Г-ФУНКЦИЯ и связанные с ней функции и числа

ЗАДАЧА: упростить суммы

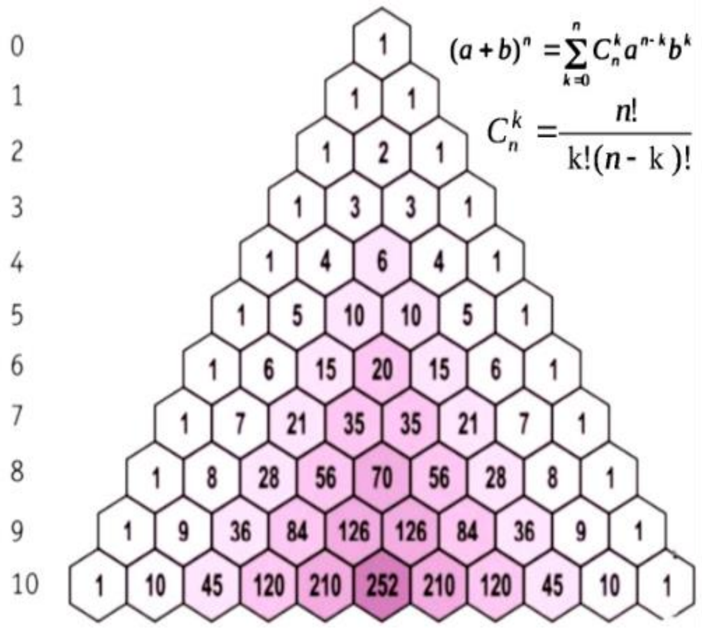
Биноминальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (1)$$

и факториалы были известны математикам задолго до открытия дифференциального исчисления.

Таблица Треугольник Паскаля

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



Однако распространение этих функций с целочисленного переменного на действительное (комплексное) потребовало развитого аналитического аппарата. Эта задача была решена Эйлером, который ввел и исследовал ***гамма-функцию*** $\Gamma(x)$, для которой

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!},$$

Первая формула, предложенная Эйлером для гамма-функции, имела вид

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right\}.$$

Эта формула может быть записана в виде

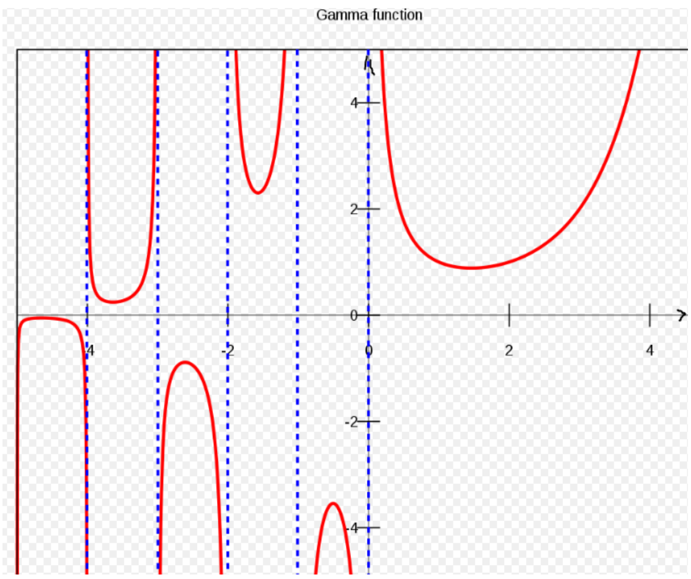
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}\right\}, \qquad (2)$$

где

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

$$\boldsymbol{\gamma = 0,5772156649}\ldots.$$

Постоянная $\boldsymbol{\gamma}$ называется ***постоянной Эйлера***.



Для гамма-функции получены интегральные представления, одно их них

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{3}$$

принимается за определение гамма-функции.

При больших значениях переменной справедлива ***формула Стирлинга***

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \qquad x \to +\infty. \tag{4}$$

Для уточнения формулы используют ***ряд Стирлинга***

$$\ln\Gamma(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{12x} + \frac{1}{720x^3} - \cdots.$$

Для приближенного вычисления факториала во многих случаях достаточно использовать формулу

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$

Гамма-функция $\Gamma(x)$ удовлетворяет трем функциональным соотношениям:

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (*формула приведения*),

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ (*формула дополнения*),

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}\Gamma(2x),$$

которые играют важную роль при различных преобразованиях и вычислениях, связанных с этой функцией.

Проверить формулы справа.

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$
$$\Gamma(5) = 4! = 24$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x).$$

Факториальные степени (символ Похгаммера).

Убывающий факториал определяется как

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$

возрастающий факториал определяется

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Значение обоих факториалов принимается равным 1 для $n = 0$.

Необходимо проявлять осторожность при интерпретации символа Похгаммера $(x)_n$. В зависимости от контекста, символ Похгаммера

$(x)_n$ может представлять убывающий факториал $x^{\underline{n}}$ или возрастающий факториал $x^{\overline{n}}$, определённые выше.

В комбинаторике символ $(x)_n$ используется для представления убывающего факториала. В теории специальных функций (в частности, гипергеометрической функции) символ Похгаммера $(x)_n$ используется для представления возрастающего факториала.

Факториальные степени можно расширить на вещественные (комплексные) значения n с помощью гамма-функции:

$$x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{и} \quad x^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

Эйлер ввел и исследовал и ***бета-функцию*** $B(x, y)$, связанную с гамма-функцией соотношением

$$\boldsymbol{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}.$$

Подобно тому, как гамма-функция является обобщением факториала, бета-функция является обобщением биномиальных коэффициентов

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1, k+1)}}.$$

Бета-функция удовлетворяет двумерному разностному уравнению

$$B(x, y) - B(x+1, y) - B(x, y+1) = 0.$$

Биномиальные коэффициенты для рациональных значений

Область определения биномиальных коэффициентов можно расширить, а именно:

Def: функция

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

определенная для $\forall a \in R, \ k \in N \cup \{0\}$,

называется **биномиальным коэффициентом**.

Для $\mathbf{a \in Z_+}$ оба определения для биномиального коэффициента совпадают.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{3!4 \cdot 5}{3!2} = 10$$

$$C_2^5 = 0$$

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} = \frac{-2(-3)(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}{4!} = \frac{13-9\sqrt{2}}{12}$$

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Обобщенный гипергеометрический ряд – это степенной ряд от z с $m+n$параметрами, которые определяются через возрастающие факториальные степени следующим образом:

$$F\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{k}} \ \dots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \ \dots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.$$

Чтобы избежать деления на ноль, ни одно b не может быть нулем или целым отрицательным. В остальном все a и b могут быть любыми. Может быть использована однострочная запись $F(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; z)$, вместо F также записывают${}_mF_n$.

Многие важные функции представляют собой частные случаи гипергеометрического ряда. Например,

$$F\left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

-геометрический ряд

$$F\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad \text{где } 1^{\overline{k}} = k!$$

$$F\left(\begin{matrix} a, 1 \\ 1 \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} a^{\overline{k}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k} \binom{a+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^a}$$

$$F\left(\begin{matrix} -a, 1 \\ 1 \end{matrix}\middle| -z\right) = (1+z)^a$$ — *биномиальная теорема*

Отрицательное целое число в качестве верхнего параметра превращает бесконечный ряд в конечный, поскольку$(-a)^{\overline{k}} = 0$ при $k > a \geqslant 0$ и целом a.

Бином Ньютона:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^m x^m + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m.$$

Замечание. Функция $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ является ***производящей функцией*** для биномиальных коэффициентов.

Систематические методы пересчета основаны на понятии производящей функции.

Пусть $x = 1$. Получим

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Пусть $x = -1$:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Складывая (вычитая) два последних равенства и деля результат на 2, получим

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}, \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ четно,}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ нечетно}$$

Свойства чисел C_n^m (биномиальных коэффициентов).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$. **2.** $C_n^0 = C_n^n = 1$. **3.** $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Вопросы сходимости бесконечных гипергеометрических рядов рассматриваются в теории функции комплексного переменного. Для исследования сходимости ряда можно применить, например, признак Даламбера.

Еще один ряд

$$F\left({1 \atop b,1}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(b-1)!}{(b-1+k)!}\frac{z^k}{k!} = I_{b-1}(2\sqrt{z})\frac{(b-1)!}{z^{(b-1)/2}}$$

Эта функция I_{b-1} называется “модифицированной функцией Бесселя” порядка $b-1$. Частный случай $b=1$ дает нам функцию $F\left({1 \atop 1,1}\middle|z\right) = I_0(2\sqrt{z})$, которая представляет собой интересный ряд $\sum_{k\geqslant 0} z^k/k!^2$.

- Полином Лежандра:

$$P_n(x) = F(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2})$$

$$\boldsymbol{P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)}$$

$$\boldsymbol{P_0(1) = 1,\quad P_n(-1) = (-1)^n,\ P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots (2n)},\ P_{2n+1}(0) = 0.}$$

Ряд вида

$$F\left({a, b \atop c}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}} z^k}{c^{\overline{k}}\, k!}$$

называется **гауссовым гипергеометрическим рядом** ($c \neq 0, -1, -2, \dots 0$). Одним из важных частных случаев является ряд

$$\ln(1+z) = zF\left({1, 1 \atop 2}\middle| -z\right) = z\sum_{k\geqslant 0} \frac{k!\,k!}{(k+1)!}\frac{(-z)^k}{k!} =$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots .$$

Если $\boldsymbol{c = -m - l}$, где $m, l = 0,1,2, \dots$, то имеем

$$\boxed{F(-m, b; -m-l; z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{(-m-l)^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.}$$

Отрицательное целое число в качестве верхнего параметра превращает бесконечный ряд в конечный, поскольку

$(\boldsymbol{-m})^{\overline{k}} = -m(-m+1)\dots(-m+m-1)(-m+(m+1)-1)\dots(-m+k-1) = \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{k} > m \geq 0$.

Большой класс сумм может быть записан в виде гипергеометрических рядов

для любознательных

habr.com/ru/company/wolfram/blog/258189/

Стивен Вольфрам

История и будущее специальных функций

Перевод статьи Стивена Вольфрама (Stephen Wolfram) "The History and Future of Special Functions".

Выражаю огромную благодарность Кириллу Гузенко за помощь в переводе.

*Статья представляет собой запись выступления, сделанного на Wolfram Technology Conference 2005 в Шампейне, штат Иллинойс, как часть мероприятия в честь **60-летия Олега Маричева**.*

Гипергеометрическая теорема Гаусса.

$$F\left({a, b \atop c}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad c \neq 0, -1, -2, \dots, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a+b). \quad (5)$$

Формула (5) справедлива и при некоторых более слабых ограничениях на параметры.

Некоторые соотношения, содержащие биномиальные коэффициенты

Определим зависящий от x многочлен $\binom{x}{k}$ (или C_x^k) при помощи равенства

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-x)} = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), \end{cases}$$

k=1,2,3,…

Справедливы соотношения

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{-x(-x+1)(-x+2)\dots(-x+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}$$

$$F\left(\begin{matrix}1,-x\\-y\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{k}}(-x)^{\overline{k}}}{(-y)^{\overline{k}}}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}}{(-1)^k \frac{(-y)^{\overline{k}}}{k!}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} z^k. \qquad (6)$$

Гипергеометрические ряды могут быть использованы для того, чтобы **вычислить в замкнутом виде некоторые суммы**, содержащие биномиальные коэффициенты. При этом используются следующие методы:

- придание специальных значений z,
- выбор в качестве a или b отрицательных целых чисел,
- сравнение коэффициентов при одинаковых степенях z в различных выражениях для гипергеометрического ряда.

Тогда из (6) при z=1 в силу формулы (5) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\Gamma(-y)\Gamma(x-y-1)}{\Gamma(-y-1)\Gamma(x-y)} = \frac{y+1}{y-x+1}.$$

Формула Куммера.

$$F\left(\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix}\middle| -1\right) = \frac{2^{-a}\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-b+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{-a}{k}\binom{-b}{k}}{\binom{b-a-1}{k}}. \qquad (7)$$

Если положить $a=-m$, где m – целое число, то получим

$$F\left(\begin{matrix}-m,-x\\1-m+x\end{matrix}\middle|-1\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}\binom{x}{k}}{\binom{m-x-1}{k}}=\frac{2^m\Gamma(1-m+x)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+x-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)}.$$

Таблица Десять главных тождеств с биномиальными коэффициентами

$\binom{n}{k}$	$=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$,	целые $n \geqslant k \geqslant 0$	*Факториальное представление*
$\binom{n}{k}$	$=\binom{n}{n-k}$,	целое $n \geqslant 0$, целое k	*Симметрия*
$\binom{r}{k}$	$=\dfrac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$,	целое $k \neq 0$	*Внесение/ вынесение*
$\binom{r}{k}$	$=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$,	целое k	*Сложение/ разложение*
$\binom{r}{k}$	$=(-1)^k\binom{k-r-1}{k}$,	целое k	*Верхнее обращение*
$\binom{r}{m}\binom{m}{k}$	$=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$,	целые m, k	*Триномиальный вариант*
$\sum_k \binom{r}{k}x^k y^{r-k}$	$=(x+y)^r$,	целое $r \geqslant 0$, или $\lvert x/y\rvert < 1$	*Биномиальная теорема*
$\sum_{k\leqslant n}\binom{r+k}{k}$	$=\binom{r+n+1}{n}$,	целое n	*Параллельное суммирование*
$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m}$	$=\binom{n+1}{m+1}$,	целые $m, n \geqslant 0$	*Верхнее суммирование*
$\sum_k\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$	$=\binom{r+s}{n}$,	целое n	*Свертка Вандермонда*

Для формул параллельного суммирования и свертки Вандермонда справедливы соотношения

$$\binom{r+n}{n}F\left(\begin{matrix}1,-n\\-n-r\end{matrix}\middle|1\right)=\binom{r+n+1}{n},$$

$$\binom{s}{n}F\left(\begin{matrix}-r,-n\\s-n+1\end{matrix}\middle|1\right)=\binom{r+s}{n}.$$

Свертка Вандермонда – сумма (по всем целым k) произведения двух биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы постоянны, а нижние при любом k имеют одну и ту же сумму, представляет собой биномиальный коэффициент, получающийся суммированием нижних и верхних индексов.

Биномиальные коэффициенты $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}},\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{1}},\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}},\ldots$ являются ***целозначными многочленами*** от x, то есть принимают целые значения при целых x. Более того, они образуют базис целозначных многочленов, в котором все целозначные многочлены степени n выражаются как линейные комбинации $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{k}}$, $k=0,1,\ldots,n$, с целыми коэффициентами. Запишите несколько первых элементов этого базиса.

$$\binom{x}{0} = 1, \qquad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\binom{x}{3} = \cdots, \binom{x}{4} = \cdots.$$

Например, $3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = -1 \cdot \binom{x}{0} + \mathbf{5} \cdot \binom{x}{1} + \mathbf{8} \cdot \binom{x}{2} + \mathbf{18} \cdot \binom{x}{3}$

Указание. 1) Данный многочлен записали в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами

$$3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \alpha_1 \cdot \binom{x}{0} + \alpha_2 \cdot \binom{x}{1} + \alpha_3 \cdot \binom{x}{2} + \alpha_4 \cdot \binom{x}{3}$$

2) Представили биномиальные коэффициенты в виде многочленов.
3) Сравнили коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получили систему линейных алгебраических уравнений.
4) Решили систему линейных алгебраических уравнений.
5) Записали ответ.

Алгоритмы вычисления

Биномиальные коэффициенты можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

если на каждом шаге n хранить значения $\binom{n}{k}$ при k=0,1,…, n. Этот алгоритм особенно эффективен, если нужно получить все значения $\binom{n}{k}$ при фиксированном n. Алгоритм требует $O(n)$ памяти ($O(n^2)$ при вычислении всей таблицы биномиальных коэффициентов) и $O(n^2)$ времени (в предположении, что каждое число занимает единицу памяти и операции с числами выполняются за единицу времени).

При фиксированном значении k биномиальные коэффициенты могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

с начальным значением $\binom{k}{k} = 1$.

Если требуется вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$ при фиксированном значении n, можно воспользоваться формулой

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

при начальном условии $\binom{n}{0} = 1$.

???????Количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств? *(числа Стирлинга второго рода)*

???????Количество перестановок порядка n с k циклами? (числа Стирлинга первого рода (без знака))

ЧИСЛА СТИРЛИНГА. Рассмотрим производящую функцию – убывающий факториал (здесь $(x)_n$ – символ Похгаммера)

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

которая для начальных значений nимеет следующий вид:

$$(x)_0 = 1, (x)_1 = x, (x)_2 = x(x-1) = x^2 - x,$$
$$(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Обозначим через $s(n,k)$ коэффициент при x^k в разложении

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \quad s(0,0) = 1.$$

Целые числа $s(n,k)$ называются *числами Стирлинга первого рода (со знаком)*. Как видно из определения, числа имеют чередующийся знак. Их абсолютные значения, называемые ***числами Стирлинга первого рода без знака***, задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами, и обозначают $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Первые числа Стирлинга со знаком: $s(n,k)$

n\k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	−1	1				
3	0	2	−3	1			
4	0	−6	11	−6	1		
5	0	24	−50	35	−10	1	
6	0	−120	274	−225	85	−15	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга первого рода:

$$\boldsymbol{s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0} < k < n,$$
$$\boldsymbol{s(0,0) = 1}, \quad \boldsymbol{s(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{s(0,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k} > 0.$$

Например, $s(4,3) = s(3,2) - 3s(3,3) = -3 - 3 = -6$.

Выразим степени x^n через убывающие факториалы:

$$x^0 = 1, x^1 = x, x^2 = x(x-1) + x,$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x,$$

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x, \qquad \text{и т. д.}$$

Обозначим через $S(n,k)$коэффициент при $(x)_k$ в разложении x^n такого вида

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k\,, \quad S(0,0) = 1.$$

Целые числа $S(n,k)$ называются *числами Стирлинга второго рода*. Также обозначают $\left\{ n \atop k \right\}$. В комбинаторике – количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств.

$S(n,k)$ Треугольник Стирлинга для числа подмножеств

n	$\left\{ n \atop 0 \right\}$	$\left\{ n \atop 1 \right\}$	$\left\{ n \atop 2 \right\}$	$\left\{ n \atop 3 \right\}$	$\left\{ n \atop 4 \right\}$	$\left\{ n \atop 5 \right\}$	$\left\{ n \atop 6 \right\}$	$\left\{ n \atop 7 \right\}$	$\left\{ n \atop 8 \right\}$	$\left\{ n \atop 9 \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга второго рода:

$$\boldsymbol{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0 < k \le n},$$

$$\boldsymbol{S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j,k-1)},$$

$$\boldsymbol{S(0,0) = 1}, \ \boldsymbol{S(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{S(j,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k > j}.$$

Например, $S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$.

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n \; –$$

– **число Белла** – число **всех** неупорядоченных разбиений n-элементного множества.

Экспоненциальная производящая функция чисел Белла имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧИСЛА. В математике n-м гармоническим числом называется сумма обратных величин первых n последовательных чисел натурального ряда:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Несколько первых значений H_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Гармонические числа являются частичными суммами гармонического ряда. Эти числа ***возникают в процессе анализа алгоритмов*** и тесно связаны с ***дзета-функцией Римана*** и рядом Дирихле

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x}.$$

Частичные суммы этого ряда определяют гармонические числа x-го порядка (обобщенные гармонические числа)

$$H_n^{(x)} = H_{n,x} = \sum_{k=1}^{n} k^{-x}.$$

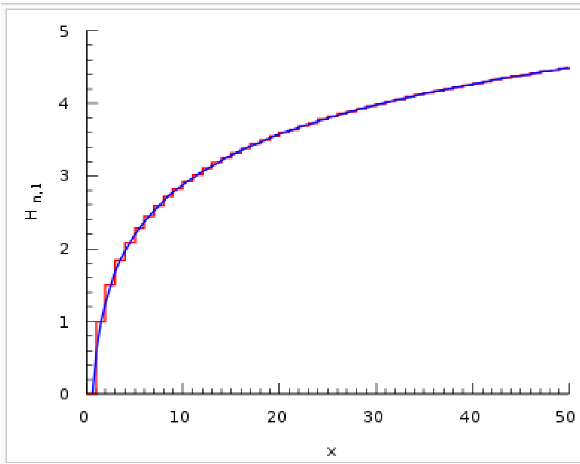
Известно, что гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится и для его частичных сумм справедливы оценки

$$\ln n < H_n < \ln n + 1 \text{ при } n > 1.$$

Гармонические числа растут до бесконечности, но делают они это лишь логарифмически, т.е. крайне медленно. Доказано, что

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{120n^4},$$

где $0 < \varepsilon_n < 1, \gamma = 0{,}5772156649\ldots$ – постоянная Эйлера.



Гармоническое число $H_{n,1}$, где $n = \lfloor x \rfloor$ (красная линия) и его асимптотический предел $\gamma + \ln(x)$ (синяя линия).

Эта формула позволяет, не прибегая к сложению миллиона дробей, заключить, что миллионное гармоническое число есть

$$H_{1000000} \approx \mathbf{14{,}39}2726722865723631381 1275.$$

Производящая функция

$$-\frac{\ln(1-z)}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} H_k z^k.$$

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ– последовательность рациональных чисел B_0, B_1, B_2, …, найденная Якобом Бернулли (1654 – 1705) в связи с вычислением сумм одинаковых степеней натуральных чисел

$$1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$$

Коэффициентами разложения некоторых элементарных функций в степенные ряды часто служат числа Бернулли. Например:

Экспоненциальная производящая функция для чисел Бернулли

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k, |x| < 2\pi.$$

$$x\text{ctg}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, |x| < \pi.$$

Эйлер указал на связь между числами Бернулли и значениями дзета-функции Римана $\zeta(x)$ при четных $x = 2k$

$$B_{2k} = 2(-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)(2k)!}{2\pi^{2k}}.$$

Рекуррентная формула для чисел Бернулли

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}, n \in \mathbf{N}.$$

Числа Бернулли являются значениями при $x = 0$ многочленов Бернулли $B_n = B_n(0)$.

Все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1 , равны нулю, знаки B_{2n} чередуются.

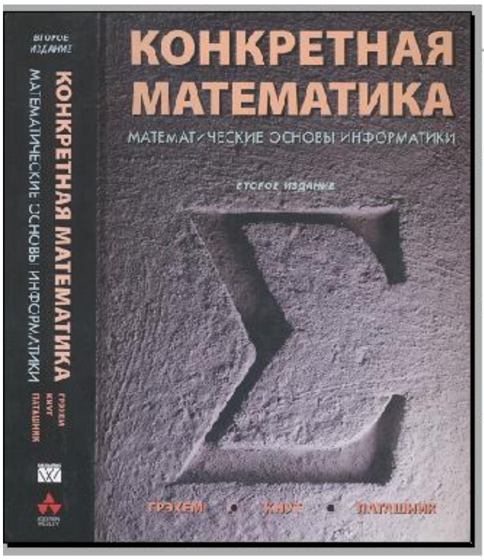
Производящей функцией для многочленов Бернулли является

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k.$$

Несколькими первыми многочленами Бернулли являются:

$$B_0(x) = 1,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$
$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Для любознательных


ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ
КОНКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ
ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ
ГРЭХЕМ • КНУТ • ПАТАШНИК

Оглавление