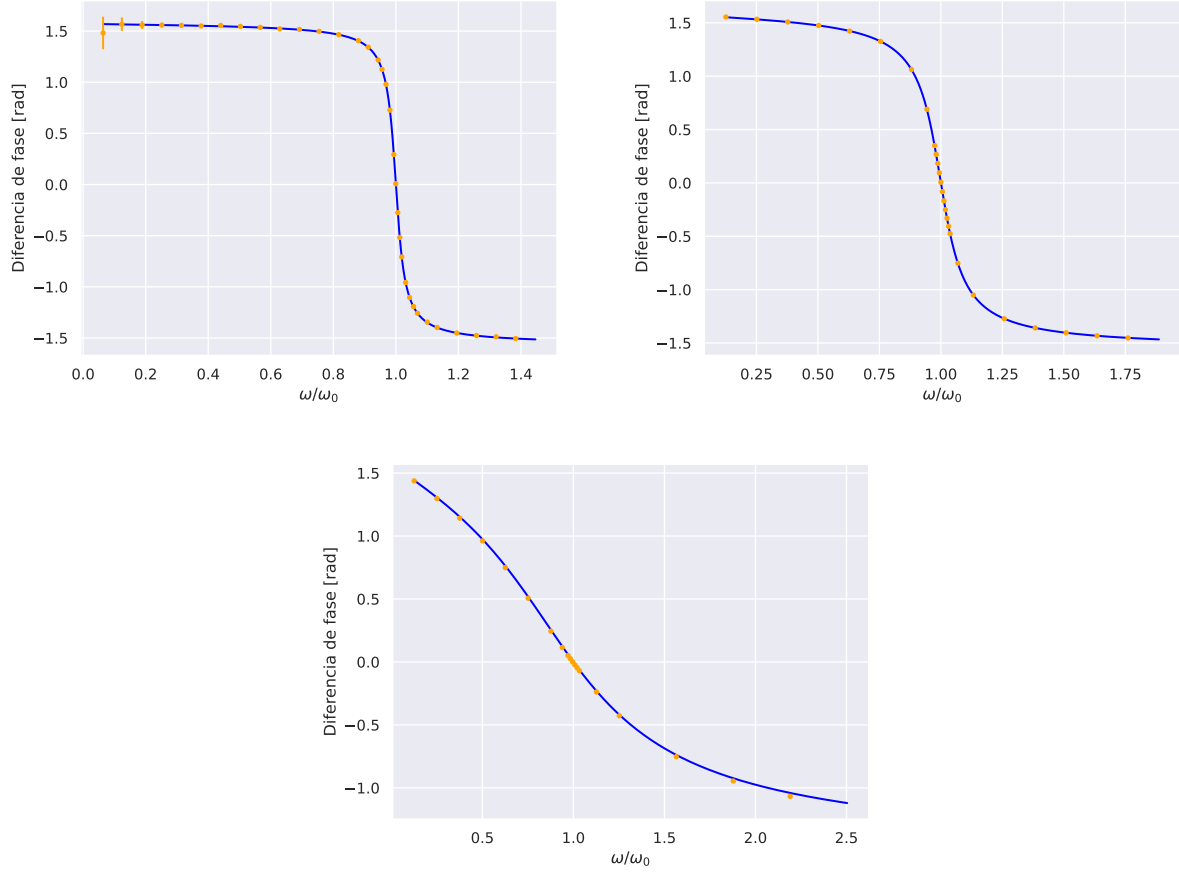


Figura 4: Gráficos de la fase en función del cociente de ω . Se muestran la diferencia de fase en función del cociente entre ω y ω_0 . Como puede verse el modelo se ajusta razonablemente a los datos.

2.2. RLC en paralelo

En esta sección, se estudió el comportamiento de un circuito RLC paralelo. Para esto, se montó el sistema de la figura 5, con un resistor y un inductor conectados en serie entre sí y estos, a su vez, conectados a un capacitor en paralelo.

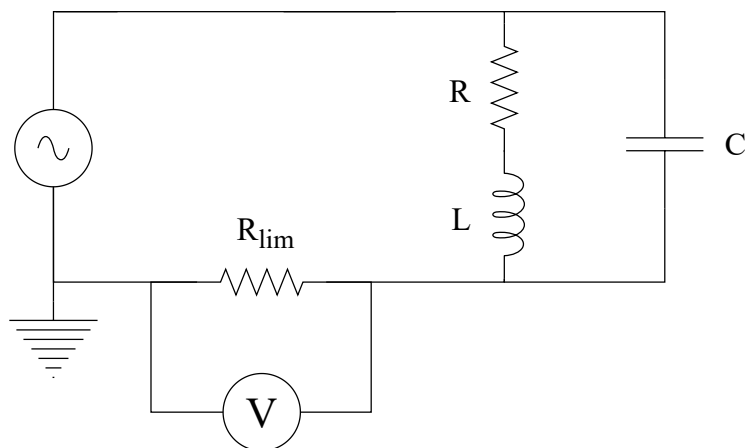


Figura 5: Esquema del circuito RLC paralelo formado por una fuente de tensión alterna $E = V_0 \sin \omega t$, dos resistores, uno de resistencia R_{lim} y el otro de resistencia R , un inductor de inductancia L y un capacitor de capacitancia C . La resistencia R_{lim} funciona como resistencia limitante, y se le conectó un voltímetro en paralelo para medir la caída de potencial sobre ella.

Este sistema posee una antirresonancia en la frecuencia $\omega_{0||}$ (17), y con el ancho de su campana se puede definir el factor de calidad del sistema. El factor de merito (14) depende de los valores de R , L y C , por lo

que modificando el valor de R , se modifica este factor.

La expresión de la tensión para este circuito es (20)

$$V_{ef}(\omega) = \frac{R_{lim} V_0}{|R_{lim} + Z_{||}|}. \quad (20)$$

Reemplazando la expresión de la impedancia (16) en (20), se puede obtener para la tensión la expresión (21)

$$V_{ef}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\left(B + \frac{(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{Q^2 + (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) + \frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q^2} + (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}\right)^2}}, \quad (21)$$

donde $A = V_0 R_{lim}/R$ y $B = R_{lim}/R$. Para calcular la diferencia de fase, se reemplazan los parametros del problema en (7) y se obtiene la expresión (22)

$$\Delta\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{Q} \frac{Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) + \frac{\omega_0}{\omega}}{B(\frac{1}{Q^2} + (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2) + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}\right). \quad (22)$$

Se realizó un barrido de frecuencias y se registró la caída de tensión en R_{lim} y el defasaje para dos valores de R , con $R_1 \ll R_2$. El valor de R modifica significativamente el ancho de la campana y, por lo tanto, el factor de mérito. Se realizó el mismo procedimiento de recolección de datos que en la sección 2.1. Se realizó un ajuste con la ecuación (21) y, con los coeficientes obtenidos, se calculó la potencia disipada en R_{lim} . En la figura 6 se encuentran el gráfico de la tensión en función de la frecuencia y la potencia disipada por la resistencia R_{lim} en función de $\omega/\omega_{0||}$ para el primer valor de resistencia.

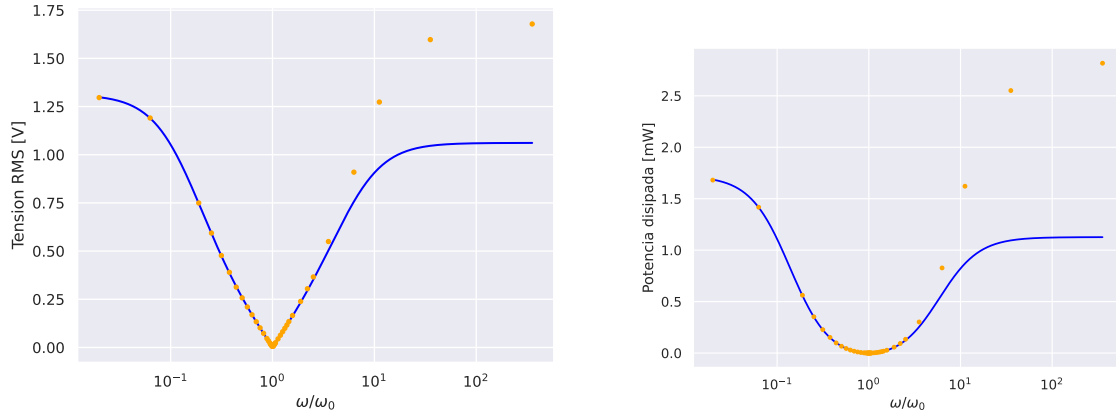


Figura 6: Gráfico de la tensión del circuito con R_1 en función de la frecuencia, con los datos medidos en naranja y el ajuste en azul (izquierda). Gráfico de la potencia en función de utilizando los coeficientes obtenidos del ajuste. En naranja, se aplicó la ecuación (6) a los datos. En azul, se aplicó la ecuación (6) a la función obtenida del ajuste (derecha). Los residuos presentan una distribución aparentemente aleatoria y $R^2 = 0,91$, por lo que el ajuste es confiable.

Debido a las limitaciones del modelo, en el ajuste se excluyeron valores de frecuencia del orden de 10^4 Hz. El valor de la frecuencia de resonancia encontrado (utilizando la expresión (10)) fue de $f_{0||} = (1589,45 \pm 0,02)$ Hz. El factor de merito calculado fue de $Q_1 = 31,43 \pm 0,03$. Como se puede observar en el gráfico a la derecha de la figura 6, el modelo se ajusta muy bien hasta valores de $\omega/\omega_{0||}$ del orden de 10^1 , pero falla cuando esta relación es mayor.

Se realizaron los diagramas de Bode del defasaje y la atenuación para esta resistencia, y estos se muestran en la figura 7. Para obtener la diferencia de fase, se ajustó mediante la ecuación (22), utilizando los coeficientes obtenidos previamente.

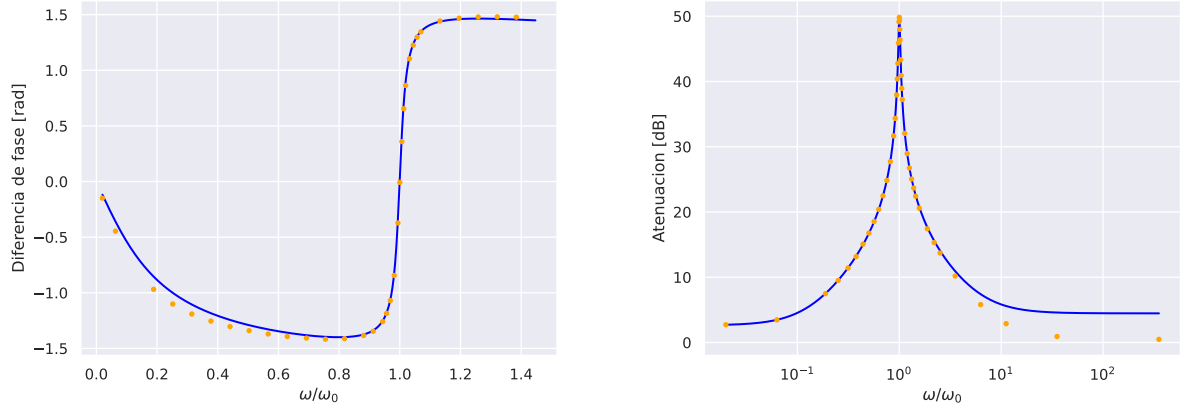


Figura 7: Gráfico de la diferencia de fase. En naranja, la diferencia de fase medida y en azul, el ajuste (izquierda). Gráfico de la atenuación reemplazando los datos (naranja) y el ajuste de la tensión (azul) en la ecuación (19) (derecha).

Como se puede observar en la figura 7, el modelo se ajusta muy bien alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$, pero falla a frecuencias menores a ω_0 . Esto se puede deber a que el modelo no representa del todo el circuito real, es decir, que hay factores que el modelo no tiene en cuenta.

Se recolectaron los datos para el segundo valor de R , se realizó el ajuste de los datos con la ecuación (21) y se calculó la potencia. En la figura 8 se muestran ambos gráficos.

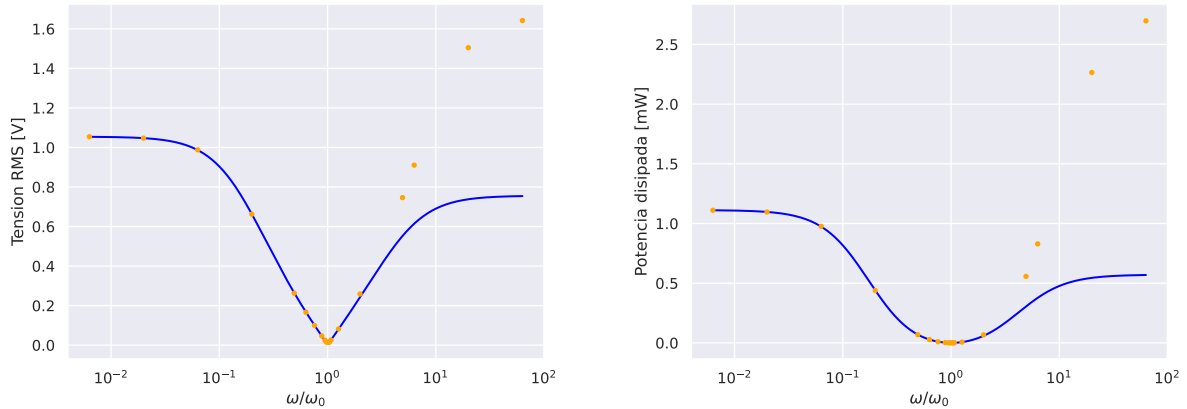


Figura 8: Gráfico de la tensión del circuito con el segundo valor de R en función de la frecuencia, con los datos medidos en naranja y el ajuste en azul (izquierda). Gráfico de la potencia en función de utilizando los coeficientes obtenidos del ajuste. En naranja, se aplicó la ecuación (6) a los datos. En azul, se aplicó la ecuación (6) a la función obtenida del ajuste (derecha). Los residuos presentan una distribución aparentemente aleatoria y $R^2 = 0,72$, por lo que el ajuste es confiable.

Al igual que en la figura 6, el modelo usado para el ajuste de la tensión falla cuando ω/ω_0 es mucho mayor a 1. Esto se debe a que el modelo no es el correcto para describir el circuito a altas frecuencias, está incompleto. Sin embargo, se puede calcular una frecuencia de resonancia utilizando este de este sistema, ya que el modelo sí funciona alrededor de dicha frecuencia, y se obtuvo $f_{0||} = (1584,16 \pm 0,05)$ Hz. El factor de mérito de este circuito es $Q_2 = 15,24 \pm 0,02$.

Se realizaron los diagramas de Bode del defasaje y la atenuación para la segunda resistencia, los cuales se observan en la figura 9. Para obtener la diferencia de fase, se ajustó mediante la ecuación (22), utilizando los coeficientes obtenidos previamente.

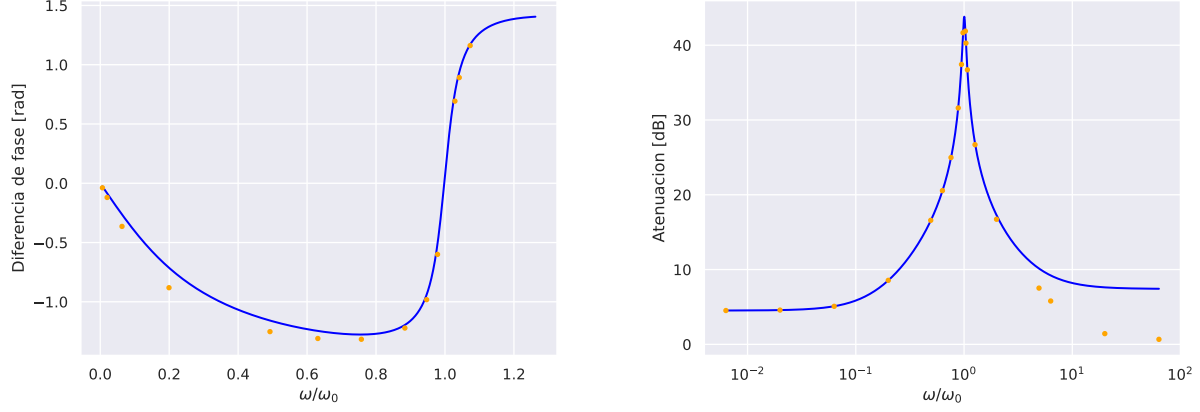


Figura 9: Gráfico de la diferencia de fase; en naranja, la diferencia de fase medida y en azul, el ajuste (izquierda). Gráfico de la atenuación reemplazando los datos (naranja) y el ajuste de la tensión (azul) en la ecuación (19) (derecha).

Al igual que en la figura 7, el modelo utilizado para el ajuste de la diferencia de fase no es el correcto para las frecuencias menores a ω_0 . En el gráfico de la atenuación, el modelo falla en frecuencias mucho mayores a ω_0 .

Los factores de mérito (14) cumplen la relación $Q_1 \gg Q_2$. Esto es razonable, ya que $R_1 > R_2$.

3. Conclusiones

En el circuito RLC en serie las frecuencias de resonancia fueron muy similares siendo $f_{0_1} = (1590,22 \pm 0,03)$ Hz, $f_{0_2} = (1590,08 \pm 0,09)$ Hz y $f_{0_3} = (1597,62 \pm 0,61)$ Hz. También se observó una disminución en Q siendo $Q_1 = 20,49 \pm 0,02$, $Q_2 = (6,84 \pm 0,01)$ y $Q_3 = 0,97 \pm 0,01$. Como puede verse $Q_1 > Q_2 > Q_3$, lo cual es esperable que ocurra con un aumento de la resistencia del sistema. El modelo no se ajustó correctamente a los datos en frecuencias altas.

Para el RLC en paralelo, la frecuencia $f_{0||}$ para el primer valor de resistencia fue de $f_{0_1} = (1589,41 \pm 0,03)$ Hz, y para el segundo, $f_{0_2} = (1584,22 \pm 0,05)$ Hz. Los factores de mérito fueron $Q_1 = 31,22 \pm 0,03$ y $Q_2 = 15,12 \pm 0,03$ respectivamente, y estos cumplen con la relación dada por los valores de las resistencias y la expresión (14). El modelo no se ajustó correctamente a los datos en las frecuencias altas.

El modelo de parámetros concentrados demostró ser una buena aproximación para describir circuitos RLC serie y RLC paralelos alimentados con fuentes de tensión armónica con frecuencias por debajo de los 10 kHz, de dicha frecuencia en adelante se observan diferencias significativas con respecto al modelo cada vez mayores a medida la frecuencia aumenta. Además se observó que en las frecuencias altas ambos circuitos presentan una caída de su atenuación con respecto de el valor predicho por el modelo, por lo que éste no es un modelo adecuado para describir el sistema a partir del orden de 10^5 Hz.

Referencias

- [1] César Moreno. *Resonancia eléctrica*. URL: <http://users.df.uba.ar/moreno/cursos/lab3/apuntes/resonancia.pdf>.
- [2] Juan G. Roederer. *Electromagnetismo elemental*. Segunda edición. 2020.