ЛЕКЦИЯ 6

Основные понятия теории уравнений математической физики. Аналитические и численные методы решения.

Математическая физика – теория математических моделей физических явлений.

Современная математическая физика [править | править код]

В XX в. появляются новые разделы физики: квантовая механика, квантовая теория поля, квантовая статистическая физика, теория относительности, гравитация, синергетика (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. Дирак, А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, В. А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг, И. Пригожин, С. Курдюмов). Достаточно особое место занимает *математическая физика биологических объектов*, изучающая действие физических законов на биологическом уровне организации вещества и энергии и в России развиваемая, в частности, на базе ИПМ РАН.

Для изучения этих явлений множество используемых математических средств значительно расширяется: наряду с традиционными областями математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщённых функций, теория функций многих комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, теория чисел, p-адический анализ, асимптотические и вычислительные методы. С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты, например моделировать взрыв атомной бомбы или работу атомного реактора в реальном масштабе времени[прояснить]. В этом интенсивном взаимодействии современной теоретической физики и современной математики оформилась новая область — *современная математическая физика*. Её модели не всегда сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений, они часто формулируются в виде системы аксиом.

Илья Романович Пригожин

Дата рождения	12 (25) января 1917
Место рождения	Москва, Российская империя
Дата смерти	28 мая 2003 (86 лет)
Место смерти	Брюссель, Бельгия
Страна	Российская империя Бельгия
Научная сфера	химия, физика
Место работы	• Брюссель, Бельгия (1942—2003) • Остин, Техас, США (196?—2003)
Известен как	первооткрыватель диссипативных структур

Синерге́тика (от др.-греч. συν- — приставка со значением совместности и ἔργον «деятельность») — междисциплинарное направление науки, объясняющее образование и самоорганизацию моделей и структур в открытых системах, далеких от термодинамического равновесия

Приложения синергетики распределились между различными направлениями

- теория динамического хаоса исследует сверхсложную, скрытую упорядоченность поведения наблюдаемой системы; напр. явление турбулентности;
- теория фракталов занимается изучением сложных самоподобных структур, часто возникающих в результате самоорганизации.
- теория катастроф исследует поведение самоорганизующихся систем в терминах бифуркация, аттрактор, неустойчивость;
- лингвистическая синергетика и прогностика
- психосинергетика (синергетические процессы в психологии)

и другие......

Классическая математическая физика [править | править код]

Первоначально математическая физика сводилась к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Это направление составляет предмет *классической математической физики*, которая сохраняет важное значение и в настоящее время.

Любое физическое явление или процесс представляет собой изменение каких-либо физических величин в пространстве и во времени. Возникает задача – исследовать поле физических величин. При этом под физическим полем понимают область пространства, в каждой точке которой задана функция – скалярная, векторная, тензорная. Классические физические поля, вообще говоря, описываются функциями четырех независимых переменных x, y, z, t. Методы составления и решения уравнений, содержащих такого рода функции, изучаются в разделе математической физики – теория дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения исторически получили название **уравнения математической физики**.

Основная задача математической физики состоит в нахождении распределения некоторой физической величины в заданной области пространства, если известны условия (дополнительные условия), в которых находится физический объект.

Такими дополнительными условиями чаще всего являются ***граничные условия***, т.е. *условия, заданные на границе рассматриваемой среды*, и ***начальные условия***, *относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления*. Совокупность граничных и начальных условий называют ***краевыми условиями задачи***.

Большинство физических полей описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка или их системами. Более того, если процессы не слишком интенсивны, то при их описании ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с четырьмя переменными x, y, z, t. Причем, с помощью соответствующей замены независимых переменных уравнение может быть приведено к одному из следующих трех типов.

1. **Гиперболические**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U + f. \tag{1}$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих ***волновые процессы*** – распространение звука, электромагнитные волны, поле вероятностей в квантовой физике. Уравнение (1) называют ***уравнением Даламбера*** или неоднородным волновым уравнением.

2. Параболические:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U + f. \tag{2}$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих ***диссипативные процессы***: теплопроводность – поле температуры, диффузия – поле концентрации. Уравнение (2) называют ***уравнением теплопроводности*.**

3. Эллиптические (*описывают стационарные процессы*):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} U=f. \qquad (3)$$

К этому типу сводятся уравнения для многих физических полей: электростатические и магнитностатические поля, установившиеся поле температуры и поле концентрации и др. Уравнение (3) называют ***уравнением Пуассона*,** если $\boldsymbol{f=0}$ **–** ***уравнением Лапласа***.

Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными в окрестности точки

Рассмотрим линейное уравнени

$$a(x,y)u''_{xx}+2b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}=F\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right), \qquad (4)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ дважды дифференцируемые функции в некоторой области D, предполагаем, что $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ не обращается одновременно в нуль и функция $u(x,y)$ имеет нпрерывные частные производные до второго порядка включительно в этой области.

Классификация уравнения (4) производится по знаку дискриминанта

$$\boxed{\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)}.$$

ДУ (4) принадлежит:

гиперболическому типу (1), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$,

параболическому типу (2), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$,

эллиптическому типу (3), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$.

Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (4) принадлежит различным типам. Например, уравнение Трикоми $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. При $y>0$ — эллиптический тип, при $y<0$ — гиперболический тип.

Замечание. Уравнению (4) с постоянными коэффициентами соответствует квадратичная форма с матрицей $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. В этом случае ДУ (4) является уравнением:

гиперболического типа (1), если собственные значения λ_1 и λ_2 не равны нулю и имеют противоположные знаки;

параболического типа (2), если одно из собственных значений λ_1 или λ_2 равно нулю;

эллиптического типа (3), если собственные значения λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

На практике приведение уравнения с постоянными коэффициентами к каноническому виду линейной заменой осуществляется по схеме диагонализации матрицы *A* квадратичной формы ортогональным преобразованием.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют, как правило, бесчисленное множество решений, зависящих от некоторых произвольных функций. Для полного описания решения, как правило, необходимо задать ***начальные условия (условия Коши)***, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления, и ***граничные условия***, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды.

Различают (в зависимости от способа задания граничных условий) три типа краевых задач математической физики.

1. ***Краевая задача Дирихле***. На границе Г задаются значения искомой функции: $u|_{\Gamma} = f(\Gamma)$.

2. ***Краевая задача Неймана***. На границе Г задается значение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(\Gamma)$, где n – нормаль к Г.

3. ***Смешанная краевая задача***. На границе Г задается условие

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma} = f(\Gamma).$$

Задача математической физики считается поставленной корректно по Адамару, если:

1) решение задачи существует;

2) задача имеет единственное решение;

3) решение устойчиво, т.е. малые изменения любого из исходных данных задачи вызывают соответственно малое изменение решения (*решение непрерывно зависит от исходных данных*). Это важно с той точки зрения, что функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому мы должны быть уверены, что решения задачи при приближенных исходных данных будут близки к тем решениям, которые получились бы при точных исходных данных.

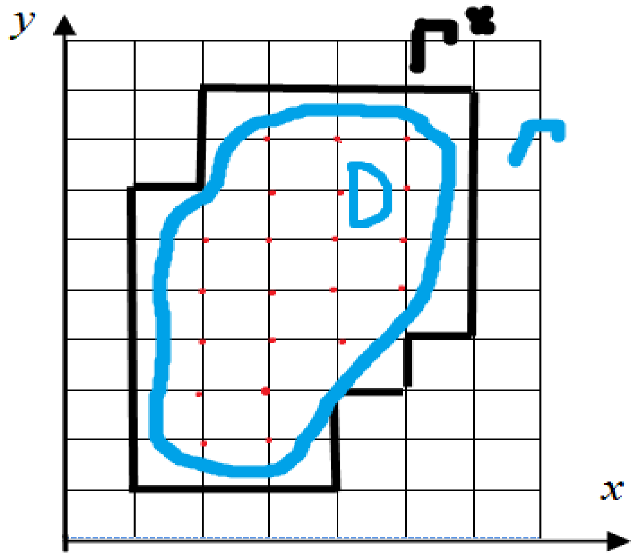
Большое количество различных постановок задач привело к тому, что теория дробится на большое число направлений. Использование численных методов с применением ЭВМ расширило возможности в исследовании подобных задач. Разработаны алгоритмы, которые дают возможность решать с приемлемой затратой машинного времени подавляющее большинство краевых задач уравнений математической физики.

Замечания о численных и аналитических решениях. *Под аналитическими решениями подразумеваются такие, в которых неизвестная функция и выражена посредством независимых переменных и параметров уравнения виде формул, рядов, интегралов и т.д. Под численным решением понимается такое решение, которое получено численно после приближенной замены уравнения другим, более простым уравнением или системой уравнений. Результатом такой замены обычно является таблица значений решения* u_{ij} *при некоторых значениях независимых значениях независимых переменных.*

Аналитическое решение, записанное в виде формулы, более информативно. Оно позволяет проследить влияние параметров задачи, начальных и граничных условий на характер рашения. Найти, однако, аналитическое решение удается лишь в простейших задачах.

Численные методы решения задачи не выявляют этих закономерностей, поскольку они позволяют находить решение только при заданных параметрах, начальных и граничных условиях. Главное преимущество их состоит в том, что численное решение можно получить даже в том случае, когда аналитическое решение получить невозможно.

Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений математической физики. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными выражениями.



Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область D с ганицей Г. Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \ \ (i = 0, \pm1, \pm2, \dots),$$

$$y = y_0 + kl \ \ (k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

Точки пересечения прямых называются ***узлами***. Два узла называются *соседними*, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно.

Выделим узлы, принадлежащие области D + Г, а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чнм шаг, от границы Г. Узел называется ***внутренним***, если он принадлежит области D. Узел считается ***граничным***, если он не является внутренним. Каждый граничный узел должен иметь среди четырех соседних узлов хотя бы один внутренний, иначе он исключается из сетки. Заменяем область D сеточной областью, а границу области Γ замкнутой ломаной линией Γ^*.

Наиболее простой вид решения задачи, если $\boxed{x = ih, \quad y = kh,}$ $\boxed{l = h.}$

Значения неизвестной функции $U(x, y)$ в узлах сетки обозначим

$$U_{i,k} = U(x_i, y_k) = U(ih, kh).$$

В каждом узле границы Γ^* зададим значение функции, равное значению функции в ближайшей точке границы Γ. Значения неизвестной функции рассматривают только в узлах сетки, которые принадлежат $D+\Gamma^*$.

В каждом внутреннем узле заменяют частные производные конечно-разностными выражениями. Например, частные производные второго порядка

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2};$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h^2}.$$

Указанные замены производных в узлах сетки позволяют свести решение уравнения с частными производными к решению системы разностных уравнений.

Широко распространенным **аналитическим методом решений уравнений с частными производными является метод Фурье** или метод разделения переменных.

Рассмотрим ***задачу о свободных колебаниях струны***, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$. Математическая постановка: найти решение $u = u(x,t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le l, t > 0) \tag{5}$$

при граничных условиях

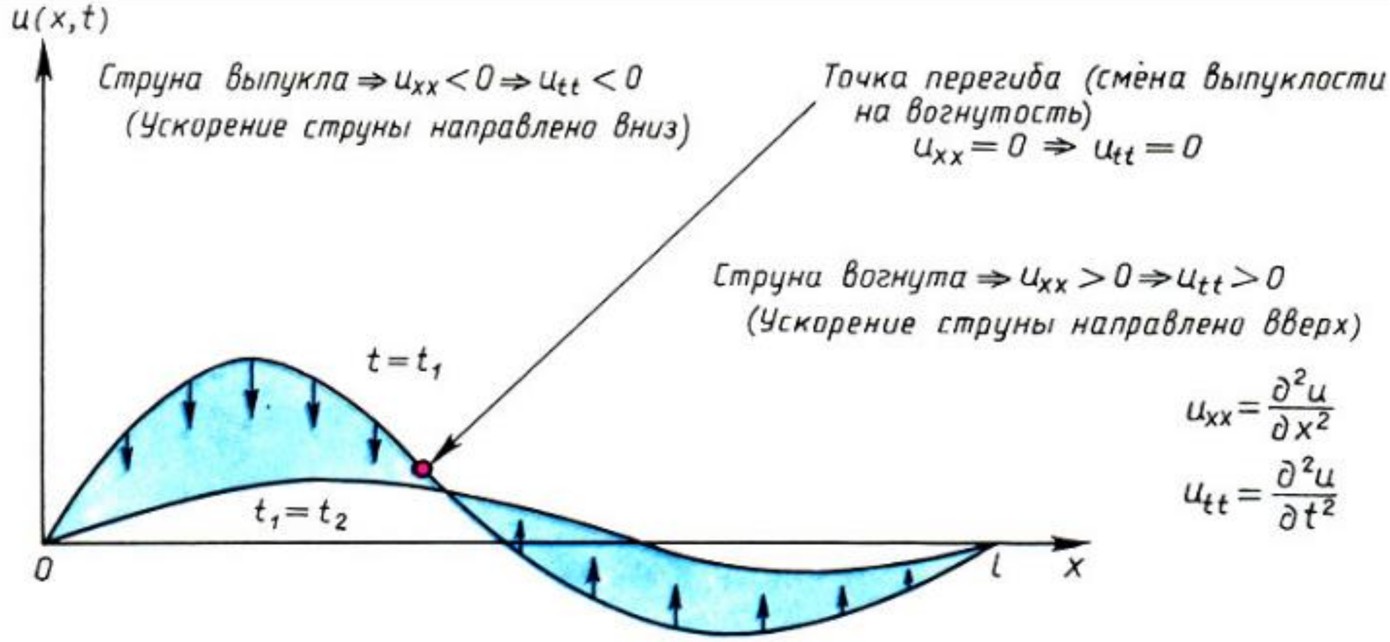
$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \quad (t \ge 0) \tag{6}$$

и начальных условиях

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 \le x \le l) \tag{7}$$

($\varphi(x)$ и $\psi(x)$— заданные функции, определенные на отрезке $[0,l]$).

Это уравнение описывает свободные колебания в одномерной среде. Например, звуковые колебания в стержне из упругого материала, распространение света вдоль стекловолокна, электромагнитные колебания вдоль провода и др. Впервые оно было получено и исследовано для описания колебаний в струне (например, гитарной), поэтому и получило название уравнения колебания струны. Для этого случая $u = u(x,t)$ функция интерпретируется как отклонение гибкой, упругой натянутой струны от положения равновесия $u = 0$ в момент времени $t > 0$ в точке $0 < x < l$. В виду натяжения струны, при ее отклонении от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть струну в исходное состояние. Ввиду наличия массы струна каждый раз по инерции проскакивает положение равновесия и отклоняется в противоположную сторону. В результате наблюдается сложный процесс колебаний, который определяется как начальным отклонением, так и физическими параметрами струны.



!!!! В виду линейности уравнения (5) множество его решений является линейной комбинацией базисных элементов $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$, представляющих частные независимые решения задачи.

По методу Фурье частные решения уравнения (5), не равные тождественно нулю, удовлетворяющие граничным условиям (6), будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

Подстановка (8) в уравнение (5) приводит к *задаче Штурма – Лиувилля*: найти нетривиальное решение ДУ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{9}$$

при краевых условиях

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \tag{10}$$

Т.е. найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (9) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющие граничным условиям (10) .

Эти значения параметра λ называются ***собственными значениями***, а соответствующие решения $X(x)$ — ***собственными функциями*** краевой задачи.

ПОКАЗАНО, что нетривиальные решения этой задачи возможны лишь при значениях $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k = 1,2,3,\ldots$. В этом случае системой собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (9) – (10) является система

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

а общим решением уравнения (5) ряд –

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Начальные условия (7) дают

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

ПРИМЕР. Решить краевую задачу $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u(0,t) = u(l,t) = 0,\quad u(x,0) = \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0.$

$$u(x,0) = \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{4l}\int_0^l \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3-k}{l}\pi x\right) - \cos\left(\frac{3+k}{l}\pi x\right)\right)dx = \begin{cases}\frac{1}{8}, \text{если } k = 3\\ 0, \text{если } k \neq 3\end{cases}$$

решение краевой задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{l}at\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$$

Решение задачи Коши для уравнений свободных колебаний однородной струны методом Даламбера

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ x\in R,\ t>0. \tag{11}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ x\in R \tag{12}$$

Решение задачи Коши методом Даламбера имеет следующий алгоритм:

- Нахождение общего решения уравнения (11)
- Постановка найденного решения в начальные условия.

I этап. Заменой

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

волновое уравнение (11) преобразуется в уравнение вид $u''_{\xi\eta} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$, имеющее общее решение $u = \int w(\xi)d\xi + h(\eta) = g(\xi) + h(\eta)$, где $g(\xi)$ и $h(\eta)$— произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Возвращаясь к старым переменным, находим

$$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$$

общее решение однородного уравнения (11), его также называют *решением Даламбера*, а метод получения этого решения *методом Даламбера* или *методом характеристик*, или *методом бегущих волн*. Здесь $h(x-at)$ характеризует прямую волну (кривая $h(x)$ смещается вправо со скоростью a), а $g(x+at)$ характеризует обратную волну (кривая $g(x)$ смещается влево со скоростью a).

II этап. По заданным начальным условиям (12) определяются функции $g(x)$ и $h(x)$ и искомое решение

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau \qquad (13)$$

Формула (13) дает решение задачи Коши (11), если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$— до первого. Задача Коши (11), (12) поставлена корректно.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = x + \cos x.$$

Решение.

$$\varphi(x+at) = \sin(x+at) = \sin x\cos at + \cos x\sin at,$$

$$\varphi(x-at) = \sin(x-at) = \sin x\cos at - \cos x\sin at,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) = \sin x\cos at$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau = \int_{x-at}^{x+at} (\tau + \cos\tau)\,d\tau = \cdots = 2axt + 2\cos x\sin at$$

В силу формулы (13) решение задачи Коши имеет вид

$$u(x,t) = \sin x \cos at + xt + \frac{1}{a} \cos x \sin at.$$