Приложение: Формулы тема 8

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \mathbf{\Gamma(n+1) = n!}$$

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-x)} = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{1}{k!} x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), \end{cases}$$

k=1,2,3,…

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (*формула приведения*),

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ (*формула дополнения*),

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}\Gamma(2x),$$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x).$$

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1 .$$

$$x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{и} \quad x^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$
$$\Gamma(5) = 4! = 24$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}$$

$$F\left(\left.{a_1, \dots, a_m \atop b_1, \dots, b_n}\right| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{k}} \dots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \dots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}, b \neq 0, -1, -2, \dots$$

Отрицательное целое число в качестве верхнего параметра превращает бесконечный ряд в конечный, поскольку $(-a)^{\overline{k}} = 0$ при $k > a \geqslant 0$ и целом a.

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^m x^m + \dots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m.$$

$$F\left(\left.{a, b \atop c}\right| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}} z^k}{c^{\overline{k}}\, k!} \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots 0).$$

$$\boxed{F(-m, b; -m-l; z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{(-m-l)^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}, \text{если } \boldsymbol{c = -m - l}, \text{где } m, l = 0,1,2, \dots}$$

$$F\left({a,b \atop c}\middle|1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\qquad c\neq 0,-1,-2,\dots,\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}(a+b).$$

$$F\left({1,-x \atop -y}\middle|z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{k}}(-x)^{\overline{k}}}{(-y)^{\overline{k}}}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}}{(-1)^k\frac{(-y)^{\overline{k}}}{k!}}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}}z^k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}}=\frac{\Gamma(-y)\Gamma(x-y-1)}{\Gamma(-y-1)\Gamma(x-y)}=\frac{y+1}{y-x+1}.$$

$$F\left({a,b \atop 1+a-b}\middle|-1\right)=\frac{2^{-a}\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-b+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{-a}{k}\binom{-b}{k}}{\binom{b-a-1}{k}}.$$

$$F\left({-m,-x \atop 1-m+x}\middle|-1\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}\binom{x}{k}}{\binom{m-x-1}{k}}=\frac{2^m\Gamma(1-m+x)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+x-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)}.$$

Таблица Десять главных тождеств с биномиальными коэффициентами

$\binom{n}{k}$	$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$,	целые $n\geqslant k\geqslant 0$	*Факториальное представление*
$\binom{n}{k}$	$=\binom{n}{n-k}$,	целое $n\geqslant 0$, целое k	*Симметрия*
$\binom{r}{k}$	$=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$,	целое $k\neq 0$	*Внесение/вынесение*
$\binom{r}{k}$	$=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$,	целое k	*Сложение/разложение*
$\binom{r}{k}$	$=(-1)^k\binom{k-r-1}{k}$,	целое k	*Верхнее обращение*
$\binom{r}{m}\binom{m}{k}$	$=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$,	целые m,k	*Триномиальный вариант*
$\sum_k\binom{r}{k}x^ky^{r-k}$	$=(x+y)^r$,	целое $r\geqslant 0$, или $\lvert x/y\rvert<1$	*Биномиальная теорема*
$\sum_{k\leqslant n}\binom{r+k}{k}$	$=\binom{r+n+1}{n}$,	целое n	*Параллельное суммирование*
$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m}$	$=\binom{n+1}{m+1}$,	целые $m,n\geqslant 0$	*Верхнее суммирование*
$\sum_k\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$	$=\binom{r+s}{n}$,	целое n	*Свертка Вандермонда*

$$\binom{r+n}{n}F\left({1,-n \atop -n-r}\middle|1\right)=\binom{r+n+1}{n},$$ (параллельное суммирование)

$$\binom{s}{n}F\left({-r,-n \atop s-n+1}\middle|1\right)=\binom{r+s}{n}.$$ (свертка Вандермонда)