선형대수학

- 양자 컴퓨팅의 인사이트를 확장하기 위한 -

2025113574 권나현

2025.10.15.

System Software Lab.

목차

1. Review: 지난 발표(스핀 측정)에서의 의문점
2. 주제 선정 이유
3. 벡터와 브라켓
4. 정규직교 기저
5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합
6. 행렬

1. 지난 발표에서의 의문점

1. "스핀을 특정 방향으로 측정한다"의 정의?
2. 스핀을 구체적으로 어떻게 측정하는가?
3. 스핀을 같은 방향으로 반복 측정했을 때 같은 결과가 나온다고 보장하는 근거?

1. 지난 발표에서의 의문점

1. "스핀을 특정 방향으로 측정한다" 정의?

스핀의 자기 모멘트: 스핀이 만드는 자기적 성질. 스핀 각운동량과 비례

- 전자 스핀의 자기 모멘트가 특정 축을 기준으로 위쪽인지 아래쪽인지를 확인한다는 뜻
- 축: 관찰자가 설정한 (상대적인)방향의 기준

ex) 수직 방향, 수평 방향, x축, y축, z축 등

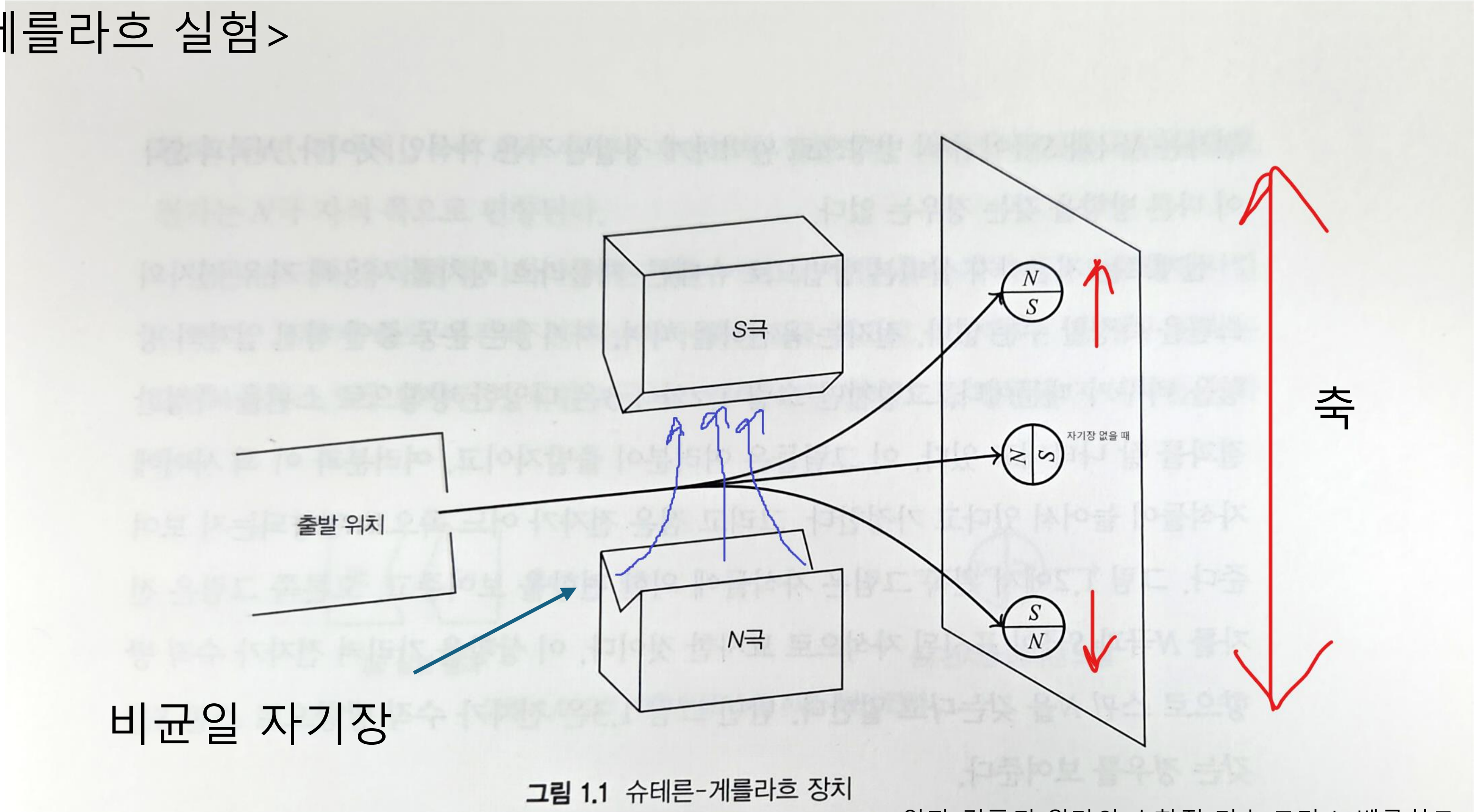
- 실제적인 축의 의미: 실험 장치가 만든 자기장의 방향

➔측정 결과: 설정한 축을 기준으로 ↑ or ↓ 2가지

1. 지난 발표에서의 의문점

2. 스핀을 구체적으로 어떻게 측정하는가?

<슈테른-게를라흐 실험>



[양자 컴퓨터 원리와 수학적 기초(크리스 베른하트)]

1. 지난 발표에서의 의문점

3. 스핀을 같은 방향으로 반복 측정했을 때 같은 결과가 나온다고 보장하는 근거?

측정 전 스핀은 측정 축을 기준으로 위/아래 화살표 방향이 정해져 있지 않음

-> “중첩 상태”

스핀을 측정하면 스핀은 측정 축을 기준으로 확정된 상태(↑ or ↓)로 바뀐다.

-> “고유 상태로 붕괴”

Ex) z축 방향 측정에서 “↑ " 가 측정되면 전자의 스핀은 z축을 기준으로↑ 상태로 바뀜 -> 같은 축 반복 측정 시 계속 같은 결과

➔측정했던 축이 아닌 다른 축으로 측정 시 그 축에 대한 ↑/↓ 결과는 확률적으로 결정된다.

Ex) 이전 측정에서 z축 기준 “↑ " 였던 상태는 x축이나 y축 기준으로는 중첩 상태이다. -> 새로운 측정 결과에 따라 상태 또 붕괴

1. 지난 발표에서의 의문점

3. 스핀을 측정하면 스핀은 확정된 상태로 바뀐다.

그렇다면 스핀을 측정할 때 무엇이 스핀을 확정된 상태로 바꾸는가?

-> 측정 장치와 입자 사이의 상호작용.

Ex) 자기장과 자기모멘트의 상호작용

(슈테른-게를라흐 장치 - 불균일한 자기장)

2. 주제 선정 이유

- 선형대수학: 양자역학의 기반. 전자 스핀을 수학적으로 모델링하고, 이를 통해서 큐비트를 정의하는 데 필수적인 도구
- 벡터와 행렬 계산 방법

3. 벡터와 브라켓

- 정의 -

- 벡터: 숫자들의 목록
- 차원: 목록 내 숫자의 개수
- 세로목록: 열벡터 및 켓(ket)
- 가로목록: 행벡터 및 브라(bra)
- 성분: 벡터를 구성하는 숫자

양자역학에서 입자의 상태는 벡터공간의 한 벡터로 표현된다.

<브라-켓 표기법>

양자역학에서 양자 상태를 표기하는 표준 표기법

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

켓-A

N차원 켓

$$\langle A| = \begin{pmatrix} A_1^*, & A_2^*, & A_3^*, & A_4^*, & \cdots, & A_N^* \end{pmatrix}$$

브라-A

N차원 브라

3. 벡터와 브라켓

* 벡터의 다이어그램

2차원, 3차원 벡터 → 화살표

Ex

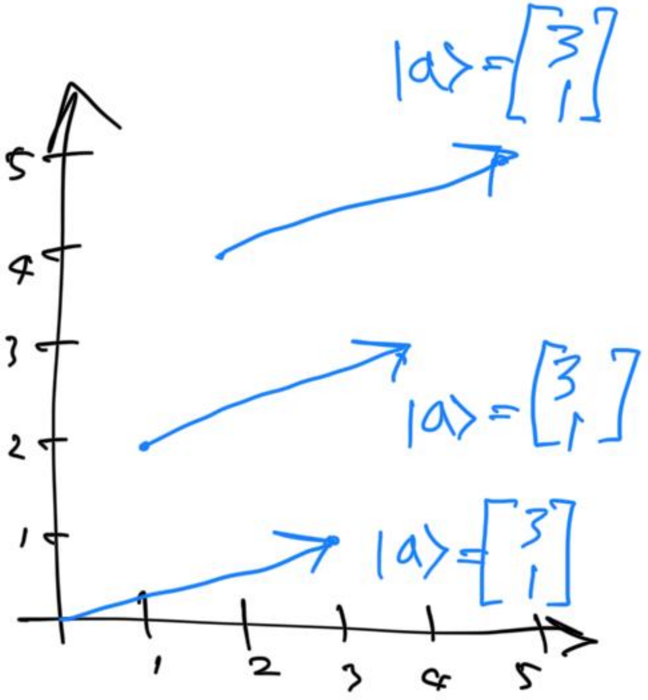
$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 → 시작점 ~ 끝점 x좌표 변화

1 → 〃 y좌표 변화

시작점이 (a, b)이면 끝점좌표 : $(a+3, b+1)$

시작점이 원점이면 끝점좌표 = 벡터성분



3. 벡터와 브라켓

* 벡터의 길이

→ 시작점~끝점 거리, 각 성분의 제곱의 합의 제곱근.

· 표기 : $\||a\rangle|$ (켓 $|a\rangle$의 길이)

Ex

$|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 일때 → $\||a\rangle| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 일때 → $\||a\rangle| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

· 단위벡터 : 길이가 1인 벡터. 큐비트가 이것으로 표현됨.

3. 벡터와 브라켓

* 실수배(스칼라배)

→ 벡터 × 숫자(스칼라) . 벡터의 각 성분에 숫자 곱함

Ex

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times c \Rightarrow c|a\rangle = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$$

→ (어떤 벡터) × (양수 c) → 벡터 길이 c배로 늘어남.

→ 같은 방향, 길이 다른 벡터 만들어짐.

벡터 $|a\rangle$ × 길이의 역수 = 단위벡터

Ex

$|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이면 $\||a\rangle\| = \sqrt{10}$

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

($|a\rangle$와 같은 방향 가리키는) ⇒ 단위벡터.

$$\||u\rangle\| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = 1$$

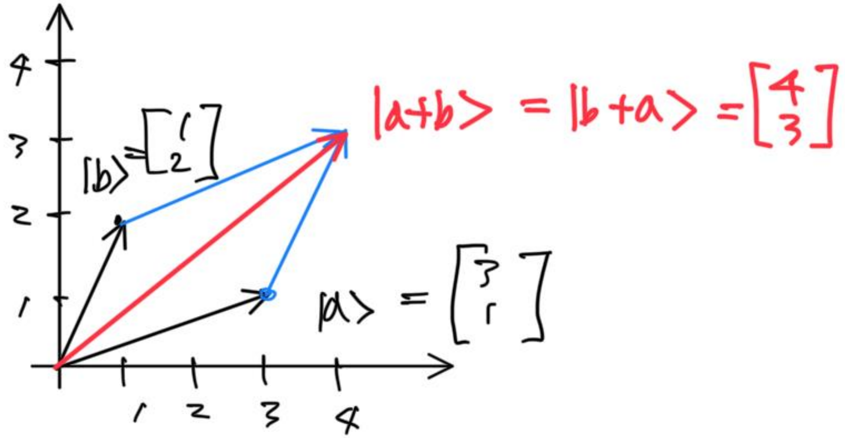
3. 벡터와 브라켓

조건
같은 유형(켓)
차원 같음

* 벡터 덧셈

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad |a+b\rangle = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

· 평행사변형 법칙



3. 벡터와 브라켓

* 직교 벡터

· $\| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 = \| |a+b\rangle \|^2$ 인 경우에만 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 서로 수직.

(피타고라스 정리)

· 직교 = 수직

* 브라에 켓 곱하기 (브라켓 표기법)

n차원의 $\langle a|$, $|b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$\langle a| = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \langle a|b\rangle = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

= 내적 = 점곱 (선형대수학)

3. 벡터와 브라켓

※ 브라켓과 길이

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \langle a| = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\langle a|a\rangle = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

$$||a\rangle| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

$$\left(||a\rangle|^2 = \langle a|a\rangle \right)$$

ex $|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 라면

$$\langle a|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3^2 + 1 = 10$$

$$||a\rangle| = \sqrt{10}$$

→ $|a\rangle$는 $\langle a|a\rangle = 1$일 [illegible] 단위벡터.

3. 벡터와 브라켓

* 브라켓과 직교

$\langle a|b\rangle = 0$ 일때만 $|a\rangle, |b\rangle$ 서로 직교.

(∵) 2차원 케빈 경우.

$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $|b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $|a\rangle + |b\rangle = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$

→ $|a\rangle + |b\rangle$ 길이의 제곱 :

$$\left||a\rangle + |b\rangle\right|^2 = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2$$

$$= (a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) + 2(\underbrace{a_1b_1 + a_2b_2}_{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}})$$

$$= \left||a\rangle\right|^2 + \left||b\rangle\right|^2 + 2\langle a|b\rangle$$

→ $\left||a\rangle + |b\rangle\right|^2$ 는 $\underline{2\langle a|b\rangle = 0}$ 일 때만 $\left||a\rangle\right|^2 + \left||b\rangle\right|^2$ 와 같음.

→ 두 벡터 $|a\rangle$와 $|b\rangle$는 $\langle a|b\rangle = 0$ 일때만 서로 직교

4. 정규직교 기저

* 정규직교 기저

(ortho normal)

(직교) (정규화) → 길이가 1

Ex) 2차원 켓 →

구성

1개의 정규직교 기저 ← 서로 직교하는 2개의 단위 켓

(n차원 켓 → 1개의 정규직교 기저 ← 서로 직교하는 n개 단위 켓)

· $\mathbb{R}^2$: 모든 2차원 벡터들의 집합

서로 직교

· $\mathbb{R}^2$에 대한 정규직교 기저 : 단위벡터 $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ 구성

주어진 2개의 켓이 정규직교 이루는 조건 → 확인

①. 둘다 단위벡터인지

②. 서로 직교하는지

→ 브라켓

($\langle b_1|b_1\rangle=1$, $\langle b_2|b_2\rangle=1$, $\langle b_1|b_2\rangle=0$ 인지)

4. 정규직교 기저

· 표준 기저 : $|b_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $|b_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ 정규직교 조건 만족 여부 확인

$$\left(\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1+0 = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0+1 = 1, \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0+0 = 0 \end{aligned} \right)$$

· 정규 직교 기저 → 무한히 많음.

<u>Ex</u>

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \text{ 와 } \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

4. 정규직교 기저

※ 스핀측정 -> 처음 기준축 측정 ⟶ 표준기저 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 사용

측정 장치의 회전 → 새로운 정규직교 기저.

표기법 -> 벡터를 화살표로 표현

$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (화살표 방향 ⇒ 스핀방향) $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$|\rightarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\{|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle\}$

3개의 기저

$|\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad |\swarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\{|\nearrow\rangle, |\swarrow\rangle\}$

↓

모두 정규직교 기저.

4. 정규직교 기저

성질

$$\begin{pmatrix} \langle \uparrow | \uparrow \rangle = 1 & \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1 & \langle \uparrow | \downarrow \rangle = 0 & \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0 \\ \langle \rightarrow | \rightarrow \rangle = 1 & \langle \leftarrow | \leftarrow \rangle = 1 & \langle \rightarrow | \leftarrow \rangle = 0 & \langle \leftarrow | \rightarrow \rangle = 0 \\ \langle \nearrow | \nearrow \rangle = 1 & \langle \swarrow | \swarrow \rangle = 1 & \langle \nearrow | \swarrow \rangle = 0 & \langle \swarrow | \nearrow \rangle = 0 \end{pmatrix}$$

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

※ 기저 벡터들의 선형 조합으로서의 벡터

· 가중합 : 위와 정규직교 기저 주어졌을 때 켓을 정규직교 벡터들의 가중합(weighted sum)으로 표현 가능.

Ex $\mathbb{R}^2$ 공간 내 임의의 벡터 $|v\rangle$

= $|\uparrow\rangle$의 배수와 $|\downarrow\rangle$의 배수의 합

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 \begin{array}{c} (\uparrow) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + x_2 \begin{array}{c} (\downarrow) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$x_1 = c$, $x_2 = d$
(유일한 해)

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 |\uparrow\rangle + x_2 |\downarrow\rangle$$

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

Q. $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 |\rightarrow\rangle + x_2 |\leftarrow\rangle$ 성립하는가?

x_1 구하기

$\times \langle \rightarrow |$

방법: 기저 → 2차원 열벡터 → 1차 연립방정식(미지수 2개) 브라와 켓 사용

$$\langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \langle \rightarrow | \left(x_1 |\rightarrow\rangle + x_2 |\leftarrow\rangle \right)$$

$$= x_1 \underbrace{\langle \rightarrow | \rightarrow \rangle}_{1} + x_2 \underbrace{\langle \rightarrow | \leftarrow \rangle}_{0}$$

$$\therefore x_1 = \langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} c - \frac{1}{\sqrt{2}} d$$

$$= \frac{c-d}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x_1 = \frac{c-d}{\sqrt{2}}$$

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

x_2 구하기 Q

$\times \langle \leftarrow |$

$$\langle \leftarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 \langle \leftarrow | \rightarrow \rangle + x_2 \langle \leftarrow | \leftarrow \rangle$$

$$= x_1 0 + x_2 1$$

$$\therefore x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} c + \frac{1}{\sqrt{2}} d = \frac{c+d}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{c-d}{\sqrt{2}} | \rightarrow \rangle + \frac{c+d}{\sqrt{2}} | \leftarrow \rangle$$

(기저벡터에 스칼라값 곱한 것들) = 벡터들의 가중합

주의: 스칼라값은 무리수일 수 있음.

$\Downarrow$ Ex $c = -3,\ d = 1 \Rightarrow \frac{(c-d)}{\sqrt{2}},\ \frac{(c+d)}{\sqrt{2}}$: 모두 무리수.

기저벡터의 선형조합

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

⇒ n차원 확장.

n차원 켓 $|v\rangle$, 정규직교기저 $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots, |b_n\rangle\}$ 주어짐.

$|v\rangle$를 기저벡터들의 선형조합으로 나타낼 수 있음? → 가능.

$$|v\rangle = x_1|b_1\rangle + x_2|b_2\rangle + \cdots + x_i|b_i\rangle + \cdots + x_n|b_n\rangle$$

유일한 해

서로 다른 정규직교 기저 → 스핀측정에 서로 다른 방향 선택

· 확률진폭 : $\langle b_i | v \rangle$

· $|v\rangle$가 b_i로 바뀔 확률 : $\langle b_i | v \rangle^2$

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

* 순서 기저

: 벡터의 순서가 있는 기저

둥근 괄호

Ex 기저 : $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots, |b_n\rangle\}$ 일 때 순서기저 : $(|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots, |b_n\rangle)$

Ex $\mathbb{R}^2$ 에서 표준기저 : $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} = \{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$ → 집합

순서기저 : $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle) \neq (|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle)$

Ex 표준기저 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ $\xrightarrow{\text{대응}}$ 수직방향 전자스핀 측정

순서기저 $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ ⟶ S극자석이 측정장치 위일 시 스핀 측정

$(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ ⟶ 장치 180° 뒤집음

5. 벡터: 기저 벡터들의 선형 조합

* 벡터의 길이

preview 켓 $|v\rangle$, 정규직교기저 $[|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots, |b_n\rangle]$ 주어짐

→ $|v\rangle$를 기저 벡터들의 선형조합으로 사용.

$$\rightarrow |v\rangle = \langle b_1|v\rangle |b_1\rangle + \langle b_2|v\rangle |b_2\rangle + \cdots + \langle b_n|v\rangle |b_n\rangle$$

간단히 $\rightarrow |v\rangle = c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle + \cdots + c_n|b_n\rangle$

v의 길이 $\big||v\rangle\big|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$

유도

$$\big||v\rangle\big|^2 = \langle v|v\rangle$$

$\langle v| = c_1\langle b_1| + c_2\langle b_2| + \cdots + c_n\langle b_n|$ 이므로

$$\langle v|v\rangle = (c_1\langle b_1| + c_2\langle b_2| + \cdots + c_n\langle b_n|)(c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle + \cdots + c_n|b_n\rangle)$$

$$= c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$$

6. 행렬

* 행렬

: 직사각형 형태의 숫자 배열

· $m \times n$ 행렬 : m 개의 행, n개의 열 갖는 행렬 M

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

2×3 행렬 $\qquad$ 3×2 행렬

→ 브라 : 1개의 행 (행행렬) $\quad$ 켓 : 1개의 열 (열행렬)

· M^T : M의 전치행렬 (행 ↔ 열)

Ex

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

→ 열벡터 : 하나의 열만 갖는 행렬

행벡터 : 하나의 행만 갖는 행렬

$$\langle a| = |a\rangle^T, \quad |a\rangle = \langle a|^T$$

6. 행렬

· 행렬의 곱 : AB

$\uparrow$ 브라 $\uparrow$ 켓

Ex

$$A = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \end{bmatrix} \left(\begin{array}{l} \langle a_1| = [1\ \ -4\ \ 2] \\ \langle a_2| = [2\ \ 3\ \ 0] \end{array} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle \end{bmatrix} \left(b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$AB = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & \langle a_2|b_2\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & -16 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$$

6. 행렬

· 브라켓 곱 계산의 조건 : A에서 브라의 차원 = B의 켓의 차원

· $AB \neq BA$

· $m \times r$ 행렬 A, $r \times n$ 행렬 B

→ A: r차원 브라, B: r차원 켓

$$A = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \\ \langle a_n| \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle & \cdots & |b_n\rangle \end{bmatrix}$$

곱 AB: i번째 행과 j번째 열 성분이 $\langle a_i|b_j\rangle$인 $m \times n$ 행렬.

$$AB = \begin{bmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle & \cdots & \langle a_1|b_n\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \langle a_m|b_1\rangle & \langle a_m|b_2\rangle & \cdots & \langle a_m|b_n\rangle \end{bmatrix}$$

BA → 브라 차수 = 켓 차수 이어야만 계산 가능.
$(m=n)$

→ 행렬 곱셈은 교환법칙 성립 X.

6. 행렬

· 정방행렬 : 행 수 = 열 수

· 정방행렬의 주대각선 : 행렬의 왼쪽 상단에서 오른쪽 하단으로 그어지는 대각선에 위치하는 성분들로 구성.

· 항등행렬 : 주대각선의 성분이 모두 1이고 다른 성분은 모두 0인 정방행렬

I_n ($n \times n$ 항등행렬)

Ex) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ...

- A가 $m \times n$ 행렬일 때 $I_m A = A I_n = A$

· 행렬 사용 시 변수, 계수 포함하는 계산이 편리함.

6. 행렬

* 행렬 계산

- n차원 켓의 집합 $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots, |b_n\rangle\}$이 정규직교 기저인가?
  - → 켓들이 단위 벡터인지 확인
  - → 켓들이 서로 직교하는지 확인

  → ① 브라, 켓 사용하는 방법
  ② 행렬 사용하는 방법 (계산 쉬움)

- $n \times n$ 행렬 $A = [|b_1\rangle\ |b_2\rangle \cdots |b_n\rangle]$의 전치행렬 A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix} [|b_1\rangle\ |b_2\rangle \cdots |b_n\rangle]$$

$$= \begin{bmatrix} \langle b_1|b_1\rangle & \langle b_1|b_2\rangle & \cdots & \langle b_1|b_n\rangle \\ \langle b_2|b_1\rangle & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \langle b_n|b_1\rangle & \langle b_n|b_2\rangle & \cdots & \langle b_n|b_n\rangle \end{bmatrix}$$

주대각선이 모두 1

주대각선 이외 성분이 모두 0

- 켓이 단위벡터인지 확인 → 주대각선 성분만 계산하면 됨.
- 〃 서로 직교하는지 〃 → 주대각선 이외 성분 계산

감사합니다.