

Caracterización del régimen transitorio en circuitos RC, RL y RLC

Marcos Sidoruk
marcsid2003@gmail.com

Gaspar Casaburi
gaspar.casaburi@gmail.com

Candelaria Rico
canderico78@gmail.com

Febrero 2023

Resumen

En este trabajo se estudió el régimen transitorio de circuitos RC, RL y RLC. Para esto, se alimentaron los circuitos con una fuente de ondas cuadradas. Se registró la caída de tensión en la resistencia en cada circuito. En el RC y RL, se estudió la relación entre los tiempos característicos y la resistencia. En el primero no se pudo concluir nada acerca de esta relación, mientras que en el segundo se encontró la relación dada por el modelo utilizado y se recuperó el valor de la inductancia medido de forma independiente. En el RLC, se analizaron los casos sobreamortiguados y subamortiguados. En el primer caso, se encontraron diferencias significativas con el modelo las cuales se magnifican con la resistencia. En el segundo caso, el modelo describe correctamente el fenómeno estudiado.

1. Introducción

Cuando cambian las condiciones en un circuito, sus variables eléctricas evolucionan hasta llegar a un estado de equilibrio. A esta evolución se la denomina *régimen transitorio*. [3]

En este trabajo se estudiaron los regímenes transitorios de un circuito RC, un circuito RL, y el de un circuito RLC.

Un circuito RC consiste de un resistor y un capacitor conectados en serie como muestra la figura 1. Si se conecta una fuente de ondas cuadradas de muy baja frecuencia, se puede estudiar la respuesta transitoria del circuito a un cambio repentino de potencial.

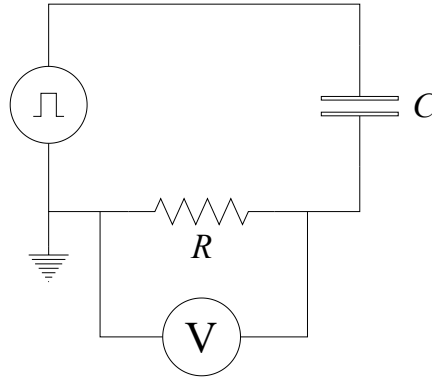


Figura 1: Circuito RC, conformado por una fuente de ondas cuadradas, una capacitancia C y una resistencia R conectadas en serie. Se mide la caída de tensión en R con un osciloscopio como voltímetro.

La expresión para la caída de tensión a través del resistor para este circuito es (1)

$$V(t) = A e^{-t/\tau_1}, \quad (1)$$

siendo A un coeficiente que depende de las condiciones iniciales del sistema y τ_1 el tiempo característico del transitorio, dado por la ecuación (2) [3]

$$\tau_1 = RC. \quad (2)$$

Un circuito RL consiste un inductor y un resistor conectados en serie como muestra la figura 2.

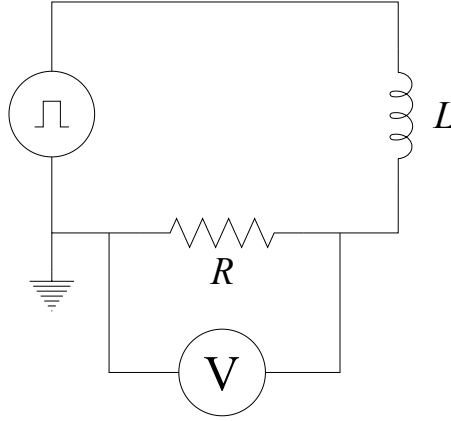


Figura 2: Circuito RL alimentado por una fuente de ondas cuadradas y con una inductancia L y una resistencia R conectadas en serie. Al igual que en la figura 2 se mide la caída de tensión en R con un voltímetro

La caída de tensión en el resistor R está dada por la ecuación (3)

$$V(t) = A(1 - e^{-t/\tau_2}), \quad (3)$$

siendo A un coeficiente que depende de las condiciones iniciales del sistema, y τ_2 el tiempo característico del transitorio, dado por la expresión (4)

$$\tau_2 = \frac{L}{R}. \quad (4)$$

Un circuito RLC esta conformado por un resistor, un capacitor y un inductor conectados en serie, como muestra la figura 3.

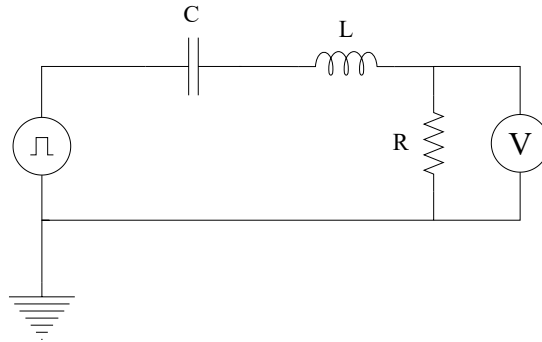


Figura 3: Esquema del circuito RLC, donde R es la resistencia, L es la inductancia y C la capacitancia. Se utilizó un osciloscopio como voltímetro.

Las variables eléctricas de dicho circuito son análogas a las variables dinámicas de un oscilador armónico amortiguado, y al igual que este se pueden catalogar las respuestas para distintos valores de R , L y C en dos grupos dependiendo de si presentan una evolución oscilatoria o exponencial.

Se dice que el circuito presenta un régimen subamortiguado si se cumple la condición dada por (5)

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5)$$

En este caso, la caída de tensión sobre el resistor viene dada por la ecuación (6)

$$V(t) = \frac{R V_0}{\omega L} e^{-\frac{R_T}{2L}t} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_T}{2L}\right)^2} t\right). \quad (6)$$

En cambio si se cumple la condición dada por (7)

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (7)$$

se dice que el circuito presenta un régimen sobreamortiguado y la caída de tensión sobre el resistor viene dada por la ecuación (8)

$$V(t) = \frac{R V_0}{\sqrt{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}}} e^{-\frac{R_T}{2L}t} \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} t\right) \quad (8)$$

En este trabajo se estudiaron los regímenes transitorios de circuitos RC, RL y RLC. En este último caso, se analizaron los casos subamortiguado y sobreamortiguado.

2. Desarrollo experimental y Resultados

En este trabajo se estudiaron los regímenes transitorios de circuitos RC (sección 2.1), RL (sección 2.2) y RLC (sección 2.3). Se utilizaron un generador de funciones Tektronix AFG1022 [4] y un osciloscopio Tektronix TBS 1052B-EDU [5]. Todas las resistencias fueron medidas con un óhmetro modelo UNI-T UT55[2], y las capacitancias e inductancias fueron medidas con un multímetro Extech LCR Meter [1].

2.1. Circuito RC

En esta sección, se estudió la repuesta de un circuito RC en su régimen transitorio. El circuito montado se observa en la figura 1, donde se conectaron en serie un resistor de resistencia variable y un capacitor de capacidad $C = (9,39 \pm 0,07) \times 10^{-9}$ F. El sistema se alimentó con una fuente de ondas cuadradas de tensión $V_0 = (10,4 \pm 0,5)$ V.

Se registró la caída de tensión en la resistencia a partir del osciloscopio, obteniéndose la tensión en función del tiempo. Se realizó un barrido de resistencias de $(1000 \pm 9) \Omega$ hasta $(10,0 \pm 0,2) \times 10^6 \Omega$, capturando los datos del osciloscopio en cada caso y se hizo un ajuste por medio de la ecuación (1) para calcular τ_1 . Un ejemplo de este ajuste se observa en la figura 4, donde $R = (316,2 \pm 0,6) \times 10^4 \Omega$.

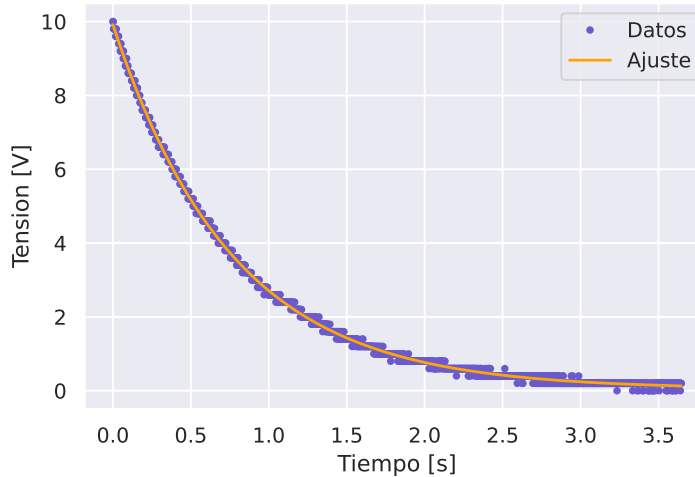


Figura 4: Gráfico de la tensión en función del tiempo para $R = (316,2 \pm 0,6) \times 10^4 \Omega$ y su ajuste. Los residuos presentan una distribución aparentemente aleatoria.

Del ajuste de la figura 4, se puede obtener el correspondiente valor de $\tau_1 = (1,311 \pm 0,003)$ s y, con la ecuación (2), el valor de C . Para este valor de resistencia, $C = (4,1 \pm 0,2) \times 10^{-7}$ F, lo cual presenta diferencias significativas con la capacidad medida independientemente. No se considera que haya otra capacidad que no se esté considerando, ya que la diferencia es de dos órdenes de magnitud.

Los valores de τ_1 obtenidos del barrido de resistencias fueron analizados mediante la ecuación (2), donde τ_1 tiene una relación lineal con R , y la pendiente de dicha función lineal es C . Como muestra la figura 5, esta relación no es lineal.

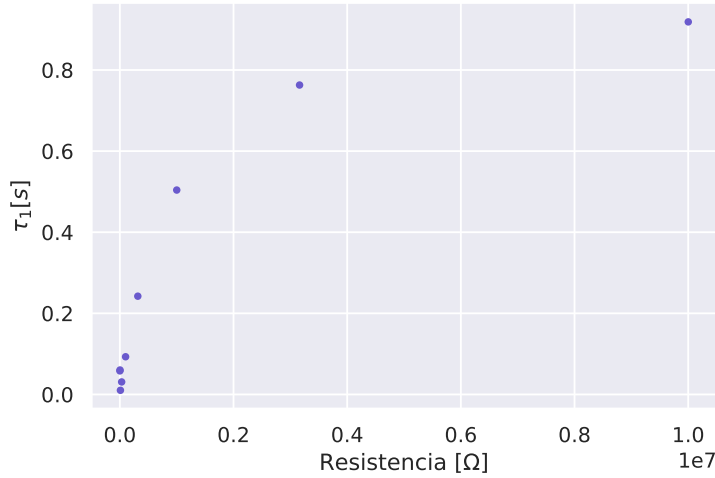


Figura 5: Gráfico de τ_1 en función de R . Los puntos no tienen una distribución lineal, lo cual no concuerda con el modelo dado por la ecuación (2).

Los valores de τ_1 obtenidos de cada ajuste no presentan una distribución lineal, es decir, no siguen el modelo dado por (2). Esto, junto con las diferencias significativas que se encontraron entre los valores de C , lleva a la conclusión de que existen parámetros relevantes que no fueron considerados a la hora de armar el circuito. Un candidato posible es la impedancia del equipo de medición la cual es de un orden semejante a la de los componentes y por lo tanto difícilmente ignorables. Sin embargo no podemos concluir nada sobre esta relación ni sobre el modelo.

2.2. Circuito RL

En esta sección, se estudió la respuesta de un circuito RL en su régimen transitorio. Para lograr esto, se utilizó la configuración representada en la figura 2, con un inductor de $L = (999 \pm 9) \times 10^{-3} \text{ H}$. Se alimentó el circuito con ondas cuadradas para conocer el comportamiento de la corriente cuando se utiliza una inductancia y determinar el tiempo característico τ_2 del sistema.

Se realizó un barrido de resistencias de $(500 \pm 5) \Omega$ a $(5000 \pm 50) \Omega$ para determinar la relación entre τ y R . Para esto, se registró la tensión en función del tiempo y se ajustó por la ecuación (3) y se determinó τ para cada valor de resistencia. En la figura 6 se encuentra un ejemplo de este ajuste, cuando $R = (500 \pm 5) \Omega$.

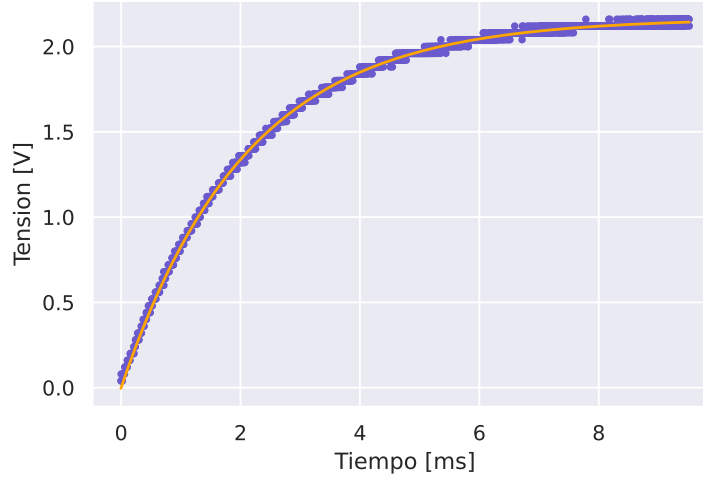


Figura 6: Gráfico de la caída de tensión en el circuito RL con $R = (500 \pm 5) \Omega$. Los residuos presentan una distribución aleatoria

En este caso representativo, el modelo representa correctamente los datos. Entonces, este método es válido para calcular τ_2 mediante la (4). En la figura 7, se muestra la relación entre τ_2 y R . Se realizó un ajuste lineal con la ecuación (4) y se determinó la pendiente, que es $1/L$

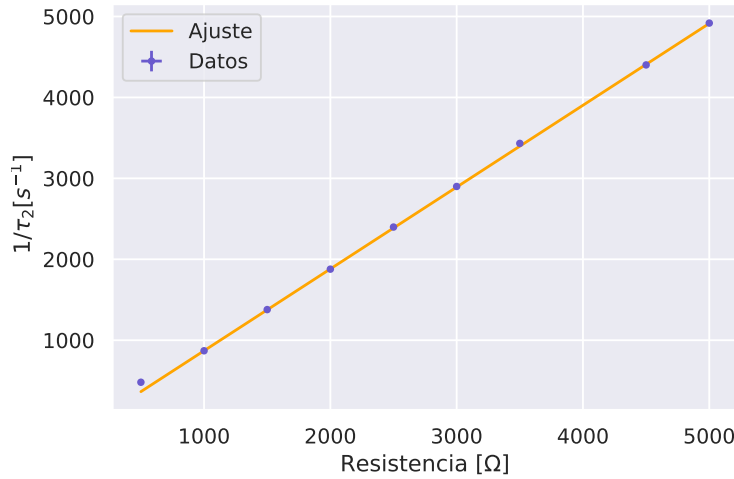


Figura 7: Gráfico de $1/\tau_2$ en función de R . Los residuos del ajuste presentan una distribución aparentemente aleatoria.

Se obtuvo un valor para la inductancia de $L = (989 \pm 2) \times 10^{-3} \text{ H}$, lo cual es consistente con la inductancia medida directamente.

2.3. Circuito RLC

En esta sección, se estudió la respuesta del circuito RLC conformado en la figura 3, conectando en serie un resistor de resistencia variable, un capacitor de $C = (9,39 \pm 0,07) \times 10^{-9} \text{ F}$ y un inductor de $L = (999 \pm 9) \times 10^{-3} \text{ H}$. Se alimentó al sistema con una fuente de ondas cuadradas de tensión $V_0 = (4,96 \pm 0,15) \text{ V}$. Se analizaron experimentalmente los casos subamortiguados (sección 2.3.1) y sobreamortiguados (sección 2.3.2) modificando la resistencia R según los valores dados por las condiciones en (7) y (5).

2.3.1. Caso sobreamortiguado

Para estudiar el caso sobreamortiguado, se registró con un osciloscopio la respuesta del sistema para $R_{sobre} = (30,37 \pm 0,03) \times 10^3 \Omega$. Esta resistencia cumple con la condición dada en (7) para los valores de C y

L utilizados. Se realizó un ajuste de la caída de tensión en el resistor con respecto al tiempo con la ecuación (8) y se obtuvo el gráfico de la figura 8, que muestra el ajuste con sus respectivos residuos.

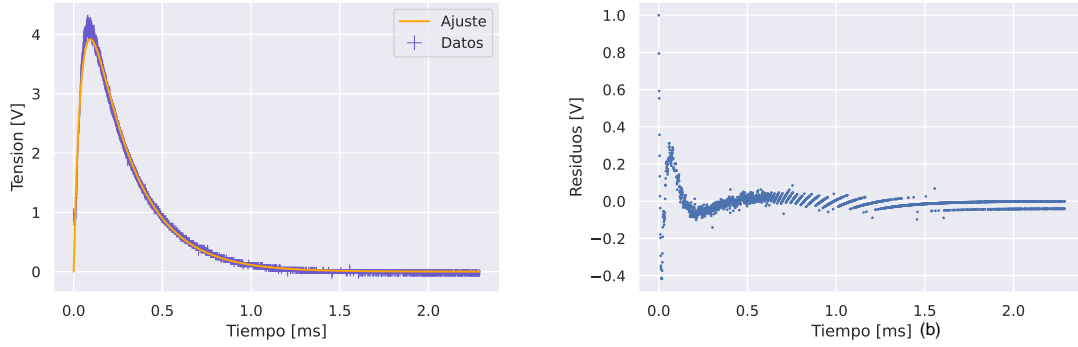


Figura 8: Caso sobreamortiguado del circuito RLC, con $R_{sobre} = (30,37 \pm 0,03) \times 10^3 \Omega$. En (a), los datos y el ajuste con la ecuación (8). En (b), los residuos del ajuste en azul.

Con el ajuste, se obtuvieron valores de $L = (1,18 \pm 0,02) \text{ H}$, $R = (30,5 \pm 0,5) \times 10^3 \Omega$ y $C = (9,4 \pm 0,4) \times 10^{-9} \text{ F}$, lo cual es consistente con lo medido independientemente para la inductancia, resistencia y capacitancia. También se calculó $V_0 = (4,94 \pm 0,04) \text{ V}$, que no presenta diferencias significativas con el valor reportado previamente. Sin embargo, como se puede observar en la figura 8 (b), los residuos del ajuste presentan una distribución no aleatoria, particularmente durante las primeras décimas de milisegundo. Entonces debe considerarse la posibilidad de que existan factores que no se hayan tenidos en cuenta. Esto puede ser apreciado con mayor claridad al aumentarse la resistencia total del sistema. Con $R = (2,0 \pm 0,1) \times 10^6 \Omega$, el resultado es el que muestra a la figura 9.

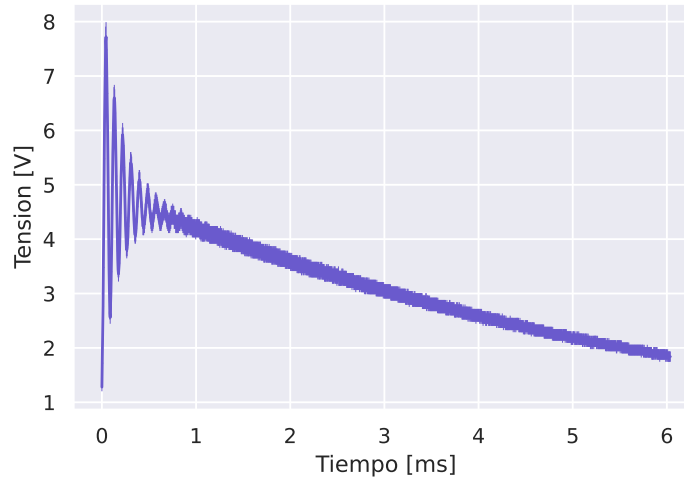


Figura 9: Tensión en función del tiempo para $R = (2,0 \pm 0,1) \times 10^6 \Omega$.

Como se puede apreciar en la figura 9, al aumentar la resistencia aparece una oscilación montada sobre la curva del sobreamortiguado, cuya frecuencia es mucho mas grande (Aproximadamente seis veces mas grande) que la frecuencia observada con el mismo circuito en el régimen subamortiguado. Sin embargo, es esperable que el modelo no funcione para estos valores de resistencia ya que la resistencia de el osciloscopio es de $1 \text{ M}\Omega$ [5] coincidiendo en orden de magnitud con las resistencias a las cuales aparece este fenómeno. Por lo tanto, la aproximación de voltímetro ideal implícita en el razonamiento previo ya no es valida para estos valores de resistencia. Por lo tanto, se considera una hipótesis razonable el hecho de que la capacidad e inductancia interna del osciloscopio actúe como un circuito RLC serie y esa sea la causa de las desviaciones del modelo observadas.

2.3.2. Caso subamortiguado

Para el estudio del caso subamortiguado, se registró la tensión para dos resistencias, $R_1 = (1365 \pm 2) \Omega$ y $R_2 = (866 \pm 2) \Omega$. Estas resistencias cumplen con la condición dada en (5). Se realizó un ajuste de la caída de tensión en el resistor con respecto al tiempo con la ecuación (6). Para R_1 , se obtuvo el gráfico de la figura 10. Este caso es sustancialmente diferente al sobreamortiguado dado que presenta una oscilación, antes inexistente debido al uso de grandes resistencias respecto a L y C .

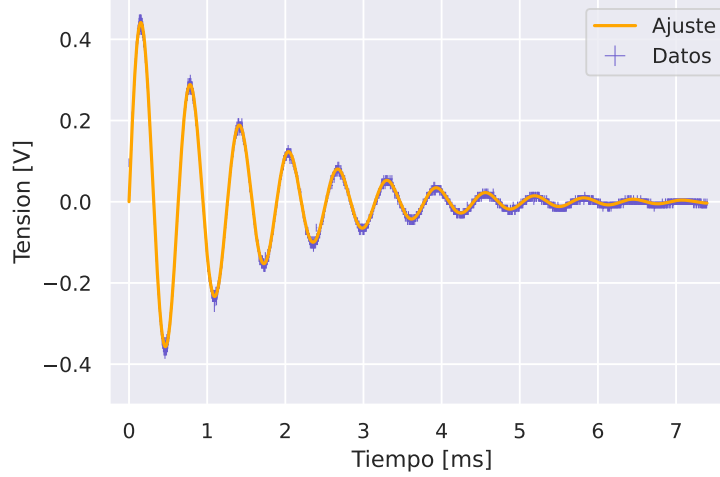


Figura 10: Tensión en función del tiempo para el circuito RLC con $R_1 = (1365 \pm 2) \Omega$. Se observa la tensión oscilando con $\omega = (1,00 \pm 0,02) \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, cuyo módulo decae exponencialmente. Los residuos del ajuste no muestran

En este caso, se obtuvo una inductancia de $L = (1,0 \pm 0,2) \text{ H}$, una $C = (10 \pm 2) \times 10^{-9} \text{ F}$ y un $\omega = (1,00 \pm 0,02) \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Estos resultados no varían significativamente con los valores de L y C medidos directamente.

Para R_2 , se obtuvo el gráfico de la figura 11.

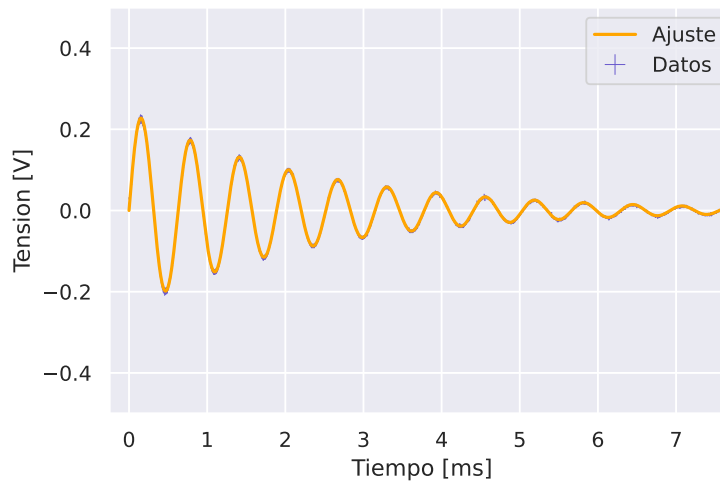


Figura 11: Tensión en función del tiempo para el circuito RLC con R_2 .

Se obtuvo una inductancia de $L = (1,0 \pm 0,3) \text{ H}$, una $C = (10 \pm 3) \times 10^{-9} \text{ F}$ y un $\omega = (1,00 \pm 0,03) \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Al igual que en el primer caso, los resultados no varían significativamente con los valores de L y C medidos directamente. Estos resultados son coherentes dado que al utilizar dos resistencias distintas, ($R_2 < R_1$), se espera que con una resistencia mayor se obtenga un decaimiento de tensión mayor.

3. Conclusión

En este trabajo se estudió el régimen transitorio de circuitos RC, RL y RLC. Para esto, se alimentaron los circuitos con una fuente de ondas cuadradas y se registró la caída de tensión en la resistencia en cada circuito.

En el circuito RC, se realizó un barrido de resistencias y se estudió la relación entre los tiempos característicos obtenidos y las resistencias utilizadas. El tiempo característico encontrado con $R = (316,2 \pm 0,6) \times 10^4 \Omega$ es $\tau_1 = (1,311 \pm 0,003) \text{ s}$. Con este valor de τ_1 y la ecuación (2), se calculó $C = (4,1 \pm 0,2) \times 10^{-7} \text{ F}$, la cual presenta diferencias significativas con la capacidad medida de forma independiente. Además, los valores de τ_1 no presentan una relación lineal con los valores de R . Esto lleva a la conclusión de que el modelo no describe correctamente el circuito armado posiblemente debido a una falta de consideración con respecto a parámetros relevantes del mismo. En cuanto a la validez del modelo dada una correcto aislamiento de dichos parámetros no se puede concluir nada.

En el circuito RL, también se realizó un barrido de resistencias para estudiar la relación dada por (4). En este caso, se realizó un ajuste lineal de $1/\tau_2$ en función de R con la ecuación (4). Así que se puede afirmar que el modelo dado por (4) describe correctamente los datos. Además, se calculó con la pendiente un valor de $L = (989 \pm 2) \times 10^{-3} \text{ H}$, lo cual coincide con el valor medido previamente.

En el circuito RLC, se realizaron mediciones de la tensión en función del tiempo, y se encontraron en cada caso los valores de C y L esperados.

Particularmente en el caso **En cual?** $L = (1,18 \pm 0,02) \text{ H}$, $R = (30,5 \pm 0,5) \times 10^3 \Omega$ y $C = (9,4 \pm 0,4) \times 10^{-9} \text{ F}$, lo cual es consistente con lo medido independientemente para la inductancia, resistencia y capacitancia.

En el caso **Cual?** se midió $L = (1,0 \pm 0,2) \text{ H}$, una $C = (10 \pm 2) \times 10^{-9} \text{ F}$ y un $\omega = (1,00 \pm 0,02) \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Devuelta, los valores no difieren significativamente con los anteriores.

Luego en el caso **Cual?** los valores medidos fueron $L = (1,0 \pm 0,3) \text{ H}$, una $C = (10 \pm 3) \times 10^{-9} \text{ F}$.

Esto y el hecho de que los ajustes representan bien los datos para varios valores de R nos lleva a pensar que el modelo es el correcto para describir este fenómeno. Sin embargo, Para resistencias que se aproximan al orden de los $\text{M}\Omega$ se detectó una desviación significativa con el modelo. No se pudo determinar exactamente su naturaleza aunque se cree que se debe enteramente al equipo de medición usado.

Referencias

- [1] Extech Instruments. *Passive Component LCR Meter User Guide*. URL: <https://www.manualslib.com/manual/1299838/Extech-Instruments-380193.html#manual>.
- [2] Manualslib. *UNI-T UT55 Operating manual*. URL: <https://www.manualslib.com/manual/538639/Uni-T-Ut51-55.html#manual>.
- [3] César Moreno. *Fenómenos transitorios eléctricos*. URL: <http://users.df.uba.ar/moreno/cursos/lab3/apuntes/transitorios.pdf>.
- [4] Tektronix. *AFG1022 Arbitrary/Function Generator Quick Start User Manual*. URL: <https://download.tek.com/manual/AFG1022-Quick-Start-User-Manual-EN.pdf>.
- [5] Tektronix. *TBS1000B and TBS1000B-EDU Series Digital Storage Oscilloscopes User Manual*. URL: https://download.tek.com/manual/TBS1000B-User-Manual-077088601_2.pdf.